вводится отношение частичного порядка. Существует ли в указанном классе максимальный элемент?

3. Можно ли в теореме 3 TX заменить каким-нибудь другим насыщением?

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский А. В.— «Матем. сб.», 1965, **67** (**109**), № 1.
2. Morita K.— «Math. Ann.», 1964, **154**, 365.
3. Michael E.— «Israel J. Math.», 1964, **2**, № 3.
4. Borges C. J. R.— «Canad. J. Math.», 1968, **20**, 795.
5. Ishii T.— «Proc. Japan. Acad.», 1970, **46**, 5.
6. Там же, 11.

Поступила в редакцию
1/VI 1976 г.

Кафедра геометрии

УДК 517.925

Р. А. ПРОХОРОВА

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ. II*

Наряду с линейной системой

$$\dot{x}=P(t)x, \qquad (1)$$

где $P(t)$ — кусочно-непрерывная и ограниченная при $t\geqslant 0$ матрица, $\|P(t)\|\leqslant M$, рассматриваем линейную систему с сосредоточенными возмущениями

$$\dot{y}=[P(t)+\sum_{k=1}^{\infty}Q_k\,\delta(t-t_k)]\,y, \qquad (2)$$

где Q_k — постоянные матрицы, $t_{k+1}>t_k$, $t_k\to\infty$ при $k\to\infty$, $\delta(t-t_k)$ — δ-функции Дирака.

Следуя работе [1], решением системы (2) назовем непрерывную слева вектор-функцию $y(t)$ (с разрывами только в точках t_k, $k=1, 2, \ldots$), удовлетворяющую для всех $t\neq t_k$ системе (1), причем в точках t_k имеет место соотношение

$$y(t_k+)=(E+Q_k)\,y(t_k) \qquad (3)$$

(и, следовательно, умножение непрерывной слева функции $y(t)$ на δ-функцию формализуется согласно работе [2]). Это определение решения совпадает с определением решения линейной системы (1) с линейными толчками (3) в работах [3—6]. Вопросы существования и единственности решений системы (2) и более общих систем (обобщенных в смысле Я. Курцвейля [7] и общих систем с толчками [3]) рассмотрены в работах [1,3—5].

Основная цель настоящей работы — построить условия малости на матрицы Q_k, $k=1, 2, \ldots$, аналогичные условиям малости матрицы $Q(t)$ линейной возмущенной системы

$$\dot{z}=[P(t)+Q(t)]z, \qquad (4)$$

которые гарантировали бы сохранение тех или иных асимптотических характеристик при переходе от невозмущенной системы (1) к возмущенной. Показано, что исследование поставленной задачи можно свести к рассмотрению соответствующей линейной системы вида (4). (В [8] эта задача решалась для некоторых характеристик по аналогии с обычными возмущениями.) Идея сведения линейной системы с линейными толчками

* Продолжение. См. Р. А. Прохорова. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех.», 1975, № 2, 3.

при предположении $\inf_k (t_k - t_{k-1}) > 0$ к системе с непрерывными решениями с помощью разрывного преобразования Ляпунова [4] применена в работах [4—6] для исследования устойчивости разрывных систем по первому приближению. Метод сведения системы (2) к системе (4) будет основан на понятиях δ-преобразования Ляпунова, отличающегося от разрывного преобразования Ляпунова [4] лишь отсутствием требования ограниченности производной матрицы преобразования, и δ-асимптотической эквивалентности, введенной по аналогии с асимптотической эквивалентностью [9].

Определение 1. Кусочно-непрерывную (слева) комплексную матрицу $S(t)$, кусочно-дифференцируемую на промежутках непрерывности, назовем δ-матрицей Ляпунова, если

$$\sup_{t \geqslant 0} \{ \| S(t) \|, \ \|S^{-1}(t)\| \} < \infty.$$

Определение 2. Преобразование $y = S(t)x$ с δ-матрицей Ляпунова $S(t)$ назовем δ-преобразованием Ляпунова.

Определение 3. Системы (1) и (2) называются δ-асимптотически эквивалентными, если существует δ-преобразование Ляпунова, переводящее одну систему в другую (система (1) тоже могла быть с толчками).

