

А. С. КЛЮЧНИКОВ, М. В. МИШУРНАЯ, Ю. А. ШПУРГАЛОВ

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА РЕШЕТКЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Стержневые дифракционные решетки находят широкое применение в фазовращателях и преобразователях поляризационной структуры электромагнитных волн, в интерферометрах и волномерах, а также в других устройствах антенно-волноводной техники и СВЧ-электроники. Их дифракционные свойства в длинноволновом приближении (период решетки и поперечные размеры стержней значительно меньше длины волны) исследовались многими авторами. Более полно, включая промежуточный и коротковолновой случай, эти свойства изучены в работах [1, 2]. В настоящей статье решается задача о дифракции плоской электромагнитной волны на бесконечной решетке металлических стержней прямоугольного сечения, соизмеримого с длиной волны, при больших расстояниях между стержнями.

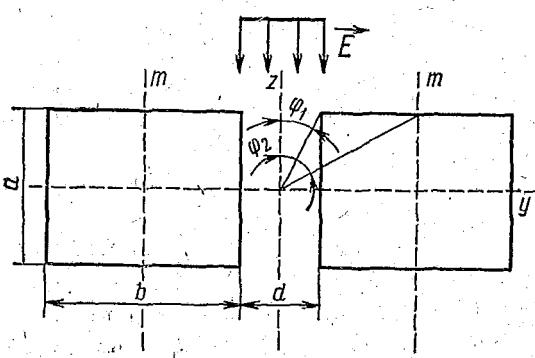
В отличие от известных работ поле дифракции найдено в виде разложения по цилиндрическим функциям. Это позволило использовать библиотеку стандартных программ для расчёта коэффициентов разложения рассеянных полей, а также применить уже разработанный алгоритм счета, изложенный в [3]. Разложение полей по цилиндрическим функциям

приводит к быстросходящимся рядам. Это даёт возможность применять с удовлетворительной степенью точности приближенный метод решения систем функциональных уравнений и на основе этого получить выражение для радиопрозрачности решеток в явном виде, а затем исследовать геометрические параметры стержней с целью достижения наибольшей радиопрозрачности и прочности решеток.

Постановка задачи. Пусть на решетку параллельных прямоугольных стержней падает плоская монохроматическая волна $E_x^{\text{пад}} = E^{ikr}$, $E_y^{\text{пад}} = E_z^{\text{пад}} = 0$ (рис. 1). Требуется найти дифрагированное поле, удовлетворяющее волновому уравнению, условию излучения на бесконечности, граничным условиям на металле и условию неразрывности векторов \vec{E} и \vec{H} на границе раздела «пространство вне решетки — пространство между стержнями».

Получение расчетных соотношений. Учитывая периодичность структуры, решение будем искать на одном периоде $t - t$. Удовлетворяя волновому уравнению в пространстве $|z| < \frac{a}{2}$, $|y| < \frac{d}{2}$ и граничным условиям $E_x = 0$ при $|z| < \frac{a}{2}$, $y = \pm \frac{d}{2}$, представим поле между стержнями в виде разложения [1]:

$$E_x^M = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (C_m e^{q_m z} + D_m e^{-q_m z}) \cos \frac{m\pi}{d} y,$$

Рис. 1. Геометрия задачи: $a=0,6\lambda$; $b=1,2\lambda$

где C_m, D_m — коэффициенты разложения поля между стержнями; $q_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2}$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число. Получим решение поставленной задачи в полярной системе координат. Поле падающей волны представим в виде ряда

$$E_x^{\text{пад}} = e^{-ikz} = e^{-ikr \cos \varphi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (i)^m J_m(kr) e^{im\varphi}, \quad (1)$$

а поле между стержнями

$$E_x^{\text{м}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (C_m e^{q_m r \cos \varphi} + D_m e^{-q_m r \cos \varphi}) N_m(r, \varphi) e^{im\varphi}, \quad (2)$$

$$\text{где } N_m(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{m\pi}{d} r\right) e^{i(n-m)\varphi}; \quad J_n\left(\frac{m\pi}{d}\right) \text{ — функция Бесселя.}$$

Удовлетворяя волновому уравнению и условию излучения на бесконечности, прошедшее решетку поле представим в виде [2]

$$E_x^{\text{пр}} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m H_m^{(2)}(kr_p) e^{im\varphi_p} \left(z > \frac{a}{2}\right), \quad (3)$$

а отраженное ее поле в виде

$$E_x^{\text{отр}} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m H_m^{(2)}(kr_p) e^{im\varphi_p} \left(z < -\frac{a}{2}\right), \quad (4)$$

где $H_m^{(2)}(kr)$ — функция Ганкеля второго рода; r_p, φ_p — координаты точки наблюдения, связанные с p -ым стержнем; B_m, A_m — коэффициенты разложения отраженного и прошедшего полей.

