Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2010. Том 18. № 1. С. 6–14

УДК 519.173

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОСТОВНОГО ДЕРЕВА БЕЗ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ДОПОЛНЕНИИ ВЫПУКЛОГО ОСТОВНОГО ДЕРЕВА

В. И. Бенедиктович

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: vbened@im.bas-net.by
Поступила 01.02.2010

Исследуются достаточные условия существования непересекающегося остовного дерева в геометрических дополнениях остовных деревьев. В частности, получен критерий существования непересекающегося остовного дерева в геометрическом дополнении выпуклого остовного дерева.

Геометрический граф — это пара $(V(G), E(G))$, где $V(G)$ — множество различных точек на плоскости в общем положении, а $E(G)$ — множество замкнутых (вообще говоря, пересекающихся) прямолинейных отрезков, концы которых принадлежат множеству $V(G)$. Напомним, что семейство различных точек на плоскости находится *в общем положении,* если 1) никакие три из них не лежат на одной прямой; 2) среди проходящих через них прямых нет параллельных и 3) никакие три из этих прямых не пересекаются в точке, не принадлежащей семейству. Говорят, что два ребра геометрического графа *пересекаются,* если они имеют общую внутреннюю (для обоих) точку пересечения.

Поскольку множество точек на плоскости находится в общем положении, то никакие три ребра геометрического графа не пересекаются в одной точке и ребро, соединяющее две вершины, не проходит через третью. Далее не делается никаких различий между вершинами (ребрами) абстрактного графа без петель и кратных ребер и точками (отрезками) геометрического графа, представляющего этот абстрактный граф на плоскости. Кроме того, геометрический граф, представляющий абстрактный граф, обладающий свойством P, будем просто называть геометрическим графом со свойством P. Например, геометрический остовный граф на множестве X — это остовный граф на X, ребрами которого являются прямолинейные отрезки с концами из X.

Одной из важных проблем топологической теории графов является проблема существования непересекающегося подграфа H со свойством P в геометрическом графе, которая имеет различные приложения, например, в проектировании СБИС, передаче информации и распознавании образов. В общем случае эта проблема трудноразрешима [1]. Однако, для некоторых частных случаев [1–4] существует полиномиальное решение данной задачи. Так, в [2] установлено, что в геометрическом графе, являющемся дополнением совершенного паросочетания, существует непересекающаяся гамильтонова цепь. Нами был получен критерий существования непересекающегося остовного дерева в геометрическом дополнении 2-фактора [5].

В данной работе мы исследуем геометрическое дополнение произвольного геометрического остовного дерева в полном графе K_n на n вершинах.

Пусть T — произвольное геометрическое остовное дерево в полном геометрическом графе K_n и $G=(V,E)$ — его дополнение в K_n, то есть две вершины в $G=(V,E)$ смежны, тогда и только тогда, когда они не смежны в T.

Еще Эрдешем было показано, что полный граф, имеющий 2-раскраску ребер, обладает монохромным остовным деревом. В 1995 г. G. Karolyi, J. Pach и G. Toth [6] нашли доказательство более сильного утверждения.

Теорема 1. *Если полный геометрический граф имеет 2-раскраску ребер, то в нем существует монохромное несамопересекающееся остовное дерево.*

Отсюда можно получить следующее утверждение:

Теорема 2. *Геометрическое дополнение самопересекающегося остовного дерева обладает непересекающимся остовным деревом.*

Доказательство. Пусть T — самопересекающееся геометрическое остовное дерево в полном графе K_n и $G=(V,E)$ — его геометрическое дополнение в K_n. Раскрасим ребра дерева T в красный цвет, а ребра дополнения G — в синий. Тогда по теореме 1 в полном графе K_n с полученной 2-раскраской существует монохромное непересекающееся остовное дерево S. Но в силу того что дерево T является остовным и самопересекающимся, ребра остовного дерева S должны быть синего цвета, т.е. дерево S должно лежать в геометрическом дополнении G. Теорема доказана.

Поэтому будем рассматривать случай, когда исходное остовное геометрическое дерево T в полном графе K_n является непересекающимся.

