ранга на первых n элементах: $Q_{0i}(\tau, k), \ldots, Q_{n-1,i}(\tau, k)$. Отсюда непосредственно вытекает, что выполнение (14) влечет за собой справедливость критерия (18).

Пример. Рассмотрим системы уравнений (11), (12) со следующими параметрами: $n=m=2$, $r=1$, $[t_0, t_1)=[0, 1)$, $[t_1, T]=[1, 2]$,

$$A_1(t)=\begin{bmatrix} t & t^2 \\ 0 & t^3 \end{bmatrix},\ B_{11}(t)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ B_{12}(t)=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2(t)=\begin{bmatrix} t^3 & 0 \\ t^2 & t \end{bmatrix},\ B_{21}(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ B_{22}(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Как показывают непосредственные вычисления, каждая из систем (11), (12) в отдельности не является полностью управляемой на отрезке времени [0, 2], однако, объект (11), (12) полностью управляем на отрезке [0, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М., 1971.
2. Забелло Л. Е.— «Дифференц. уравнения», 1973, **9**, № 3.
3. Забелло Л. Е.— «Автоматика и телемеханика», 1973, № 8.
4. Chang A.— «IEEE Trans. Automatic», 1965, **10**, № 1.
5. Кирлица В. П. Управляемость линейных систем с переменной структурой. IV Республиканская конференция математиков Белоруссии. Тез. докл. Минск, 1975.

Поступила в редакцию 1/VII 1976 г.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УДК 517.948

Р. АКБАРОВ, Э. И. ЗВЕРОВИЧ

ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ КУСОЧНО-МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННЫМИ ГЛАВНЫМИ ЧАСТЯМИ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

1. Постановка задачи. Пусть R — замкнутая ориентируемая риманова поверхность рода $h\geqslant 0$, а $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ — конечное множество различных точек, лежащих на R. Обозначим $R'=R\setminus\{p_1, p_2, \ldots p_s\}$. Пусть L — сложный кусочно-гладкий контур, лежащий в компактной части поверхности R'; Λ — множество особенностей контура L (концы, кратные точки, точки нарушения гладкости и другие). Будем считать, что Λ удовлетворяет следующему условию: множество $L\setminus\Lambda$ распадается на конечное число связных компонент, $L_j (j=1, 2, \ldots, N)$, каждая из которых есть простая гладкая ориентированная дуга, гомеоморфная интервалу (0, 1). Пусть на каждой кривой L_j заданы H-непрерывные функции $G_j(t)\neq 0$ и $g_j(t)$, H-непрерывно продолжимые на начальную и концевую точки кривой L_j, причем предельные значения функции $G_j(t)$ отличны от нуля. Тем самым всюду на $L\setminus\Lambda$ задаются функции, которые обозначим соответственно через $G(t)$ и $g(t)$. Рассмотрим сначала краевую задачу Римана в следующей постановке.

Найти все функции $\Phi(p)$, мероморфные всюду вне L и заданных малых окрестностей $U(p_k)$ точек p_k, кратные там наперед заданному дивизору D^{-1}, H-непрерывно продолжимые слева и справа на $L\setminus\Lambda$, где должно выполняться краевое условие:

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\ J^{-1}D^{-1}|(\Phi),\ t\in L. \quad (1)$$

В окрестности точек множества Λ поведение искомых функций определяется требованием псевдократности [1] заданному дивизору J^{-1}.

В случае, когда точек p_k нет вовсе, задача (1) полностью исследована в [1]. Если же $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}\neq\varnothing$, то (1) представляет собой задачу Римана на открытой римановой поверхности, поэтому для большей определенности постановки необходимо задать дополнительные условия в окрестностях $U(p_k)$ точек p_k. С этой целью предположим, что в проколотых окрестностях $\dot{U}(p_k)$ заданы H-непрерывные функции $F_k(p)$, и зададим дополнительные условия следующим образом.

Среди всех решений задачи (1) найти те, которые H-непрерывно продолжимы на $\partial U(p_k)$, причем разности

$$\Phi(p)-F_k(p), \quad (k=1, 2, \ldots, s) \tag{2}$$

должны быть аналитическими в соответствующих окрестностях $U(p_k)$.

Функции $F_k(p)$ можно интерпретировать как главные части решений задачи (1) в окрестностях $\dot{U}(p_k)$, а разности (2), следовательно, можно рассматривать как соответствующие регулярные части. Поэтому поставленная задача называется задачей Римана с заданными главными частями. Основным вопросом теории этой задачи является вывод формул, описывающих влияние заданных главных частей на картину разрешимости и на общее решение краевой задачи. Различным частным случаям задачи (1), (2) посвящено много работ, например, [2].

