

УДК 620.179.14

Ю. И. ДОРОГОВ, Б. А. ЛУЧЕВСКИЙ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ФЕРРОМАГНИТНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Использование нелинейных и гистерезисных свойств ферромагнитных материалов в практике неразрушающего контроля и других областях вызывает интерес к вопросам теории нелинейных процессов в ферромагнетиках. Аналитическое описание нелинейных процессов в ферромагнетике может быть осуществлено только приближенно вследствие известных математических трудностей. Тем не менее это дало определенные результаты для ряда частных случаев, например, для бесконечного цилиндра в слабом переменном поле (релеевская область), для ферромагнитного полупространства, у которого петля гистерезиса аппроксимируется полиномом 3-й степени, и некоторых других. Краткий обзор литературы по данному вопросу приведен в [1]. Как правило, при решении соответствующих уравнений Максвелла без должного обоснования производится замена синусоидального (косинусоидального) намагничивающего поля вращающимся гармоническим. Как будет показано ниже, подобная замена приводит к искажению физики процесса и, следовательно, конечных уравнений для напряженности магнитного поля, магнитной индукции и др.

В настоящей работе сделана попытка получить в общем виде систему уравнений, для напряженности магнитного поля и магнитной индукции в ферромагнитном полупространстве с известной нелинейной зависимостью $B=f(H)$, на которое действует косинусоидальное магнитное поле.

Решение подобной задачи для активной составляющей напряженности магнитного поля в ферромагнитном полупространстве рассмотрено в работе [1]. Задача сформулирована следующим образом. На изотропное ферромагнитное полупространство с постоянной удельной электропроводностью σ и известной зависимостью $B=f(H)$ действует переменное гармоническое магнитное поле в форме плоской волны:

$$H = H_m \cos \omega t. \quad (1)$$

После решения соответствующего уравнения Максвелла с учетом влияния вихревых токов и петли гистерезиса получено общее уравнение для напряженности переменного магнитного поля в ферромагнитном полупространстве:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\bar{H}_n''(x) - \lambda^2 n \bar{H}_n(x)] \exp(in\omega t) \pm 2H_{cg} q^{-1} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{H}_n(x) \exp(in\omega t) + \right.$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\bar{H}_n''(x) - \tau^2 n \bar{H}_n(x)] \exp(in\omega t) \Big] + q^{-1} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{H}_n(x) \exp(in\omega t) \right]^2 \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\bar{H}_n''(x) - \tau^2 n \bar{H}_n(x)] \exp(in\omega t) = 0, \quad (2)$$

где $\bar{H}_n''(x) = \frac{\partial^2 \bar{H}_n(x)}{\partial x^2}$; $\lambda^2 = i\omega\sigma\mu_g^0$; $\tau^2 = i\omega\sigma\mu_r$.

Значения величин ω , σ , μ_g^0 , μ_r , H_{cg} , q см. в [1].

Для рассматриваемого случая, когда на ферромагнетик действует чисто косинусоидальное поле, можно легко показать, что $H_0=0$. Замена в (2) рядов с пределами $-\infty \leq n \leq \infty$ их значениями (с учетом $H_0=0$) по формуле

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{H}_n(x) \exp(in\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \bar{H}_n(x) \exp(in\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{H}_n(x) \exp(in\omega t) \quad (3)$$

позволила получить преобразованное общее уравнение, которое представляет структуру магнитного поля для рассматриваемого случая.

Проведенный нами сравнительный анализ преобразованного общего уравнения и выражения (1) в виде $H = H_m \cos \omega t = \frac{1}{2} H_m [\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)]$ показывает, что при действии на ферромагнетик косинусоидального магнитного поля (сумма двух вращающихся гармонических полей, отличающихся только направлением вращения) поле в ферромагнетике можно представить в виде суммы трех полей: двух, образованных из внешних полей с измененными амплитудами и фазами, и третьего — сформировавшегося за счет взаимодействия этих двух полей и содержащего составляющие комбинационных частот. Подобные процессы имеют место в случае воздействия двух различных гармонических сигналов на нелинейный элемент, что широко применяется в радиотехнике. Общее уравнение для напряженности переменного магнитного поля в ферромагнетике может иметь и несколько иной вид, так как его форма определяется главным образом уравнением петли гистерезиса рассматриваемого ферромагнетика, однако, принцип его построения должен сохраняться для любого ферромагнетика.

Уравнения для напряженности магнитного поля представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения, которые разрешаются приближенно. В настоящей работе решение этого уравнения выполняется также путем последовательных приближений.