Рассеянное решеткой поле плоской волны будет определено, если коэффициенты A_m, B_m, C_m, D_m подобрать так, чтобы удовлетворялись граничные условия на решетке, т. е. выполнялось $E_x(r, \varphi) = 0$ на стержнях и все поле было непрерывно при $z = \pm \frac{a}{2}$; $|y| < \frac{d}{2}$. Из этих условий получаем следующие функциональные уравнения для нахождения A_m, B_m, C_m, D_m с учетом приведения рассеянного поля к системе координат, связанной с нулевым стержнем:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m J_m(kr) e^{im\varphi} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m H_m^{(2)}(kr) e^{im\varphi} + \\ & + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n^{(2)}(kpl) J_{m+n}(kr) \cos \frac{n\pi}{2} e^{i(m+n)\varphi} = \\ & = \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (C_m e^{q_m \frac{a}{2}} + D_m e^{-q_m \frac{a}{2}}) N_m(r, \varphi) e^{im\varphi}; & |\varphi| < \varphi_1 \\ 0, \text{ если } \varphi_1 < |\varphi| < \varphi_2 & \end{cases} \Bigg|_{r=\frac{a}{2 \cos \varphi}} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m H_m^{(2)}(kr) e^{im\varphi} + \\ & + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n^{(2)}(kpl) J_{m+n}(kr) \cos \frac{n\pi}{2} e^{i(m+n)\varphi} = \end{aligned}$$

$$\ldots = \begin{cases} \left(C_m e^{-q_m \frac{a}{2}} + D_m e^{q_m \frac{a}{2}} \right) N_m(r, \varphi) e^{im\varphi} | \varphi | < \pi - \varphi_1 \\ 0, \text{ если } \pi - \varphi_1 < | \varphi | < \pi - \varphi_2 \end{cases} \Bigg|_{r=\frac{a}{2 \cos \varphi}} . \quad (6)$$

Из граничных условий

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial Ex}{\partial (r \cos \varphi)} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

следует, что для $z = -\frac{a}{2}, |y| < \frac{d}{2}$

$$\begin{aligned} & k \cos \varphi \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m J'_m(kr) e^{im\varphi} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m H_m^{(2)'}(kr) e^{im\varphi} \right] - \\ & - \frac{\sin \varphi}{r} \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m i m J_m(kr) e^{im\varphi} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i m A_m H_m^{(2)}(kr) e^{im\varphi} + \right. \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n^{(2)}(kpl) i(m+n) J_{m+n}(kr) \cos \frac{n\pi}{2} e^{i(m+n)\varphi} \Big] + \\ & + 2k \cos \varphi \sum_{p=1}^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n^{(2)}(kpl) J'_{m+n}(kr) \cos \frac{n\pi}{2} \cdot e^{im\varphi} = \\ & = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} q_m \left(C_m e^{-q_m \frac{a}{2}} + D_m e^{q_m \frac{a}{2}} \right) N_m(r, \varphi) e^{im\varphi} + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(C_m e^{q_m \frac{a}{2}} + D_m e^{-q_m \frac{a}{2}} \right) \frac{\partial N_m(r, \varphi)}{\partial z} e^{im\varphi} - \\ & - \frac{\sin \varphi}{r} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i m \left(C_m e^{-q_m \frac{a}{2}} + D_m e^{q_m \frac{a}{2}} \right) N_m(r, \varphi) e^{im\varphi} \Bigg|_{r=\frac{a}{2 \cos \varphi}} . \quad (7) \end{aligned}$$