2. Решение задачи. Уточним вначале предположение о малости окрестностей $U(p_k)$. Именно: будем считать, что они целиком лежат в $R\setminus L$, попарно не пересекаются и не содержат точек дивизора D. Кроме того, границу $\partial U(p_k)$ каждой окрестности $U(p_k)$ будем считать простой, гладкой и ориентированной стандартным образом. Введем новую неизвестную функцию

$$\Omega(p)=\begin{cases}\Phi(p), \text{ если } p\notin \bigcup\limits_{k=1}^{s} U(p_k);\\ \Phi(p)-F_k(p), \text{ если } p\in\dot{U}(p_k).\end{cases} \tag{3}$$

Функция $\Omega(p)$ является кусочно-мероморфной на R с линией разрыва $\Gamma=L\cup\partial U(p_1)\cup\ldots\cup\partial U(\tilde{p}_s)$ и легко выписать краевое условие, которому она удовлетворяет:

$$\Omega^+(t)=G_1(t)\,\Omega^-(t)+g_1(t), \quad J^{-1}D^{-1}\,|\,(\Phi), \quad t\in\Gamma, \tag{4}$$

где

$$G_1(t)=\begin{cases}G(t), & t\in L\setminus\Lambda,\\ 1, & t\in\partial U(p_k),\end{cases} \qquad g_1(t)=\begin{cases}g(t), & t\in L\setminus\Lambda;\\ -F_k(t), & t\in\partial\dot{U}(p_k).\end{cases} \tag{5}$$

Задача (4) равносильна исходной задаче Римана с заданными главными частями. Так как (4) — обычная задача Римана (т. е. без заданных главных частей), то к ней можно применить известные результаты [1], затем, переходя с помощью (5) и равенств (3) к функции $\Phi(p)$, получить искомые формулы, описывающие влияние главных частей. Однородная задача (4) совпадает с однородной задачей (1) без учета главных частей, т. е. постоянных, содержащихся в общем решении задачи (4) столько же, сколько у задачи (1). Для того, чтобы сформулировать результат, дадим некоторые известные факты из теории задачи Римана [1] без учета заданных главных частей. Обозначим через

$$\Phi_0(q)=\varphi(q)\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln G(\tau)\,d\hat{\omega}_{qq_0}(\tau)-\right.$$
$$\left.-\sum_{j}^{h}{}'\int\limits_{\tilde{q}}^{q_j} d\hat{\omega}_{qq_0}(\tau)-2\pi i m_j w_j(q)\right\} \tag{6}$$

общее решение однородной ($g(t)\equiv 0$) задачи (1). Здесь $\varphi(q)$ — произвольная мероморфная всюду на R функция, кратная дивизору $J^{-1}D^{-1}E^{-1}F^{-1}$; $d\hat{\omega}_{qq_0}(\tau)$ — выделенная ветвь комплексно-нормированного абелева дифференциала третьего рода; $\overset{q}{\underset{\tilde{q}}{{}'\int}} d\omega_k(t) = \omega_k(q)$, точки $q_1, q_2, \ldots, q_h$ и целые числа $m_k (k=1, 2, \ldots, h)$ — неопределенные числа, нахождение которых связано с проблемой обращения Якоби ([3], стр. 314). Штрих перед интегралом означает, что путь интегрирования не пересекает канонических сечений. Пусть $X_0(q)$ — функция, в которую переходит правая часть (6) при $\varphi(q) \equiv 1$. Определим задачу, союзную к задаче (1), равенством

$$d\Psi^-(t) = G(t)\, d\Psi^+(t),\ JD \| (d\Psi),\ t \in L. \tag{7}$$

Пусть задача (7): а) имеет нетривиальное решение $d\Psi_0(p)$. Тогда частное решение задачи (1) можно построить по формуле

$$\tilde{\Phi}(p) = \frac{\sum_{k=1}^{h} c_k d\omega_k(p) - \frac{1}{2\pi i} \int_L d\hat{\omega}_{\tau q_0}(p)\, g(\tau)\, d\Psi_0^+(\tau)}{d\Psi_0(p)}, \tag{8}$$

где $d\omega_k(p)$ — комплексно-нормированный базис абелевых дифференциалов первого рода, c_k — постоянные;

б) не имеет нетривиальных решений.

Тогда частное решение задачи (1) дается формулой

$$\Phi^*(q) = \frac{X_0(q)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X_0^+(\tau)} A_1(\tau, q)\, d\tau, \tag{9}$$

где $A_1(\tau, q)\, d\tau$ — мероморфный аналог ядра Коши, построенный с характеристическим дивизором, кратным $JDEF$.

Теорема. Для разрешимости неоднородной задачи (1) с заданными главными частями необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\int_L g(\tau)\, d\Psi^+(\tau) = \sum_{k=1}^{s}{}' \int_{\partial U(p_k)} F_k(\tau)\, d\Psi(\tau), \tag{10}$$

для всех решений $d\Psi(p)$ однородной задачи (7). Если равенства (10) выполнены, то общее решение задачи (1) в случае а) можно построить по формулам:

$$\Phi(p) = \begin{cases} \Phi_0 + \tilde{\Phi} + \frac{1}{2\pi i d\Psi_0} \sum_{k=1}^{s} \int_{\partial U(p_k)} d\hat{\omega}_{\tau q_0}(p)\, F_k(\tau)\, d\Psi_0^+(\tau), & z \notin \bigcup_{k=1}^{s} U(p_k); \\ \Phi_0 + \tilde{\Phi} + F_k + \frac{1}{2\pi i d\Psi_0} \int_{\partial U(p_k)} d\hat{\omega}_{\tau q_0}(p) F_k(\tau) d\Psi_0^+(\tau), & z \in \dot{U}(p_k), \\ & (k = 1, 2, \ldots, s), \end{cases} \tag{11}$$