В первом приближении не учитывается взаимное влияние гармонических составляющих вида $H_n(x) \exp(in\omega t)$ и $H_{-n}(x) \exp(-in\omega t)$. Для этого случая получены следующие формулы для амплитуд 1-й и 3-й гармоник напряженности магнитного поля [1]:

$$H_{11}(x, t) = C_1 H_m \exp(-kx) \exp[i(\omega t - kx)]; \\ H_{31}(x, t) = C_2 H_m^3 H_{cg}^{-2} c_1(\mu) c_2(\mu) \{ \exp(-\sqrt{3}kx) \exp[i(3\omega t - \sqrt{3}kx)] - \\ - \exp(-3kx) \exp[3i(\omega t - kx)] \}, \quad (4)$$

где $k^2 = 1/2 \omega \sigma \mu_g^0$; $c_1(\mu) = \frac{\mu_g^m - \mu_g^0}{\mu_g^0}$; $c_2(\mu) = \frac{\mu_g^0 - \mu_r}{\mu_g^m - \mu_r}$; C_n — постоянные коэффициенты (μ_g^m — см. [1]).

Выражения для $H_{-11}(x, t)$ и $H_{-31}(x, t)$ отличаются от приведенных в (4) только знаком «—» перед i в показателе степени экспоненты.

Выражения $H_{11}(x, t)$, $H_{31}(x, t)$, $H_{-11}(x, t)$, $H_{-31}(x, t)$ используются при решении преобразованного уравнения (2) во втором приближении. При

этом уравнения для амплитуд 1-й и 3-й гармоник напряженности поля составляются с учетом взаимодействия этих гармонических составляющих, а также влияния 3-й гармоники на величину первой.

В результате решения уравнений для амплитуд 1-й и 3-й гармоник с учетом указанных выше допущений получены следующие выражения:

$$H_{12}(x, t) = k_1 \cos(\omega t - kx) + k_2 \cos[\omega t - (2 - \sqrt{3}) kx] + k_3 \cos[\omega t - (4 - \sqrt{3}) kx] + p_1 \sin(\omega t - kx) + p_2 \sin[\omega t - (2 - \sqrt{3}) kx] + p_3 \sin[\omega t - (4 - \sqrt{3}) kx]; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} H_{32}(x, t) = & r_1 \cos(3\omega t - \sqrt{3} kx) + r_2 \cos 3(\omega t - kx) + \\ & + r_3 \cos[3\omega t - (1 - \sqrt{3}) kx] + r_4 \cos[3\omega t + (1 - \sqrt{3}) kx] + \\ & + r_5 \cos[3\omega t + (3 + \sqrt{3}) kx] + r_6 \cos[3\omega t + (3 - 2\sqrt{3}) kx] + \\ & + r_7 \cos[3\omega t - (6 - \sqrt{3}) kx] + r_8 \cos[3\omega t + (6 - \sqrt{3}) kx] + \\ & + r_9 \cos[3\omega t - (6 + \sqrt{3}) kx] + r_{10} \cos 3[\omega t + (2 - \sqrt{3}) kx] + \\ & + r_{11} \cos[3\omega t - (9 - 2\sqrt{3}) kx] + r_{12} \cos[3\omega t - (11 - 2\sqrt{3}) kx] + \\ & + r_{13} \cos 3[\omega t - (4 - \sqrt{3}) kx] + s_1 \sin(3\omega t - \sqrt{3} kx) + \\ & + s_2 \sin 3(\omega t - kx) + s_3 \sin[3\omega t - (1 - \sqrt{3}) kx] + \\ & + s_4 \sin[3\omega t + (1 - \sqrt{3}) kx] + s_5 \sin[3\omega t + (3 + \sqrt{3}) kx] + \\ & + s_6 \sin[3\omega t + (3 - 2\sqrt{3}) kx] + s_7 \sin[3\omega t - (6 - \sqrt{3}) kx] + \\ & + s_8 \sin[3\omega t + (6 - \sqrt{3}) kx] + s_9 \sin[3\omega t - (6 + \sqrt{3}) kx] + \\ & + s_{10} \sin 3[\omega t + (2 - \sqrt{3}) kx] + s_{11} \sin[3\omega t - (9 - 2\sqrt{3}) kx] + \\ & + s_{12} \sin[3\omega t - (11 - 2\sqrt{3}) kx] + s_{13} \sin 3[\omega t - (4 - \sqrt{3}) kx], \quad (6) \end{aligned}$$

где k_n, p_n, r_n, s_n ($n=1, 2, \dots$) — переменные коэффициенты, зависящие от электромагнитных характеристик ферромагнетика. Следует отметить, что в k_1 и r_1 первыми слагаемыми входят выражения для $H_{11}(x, t)$ и $H_{31}(x, t)$ соответственно.