Для области $z = -\frac{a}{2}, |y| < \frac{d}{2}$

$$\begin{aligned} & k \cos \varphi \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m H_m^{(2)'}(kr) e^{im\varphi} + \right. \\ & + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n^{(2)}(kpl) J'_{m+n}(kr) \cos \frac{n\pi}{2} e^{i(m+n)\varphi} \Big] - \\ & - \frac{\sin \varphi}{r} \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} i m B_m H_m^{(2)}(kr) e^{im\varphi} + \right. \\ & + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n^{(2)}(kpl) i(m+n) J_{m+n}(kr) \cos \frac{n\pi}{2} e^{i(m+n)\varphi} \Big] = \\ & = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} q_m \left(C_m e^{q_m \frac{a}{2}} + D_m e^{-q_m \frac{a}{2}} \right) N_m(r, \varphi) e^{im\varphi} + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial N_m(r, \varphi)}{\partial z} e^{im\varphi} \left(C_m e^{q_m \frac{a}{2}} + D_m e^{-q_m \frac{a}{2}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{i m \sin \varphi}{r} \left(C_m e^{q_m \frac{a}{2}} + D_m e^{-q_m \frac{a}{2}} \right) N_m(r, \varphi) e^{im\varphi} \right] \Bigg|_{r=\frac{a}{2 \cos \varphi}} . \quad (8) \end{aligned}$$

Очевидно, что условия (5) — (8) будут выполняться, если коэффициенты при одинаковых степенях $e^{im\varphi}$ в правой и левой частях уравнений будут равны. В результате приравнивания и алгебраических преобразований получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов разложения:

$$\left(C_m e^{\frac{q_m \alpha}{2}} + D_m e^{-\frac{q_m \alpha}{2}} \right) N_m(\psi) \Phi(\varphi) = i^m J_m(\psi) + \\ + B_m [H_m^{(2)}(\psi) + \Pi_{2m} J_m(\psi)]; \quad (9)$$

$$\left(C_m e^{-\frac{q_m \alpha}{2}} + D_m e^{\frac{q_m \alpha}{2}} \right) N_m(\psi) = B_m [H_m^{(2)}(\psi) + \Pi_{2m} J_m(\psi)]; \quad (10)$$

$$q_m \left(C_m e^{\frac{q_m \alpha}{2}} - D_m e^{-\frac{q_m \alpha}{2}} \right) N_m(\psi, \varphi) + \\ + \left\{ \frac{\partial N_m(r, \varphi)}{\partial z} \Big|_{r=\psi} \right\} \left(C_m e^{\frac{q_m \alpha}{2}} + D_m e^{-\frac{q_m \alpha}{2}} \right) = \{ i^m J'_m(\psi) + \\ + A_m [H_m^{(2)'} + 2\Pi_{2m} J'_m(\psi)] \} k \cos \varphi; \quad (11)$$

$$q_m \left(C_m e^{-\frac{q_m \alpha}{2}} - D_m e^{\frac{q_m \alpha}{2}} \right) N_m(\psi, \varphi) + \left(C_m e^{-\frac{q_m \alpha}{2}} + D_m e^{\frac{q_m \alpha}{2}} \right) \\ + D_m e^{\frac{q_m \alpha}{2}} \left\{ \frac{\partial N_m(r, \varphi)}{\partial z} \Big|_{r=\psi} \right\} = B_m [H_m^{(2)'}(\psi) + \Pi_{2m} J'_m(\psi)] k \cos \varphi, \quad (12)$$

где $\psi = \frac{ak}{2 \cos \varphi}$; $\Phi(\varphi) = \begin{cases} 1 & |\varphi| < \varphi_1; \\ 0 & \varphi_1 < |\varphi| < \varphi_2; \end{cases}$; $\Pi_{2m} = \sum_{p=1}^{\infty} H_{2m}^{(2)}(kp)$.