а в случае б) задача разрешима безусловно, а решение дается формулами

$$\Phi(p) = \begin{cases} \Phi_0 + \Phi^* - \frac{X_0(p)}{2\pi i} \sum_{k=1}^{s} \int_{\partial U(p_k)} \frac{F_k(\tau)}{X_0(\tau)} A_1(\tau, q)\, d\tau, & z \notin \bigcup_{k=1}^{s} U(p_k), \\ \Phi_0 + \Phi^* + F_k - \frac{X_0(p)}{2\pi i} \int_{\partial U(p_k)} \frac{F_k(\tau)}{X_0(\tau)} A_1(\tau, q)\, d\tau, & z \in \dot{U}(p_k), \\ & (k = 1, 2, \ldots, s) \end{cases} \tag{12}$$

где функции Φ_0, $\tilde{\Phi}$ и Φ^* определяются формулами (6), (8) и (9) соответственно.

3. Случаи аналитической продолжимости главных частей. В пункте 1 не делалось никаких предположений о характере аналитичности заданных главных частей $F_k(p)$. Особый интерес представляют те случаи задачи (1), когда заданные главные части $F_k(p)$ подчинены дополнительным ограничениям аналитической продолжимости с контуров $\partial U(p_k)$ в некоторые области. Предполагая, например, что функции $F_k(p)$ аналитичны в проколотых окрестностях $\dot{U}(p_k)$, сразу можно несколько упростить условия разрешимости (10) и выражения (11) и (12) для общего решения. В этом случае каждый интеграл в правой части равенства (10) не зависит от пути $\partial U(p_k)$, окружающего точку p_k, поэтому равен вычету подынтегрального дифференциала в точке p_k. Таким образом, в этом случае условия разрешимости (10) можно привести к виду:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L g(\tau)\,d\Psi^+(\tau) = \sum_{k=1}^{s} \operatorname*{res}_{q=p_k} \{F_k(q)\,d\Psi(q)\}. \tag{10'}$$

По тем же соображениям контуры $\partial U(p_k)$ можно считать сколь угодно малыми, и на этом основании при $q \neq p_k$ вторую строку в правых частях (11) и (12) можно вообще отбросить. Тем самым общее решение задачи (1) в случае а) можно построить по формуле

$$\Phi(p) = \Phi_0 + \tilde{\Phi} - \frac{1}{d\Psi_0}\sum_{k=1}^{s} \operatorname*{res}_{q=p_k} \{\hat{\omega}_{qq_0}(p)\,F_k(q)\,d\Psi_0(q)\}, \tag{11'}$$
$$q \neq p_k \quad (k = 1, 2, \ldots, s),$$

а в случае б) задача разрешима безусловно, а решение дается формулами

$$\Phi(p) = \Phi_0 + \Phi^* - X_0(p)\sum_{k=1}^{s} \operatorname*{res}_{q=p_k} \left\{\frac{F_k(q)\,A_1(p, q)\,dp}{X_0(q)}\right\}, \tag{12'}$$
$$q \neq p_k \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Сформулируем полученный результат.

Следствие. Если при каждом $k=1, 2, \ldots, s$ заданная главная часть $F_k(p)$ аналитична в проколотой окрестности $\dot{U}(p_k) = U(p_k) \setminus \{p_k\}$ точки p_k, то условия разрешимости краевой задачи (1) приводятся к виду (10′) и при их выполнении общее решение задачи (1) в случае а) можно построить по формуле (11′), а в случае б) решение дается формулой (12′).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зверович Э. И.— «УМН», 1971, 26, вып. 1 (157), 113.
2. Jacob C.— «Rev. de math. pures appl.» 1960, 5, № 1. 5.
3. Спрингер Д. Введение в теорию римановых поверхностей. М., 1960.

Поступила в редакцию
18/XI 1976 г.

Кафедра теории функций

УДК 532.516

В. П. САВЧУК

ОБТЕКАНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПЛАСТИНЫ, ПОМЕЩЕННОЙ В ПЛОСКИЙ КАНАЛ

Пусть в плоский канал $0 \leqslant y \leqslant 2h$, $-\infty < x < \infty$ помещена полубесконечная пластина $y=h$, $x>0$. Канал заполнен вязкой несжимаемой жидкостью, скорость которой на бесконечном удалении от сечения $x=0$ в сторону отрицательной полуоси x параллельна стенкам канала и равна $\frac{3}{2}\frac{U_0}{h^2}(2hy - y^2)$, где u_0 — средняя скорость по сечению канала. Считая течение жидкости стационарным, запишем уравнения движения и граничные условия в таком виде: