УДК 517.968.73

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПОЛНОГО ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПРАНДТЛЯ

Г. А. РАСОЛЬКО[1]***, В. М. ВОЛКОВ***[2]***, М. В. ИГНАТЕНКО***[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*
[2]*Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь*

Аннотация. Статья посвящена проблеме построения вычислительных схем для решения интегро-дифференциальных уравнений Прандтля, возникающих во многих задачах механики. В ней разработаны приближенные численные алгоритмы для решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений вида обобщенного уравнения Прандтля. Предлагаемые приближенные вычислительные схемы основаны на представлении решения уравнения в виде разложения по ортогональному базису полиномов Чебышева. Использование известных спектральных соотношений позволило получить аналитическое выражение для сингулярной составляющей уравнения. Как следствие, разработанная методика демонстрирует высокую точность и экспоненциальную скорость сходимости приближенного решения относительно степени интерполяционных многочленов. Вычислительные качества данной методики продемонстрированы на тестовом примере. В частности, показано, что дискретная

Образец цитирования:
Расолько ГА, Волков ВМ, Игнатенко МВ. Спектральный метод Чебышева для решения полного обобщенного уравнения Прандтля. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;3:51–61.
EDN: WSUJFV

For citation:
Rasolko GA, Volkov VM, Ignatenko MV. Chebyshev spectral method for solving complete generalised Prandtl equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;3:51–61. Russian.
EDN: WSUJFV

Авторы:
Галина Алексеевна Расолько – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.
Василий Михайлович Волков – доктор физико-математических наук, доцент; главный научный сотрудник отдела вычислительной математики и математического моделирования.
Марина Викторовна Игнатенко – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Authors:
Galina A. Rasolko, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics.
rasolka@bsu.by
https://orcid.org/0000-0002-4055-7343
Vasily M. Volkov, doctor of science (physics and mathematics), docent; chief researcher at the department of computational mathematics and mathematical modelling.
volkov@tut.by
https://orcid.org/0000-0003-0350-4186
Marina V. Ignatenko, PhD (physics and mathematics), docent; head of the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics.
ignatenkomv@bsu.by
https://orcid.org/0000-0002-8029-1842

модель, основанная на представлении решения в виде разложения по многочленам Чебышева, приводит к хорошо обусловленной системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения, а скорость сходимости погрешности приближенного решения может достигать линейной скорости относительно степени интерполяционного многочлена.

Ключевые слова: приближенный численный алгоритм; сингулярное уравнение; интегро-дифференциальное уравнение; ортогональный базис полиномов Чебышева; спектральный метод Чебышева; обобщенное уравнение Прандтля.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.4.01.2).

CHEBYSHEV SPECTRAL METHOD FOR SOLVING COMPLETE GENERALISED PRANDTL EQUATION

G. A. RASOLKO[a]***, V. M. VOLKOV***[b]***, M. V. IGNATENKO***[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
[b]*Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, 11 Surganava Street, Minsk 220072, Belarus*

Corresponding author: M. V. Ignatenko (ignatenkomv@bsu.by)

Abstract. This article is devoted to the problem of constructing computational schemes for solving Prandtl integro-differential equations that arise in many problems in mechanics. An approximate numerical method for solving singular integro-differential equations of the generalised Prandtl equation type has been developed. The proposed approximate computational schemes are based on representing the solution of the equation as an expansion over an orthogonal basis of Chebyshev polynomials. The use of known spectral relations has made it possible to obtain an analytical expression for the singular component of the equation. As a consequence, the developed method demonstrates excellent accuracy and exponential rate of convergence of the approximate solution in relation to the degree of interpolation polynomials. The computational qualities of this method are demonstrated using a test example. In particular, it is shown that a discrete model based on the representation of the solution as a decomposition by Chebyshev polynomials leads to a well-conditioned system of linear algebraic equations for the decomposition coefficients, and the convergence rate of the approximate solution error can reach a linear speed in relation to the degree of the interpolation polynomial.

Keywords: approximate numerical algorithm; singular equation; integro-differential equation; orthogonal basis of Chebyshev polynomials; Chebyshev spectral method; generalised Prandtl equation.

Acknowledgements. The work was carried out within the framework of the state programme of scientific research «Convergence-2025» (subprogramme «Mathematical models and methods», assignment 1.4.01.2).

Введение

В теории крыла конечного размаха, контактных задачах теории упругости и других задачах механики сплошной среды важную роль играет уравнение вида

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt = f(x),\ -1 < x < 1,$$

которое называется уравнением Прандтля[1]. Здесь $B(x)$ и $f(x)$ – известные функции из класса $C[-1, 1]$, а $\Gamma(x)$ – искомая функция, удовлетворяющая краевым условиям на границе интервала $\Gamma(\pm 1) = 0$.

Ядро уравнения Прандтля имеет сингулярность, что порождает существенные трудности при численном решении вышеупомянутых задач с использованием традиционных подходов, основанных на непосредственной аппроксимации интеграла квадратурными формулами [1]. В связи с этим, как показано в исследованиях ряда авторов (см., например, [2–7]), весьма эффективный способ обработки подобного рода сингулярностей состоит в представлении решения задачи и коэффициентов уравнения в виде интерполяционных полиномов с использованием полиномов Чебышева. Данный прием с учетом известных спектральных соотношений [8, с. 188]

[1]*Голубев В. В.* Лекции по теории крыла. М. : Гос. изд-во техн. теорет. лит., 1949. 480 с.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x}=U_{n-1}(x),$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_{n-1}(t)\frac{dt}{t-x}=-T_n(x),\ -1<x<1,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\tag{1}$$

где $T_n(x)$ и $U_n(x)$ – многочлены Чебышева степени n первого и второго рода соответственно, позволяет вычислить аналитически сингулярную составляющую интеграла и получить экспоненциальную скорость сходимости приближенного решения задачи [3]. Показавшие высокую эффективность спектральные методы на основе полиномов Чебышева для некоторых частных случаев уравнения Прандтля построены в работах [4–6].

Постановка задачи

Рассмотрим сингулярное уравнение Прандтля общего вида[2] [7]:

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt+\int_{-1}^{1}\frac{s(x,\ t)}{t-x}\Gamma(t)dt+\int_{-1}^{1}g(x,\ t)\Gamma'(t)dt=f(x),\ -1<x<1.\tag{2}$$

Здесь $B(x)$, $s(x,\ t)$, $g(x,\ t)$ и $f(x)$ – известные функции (при этом функция $s(x,\ t)$ удовлетворяет условию Гёльдера по обеим переменным), а $\Gamma(x)$ – искомая функция.

Предварительно в уравнении (2) выполним преобразование сингулярного интеграла $\int_{-1}^{1}\frac{s(x,\ t)}{t-x}\Gamma(t)dt$ в соответствии с работой [9, с. 315]:

$$\int_{-1}^{1}\frac{s(x,\ t)}{t-x}\Gamma(t)dt=\int_{-1}^{1}\frac{s(x,\ t)-s(x,\ x)+s(x,\ x)}{t-x}\Gamma(t)dt=\frac{b(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma(t)}{t-x}dt+\int_{-1}^{1}v(x,\ t)\Gamma(t)dt,$$

где $b(x)=\pi s(x,\ x)$; $v(x,\ t)=\dfrac{s(x,\ t)-s(x,\ x)}{t-x}$.

Далее будем рассматривать уравнение (2) в виде

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt+\frac{b(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma(t)}{t-x}dt+\int_{-1}^{1}g(x,\ t)\Gamma'(t)dt+\int_{-1}^{1}v(x,\ t)\Gamma(t)dt=f(x),\ |x|<1.\tag{3}$$

Здесь $B(x)$, $b(x)$, $g(x,\ t)$, $v(x,\ t)$ и $f(x)$ – известные функции, а $\Gamma(x)$ – искомая функция, удовлетворяющая краевым условиям

$$\Gamma(\pm 1)=0.\tag{4}$$

Полагаем, что производная решения задачи принадлежит классу функций $h(0)$ по Мусхелишвили (класс функций с интегрируемой особенностью в окрестности точек $x=\pm 1$ [9, с. 31]), т. е. $\psi(x)\in h(0)$, если на отрезке $[-1+\varepsilon_1,\ 1-\varepsilon_2]$, $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, $\psi(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера и в окрестности точек ± 1 допускает интегрируемую особенность.

Приведение уравнения (3) к уравнению Фредгольма

Как и в работе [10], сведем уравнение (3) к уравнению Фредгольма второго рода с логарифмической особенностью. Пусть

$$u(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt.\tag{5}$$

Применим формулу обращения сингулярного интеграла (5) в классе $h(0)$:

$$\Gamma'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}u(t)}{t-x}dt+\frac{c}{\sqrt{1-x^2}},$$

где c – произвольная постоянная. Отсюда с учетом краевых условий (4) имеем

[2] *Голубев В. В.* Лекции по теории крыла… 480 с.

$$\Gamma(x)=\int_{-1}^{x}\Gamma'(\tau)d\tau=\int_{-1}^{x}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}u(t)}{t-\tau}dt+\frac{c}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H(x,t)u(t)dt+\mu(x),$$

где

$$H(x,t)=\sqrt{1-t^2}\int_{-1}^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{d\tau}{t-\tau}\right)=\ln\frac{1-xt+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{|t-x|},$$

$$\mu(x)=c\left(\arcsin x+\frac{\pi}{2}\right).$$

Учитывая, что $H(-1,t)=H(1,t)$, получаем $c=0$.

Отметим, что функция $H(x,t)$ симметрична и неотрицательна. Имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}|H(x,t)|dt=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\int_{-1}^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{d\tau}{t-\tau}\right)dt=\sqrt{1-x^2}\le 1. \tag{6}$$

Принимая во внимание, что

$$\Gamma(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H(x,t)u(t)dt, \tag{7}$$

а также

$$\frac{b(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma(t)}{t-x}dt=\frac{b(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H(t_1,t)u(t)dt\right)\frac{1}{t_1-x}dt_1=\frac{b(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}M(x,t)u(t)dt,$$

$$M(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H(t_1,t)\frac{1}{t_1-x}dt_1,$$

$$\int_{-1}^{1}g(x,t)\Gamma'(t)dt=-\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}u(\tau)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x,t)}{\sqrt{1-t^2}(t-\tau)}dt\right)d\tau=\int_{-1}^{1}G(x,\tau)u(\tau)d\tau,$$

$$G(x,\tau)=-\sqrt{1-\tau^2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x,t)}{\sqrt{1-t^2}(t-\tau)}dt,$$

$$\int_{-1}^{1}v(x,t)\Gamma(t)dt=\int_{-1}^{1}v(x,t)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H(t,\varsigma)u(\varsigma)d\varsigma dt=\int_{-1}^{1}u(\varsigma)V(x,\varsigma)d\varsigma,$$

$$V(x,\varsigma)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}v(x,t)H(t,\varsigma)dt,$$

введем линейный оператор

$$K(u;x)=\frac{1}{B(x)}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H(x,t)u(t)dt+\frac{b(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}M(x,t)u(t)dt+$$
$$+\int_{-1}^{1}G(x,t)u(t)dt+\int_{-1}^{1}u(t)V(x,t)dt. \tag{8}$$

Таким образом, граничная задача (3), (4) сводится к операторному уравнению вида

$$u(x)+K(u;x)=f(x). \tag{9}$$

Для вывода достаточных условий разрешимости уравнения (9), как и в работе [10], оценим оператор (8) в равномерной метрике. На основании предыдущих обозначений и оценки (6) имеем

$$\left|\frac{b(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}M(x,t)u(t)dt\right|\le\|b\|_C\|u\|_C\left|\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H(t_1,t)dt\right)\frac{1}{t_1-x}dt_1\right|=$$

$$= \|b\|_C \|u\|_C \left| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t_1^2}\, \frac{1}{t_1 - x}\, dt_1 \right| \le \|b\|_C \|u\|_C \|T_1(x)\|_C = \|b\|_C \|u\|_C .$$

Учитывая, что $\int_{-1}^{1} G(x, t) u(t) dt = \int_{-1}^{1} g(x, t) \Gamma'(t) dt$, получаем

$$\left| \int_{-1}^{1} G(x, t) u(t) dt \right| \le \int_{-1}^{1} \left| g(x, t) \Gamma'(t) \right| dt \le \|g\|_C \int_{-1}^{1} \left| \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t_1^2}\, u(t_1)}{t_1 - t} dt_1 \right| dt \le$$

$$\le \|g\|_C \|u\|_C \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t_1^2}}{t_1 - t} dt_1 \right| dt = \|g\|_C \|u\|_C \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} |t|\, dt = \frac{2}{\pi} \|g\|_C \|u\|_C .$$

Так как

$$\left| V(x, \varsigma) \right| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} v(x, t) H(t, \varsigma) dt \right| \le \|v\|_C \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left| H(t, \varsigma) \right| dt = \|v\|_C \sqrt{1-\varsigma^2},$$

то

$$\left| \int_{-1}^{1} u(t) V(x, t) dt \right| \le \|u\|_C \left| \int_{-1}^{1} V(x, t) dt \right| \le \|u\|_C \|v\|_C \left| \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt \right| = \frac{\pi}{2} \|v\|_C \|u\|_C .$$

С учетом данных оценок окончательно получаем

$$\|Ku\|_C \le \|u\|_C \left(\max_{|x| \le 1} \left| \frac{\sqrt{1-x^2}}{\left| B(x) \right|} \right| + \|b\|_C + \frac{\pi}{2} \|v\|_C + \frac{2}{\pi} \|g\|_C \right).$$

Относительно условий разрешимости задачи (3), (4) справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть функции* $B(x)$, $b(x)$, $v(x, t)$, $g(x, t)$, *входящие в уравнение (3), удовлетворяют условию*

$$\rho = \max_{|x| \le 1} \left| \frac{\sqrt{1-x^2}}{\left| B(x) \right|} \right| + \|b\|_C + \frac{\pi}{2} \|v\|_C + \frac{2}{\pi} \|g\|_C < 1.$$

Тогда граничная задача (3), (4) имеет единственное решение в классе функций $\Gamma'(x) \in h(0)$ *для любой* $f(x) \in C[-1, 1]$.

Некоторые предварительные сведения

Для получения приближенных схем решения задачи (3), (4) будем использовать интерполяционный многочлен для функции $f(x)$, построенный по узлам Чебышева первого рода [11, с. 89], в виде

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^{n}{}^{0} c_j T_j(x), \tag{10}$$

где $c_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(x_k) T_j(x_k)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Здесь и далее $\sum_{j=0}^{n}{}^{0} a_j = \frac{1}{2} a_0 + {}$ $+ a_1 + \ldots + a_n$.

На основании формулы (10) получим следующий вид интерполяционного многочлена:

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j U_j(x), \tag{11}$$

где

$$f_j = G_j - G_{j+2},\ j = 0, 1, \ldots, n-2,\ f_{n-1} = G_{n-1},\ f_n = G_n,$$

$$G_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(x_k) T_j(x_k),\ j = 0, 1, \ldots, n,\ x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi,\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Здесь были использованы известные свойства полиномов Чебышева [11]:

$$T_0(x) = U_0(x),\ 2T_1(x) = U_1(x),\ 2T_j(x) = U_j(x) - U_{j-2}(x),\ j \geq 2.$$

С учетом формул (10) и (11) интерполяционные многочлены для функции двух переменных будем рассматривать в виде разложения по многочленам Чебышева как первого, так и второго рода:

$$\psi_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^{n} T_m(x) \sum_{j=0}^{n} \sigma_{m,j} T_j(t),$$

$$\sigma_{m,j} = \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) \psi(x_l, x_r), \tag{12}$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 2, & i > 0, \end{cases}\quad x_p = \cos\frac{2p-1}{2n+2}\pi,\ p = 1, 2, \ldots, n+1;$$

$$\omega_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^{n} U_m(x) \sum_{j=0}^{n} \eta_{m,j} T_j(t),$$

$$\eta_{m,j} = \frac{\delta_j}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \sum_{l=1}^{n+1} \left(T_m(x_l) - \nu_m T_{m+2}(x_l)\right) \omega(x_l, x_r), \tag{13}$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 2, & j > 0, \end{cases}\quad \nu_m = \begin{cases} 1, & 0 \leq m \leq n-2, \\ 0, & m = n-1, n, \end{cases}\quad x_k = \cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,\ k = 1, 2, \ldots, n+1;$$

$$\varphi_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^{n} U_m(x) \sum_{j=0}^{n} \rho_{m,j} U_j(t),$$

$$\rho_{m,j} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^{n} \left(T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l)\right) \sum_{r=0}^{n} \varphi(x_l, x_r) \left(T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)\right), \tag{14}$$

$$\theta_j = \begin{cases} 1, & 0 \leq j \leq n-2, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases}\quad \sigma_m = \begin{cases} 1, & 0 \leq m \leq n-2, \\ 0, & m = n-1, n, \end{cases}\quad x_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi,\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Вычислительные схемы

Приближенное решение задачи (3), (4) будем искать как решение следующего уравнения:

$$u_n(x) + K(u_n; x) = F_n(x),$$

где

$$K(u_n; x) = \frac{1}{\pi B(x)} \int_{-1}^{1} H(x, t) u_n(t)\, dt + \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^{1} M(x, t) u_n(t)\, dt +$$

$$+ \int_{-1}^{1} G_{n,n}(x, t) u_n(t)\, dt + \int_{-1}^{1} V_{n,n}(x, t) u_n(t)\, dt, \tag{15}$$

$$G_{n,n}(x, \tau) = -\sqrt{1-\tau^2}\, \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{g_{n,n}(x, t)}{\sqrt{1-t^2}\,(t-\tau)}\, dt,\ V_{n,n}(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} v_{n,n}(x, t) H(t, \tau)\, dt,$$

$F_n(x)$ – некоторая функция из класса $C[-1, 1]$ такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$, $x_j = \cos\frac{j+1}{n+2}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, а $g_{n,n}(x, t)$ и $v_{n,n}(x, t)$ – интерполяционные многочлены для функций $g(x, t)$ и $v(x, t)$ соответственно.

Схема 1. Пусть $u_n(x)$ – интерполяционный многочлен для функции $u(x)$, построенный по узлам Чебышева первого рода:

$$u_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\Gamma_n'(t)}{t-x}\, dt = \sum_{k=0}^{n} c_k U_k(x), \tag{16}$$

где c_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, – пока неизвестные постоянные.

С учетом соотношений (1), (7), свойства $\int\limits_{-1}^{x} \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{k}U_{k-1}(x),\ k \ge 0,$ и формулы (16) вычислим $\Gamma_n(x)$. Имеем

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} H(x,\ t)u_n(t)dt = \int\limits_{-1}^{x} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{u_n(t)}{t-\tau}dt\right)d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \int\limits_{-1}^{x} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{U_k(t)}{t-\tau}dt\right)d\tau = -\sum_{k=0}^{n} c_k \int\limits_{-1}^{x} \frac{T_{k+1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau.$$

Следовательно,

$$\Gamma_n(x) = \sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{k+1}U_k(x). \tag{17}$$

Отсюда

$$\frac{b(x)}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} M(x,\ t)u_n(t)dt \equiv \frac{b(x)}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\Gamma_n(t)}{t-x}dt = \frac{b(x)}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{\sqrt{1-t^2}}{k+1}U_k(t)\right)\frac{dt}{t-x} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{k+1}\frac{b(x)}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,U_k(t)\frac{dt}{t-x} = -\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{b(x)}{k+1}T_{k+1}(x).$$

Для функций $g(x,\ t),\ v(x,\ t)$ выберем интерполяционные многочлены $g_{n,\,n}(x,\ t),\ v_{n,\,n}(x,\ t)$ вида (12). Вычислим последовательно оставшиеся интегралы в равенствах (15). Имеем

$$G_{n,\,n}(x,\ \tau) = -\sqrt{1-\tau^2}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{g_{n,\,n}(x,\ t)}{\sqrt{1-t^2}\,(t-\tau)}dt =$$

$$= -\sum_{m=0}^{n} T_m(x)\sum_{j=0}^{n}\sigma_{m,\,j}\left(\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_j(t)dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-\tau)}\right) = -\sqrt{1-\tau^2}\sum_{m=0}^{n} T_m(x)\sum_{j=1}^{n}\sigma_{m,\,j}U_{j-1}(\tau),$$

где

$$\sigma_{m,\,j} = \frac{\delta_j}{n+1}\sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r)\frac{\delta_m}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l)g(x_l,\ x_r),$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1,\ i = 0, \\ 2,\ i > 0, \end{cases}\quad x_p = \cos\frac{2p-1}{2n+2}\pi,\ p = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1.$$

Изменяя порядок суммирования, с учетом свойства ортогональности многочленов Чебышева получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} G_{n,\,n}(x,\ \tau)u_n(\tau)d\tau = -\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}\left(\sum_{m=0}^{n} T_m(x)\sum_{j=1}^{n}\sigma_{m,\,j}U_{j-1}(\tau)\right)\left(\sum_{k=0}^{n} c_k U_k(\tau)\right)d\tau =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} c_k\sum_{m=0}^{n} T_m(x)\sum_{j=1}^{n}\sigma_{m,\,j}\left(\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}\,U_k(\tau)U_{j-1}(\tau)d\tau\right) = -\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n-1} c_k\sum_{m=0}^{n} T_m(x)\sigma_{m,\,k+1}.$$

Далее, используя явное представление интерполяционного многочлена вида (12) для функции $v_{n,\,n}(x,\ t)$, с учетом соотношений (1) и свойства многочленов Чебышева [11] $2U_k(t)T_j(t) = U_{k-j}(t) + U_{k+j}(t)$ получаем

$$\int_{-1}^{1} V_{n,n}(x,\varsigma)u_n(\varsigma)d\varsigma \equiv \int_{-1}^{1} v_{n,n}(x,t)\Gamma_n(t)dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} \sum_{m=0}^{n} T_m(x) \sum_{j=0}^{n} \omega_{m,j} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, U_k(t)\, T_j(t)\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} \sum_{m=0}^{n} T_m(x) \sum_{j=0}^{n} \omega_{m,j} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, \frac{U_{k-j}(t) + U_{k+j}(t)}{2} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{2k+2} \sum_{m=0}^{n} T_m(x) \sum_{j=0}^{n} \omega_{m,j}\beta_{k-j} + c_0\frac{\pi}{4}\sum_{m=0}^{n} T_m(x)\omega_{m,0},$$

где

$$\omega_{m,j} = \frac{\delta_j}{n+1}\sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r)\frac{\delta_m}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l)v(x_l, x_r),$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 2, & i > 0, \end{cases} \quad x_p = \cos\frac{2p-1}{2n+2}\pi, \ \ p = 1, 2, \ldots, n+1,$$

$$\beta_m = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\, U_m(t)dt = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & m = -2, \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = 0, \\ 0, & m \neq -2,\ 0. \end{cases}$$

Таким образом, имеем $u_n(x) + K(u_n;\, x) = F_n(x)$ или

$$\sum_{k=0}^{n} c_k U_k(x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)}\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{k+1}U_k(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\frac{b(x)}{k+1}T_{k+1}(x) + c_0\frac{\pi}{4}\sum_{m=0}^{n} T_m(x)\omega_{m,0} -$$
$$-\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n-1} c_k\sum_{m=0}^{n} T_m(x)\sigma_{m,k+1} + \sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{2k+2}\sum_{j=0}^{n}\beta_{k-j}\sum_{m=0}^{n} T_m(x)\omega_{m,j} = F_n(x). \tag{18}$$