Далее, мы будем дополнительно предполагать, что остовное дерево T является *выпуклым,* т.е. все вершины геометрического дерева T, а значит полного геометрического графа K_n, находятся в *выпуклом положении,* т.е. лежат на своей выпуклой оболочке. Без ограничения общности, можно считать, что они образуют множество вершин P_n правильного n-угольника и пронумерованы целыми числами от 1 до n по часовой стрелке, причем вершина с номером 1 имеет наименьшую x-координату.

Напомним некоторые свойства непересекающихся остовных деревьев, полного графа K_n, построенного на таком множестве точек P_n [7].

1. Произвольное остовное дерево S имеет, по крайней мере, два ребра на границе P_n, т.е. два ребра типа $(i,i+1)$, такие, что или вершина с номером i или с номером $i+1$ является листом дерева S.

2. Для любых двух непересекающихся остовных деревьев T_1 и T_2 можно определить *расстояние* $d(T_1,T_2)$, равное минимальному числу ребер, которые нужно последовательно заменить в одном дереве, чтобы получить второе дерево, причем при каждой замене ребер дерево должно оставаться остовным и непересекающимся. Под *заменой* ребра в непересекающемся остовном дереве S понимается удаление одного ребра e и добавление другого f, которое не пересекает ни одного ребра дерева S, кроме, быть может, ребра e. Кратко это обозначается в виде $S-e+f$. В результате такой операции над произвольным непересекающимся остовным деревом S получается так называемый *геометрический граф деревьев* D_n, множеством вершин которого является множество всех непересекающихся остовных деревьев геометрического полного графа K_n и два непересекающиеся остовные деревья T_1 и T_2 считаются *смежными,* если $d(T_1,T_2)=1$, т.е. $T_2=T_1-e+f$ для некоторых ребер $e\in E(T_1)$ и $f\in E(T_2)$.

3. Отметим, что полученный геометрический граф деревьев D_n является *связным* с *диаметром*, не превышающим $2n-4$.

В частности, отсюда следует

Лемма 1. *Если в геометрическом дополнении заданного непересекающегося остовного дерева T существует непересекающееся остовное дерево S, то расстояние $d(T,S)$ между ними удовлетворяет неравенству:*

$$d(T,\ S)\geq n-1. \tag{1}$$

Действительно, в силу связности геометрического графа деревьев D_n мы всегда последовательной процедурой замены ребер можем перейти от дерева T к дереву S, при этом все ребра дерева T должны быть заменены.

4. Двумя особыми классами непересекающихся остовных деревьев в геометрическом графе деревьев D_n являются *звезды* и *цепи.*

Звезда S_i получается соединением вершины с номером i со всеми остальными вершинами графа K_n. *Цепь* C_i получается объединением всех ребер на границе P_n, кроме одного ребра $i(i+1)$. Пусть $T \in D_n$ — произвольное непересекающееся остовное дерево и d_i — степень вершины с номером i в дереве T, а $ch(T)$ — число ребер T на границе P_n. Тогда имеют место следующие равенства:

$$d(T, S_i) = n - 1 - d_i$$

и

$$d(T, C_i) = \begin{cases} n - ch(T), & \text{если ребро} \quad i(i+1) \in T, \\ n - 1 - ch(T), & \text{если ребро} \quad i(i+1) \notin T. \end{cases}$$

Используя свойство 1, получаем, что как для произвольной звезды S_i, так и для произвольной цепи C_i справедливы неравенства $d(T,\ S_i) \leq n-2$ и $d(T,\ C_i) \leq n-2$. Сравнивая их с неравенством (1) леммы 1, приходим к следующему заключению:

Лемма 2. *В геометрическом дополнении любой звезды S_i и любой цепи C_i не существует непересекающегося остовного дерева.*

Далее, мы докажем более сильное утверждение. Для этого сначала введем некоторые дополнительные определения.

Определение 1. Максимальное множество последовательных ребер

$$K = \{i(i+1), (i+1)(i+2), \ldots, (j-1)j\}$$

непересекающегося остовного дерева T, лежащих на границе P_n, назовем *компонентой на границе* дерева T. Будем обозначать такую компоненту через $K = \{i, j\}$.

Ребра $i(i+1)$ и $(j-1)j$ назовем *крайними* ребрами компоненты, остальные ребра — *промежуточными*, а вершины i и j — *концевыми* вершинами компоненты.