Очевидно, δ-преобразование Ляпунова сохраняет такие асимптотические характеристики системы, как различные виды устойчивости (например, устойчивость по Ляпунову, асимптотическую и экспоненциальную устойчивости), показатели решений, интегральную разделенность решений, экспоненциальную дихотомию системы и т. д., так как при доказательстве инвариантности этих величин и свойств при преобразовании Ляпунова используется только лишь ограниченность матрицы преобразования и ей обратной.

Теорема 1. Система (2) при условии $\|Q_k\| \leqslant q < 1$, $k = 1, 2, \ldots$, δ-асимптотически эквивалентна системе вида (4), для матрицы возмущений которой справедлива оценка

$$\|Q(t)\| \leqslant L \|Q_k\| \psi(t), \ t_{k-1} < t \leqslant t_k, \ L = L(q, M), \ k = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta_k} + 1, \text{ если } t_{k-1} < t \leqslant t_k \text{ и } \Delta_k \equiv t_k - t_{k-1} \leqslant 1, \\ \left(\dfrac{t - t_{k-1}}{\Delta_k} \right)^{\Delta_k - 1}, \text{ если } t_{k-1} < t \leqslant t_k \text{ и } \Delta_k > 1. \end{cases} \tag{5'}$$

Доказательство. В системе (2) произведем преобразование

$$z = S(t) y, \tag{6}$$

где

$$S(t) = E + S_k(t), \ t_{k-1} < t \leqslant t_k, \ k = 1, 2, \ldots;$$

$$S_k(t) = \begin{cases} Q_k \dfrac{t - t_{k-1}}{\Delta_k}, \text{ если } \Delta_k \leqslant 1; \\ Q_k \left(\dfrac{t - t_{k-1}}{\Delta_k} \right)^{\Delta_k}, \text{ если } \Delta_k > 1. \end{cases} \tag{6'}$$

Построенное преобразование есть δ-преобразование Ляпунова. Действительно, $S(t)$ — непрерывная слева и ограниченная матрица, $\|S(t)\| \leqslant 1 + q$, $t \geqslant 0$, а в силу условия $\|S_k(t)\| \leqslant q < 1$ существует ограниченная обратная матрица, для которой справедлива оценка

$$\| S^{-1}(t) \| \leqslant N, \ N \equiv \frac{1}{1-q}, \ t \geqslant 0. \tag{7}$$

На промежутках $(t_{k-1}, t_k]$, $k=1, 2, \ldots$, система (2) с помощью преобразования (6)—(6′) преобразуется в систему (4), где

$$Q(t)=\dot{S}(t)S^{-1}(t)+S(t)P(t)S^{-1}(t)-P(t). \qquad (8)$$

Разрывные решения это преобразование переводит в непрерывные — в точках t_k происходит склеивание соответствующих кусков решений. Действительно, в силу преобразования (6)—(6′) $z(t_k)=(E+Q_k)y(t_k)$, $z(t_k+)=y(t_k+)$, а в силу системы (2) имеем $y(t_k+)=(E+Q_k)y(t_k)$ и, следовательно, $z(t_k+)=z(t_k)$.

Отсюда следует, что δ-преобразование Ляпунова (6)—(6′) переводит систему (2) в систему (4) при всех $t\geqslant 0$ с возмущающей матрицей вида (8).

Покажем, что норма возмущения в построенной системе (4) удовлетворяет требуемой оценке (5). Матрицу $Q(t)$ на промежутках $(t_{k-1}, t_k]$, $k=1, 2, \ldots$, представим в виде

$$Q(t)=\dot{S}_k(t)S^{-1}(t)+(E+S_k(t))P(t)(E+S_k(t))^{-1}-P(t).$$

Используя разложение для обратной матрицы $S^{-1}(t)$, имеем

$$Q(t)=\dot{S}_k(t)S^{-1}(t)+S_k(t)P(t)(E+S_k(t))^{-1}+P(t)[-S_k(t)+ \\ +S_k^2(t)+\ \ldots\ +(-1)^n S_k^n(t)+\ldots]=\dot{S}_k(t)S^{-1}(t)+ \\ +[S_k(t)P(t)-P(t)S_k(t)]S^{-1}(t),\quad t_{k-1}<t\leqslant t_k,\ k=1, 2, \ldots$$