Синусовая компонента ряда Фурье появляется только при учете взаимодействия соответствующих гармоник обоих вращающихся полей. Следовательно, замена поля вида $H = H_m \cos \omega t$ полем вида $H = H_m \exp(i\omega t)$ неправомерна. Все четные гармоники напряженности магнитного поля в рассматриваемом случае равны нулю. Из сравнения (5) и (6) видно, что вывод формул для амплитуд более высоких (5-й, 7-й ...) гармоник нецелесообразен, так как это приводит только к усложнению выражений.

Из уравнений (5) и (6) следует, что напряженность магнитного поля в ферромагнитном полупространстве является периодической функцией времени, которая может быть разложена в ряд Фурье вида

$$H(x, t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + A_3 \cos(3\omega t - \varphi_3) + \dots + B_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + B_3 \sin(3\omega t - \varphi_3) + \dots, \quad (8)$$

где

$$A_1 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} k_n^2}, \quad A_3 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2}, \quad B_1 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} p_n^2}, \quad B_3 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2}, \quad (9)$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{A_1}{B_1}; \quad \varphi_3 = \arctg \frac{A_3}{B_3}. \quad (10)$$

Каждый коэффициент ряда Фурье является бесконечным знакпеременным сходящимся рядом, так как все его члены содержат множитель $\exp(-lx)$, причем значение коэффициента l возрастает достаточно быстро. Практическое значение поэтому имеет оценка числа членов ряда, которые вносят основной вклад в величину соответствующего коэффициента ряда Фурье. Результаты выполненных расчетов показывают, что вплоть до области максимальной магнитной проницаемости ($H_m \approx H_{cg}$) для 1-й гармоники достаточно учитывать члены с $l \leq 3$, а для 3-й — с $l \leq 5$. При этом выражения для $H_{12}(x, t)$ и $H_{32}(\omega, t)$ можно будет записать следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{12}(x, t) &\approx k'_1 \cos(\omega t - kx) + p'_1 \sin(\omega t - kx); \\ H_{32}(x, t) &\approx r'_1 \cos(3\omega t - \sqrt{3} kx) + r'_2 \cos(3\omega t - 3kx) + \\ &+ s'_1 \sin(3\omega t - \sqrt{3} kx) + s'_2 \sin(3\omega t - 3kx), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{где } k'_1 &= H_m \exp(-kx) + 1/20 H_m^3 H_{cg}^{-2} c_1(\mu) c_2(\mu) \times \\ &\times [\exp(-kx) - \exp(-3kx)]; \\ p'_1 &= 0,1 H_m^3 H_{cg}^{-2} c_1(\mu) c_2(\mu) [\exp(-kx) - \exp(-3kx)]; \\ r'_1 &= [1/24 H_m^3 H_{cg}^{-2} c_1(\mu) c_2(\mu) + 3/160 H_m^5 H_{cg}^{-2} c_1^2(\mu) c_2^2(\mu)] \times \\ &\times \exp(-\sqrt{3} kx); \\ r'_2 &= -1/24 H_m^3 H_{cg}^{-2} c_1(\mu) c_2(\mu) \exp(-3kx) - 1/160 H_m^5 H_{cg}^{-4} \times \\ &\times c_1^2(\mu) c_2^2(\mu) [\exp(-3kx) + 2 \exp(-5kx)]; \\ s'_1 &= -1/80 H_m^5 H_{cg}^{-4} c_1^2(\mu) c_2^2(\mu) \exp(-\sqrt{3} kx); \\ s'_2 &= 1/80 H_m^5 H_{cg}^{-4} c_1^2(\mu) c_2^2(\mu) \exp(-3kx). \end{aligned} \quad (12)$$

С ростом напряженности внешнего магнитного поля усиливается влияние нелинейности магнитных свойств ферромагнетика и для сохранения заданной точности расчетов необходимо усложнять соответствующие формулы, особенно в области приближения к насыщению.