Ясно, что две различные компоненты на границе непересекающегося остовного дерева T не имеют общих вершин и в силу свойства 1 непересекающееся остовное дерево T обладает по крайней мере одной компонентой на границе P_n.

Определение 2. Вершину l из множества P_n, не принадлежащую ни одной компоненте на границе дерева T, назовем *изолированной*. Будем говорить, что изолированная вершина l *лежит между компонентами* $K_1 = \{i, j\}$ и $K_2 = \{s, t\}$, если $j < l < s$.

Определение 3. *Длиной* $d(i, j)$ ребра ij, соединяющего вершины с номерами i и j, $i < j$, назовем число вершин на границе P_n, находящихся между вершинами $i-1$ и j, т.е. $d(i, j) = j - i$.

В этих терминах сформулируем следующее общее утверждение.

Теорема 3. *Геометрическое дополнение непересекающегося остовного дерева T, вершины которого находятся в выпуклом положении, содержит непересекающееся остовное дерево тогда и только тогда, когда T обладает по крайней мере двумя различными компонентами на границе своей выпуклой оболочки.*

Доказательство. Предположим, что непересекающееся остовное дерево T обладает только одной компонентой K на границе P_n. Не ограничивая общности, можно считать, что концевыми вершинами компоненты K на границе P_n являются вершины с номерами 1 и m.

Лемма 3. *Каждая из изолированных вершин с номерами $m+1, \ldots, n$ соединена единственным непересекающимся ребром дерева T с вершинами компоненты K.*

Доказательство. Докажем, что никакое ребро, концевые вершины которого являются изолированными, не принадлежит дереву T. Предположим противное: пусть ребро ij, $m+1 \leq i < j \leq n$, где i и j — изолированные вершины, принадлежит дереву T. Если длина равна $d(i,j) = 1$, то это противоречит тому, что дерево T обладает только одной компонентой. Пусть утверждение справедливо для всех ребер длины $d(i,j) < k$, где $k \geq 2$. Покажем, что и в случае $d(i,j) = k$ у дерева T нет такого ребра ij. Поскольку $d(i,j) \geq 2$, то найдется изолированная вершина с номером k, таким, что $i < k < j$. В силу того что дерево T непересекающееся и все вершины находятся в выпуклом положении, вершина k связана непересекающимся ребром дерева T с вершиной l, где $i \leq l \leq j$. Заметим, что $d(k,l) < d(i,j) = k$. Применяя теперь предположение индукции к ребру kl, получаем, что такого ребра у дерева T не существует.

Наконец, если бы существовали по крайней мере два ребра, инцидентные одной изолированной вершине j, то существовал бы цикл в остовном дереве T. Лемма 3 доказана.

Покажем теперь, что в геометрическом дополнении G непересекающегося остовного дерева T нет непересекающегося остовного дерева.

Предположим противное: пусть существует такое дерево S. Тогда вершина 1 инцидентна некоторому ребру e_1 дерева S. Заметим, что вторая вершина ребра e_1 не может принадлежать компоненте K.

Для этого мы покажем, что справедливо более общее утверждение.

Лемма 4. *Ребро e, обе вершины которого принадлежат компоненте K, т.е. имеют номера из множества $\{1, \ldots, m\}$, не может принадлежать дереву S.*

Доказательство. Мы воспользуемся индукцией по длине ребра e. В самом деле, если $d(e) = 1$, то ребро e входит в дерево T и, значит, не может лежать в его дополнении. Пусть утверждение справедливо для всех ребер e с длиной $d(e) < k$, где $2 \leq k < m$. Покажем, что оно верно и для ребра e с длиной $d(e) = k$. Пусть $e = i(i+k)$ ребро дерева S и вершины с номерами i и $i+k$ принадлежат компоненте K. Поскольку $k \geq 2$, между вершинами i и $i+k$ на границе P_n лежит еще некоторая вершина j, такая, что $i < j < i+k$. Тогда, в силу того что дерево S непересекающееся и все вершины P_n находятся в выпуклом положении, вершина j должна быть соединена непересекающимся ребром f дерева S с некоторой вершиной $l \neq j$, такой, что $i \leq l \leq i+k$. Но это противоречит предположению индукции, поскольку $d(f) = d(j,l) < k$ и ребро f не может принадлежать дереву S. Значит, ребро $e = i(i+k)$ также не принадлежит дереву S. Лемма 4 доказана.

Таким образом, вторая вершина i_1 ребра $e_1 = 1i_1$ дерева S должна быть изолированной и принадлежать множеству $\{m+1, \ldots, n\}$ (рис. 1а). По лемме 3 эта вершина i_1 в дереве T инцидентна некоторому ребру g_1, второй конец которого вершина j_1 принадлежит компоненте K: $1 < j_1 \leq m$. Рассмотрим теперь некоторое ребро e_2 дерева S, инцидентное вершине j_1. Во-первых, по лемме 4 его вторая вершина i_2 не может быть среди вершин компоненты; во-вторых, поскольку дерево S непересекающееся и все вершины P_n находятся в выпуклом положении, номер i_2 не может принадлежать множеству $\{i_1+1, \ldots, n\}$. Наконец, вершина i_2 должна быть отлична от вершины i_1, поскольку ребро $g_1 = i_1 j_1$ принадлежит дереву T. Следовательно, номер i_2 принадлежит множеству $\{m+1, \ldots, i_1-1\}$. Снова по лемме 3 вершина i_2 в дереве T инцидентна некоторому ребру g_2, второй конец которого вершина j_2 принадлежит компоненте K, причем в силу того что дерево T непересекающееся и все вершины P_n находятся в выпуклом положении: $j_1 < j_2 \leq m$. Продолжая эти рассуждения, мы на каком-то, k-м шаге, придем к ситуации, когда либо $j_k = m$, либо $i_k = m+1$. Т.е., либо ребро $g_k = i_k m$, $i_k > m+1$ принадлежит дереву T, либо ребро $e_k = (m+1)j_{k-1}$, $j_{k-1} < m$ принадлежит дереву S. В первом случае, в силу того что дерево T непересекающееся, следует, что вершина $(m+1)$ инцидентна ребру дерева T, второй конец которого принадлежит множеству $\{m+2, \ldots, i_k\}$, что противоречит лемме 3. Во втором случае, вершина $(m+1)$ должна быть инцидентна в дереве T ребру $g_k = j_k(m+1)$, где $j_{k-1} < j_k < m$. Это невозможно в случае, когда $j_{k-1} = m-1$, поскольку тогда вершина j_k должна быть инцидентна ребру дерева S, второй конец которого принадлежит множеству $\{j_k+1, \ldots, m\}$, что противоречит лемме 4.

Таким образом, необходимость утверждения теоремы 3 доказана.

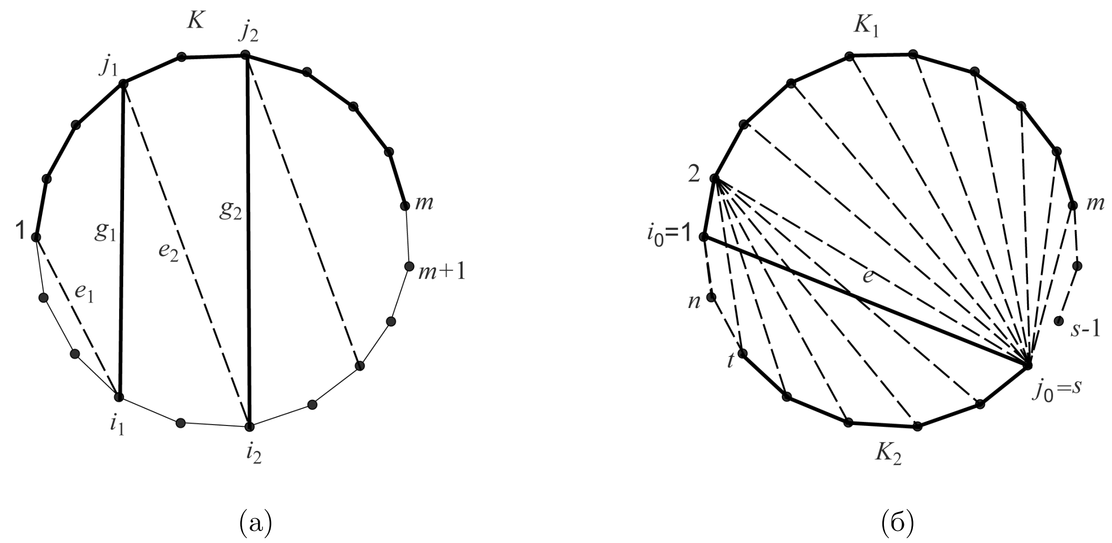


Рис. 1. К доказательству теоремы 3.

Докажем теперь достаточность утверждения теоремы 3, а именно, в случае, когда дерево T обладает по крайней мере двумя компонентами на границе P_n, его геометрическое дополнение G содержит непересекающееся остовное дерево. Доказательство проведем индукцией по числу r компонент дерева T.

Пусть дерево T обладает двумя $(r = 2)$ различными компонентами K_1, K_2 на границе P_n. Без ограничения общности можно считать, что множество вершин $\{1, \ldots, m\}$ принадлежит компоненте K_1, а множество вершин $\{s, s+1, \ldots, t\}$, где $s > m$, $t \leq n$ — компоненте K_2. В силу связности дерева T существуют две возможности:

1) две компоненты K_1 и K_2 соединены некоторым ребром $e = i_0 j_0$, где $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ и $j_0 \in \{s, s+1, \ldots, t\}$;

2) две компоненты K_1 и K_2 соединены цепью из нескольких непересекающихся ребер $e_1, e_2, \ldots, e_l$, таких, что все промежуточные ребра цепи $e_2, \ldots, e_{l-1}$ имеют концевые вершины в изолированных точках, лежащих в силу леммы 3 в разных множествах $A = \{m+1, \ldots, s-1\}$ и $B = \{t+1, \ldots, n\}$, и два крайних ребра цепи e_1, e_l имеют одну из концевых вершин в (различных) компонентах, вторую — в одном из множеств A или B.

Тогда, в силу того что дерево T непересекающееся и отсутствия циклов в нем, в каждом из этих двух случаев все ребра $f = ij$, где $i \in \{1, \ldots, m\}$ и $j \in \{s, s+1, \ldots, t\}$, кроме ребра $e = i_0 j_0$ (для первого случая), лежат в его геометрическом дополнении G. Поэтому, не ограничивая общности, достаточно показать, как в последнем случае (ребро $e = i_0 j_0$, где $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ и $j_0 \in \{s, s+1, \ldots, t\}$, не лежит в геометрическом дополнении G) строится непересекающееся остовное дерево S в геометрическом дополнении G.

Будем различать два случая, в зависимости от которых строится это дерево S.

I. По крайней мере у одной вершины из i_0 и j_0 существуют две смежные вершины дерева T, принадлежащие соответственно компоненте K_1 или K_2. Пусть это будет вершина i_0 и вершины с номерами $i_0 - 1$ и $i_0 + 1$ принадлежат компоненте K_1. Пусть также некоторая вершина j_1 смежна с вершиной j_0 в дереве T и принадлежит компоненте K_2 (заметим, что такая вершина всегда существует). Тогда нетрудно видеть, что непересекающееся остовное дерево S будет составлять следующее множество ребер:

$$S = \{j_1k|\ k = \overline{1,m}\} \cup \{(t+1)(t+2), \dots, (n-1)n, n1\} \cup$$

$$\cup \{m(m+1), \dots, (s-2)(s-1)\} \cup \{1(j_0+2), \dots, 1t\} \cup \{ms, m(s+1), \dots, m(j_0-2)\},$$

плюс ребра $\{1j_0, 1(j_0+1)\}$ или $\{mj_0, m(j_0-1)\}$, в зависимости от того $j_1 = j_0 - 1$ или $j_1 = j_0 + 1$.

II. У вершин i_0 и j_0 существует только по одной смежной вершине в дереве T, каждая из которых принадлежит компонентам K_1 или K_2 соответственно, т.е. вершины i_0 и j_0 являются концевыми вершинами компонент K_1 или K_2 соответственно: $i_0 \in \{1, m\}$ и $j_0 \in \{s, t\}$. Заметим тогда, что ребро $e = i_0j_0$ дерева T не может совпадать ни с ребром $1t$, ни с ребром ms, поскольку иначе в дереве T существовало бы ребро с концевыми вершинами из множества $\{t, t+1, \dots, n, 1\}$ или из множества $\{m, m+1, \dots, s\}$ соответственно, что невозможно в силу рассуждений из доказательства леммы 3. Тогда, в случае когда $e = i_0j_0 = 1s$, нетрудно видеть, что непересекающееся остовное дерево S будет составлять следующее множество ребер (рис. 1б):