Отсюда, применяя (7) и очевидные неравенства

$$\|S_k(t)\|\leqslant\|Q_k\|, \text{ если } \Delta_k\leqslant 1;$$

$$\|S_k(t)\|\leqslant\|Q_k\|\left(\frac{t-t_{k-1}}{\Delta_k}\right)^{\Delta_k}, \text{ если } \Delta_k>1,$$

получаем на промежутках $(t_{k-1}, t_k]$, $k=1, 2, \ldots$, оценку

$$\|Q(t)\|\leqslant\begin{cases} N\dfrac{\|Q_k\|}{\Delta_k}+2MN\|Q_k\|, & \text{если } \Delta_k\leqslant 1; \\ N\|Q_k\|\left(\dfrac{t-t_{k-1}}{\Delta_k}\right)^{\Delta_k-1}+2MN\left(\dfrac{t-t_{k-1}}{\Delta_k}\right)^{\Delta_k}\|Q_k\|, & \text{если } \Delta_k>1. \end{cases}$$

Учитывая, что при $t_{k-1}<t\leqslant t_k-0<\dfrac{t-t_{k-1}}{\Delta_k}\leqslant 1$, и, положив $L=N+2MN$, получаем требуемую оценку.

Следствие. Теорема также справедлива с оценкой для нормы матрицы возмущения

$$\|Q(t)\|\leqslant L\left(\frac{\|Q_k\|}{\Delta_k}+\|Q_k\|\right),\quad t_{k-1}<t\leqslant t_k,\ k=1, 2, \ldots \qquad (9)$$

Аналогично устанавливается и обратная связь между системами (2) и (4). Например, справедлива следующая

Теорема 2. Система (4), где $\|Q(t)\|\leqslant\varepsilon$, δ-асимптотически эквивалентна некоторой системе (2) с любой последовательностью моментов толчков t_k: $\sup\limits_k (t_k-t_{k-1})=\Lambda<\infty$, для матрицы возмущения которой справедлива оценка

$$\|Q_k\|\leqslant M_1\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|Q(\tau)\|d\tau,\ M_1=M_1(M, \Lambda),\ \varepsilon=\varepsilon(M, \Lambda),\ k=1, 2, \ldots$$

Доказанная теорема позволяет теперь сформулировать условия малости на Q_k и длины промежутков Δ_k, являющиеся аналогами возмущений различной малости матрицы $Q(t)$.

А. Условие равномерной малости принимает вид

$$\frac{\|Q_k\|}{\Delta_k}+\|Q_k\|\leqslant\gamma,\ k=1, 2, \ldots$$

B. Условие стремления к нулю нормы возмущения имеет вид

$$\frac{\|Q_k\|}{\Delta_k}+\|Q_k\|\to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

C. Условие экспоненциального убывания нормы матрицы возмущения

$$\frac{\|Q_k\|}{\Delta_k}+\|Q_k\|\leqslant N\exp(-\sigma-\varepsilon)t_k,\ \sigma>0,\ \varepsilon>0,\ N-\mathrm{const}.$$

Доказательство для случаев A — C следует из оценки (9).

D. Условие абсолютной интегрируемости нормы матрицы возмущения принимает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|Q_k\|<\infty.$$

Действительно, если выполняется условие D, то для матрицы соответствующей системы (4) справедливо неравенство $\int\limits_0^\infty\|Q(\tau)\|\,d\tau<\infty$. Это вытекает из следующих оценок: в силу (5) имеем $\int\limits_0^\infty\|Q(\tau)\|\,d\tau\leqslant$ $\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}L\|Q_k\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\psi(\tau)\,d\tau$, где в силу (5′) $\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\psi(\tau)\,d\tau\leqslant 2$ и, следовательно, справедливо неравенство

$$\int\limits_0^\infty\|Q(\tau)\|\,d\tau\leqslant 2L\sum_{k=1}^{\infty}\|Q_k\|<\infty.$$

Требуемое доказано.

В случае, если $\inf(t_k-t_{k-1})=\Delta>0$ (и, в частности, если толчки происходят в целочисленных точках), эти условия переходят соответственно в следующие условия.

A′. $\|Q_k\|\leqslant\gamma,\ k=1,2,\ldots.$

B′. $\|Q_k\|\to 0$ при $k\to\infty$.

C′. $\|Q_k\|\leqslant N\exp(-\sigma-\varepsilon)k,\ \sigma>0,\ \varepsilon>0,\ N$—const, к $=1,2,\ldots$

D′. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|Q_k\|<\infty$.

Используя инвариантность указанных ранее асимптотических характеристик при δ-преобразовании Ляпунова и теорему 1, привлекая известные теоремы для обычных возмущений, сразу получаем результаты о поведении этих характеристик при сосредоточенных возмущениях. Укажем некоторые из них.

При выполнении условия A с достаточно малым γ система (2) асимптотически устойчива, если система (1) или равномерно экспоненциально устойчива, или асимптотически устойчива, а матрица $P(t)$ постоянная [10, с. 42].

Если система (1) обладает экспоненциальной дихотомией, то таковой обладает также и возмущенная система (2) при достаточно малом γ [11].

Из теоремы 1 и критерия устойчивости показателей [12, 13] следуют те же достаточные условия устойчивости показателей системы (1) при сосредоточенных возмущениях (показатели $\lambda_1\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n$ системы (1) назовем устойчивыми при сосредоточенных возмущениях, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\gamma>0$, что всякий показатель λ_y системы (2) при условии A удовлетворяет неравенству $\min\limits_i|\lambda_y-\lambda_i|<\varepsilon$).

При выполнении неравенства C справедливы все теоремы о поведении асимптотических характеристик при экспоненциальных возмущениях [15].

Из выполнения условия D следует устойчивость и асимптотическая устойчивость системы (2), если таковой является невозмущенная система (1), а ее матрица $P(t)$ — постоянная, или в случае устойчивости [10, 40—47] удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \operatorname{Sp} P(\tau)\, d\tau > -\infty.$$

Очевидно, что при определении решения системы (2) как непрерывной справа вектор-функции (скачок решения в моменты t_k, $k=1, 2, \ldots$, при этом определяется из соотношения $y(t_k+)=y(t_k)+Q_k y(t_k+)$ и, следовательно, $y(t_k+)=(E-Q_k)^{-1}y(t_k)$) справедливы (при условии $\|Q_k\|<\varepsilon<1$) все указанные теоремы о поведении асимптотических характеристик при сосредоточенных возмущениях.

Определенная связь существует и между системой (1), системой с толчками специального вида и системой в конечных разностях, а также между этими системами с возмущениями. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. Система (1) δ-асимптотически эквивалентна системе с толчками

$$\dot{v}=0 \tag{10}$$

с законом перехода с решения на решение

$$v(k+)=A(k)v(k), \tag{10'}$$

где $A(k)$ — вполне ограниченные матрицы [16], т. е.

$$\sup_k \{\|A(k)\|, \|A^{-1}(k)\|\} < \infty.$$

И наоборот, любая система (10)—(10′) δ-асимптотически эквивалентна некоторой системе (1) (вообще говоря, комплексной).

Доказательство δ-асимптотической эквивалентности системы (1) системе (10)—(10′) осуществляется с помощью преобразования

$$x=S(t)v, \tag{11}$$

где $S(t)=X(t, k-1)$, $k-1<t\leqslant k$; $X(t, \tau)$ — матрица Коши системы (1).

Обратное утверждение доказывается с помощью преобразования (11) с матрицей $S(t)=e^{(t-k+1)\operatorname{Ln} A(k)}$, $k-1<t\leqslant k$, $k=1, 2, \ldots$, где ветви логарифма выбираются как аналитическое продолжение ряда $\operatorname{Ln} X = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}(X-E)^m$, справедливого для матриц X из окрестности единичной матрицы, по формуле [17, с. 68]:

$$\operatorname{Ln} X = \int_0^1 (X-E)(E+t(X-E))^{-1}dt,$$

где в качестве пути интегрирования при построении $\operatorname{Ln} A(k)$, $k=1, 2, \ldots$, выбирается путь, соединяющий точки 0 и 1 и не проходящий вблизи точек $t_j=\frac{1}{1-\lambda_j(A)}$, $j=1, \ldots, n$. Очевидно, что эти пути можно выбрать так, чтобы их длины были ограничены в совокупности. Построенные таким образом ветви логарифма $\operatorname{Ln} A(k)$ ограничены, $\sup_k \|\operatorname{Ln} A(k)\| < \infty$, и, следовательно, преобразование (11) есть δ—преобразование *Ляпунова. Отсюда получаем*, что система (10)—(10′) δ—асимптотически эквивалентна системе (1) с матрицей $P(t)=\operatorname{Ln} A(k)$, $k-1<t\leqslant k$, $k=1, 2, \ldots$ с указанным выше выбором ветвей логарифма.

