УДК 62-50

В. П. КИРЛИЦА

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

1. Пусть задана линейная система управления

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t),\ x(t_0)=x_0, \tag{1}$$

где $x(t)$ — n-вектор состояния системы; $u(t)$ — r-мерное кусочно-непрерывное управление; $A(t)$, $B(t)$ — кусочно-постоянные матрицы соответствующих размерностей: $B(t)=B_i$, $t\in[t_{i-1}, t_i)$, $i=\overline{1, m}$; $t_m=T$; $A(t)=A_1$, $t\in[t_0, t_j)$, $A(t)=A_2$, $t\in[t_j, T]$, $0\leqslant j\leqslant m$.

Определение 1. Система (1) называется полностью управляемой [1] на отрезке $[t_0, T]$, если для любых n-векторов x_0, x_1 можно указать управление $u(t)$, $t\in[t_0, T]$, такое, что траектория $x(t)$ системы (1), порожденная этим управлением, удовлетворяет условию $x(T)=x_1$.

Пусть $\overline{B}_1=[B_1, \ldots, B_j]$, $\overline{B}_2=[B_{j+1}, \ldots, B_m]$ — матрицы, соответственно, размерностей $(n\times jr)$, $(n\times(m-j)r)$.

Согласно [1], для того чтобы система (1) была полностью управляемой на отрезке $[t_0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого n-вектора g, $\|g\|\neq 0$:

$$g'F(T, s)B(s)\not\equiv 0,\ s\in[t_0, T], \tag{2}$$

где $F(T, s)$ — $(n\times n)$-мерная непрерывная матричная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial F(T,s)}{\partial s}=-F(T, s)A(s),\ F(T, T-0)=E,\ F(T, s)\equiv 0,\ s>T. \tag{3}$$

Поскольку матрица $F(T, s)$ — аналитическая на каждом из интервалов $[t_0, t_j)$, $[t_j, T]$, то условие (2) эквивалентно следующему: для любого n-вектора g, $\|g\|\neq 0$.

$$g'F(T, s)\overline{B}(s)\not\equiv 0,\ s\in[t_0, T];\ \overline{B}(s)=\begin{cases}\overline{B}_1, & s\in[t_0, t_j],\\ \overline{B}_2, & s\in[t_j, T].\end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1. Для того, чтобы система (1) была полностью управляемой на $[t_0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank}[\overline{B}_1,\ A_1\overline{B}_1,\ \ldots,\ A_1^{n-1}\overline{B}_1,\ \overline{B}_2,\ A_2\overline{B}_2,\ \ldots,\ A_2^{n-1}\overline{B}_2]=n. \tag{5}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть выполняется условие (5), однако (4) не имеет места, т. е. существует вектор g_0, $\|g_0\|\neq 0$, что

$$g_0'F(T, s)\overline{B}(s)\equiv 0,\ s\in[t_0, T]. \tag{6}$$

Используя (3), продифференцируем тождество (6) в точках $s=t_j\pm 0$. Получим

$$g_1'A_i^m\overline{B}_i=0,\ g_1'=g_0'F(T, t_j),\ i=1,\ 2;\ m=0,\ 1,\ \ldots \tag{7}$$

Так как матрица $F(T, t_j)$ невырожденная, то $\|g_1\|\neq 0$. Равенства (7) противоречат выполнению условия (5).

Необходимость. Пусть система (1) полностью управляема на $[t_0, T]$, но условие (5) не выполняется. В этом случае можно указать вектор g_1, $\|g_1\|\neq 0$, для которого

$$g_1'A_i^m\overline{B}_i=0,\ i=1,\ 2;\ m=\overline{0, n-1}. \tag{8}$$

Поскольку матрица $F(T, t_j)$ невырождена, то существует вектор g_0, $\|g_0\|\neq 0$, такой, что $g_0'=g_1'F(T, t_j)$. Равенства (8) принимают следующий вид

$$g_0'F(T, t_j)A_i^m\overline{B}_i=0,\ i=1,\ 2;\ m=\overline{0, n-1}. \tag{9}$$

Повторяя стандартные рассуждения [1], заключаем, что при выполнении (9) $g_0' F(T, \overline{s)} B(s) \equiv 0$. Последнее тождество несовместимо с условием (4).

При $m=2$ из (5) следует явный критерий управляемости системы (1), полученный в работе [2].