На основании уравнения (18) получаем систему линейных алгебраических уравнений для вычисления $c_0, c_1, \ldots, c_n$ путем последовательной подстановки в уравнение (18) вместо x нулей многочлена Чебышева второго рода $x_i = \cos\frac{i+1}{n+2},\ i = 0, 1, \ldots, n$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{n} c_k\left(U_k(x_i) + \frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)}\frac{U_k(x_i)}{k+1} - \frac{b(x_i)}{k+1}T_{k+1}(x_i)\right) +$$
$$+ c_0\left(\frac{\pi}{4}\sum_{m=0}^{n} T_m(x_i)\left(\omega_{m,0} - 2\omega_{m,2} - 2\sigma_{m,1}\right)\right) + c_n\left\{\frac{\pi}{4n+4}\sum_{m=0}^{n} T_m(x_i)\omega_{m,n}\right\} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1} c_k\left(-\frac{\pi}{2}\sum_{m=0}^{n} T_m(x_i)\sigma_{m,k+1} + \frac{\pi}{4k+4}\sum_{m=0}^{n} T_m(x_i)\left(\omega_{m,k} - \lambda_k\omega_{m,k+2}\right)\right) = f(x_i), \tag{19}$$
$$\lambda_k \equiv \begin{cases} 0, & k > n-2, \\ 1, & k \le n-2, \end{cases} \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Совместность системы уравнений (19) позволяет вычислить коэффициенты $c_k,\ k = 0, 1, \ldots, n$. Приближенное решение задачи (3), (4) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется по формуле (17) для произвольной точки $x \in [-1, 1]$.

Схема 2. Если для функций $g(x,\,t)$, $v(x,\,t)$ выбрать интерполяционные многочлены $g_{n,\,n}(x,\,t)$, $v_{n,\,n}(x,\,t)$ вида (13), (14), получим еще одну вычислительную схему. Итак, $G_{n,\,n}(x,\,\tau)=-\sqrt{1-\tau^2}\,\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{g_{n,\,n}(x,\,t)}{\sqrt{1-t^2}\,(t-\tau)}dt$ или

$$G_{n,\,n}(x,\,\tau)=-\sqrt{1-\tau^2}\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\sum_{j=0}^{n}\eta_{m,\,j}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_j(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-\tau)}\right)=$$

$$=-\sqrt{1-\tau^2}\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\sum_{j=1}^{n}\eta_{m,\,j}\,U_{j-1}(\tau),$$

$$\eta_{m,\,j}=\frac{\delta_j}{(n+1)^2}\sum_{r=1}^{n+1}T_j(x_r)\sum_{l=1}^{n+1}\big(T_m(x_l)-\nu_m T_{m+2}(x_l)\big)\,g(x_l,\,x_r),$$

$$\delta_j=\begin{cases}1, & j=0,\\ 2, & j>0,\end{cases}\quad \nu_m=\begin{cases}1, & 0\le m\le n-2,\\ 0, & m=n-1,\,n,\end{cases}\quad x_k=\cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,\ k=1,\,2,\,\ldots,\,n+1.$$

Следовательно,

$$\int_{-1}^{1}G_{n,\,n}(x,\,\tau)u_n(\tau)\,d\tau=$$

$$=-\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}\left(\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\sum_{j=1}^{n}\eta_{m,\,j}\,U_{j-1}(\tau)\right)\left(\sum_{k=0}^{n}c_kU_k(\tau)\right)d\tau=$$

$$=-\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\sum_{j=1}^{n}\eta_{m,\,j}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}\,U_k(\tau)U_{j-1}(\tau)\,d\tau\right)=-\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n-1}c_k\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\eta_{m,\,k+1}.$$

Далее получаем

$$\int_{-1}^{1}V_{n,\,n}(x,\,\varsigma)u_n(\varsigma)\,d\varsigma\equiv\int_{-1}^{1}v_{n,\,n}(x,\,t)\,\Gamma_n(t)\,dt=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\sum_{j=0}^{n}\rho_{m,\,j}\int_{-1}^{1}U_j(t)\left(\sqrt{1-t^2}\sum_{k=0}^{n}c_k\frac{1}{k+1}U_k(t)\right)dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{k+1}\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\sum_{j=0}^{n}\rho_{m,\,j}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,U_k(t)U_j(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{k+1}\frac{\pi}{2}\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\,\rho_{m,\,k},$$

$$\rho_{m,\,j}=\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{l=0}^{n}\big(T_m(x_l)-\sigma_mT_{m+2}(x_l)\big)\sum_{r=0}^{n}v(x_l,\,x_r)\big(T_j(x_r)-\theta_jT_{j+2}(x_r)\big),$$

$$\theta_j=\begin{cases}1, & 0\le j\le n-2,\\ 0, & j=n-1,\,n,\end{cases}\quad \sigma_m=\begin{cases}1, & 0\le m\le n-2,\\ 0, & m=n-1,\,n,\end{cases}\quad x_k=\cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi,\ k=0,\,1,\,\ldots,\,n.$$