Усреднив правую и левую части уравнений (9), (10) на периоде $|\varphi| < \varphi_1$, а уравнений (11), (12) на периоде $|\varphi| < \varphi_2$, получим:

$$\begin{cases} \left(C_m e^{\frac{q_m \alpha}{2}} + D_m e^{-\frac{q_m \alpha}{2}} \right) V_m = i^m L_m + A_m S_m; \\ \left(C_m e^{-\frac{q_m \alpha}{2}} + D_m e^{\frac{q_m \alpha}{2}} \right) V_m = B_m S_m; \\ \left(C_m e^{\frac{q_m \alpha}{2}} - D_m e^{-\frac{q_m \alpha}{2}} \right) M_m + \left(C_m e^{\frac{q_m \alpha}{2}} + D_m e^{-\frac{q_m \alpha}{2}} \right) M'_m = \\ = A_m S'_m + i^m V'_m; \\ \left(C_m e^{-\frac{q_m \alpha}{2}} - D_m e^{\frac{q_m \alpha}{2}} \right) M_m + \left(C_m e^{-\frac{q_m \alpha}{2}} + D_m e^{\frac{q_m \alpha}{2}} \right) = B_m S'_m, \end{cases} \quad (13)$$

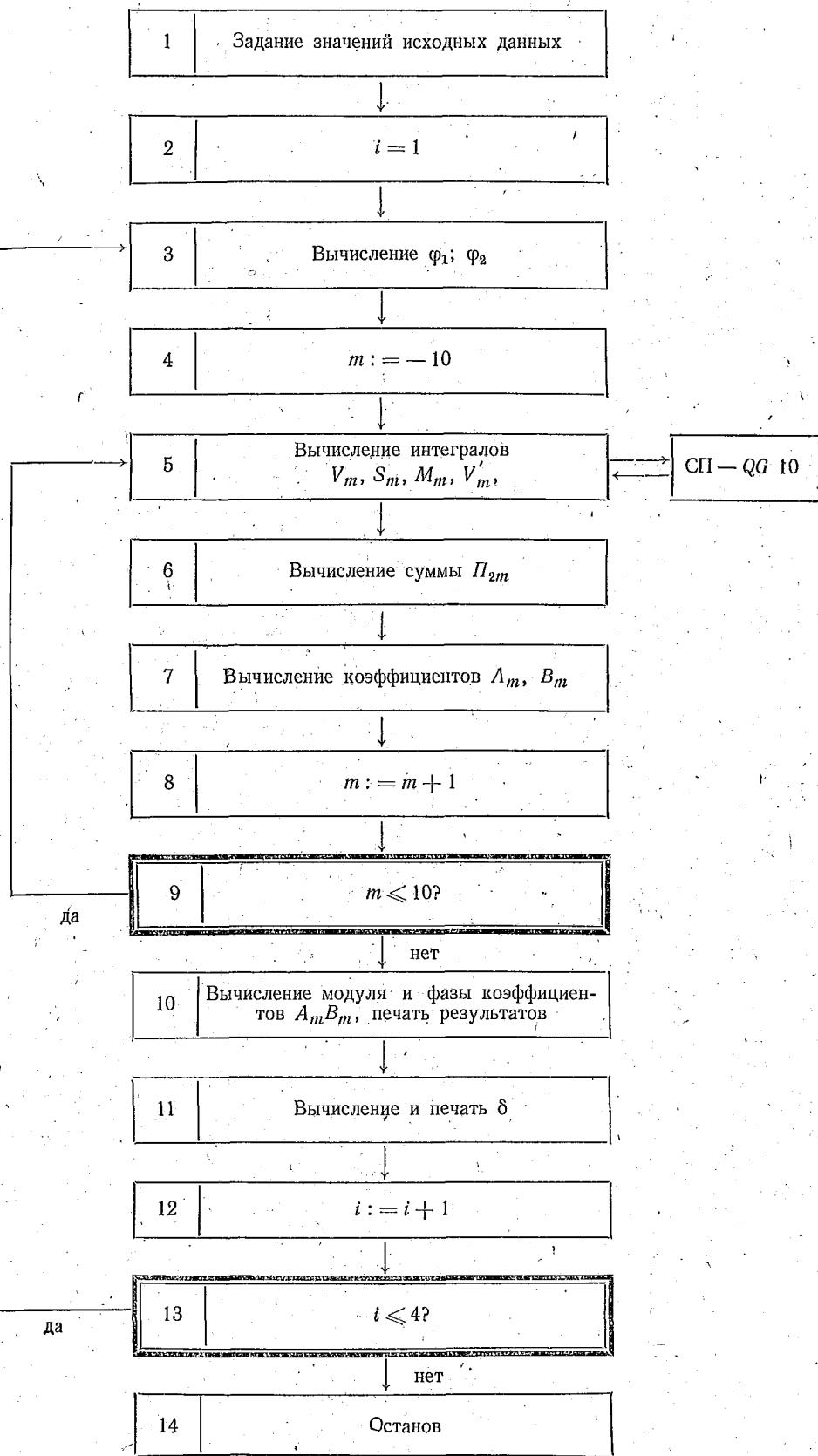
где $V_m = 2 \int_0^{\varphi_1} N_m(\psi, \varphi) d\varphi$; $V'_m = 2 \int_0^{\varphi_1} J'_m(\psi) d\varphi$;