2. Рассмотрим полную управляемость системы (1) на отрезке $[t_0, T]$, у которой матрица $A(t)$, $t \in [t_0, T]$,— аналитическая, а $B(t) = B_i(t)$, $t \in [t_{i-1}, t_i)$, $i = \overline{1, m}$; $t_m = T$, где $B_i(t)$ — аналитические матрицы, имеющие аналитические продолжения на интервал $(\alpha, \beta) \subset [t_0, T]$.

Неявный критерий управляемости системы (1) в данном случае имеет прежний вид (2).

Пусть $\bar{B}(s) = [\bar{B}_1(s), \ldots, \bar{B}_m(s)]$, $s \in (\alpha, \beta)$,— $(n \times mr)$-матрица; $\bar{B}_i(s)$, $i = \overline{1, m}$,— аналитические продолжения матриц $B_i(s)$ на интервал (α, β). Учитывая, что матрица $F(T, s)$, $s \in [t_0, T]$,— аналитическая, нетрудно показать, что (2) эквивалентно условию

$$g' F(T, s) \bar{B}(s) \not\equiv 0, \; s \in (\alpha, \beta), \tag{10}$$

где g, $\|g\| \neq 0$,— произвольный n-вектор.

Соотношение (10) имеет такой же вид, как и критерий управляемости, содержащийся в [4]. Повторяя рассуждения, приведенные в [4], приходим к следующей теореме.

Теорема 2. Система (1) с кусочно-аналитической матрицей $B(t)$ полностью управляема на отрезке $[t_0, T]$ тогда и только тогда, когда для некоторого $\tau \in (\alpha, \beta)$

$$\operatorname{rank}[Q_0(\tau), Q_1(\tau), \ldots, Q_{n-1}(\tau)] = n,$$

где $Q_k(t) = A(t) Q_{k-1}(t) - \dot{Q}_{k-1}(t)$, $Q_0(t) = \bar{B}(t)$.

3. Рассмотрим следующую задачу управляемости линейных нестационарных систем, которая является естественным развитием постановок задач, приведенных в пунктах 1, 2.

Пусть на отрезке времени $[t_0, T]$ объект управления описывается двумя системами уравнений:

$$\dot{x}_1(t) = A_1(t) x_1(t) + B_1(t) u(t), \tag{11}$$

$$\dot{x}_2(t) = A_2(t) x_2(t) + B_2(t) u(t), \tag{12}$$

где $x_i(t)$ — n-векторы; $u(t)$ — r-мерное кусочно-непрерывное управление; $A_i(t)$ — $(n \times n)$-матрицы, элементы которых — аналитические функции переменной t; $B_i(t) = B_{ik}(t)$, $t \in [t_{k-1}, t_k)$, $k = \overline{1, m}$; $t_m = T$, $B_{ik}(t)$ — аналитические матрицы размерностей $(n \times r)$, определенные на интервалах $[t_{k-1}, t_k)$ и аналитически продолжаемые на весь отрезок $[t_0, T]$; $i = 1, 2$.

Движение объекта, описываемого системами (11), (12), происходит следующим образом. Объект начинает движение в момент времени t_0 из состояния $x_1(t_0) = x_0$ и описывается вначале системой (11). Затем в некоторый момент времени $\tau > t_0$ происходит переключение с системы (11) на систему (12) и дальнейшее движение объекта описывается уравнением (12).

Определение 2. Объект (11), (12) назовем полностью управляемым на отрезке времени $[t_0, T]$, если для любых n-векторов x_0, x_1 можно указать момент переключения $\tau \neq t_k$, $k = \overline{0, m}$, с системы (11) на систему (12) и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in [t_0, T]$ такое, что в момент T выполняется условие: $x_2(T) = x_1$.

Следуя [1], можно показать, что для того, чтобы объект (11), (12) был полностью управляем на отрезке $[t_0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\tau \neq t_k$, $k = \overline{0, m}$, выполнялось условие (2), где $B(s) = B_1(s)$, $s \in [t_0, \tau]$; $B(s) = B_2(s)$, $s \in [\tau, T]$, а матрица $F(T, s)$ удовлетворяет уравнению (3), в котором $A(s) = A_1(s)$, $s \in [t_0, \tau]$; $A(s) = A_2(s)$, $s \in [\tau, T]$.