$$S = \{2k|\ k = \overline{s,t}\} \cup \{sk|\ k = \overline{3,m}\} \cup$$

$$\cup \{t(t+1), \dots, (n-1)n, n1\} \cup \{m(m+1), \dots, (s-2)(s-1)\},$$

а в случае когда $e = i_0j_0 = mt$, нетрудно видеть, что непересекающееся остовное дерево S будет составлять следующее множество ребер:

$$S = \{(m-1)k|\ k = \overline{s,t}\} \cup \{tk|\ k = \overline{1, m-2}\} \cup$$

$$\cup \{sm, t(t+1), \dots, (n-1)n\} \cup \{m(m+1), \dots, (s-2)(s-1)\}.$$

Пусть предположение индукции верно, когда число компонент дерева T на границе P_n меньше r и покажем, что оно верно для числа компонент дерева T на границе P_n, равного $r:$ $K_i,\ i = \overline{1,r}$. Пусть $|K_i| = m_i,\ i = \overline{1,r}$, и, без ограничения общности, $K_1 = \{1, m_1\}$.

Рассмотрим компоненту K_1. Из связности дерева T следует, что

1) либо существует некоторое ребро $e = i_0j_0$, соединяющее некоторую вершину i_0 компоненты K_1 с некоторой вершиной другой компоненты K_l,

2) либо существует некоторая цепь из ребер $e_1, e_2, \dots, e_l$, промежуточные ребра которой, $e_2, \dots, e_{l-1}$, имеют концевые вершины в изолированных точках, а крайние ребра, e_1, e_l имеют одну вершину в изолированной точке, а другую — в вершине компоненты K_1 или K_l соответственно.

В первом случае, прямая, определяемая ребром $e = i_0j_0$, разбивает множество n точек на два выпуклых подмножества из s и t точек соответственно, имеющих две общие точки i_0 и j_0. Кроме того, в силу того что дерево T непересекающееся, оно распадается на два остовных поддерева T_1 и T_2 для множеств из s и t точек соответственно и имеющих одно общее ребро $e = i_0j_0$. При этом в силу того что ребро $e = i_0j_0$ соединяет две компоненты, число компонент на границах выпуклых оболочек деревьев T_1 и T_2 будет меньше r.

Поэтому, если у обоих деревьев T_1 и T_2 число компонент на границах их выпуклых оболочек будет не меньше двух, то можно применить предположение индукции и построить остовные непересекающиеся деревья S_1 и S_2 в геометрических дополнениях T_1 и T_2 соответственно. Объединяя ребра деревьев S_1 и S_2, мы получим непересекающийся остовный граф, имеющий $(s-1)+(t-1) = n$ ребер. Удаляя из него одно лишнее ребро, получим требуемое непересекающееся остовное дерево, которое лежит уже в геометрическом дополнении всего дерева T.

Пусть теперь у одного из деревьев T_1 или T_2, скажем T_1, на границе его выпуклой оболочки только одна компонента (заметим, что в силу того что $r \geq 3$ и ребро e связывает две компоненты, два дерева T_1 и T_2 не могут одновременно обладать только одной компонентой на своих выпуклых оболочках). При этом возможны два случая: 1) ребро e является промежуточным ребром единственной компоненты дерева T_1; 2) ребро e является крайним ребром единственной компоненты дерева T_1. В обоих случаях, по предположению индукции, существует непересекающееся остовное дерево S_2 в геометрическом дополнении T_2.

Для случая 1) к дереву S_2 мы добавляем множество ребер

$$A = \{j_0k \mid k \text{ — вершина, лежащая в } T_1 \text{ и отличная от } i_0 \text{ и } j_0\}$$

(рис. 2а). Нетрудно видеть, что в результате получим непересекающееся остовное дерево S в геометрическом дополнении дерева T.