С л е д с т в и е. Линейная система (1) асимптотически эквивалентна системе с кусочно-постоянной матрицей $F(t)=\operatorname{Ln} X(k, k-1)$, $k-1<t\leqslant k$, где в качестве ветвей логарифма можно взять, например, указанные выше.

З а м е ч а н и е. В целочисленных точках решение $v(t)$ системы (10)—(10′) удовлетворяет системе в конечных разностях

$$v(n+1)=A(n)v(n). \tag{12}$$

Теорема 4. Линейная возмущенная система (4) δ-асимптотически эквивалентна системе с толчками

$$\dot{u}=0 \tag{13}$$

с законом перехода с решения на решение

$$u(k+)=[A(k)+B(k)]u(k), \tag{13′}$$

причем невозмущенная система (1) δ-асимптотически эквивалентна системе (10)—(10′), где $A(k)$, $A(k)+B(k)$ — вполне ограниченные матрицы, $k=1, 2, \ldots$, а норма матрицы возмущения в толчке удовлетворяет условию

$$\|B(k)\|\leqslant Nq(k),\ N\text{—const},\ q(k)=\sup_{k-1<t\leqslant k}\|Q(t)\|,\ k=1, 2, \ldots$$

И обратно, система (13)—(13′), где $A(k)$, $A(k)+B(k)$ — вполне ограниченные матрицы, δ-асимптотически эквивалентна системе (4), причем система (10)—(10′) δ-асимптотически эквивалентна системе (1), а норма матрицы возмущения $Q(t)$ удовлетворяет оценке

$$\|Q(t)\|\leqslant N\|B(k)\|,\ k-1<t\leqslant k,\ k=1, 2, \ldots,\ N\text{—const}.$$

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3. Теорема 3 дает возможность сразу строить теоремы о внутренних свойствах линейной системы (1), системы в толчках специального вида (10)—(10′) и системы в конечных разностях (12), если они известны для какой-либо из систем указанного вида.

Теорема 4 позволяет получать результаты о поведении асимптотических характеристик при возмущениях различной малости, если известны такие результаты для какой-либо из указанных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Š c h w a b i c S.— «Čas. pestov. mat.», 1971, 96, № 2, 183.
2. З а в а л и щ и н С. Т.— «Автоматика и телемеханика», 1973, № 1, 79.
3. М ы ш к и с А. Д., С а м о й л е н к о А. М.— «Мат. сб.», 1967, 74(116), № 2, 202.
4. Л и в а р т о в с к и й И. В.— Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, 1959, вып. 3, 247.
5. Там же, 1960, вып. 5, 109.
6. Л и в а р т о в с к и й И. В.— «Дифференц. уравнения», 1965, 1, № 9, 1131.
7. K u r z w e i l J.— «Czech. Math. J.6, 1957, 7(82), 419.
8. П р о х о р о в а Р. А.— «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех.», 1975, № 2, 3.
9. Б о г д а н о в Ю. С.— «Дифференц. уравнения», 1965, 1, № 6, 707.
10. Р о з о М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. М., 1971.
11. C o p p e l W. A.— «J. Different. Equat.», 1967, 3, № 4, 500.
12. М и л л и о н щ и к о в В. М.— «Дифференц. уравнения», 1969, 5, № 10, 1775.
13. Б ы л о в Б. Ф., И з о б о в Н. А. — «Дифференц. уравнения», 1969, 5, № 10, 1794.
14. Б ы л о в Б. Ф. и др. Теория показателей Ляпунова. М., 1966.
15. И з о б о в Н. А.— В сб.: Мат. анализ, 12. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1974, 71.
16. Д е м и д о в и ч В. Б.— «Дифференц. уравнения», 1974, 10, № 12, 2267.
17. Л а п п о - Д а н и л е в с к и й И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1957.

Поступила в редакцию
1/VII 1976 г.

Кафедра дифференциальных уравнений