Положим для определенности, что момент переключения τ принадлежит интервалу (t_{k-1}, t_k), $k=\overline{1, m}$. Введем следующие обозначения:

$$B_1(s, k)=[\bar{B}_{11}(s), \ldots, \bar{B}_{1k}(s)], \ B_2(s, k)=[\bar{B}_{2k}(s), \ldots, \bar{B}_{2m}(s)],$$

где $\bar{B}_{ik}(s)$ — аналитические продолжения матриц $B_{ik}(s)$ на весь отрезок $[t_0, T]$.

Используя те же рассуждения, что и в предыдущих пунктах, можно показать, что неявный критерий (2) управляемости объекта (11), (12) эквивалентен следующему условию. Для некоторого $\tau\in(t_{k-1}, t_k)$, $k=\overline{1, m}$ и любого n-вектора g, $\|g\|\neq 0$

$$g'F(T, s)B(s, k)\not\equiv 0, \ s\in[t_0, T]; \ B(s, k)=\begin{cases} B_1(s, k), & s\in[t_0, \tau), \\ B_2(s, k), & s\in[\tau, T]. \end{cases} \quad (13)$$

Лемма. Для того чтобы объект (11), (12) был полностью управляемым на отрезке $[t_0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторых τ, k, $\tau\in(t_{k-1}, t_k)$, $k=\overline{1, m}$

$$\operatorname{rank}[Q_{0i}(\tau, k), Q_{1i}(\tau, k), \ldots, Q_{ni}(\tau, k), \ldots; i=1, 2]=n, \quad (14)$$

где $Q_{mi}(s, k)=A_i(s)Q_{m-1, i}(s, k)-\partial/\partial s Q_{m-1, i}(s, k)$, $Q_{0i}(s, k)=B_i(s, k)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть объект (11), (12) полностью управляем на отрезке $[t_0, T]$, однако (14) не имеет места. Тогда для каждого момента переключения $\tau\in(t_{k-1}, t_k)$ можно указать вектор $g_0(\tau)$, $\|g_0(\tau)\|\neq 0$, такой, что

$$g_0'(\tau)Q_{mi}(\tau, k)=0, \ i=1, 2; \ m=0, 1, \ldots \quad (15)$$

Матрица $F(T, s)$ не вырождена для любого $s\in[t_0, T]$, поэтому существует вектор $g_1(\tau)$, $\|g_1(\tau)\|\neq 0$, что

$$g_1'(\tau)F(T, \tau)=g_0'(\tau). \quad (16)$$

Производные по s функции $g_1'(\tau)F(T, s)B(s, k)$ в точках $s=\tau\pm 0$ $\tau\in(t_{k-1}, t_k)$, в силу (15), (16) равны:

$$(-1)^m g_1'(\tau)F(T, \tau)\,Q_{mi}(\tau, k)=0, \ i=1, 2; \ m=0, 1, \ldots \quad (17)$$

Итак, аналитическая на каждом из интервалов $[t_0, \tau)$, $[\tau, T]$ функция $g_1'(\tau)F(T, s)B(s, k)$ имеет равные нулю производные всех порядков в точках $s=\tau\pm 0$. Это возможно лишь тогда, когда для $s\in[t_0\ T]$, $g_1'(\tau)F(T, s)B(s, k)\equiv 0$, а это противоречит (13).

Достаточность. Пусть для некоторого $\tau\in(t_{k-1}, t_k)$, $k=\overline{1, m}$, выполняется условие (14), но соотношение (13) нарушается, т. е. для каждого $\tau\in(t_{k-1}, t_k)$ можно указать вектор $g_1(\tau)$, $\|g_1(\tau)\|\neq 0$, такой, что $g_1'(\tau)F, (T, s)B(s, k)\equiv 0$, $s\in[t_0, T]$. Дифференцируя это тождество в точках $s=\tau\pm 0$, $\tau\in(t_{k-1}, t_k)$, получим равенства (17), которые противоречат (14).

Теорема 3. Для полной управляемости объекта (11), (12) на отрезке времени $[t_0, T]$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\tau\in(t_{k-1}, t_k)$, $k=\overline{1, m}$:

$$\operatorname{rank}[Q_{0i}(\tau, k), Q_{1i}(\tau, k), \ldots, Q_{n-1, i}(\tau, k); i=1, 2]=n. \quad (18)$$

Доказательство. Теорема будет доказана, если будет установлена эквивалентность (14) и (18). Очевидно, что из (18) следует (14). Покажем, что выполнение (14) влечет за собой (18).