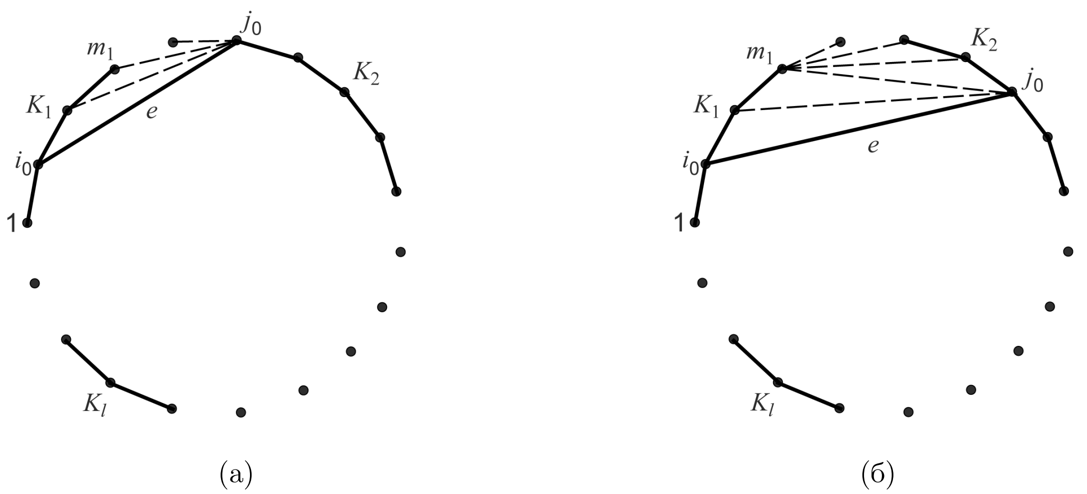


Рис. 2. Случай, когда дерево T_1 имеет только одну компоненту.

Для случая 2) к дереву S_2 мы добавляем множество ребер $A = \{j_0k \mid k = \overline{i_0+1, m_1}\}$ и множество ребер $B = \{m_1k \mid k = \overline{m_1+1, j_0-1}\}$ (рис. 2б). Нетрудно видеть, что все они не лежат в дереве T, и значит, в результате также получим непересекающееся остовное дерево S в геометрическом дополнении дерева T.

Наконец, рассмотрим случай 2, когда компонента K_1 связана цепью из ребер с некоторой компонентой K_l. Возьмем первое ребро цепи $e_1 = i_0j_0$, где i_0 — вершина компоненты K_1, а j_0 — изолированная вершина. Снова, прямая, определяемая ребром $e_1 = i_0j_0$, разбивает множество n точек на два выпуклых подмножества из s и t точек соответственно, имеющих две общие точки i_0 и j_0. Кроме того, в силу того что дерево T непересекающееся, оно распадается на два остовных поддерева T_1 и T_2 для множеств из s и t точек соответственно и имеющих одно общее ребро $e = i_0j_0$.

Если изолированная вершина j_0 не лежит между компонентами K_1 и K_2 или K_1 и K_l, то оба остовных дерева имеют число компонент в пределах от двух до $r-1$, а следовательно, можно применить предположение индукции и построить остовные непересекающиеся деревья S_1 и S_2 в геометрических дополнениях T_1 и T_2 соответственно. Объединяя ребра деревьев S_1 и S_2, мы получим непересекающийся остовный граф, имеющий $(s-1)+(t-1)=n$ ребер. Удаляя из него одно лишнее ребро, получим требуемое непересекающееся остовное дерево, которое лежит в геометрическом дополнении всего дерева T.

Поэтому рассматривая оставшуюся возможность, положим для определенности, что вершина j_0 лежит между компонентами K_1 и K_2. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Геометрическое дополнение дерева T_2 обладает непересекающимся остовным деревом S_2.*