В результате решения уравнений Максвелла из выражений (11), (12) получены формулы для 1-й и 3-й гармоник магнитной индукции в ферромагнитном полупространстве:

$$\begin{aligned} B_{12}(x, t) &= k''_1 \cos(\omega t - kx) + p''_1 \sin(\omega t - kx); \\ B_{32}(x, t) &= r''_1 \cos(3\omega t - \sqrt{3} kx) + r''_2 \cos(3\omega t - 3kx) + \\ &+ s''_1 \sin(3\omega t - \sqrt{3} kx) + s''_2 \sin(3\omega t - 3kx), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{где } k''_1 &= H_m \mu_g^0 \{ \exp(-kx) + 1/20 H_m^2 H_{cg}^{-2} c_1(\mu) c_2(\mu) \times \\ &\times [\exp(-kx) - 5 \exp(-3x)] \}; \\ p''_1 &= 0,1 H_m^3 H_{cg}^{-2} \mu_g^0 c_1(\mu) c_2(\mu) [\exp(-kx) + 5 \exp(-3kx)]; \\ r''_1 &= -H_m \mu_g^0 [1/24 H_m^2 H_{cg}^{-2} c_1(\mu) c_2(\mu) + 3/160 H_m^4 H_{cg}^{-4} \times \\ &\times c_1^2(\mu) c_2^2(\mu) \exp(-\sqrt{3} kx)]; \\ r''_2 &= H_m \mu_g^0 \{ [1/8 H_m^2 H_{cg}^2 c_1(\mu) c_2(\mu) + 3/160 H_m^4 H_{cg}^{-4} \times \\ &\times c_1^2(\mu) c_2^2(\mu) \exp(-3kx) + 1/80 H_m^4 H_{cg}^{-4} c_1^2(\mu) c_2^2(\mu) \exp(-5kx)]; \\ s''_1 &= -1/8 H_m^5 H_{cg}^{-4} \mu_g^0 c_1^2(\mu) c_2^2(\mu) \exp(-\sqrt{3} kx); \\ s''_2 &= H_m \mu_g^0 [3/80 H_m^4 H_{cg}^{-4} c_1^2(\mu) c_2^2(\mu) \exp(-3kx) + \\ &+ 1/30 H_m^4 H_{cg}^{-4} c_1^2(\mu) c_2^2(\mu) \exp(-5kx)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Если в (13) принять $x=0$, то система уравнений для гармоник магнитной индукции согласуется с соответствующими выражениями, предложенными В. К. Аркадьевым [2].

Полученные уравнения соответствуют известным физическим представлениям о процессе перемангничивания ферромагнетика переменным магнитным полем, правильно описывают зависимость параметров магнитного поля в ферромагнитном полупространстве и на его поверхности от электромагнитных характеристик ферромагнетика, что позволяет применить их для решения ряда прикладных задач, например, неразрушающего контроля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дорогов Ю. И., Лучевский Б. А.— «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех.», 1976, № 2, 29.
2. Аркадьев В. К. Электромагнитные процессы в металлах, ч. 2. Электромагнитное поле. М.— Л., 1936.

Поступила в редакцию
14/I 1977 г.

Кафедра радиотехники и физической электроники,
Отдел неразрушающего контроля АН БССР

УДК 535.514.2

И. Д. БОНДАРЕНКО, Б. Ю. ХАНОХ

ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ ТЕТРАЭДРИЧЕСКОГО ПРИЗМЕННОГО ОТРАЖАТЕЛЯ

Тетраэдрические призмные отражатели на основе полного внутреннего отражения в значительной степени изменяют состояние поляризации отраженной световой волны [1—3]. Однако в некоторых случаях их применения (например, в интерферометрии, в лазерной технике и т. д.) необходимо, чтобы состояние поляризации отраженной световой волны было инвариантным состоянию поляризации падающей волны (собственное состояние поляризации).

Уравнение, из которого можно определить собственное состояние поляризации, имеет следующий вид [1]:

$$C_{ij} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где C_{ij} — матрица поляризующего действия тетраэдрического призмного отражателя; a — составляющая вектора падающей световой волны, перпендикулярная к плоскости падения, а b — лежащая в плоскости падения; K — собственные значения, характеризующие фазовые и амплитудные изменения, вносимые отражателем в компоненты электрического вектора отраженной волны.

Значения K можно найти из характеристического уравнения вида:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - K & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - K \end{vmatrix} = 0; \quad (2)$$

$$K_{1,2} = \frac{1}{2} [(c_{11} + c_{22}) \pm \sqrt{(c_{11} + c_{22})^2 - 4(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})}]. \quad (3)$$

Собственное состояние поляризации определяется отношением b/a составляющих собственного вектора, которое нетрудно получить из (1):

$$\frac{b}{a} = \frac{K - c_{11}}{c_{12}}. \quad (4)$$