Пусть для некоторого $\tau\in(t_{k-1}, t_k)$, $k=\overline{1, m}$ выполняется (14). Так как $Q_{mi}(\tau, k)$, $i=1, 2$; $m\geqslant 0$ — матрицы, аналитические на интервале (t_{k-1}, t_k), то (14) будет выполняться для всех $\tau\in(t_{k-1}, t_k)$, исключая, быть может, изолированные точки. Из леммы Чанга [4] следует, что на всем отрезке (t_{k-1}, t_k), за исключением, возможно, отдельных точек, матрицы $[Q_{0i}(\tau, k), \ldots, Q_{ni}(\tau, k), \ldots]$, $i=1, 2$, достигают своего максимального ранга на первых n элементах: $Q_{0i}(\tau, k), \ldots, Q_{n-1,i}(\tau, k)$. Отсюда непосредственно вытекает, что выполнение (14) влечет за собой справедливость критерия (18).

Пример. Рассмотрим системы уравнений (11), (12) со следующими параметрами: $n=m=2$, $r=1$, $[t_0, t_1)=[0, 1)$, $[t_1, T]=[1, 2]$,

$$A_1(t) = \begin{bmatrix} t & t^2 \\ 0 & t^3 \end{bmatrix}, \quad B_{11}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{12}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2(t) = \begin{bmatrix} t^3 & 0 \\ t^2 & t \end{bmatrix}, \quad B_{21}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_{22}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Как показывают непосредственные вычисления, каждая из систем (11), (12) в отдельности не является полностью управляемой на отрезке времени [0, 2], однако, объект (11), (12) полностью управляем на отрезке [0, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М., 1971.
2. Забелло Л. Е.— «Дифференц. уравнения», 1973, **9**, № 3.
3. Забелло Л. Е.— «Автоматика и телемеханика», 1973, № 8.
4. Chang A.— «IEEE Trans. Automatic», 1965, **10**, № 1.
5. Кирлица В. П. Управляемость линейных систем с переменной структурой. IV Республиканская конференция математиков Белоруссии. Тез. докл. Минск, 1975.

Поступила в редакцию 1/VII 1976 г.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УДК 517.948

Р. АКБАРОВ, Э. И. ЗВЕРОВИЧ

ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ КУСОЧНО-МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННЫМИ ГЛАВНЫМИ ЧАСТЯМИ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

1. Постановка задачи. Пусть R — замкнутая ориентируемая риманова поверхность рода $h \geqslant 0$, а $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ — конечное множество различных точек, лежащих на R. Обозначим $R'=R \setminus \{p_1, p_2, \ldots p_s\}$. Пусть L — сложный кусочно-гладкий контур, лежащий в компактной части поверхности R'; Λ — множество особенностей контура L (концы, кратные точки, точки нарушения гладкости и другие). Будем считать, что Λ удовлетворяет следующему условию: множество $L \setminus \Lambda$ распадается на конечное число связных компонент, $L_j (j=1, 2, \ldots, N)$, каждая из которых есть простая гладкая ориентированная дуга, гомеоморфная интервалу (0, 1). Пусть на каждой кривой L_j заданы H-непрерывные функции $G_j(t) \neq 0$ и $g_j(t)$, H-непрерывно продолжимые на начальную и концевую точки кривой L_j, причем предельные значения функции $G_j(t)$ отличны от нуля. Тем самым всюду на $L \setminus \Lambda$ задаются функции, которые обозначим соответственно через $G(t)$ и $g(t)$. Рассмотрим сначала краевую задачу Римана в следующей постановке.

Найти все функции $\Phi(p)$, мероморфные всюду вне L и заданных малых окрестностей $U(p_k)$ точек p_k, кратные там наперед заданному дивизору D^{-1}, H-непрерывно продолжимые слева и справа на $L \setminus \Lambda$, где должно выполняться краевое условие:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad J^{-1}D^{-1} | (\Phi), \quad t \in L. \qquad (1)$$

В окрестности точек множества Λ поведение искомых функций определяется требованием псевдократности [1] заданному дивизору J^{-1}.

В случае, когда точек p_k нет вовсе, задача (1) полностью исследована в [1]. Если же $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\} \neq \varnothing$, то (1) представляет собой задачу Римана на открытой римановой поверхности, поэтому для большей опре-