$$S_m = 2 \int_0^{\varphi_2} [H_m^{(2)}(\psi) + 2\Pi_{2m} J'_m(\psi)] d\varphi;$$

$$S'_m = 2 \int_0^{\varphi_2} [H_m^{(2)'}(\psi) + 2\Pi_{2m} J'_m(\psi)] d\varphi;$$

$$L_m = 2 \int_0^{\varphi_2} J_m(\psi) d\varphi; \quad M'_m = \frac{1}{k} \int_0^{\varphi_1} \left\{ \frac{\partial N_m(r, \varphi)}{\partial z} \Big|_{r=\frac{a}{2 \cos \varphi}} \right\} d\varphi;$$

$$M_m = \frac{q_m}{k} \int_0^{\varphi_1} \frac{N_m(\psi, \varphi)}{\cos \varphi} d\varphi;$$



Решая систему (13), находим интересующие нас коэффициенты разложения прошедшего поля

$$B_m = \frac{\left(\operatorname{th} q_m \frac{a}{2} - \operatorname{cth} q_m \frac{a}{2} \right) (\alpha L_m M'_m + \beta \gamma)}{\alpha^2 - \beta^2},$$

где $\alpha = 2M_m S_m - 2V_m S'_m$; $\beta = 2S_m - M_m$; $\gamma = V_m V'_m - L_m M'_m$.

Из этой же системы уравнений (13) можно найти коэффициенты разложения отраженного поля B_m и поля между стержнями C_m, D_m .

Полученные результаты. Расчеты коэффициентов разложения и радиопрозрачности были выполнены на ЭВМ ЕС-1020.

На рис. 2 в качестве примера приведены результаты расчета радиопрозрачности одной из решеток по формуле [4]

$$\delta = \left| 1 + \frac{\lambda}{\pi d} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m B_m \right|^2;$$

а также полученные экспериментально. Результаты расчета совпадают с экспериментальными данными с относительной погрешностью не более 25%, что свидетельствует о применимости разработанного теоретического подхода к анализу радиопрозрачности стержневых структур с целью оптимизации их периода и сечения стержней.

Описание алгоритма и машинной программы. Блок-схема алгоритма счета показана ниже. Вычисления по соответствующим формулам выполняются для конкретных значений a, b и всех d_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Соответствующие интегралы вычисляются по стандартной программе (квадратная формула Гаусса с 10-ю узлами). Значения функций Бесселя $J_m(x)$ и $H_m^{(2)}(x)$ вычисляются по стандартным программам.

Блок 6 предназначается для вычисления суммы

$$\Pi_{2m} = \sum_{p=-10}^{+10} H_{2m}^{(2)}(kpl)$$

Программа составлена на языке Фортран-IV для ЕС ЭВМ. Время трансляции 2 мин 15 с, объем протранслированных программ (основной и двух подпрограмм — 1822 байта). Время счета одного варианта (фиксированные a, b , и 4 значения d) составляют 10 мин.

Порядок усечения бесконечной системы уравнений (13) выбирался путем сравнения результатов счета при различных m . В данном случае при $m > 10$ результаты счета практически не изменяются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шестопалов В. П. и др. Дифракция волн на решетках. Харьков, 1973.
2. Твергский — «IRE», 1962, АР-10, № 6.
3. Ключников А. С., Кикоин Б. С., Мишурная М. В. — «Вопросы радиоэлектроники. Сер. общетехн.», вып. 10, 1976.
4. Айзенберг Г. З. Антенны ультракоротких волн. М., 1957.