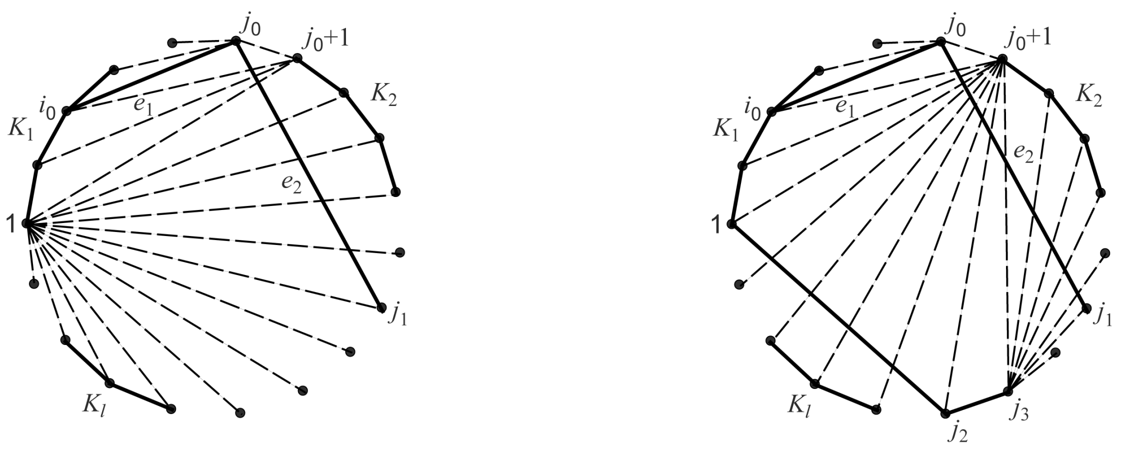
Доказательство. Действительно, обозначим следующее ребро цепи $e_2 = j_0j_1$. Существуют две возможности:

1) вершина 1 имеет степень 1 в дереве T;

2) степень вершины 1 в дереве больше 1.

В первом случае нетрудно видеть, что непересекающееся остовное дерево S_2 будет составлять следующее множество ребер (рис. 3а):

$$S_2 = \{1k|\ k = \overline{j_0+1, n}\} \cup \{(j_0+1)k|\ k = \overline{2, i_0}\} \cup \{j_0(j_0+1)\}.$$



(а) (б)

Рис. 3. К доказательству леммы 5.

Во втором случае, кроме ребра 12, существует ребро $1j_2$ $(j_2 > j_1)$ дерева T и, значит, T_2. Поскольку в дереве нет циклов, то существует вершина j_3, $j_1 < j_3 \leq j_2$ такая, что ребра j_3k, $k = \overline{j_1, j_3 - 1}$. Тогда нетрудно видеть, что непересекающееся остовное дерево S_2 будет составлять следующее множество ребер (рис. 3б):

$$S_2 = \{j_3k,\ k = \overline{j_0+2, j_3-1}\} \cup \{(j_0+1)k|\ k = \overline{j_3, i_0}\} \cup \{j_0(j_0+1)\}.$$

Лемма 5 доказана.

Добавляя теперь в обоих случаях к непересекающемуся дереву S_2 множество ребер

$$A = \{j_0k|\ k = \overline{i_0+1, j_0-1}\},$$

получим непересекающееся остовное дерево S в геометрическом дополнении дерева T. Тем самым шаг индукции, а значит, достаточность утверждения теоремы 3 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Института математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований “Математические модели”.

Литература

1. *Kratochvil J., Lubiw A., Nesetril J.* Noncrossing Subgraphs in Topological Layouts // SIAM J. Disc. Math. 1991. V. 4. № 2. P. 223–244.
2. *Cerny J., Dvorak Z., Jelinek V., Kara J.* Noncrossing Hamiltonian paths in geometric graphs // Disc. Appl. Math. 2007. V. 155. № 9. P. 1096–1105.
3. *Kaneko A., Kano M., Suzuki K.* Balanced Partitions and Path Covering of Two Sets of Points in the Plane // Comput. Geom.: Theory and Applications. 1999. V. 13. P. 253–261.
4. *Abellanas M., Garcia G., Hernandez G., Noy M., Ramos P.* Bipartite embedings of trees in the plane // Disc. Appl. Math. 1999. V. 93. P. 141–148.
5. *Бенедиктович В.И.* Остовное дерево без самопересечений в геометрическом дополнении 2-фактора // III науч. конф. "Теория расписаний и методы декомпозиции. Танаевские чтения". Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2007. С. 15–19.
6. *Karolyi G., Pach J., Toth G.* Ramsey-type Results for Geometric Graphs I // DIMACS Technical Report 95–49. 1995. P. 1–10.
7. *Hernando M., Hurtado A., Marquez A., Mora M., Noy M.* Geometric tree graphs of points in convex position // Disc. Appl. Math. 1999. V. 93. P. 51–66.

V. I. Benediktovich

An existence criterion of a non-crossing spanning tree in the geometric complement of a convex spanning tree

Summary

In this article an existence criterion of a non-crossing spanning tree in the geometric complement of a convex spanning tree has been obtained.