Отсюда $K(u_n;\,x)$ принимает вид

$$K(u_n;\,x)=\sum_{k=0}^{n}c_k\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)}\frac{U_k(x)}{k+1}-\frac{b(x)}{k+1}T_{k+1}(x)\right)+c_n\left\{\frac{\pi}{2n+2}\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\rho_{m,\,n}\right\}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}c_k\left(-\frac{\pi}{2}\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\eta_{m,\,k+1}+\frac{\pi}{2k+2}\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\,\rho_{m,\,k}\right).\qquad(20)$$

Как и выше, на основании равенства (20) получаем систему линейных алгебраических уравнений для вычисления $c_0,\,c_1,\,\ldots,\,c_n$ путем последовательной подстановки в равенство (20) вместо x нулей многочлена Чебышева второго рода $x_i=\cos\dfrac{i+1}{n+2}$, $i=0,\,1,\,\ldots,\,n$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \left(U_k(x_i) + \frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} \frac{U_k(x_i)}{k+1} - \frac{b(x_i)}{k+1} T_{k+1}(x_i) \right) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(-\frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{n} U_m(x_i) \eta_{m,k+1} + \frac{\pi}{2k+2} \sum_{m=0}^{n} U_m(x_i) \rho_{m,k} \right) +$$
$$+ c_n \left\{ \frac{\pi}{2n+2} \sum_{m=0}^{n} U_m(x_i) \rho_{m,n} \right\} = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n. \tag{21}$$

Совместность системы уравнений (21) позволяет вычислить коэффициенты c_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Приближенное решение задачи (3), (4) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется по формуле (17) для произвольной точки $x \in [-1, 1]$.

Результаты численного эксперимента

Приведем результаты численного эксперимента, проведенного согласно построенным вычислительным схемам. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt + \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\Gamma(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^{1} g(x,t) \Gamma'(t) dt + \int_{-1}^{1} v(x,t) \Gamma(t) dt = f(x),\ |x| < 1,$$
$$B(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{1+4x^2}{1+2x^2},\ b(x) = \frac{x^2}{x+2},$$
$$v(x,t) = \frac{x}{20x+40} \frac{1}{t^2+1},\ g(x,t) = \frac{1}{20x-40} \frac{t}{t^2+2}, \tag{22}$$
$$f(x) = \frac{(32x^5 - 32x^3 + 6x)(2x^2+1)}{4x^2+1} - \frac{x^2(32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1)}{x+2} +$$
$$+ 192x^5 - 192x^3 + 36x.$$

Известно, что решением задачи (4), (22) является функция

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2}\,(32x^5 - 32x^3 + 6x) = \sqrt{1-x^2}\, U_5(x).$$

Несложно убедиться в том, что производная данной функции $\Gamma'(x) \in h(0)$.

Как показывают расчеты, уже при сравнительно небольших значениях n достигается предельная точность приближенного решения, погрешность которого ограничена снизу лишь с вычислительной погрешностью.

Решая систему уравнений (19) или (21) при $n = 10$ и $n = 34$, видим, что приближенные решения $\Gamma_n(x)$, вычисленные по формуле (17), отличаются от точного решения $\Gamma(x)$ в точках $x = -0{,}99, -0{,}98, \ldots, 0{,}99$ не более чем на $5{,}6 \cdot 10^{-6}$ и $1{,}5 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц систем (19) и (21) при размерности $n = 10$ и $n = 34$ составляет $\mathrm{cond}(C_{10}) \le 25$ и $\mathrm{cond}(C_{34}) \le 142$ соответственно, что позволяет грубо оценить зависимость числа обусловленности от размерности как $\mathrm{cond}(C_n) \cong O\left(n^{\frac{3}{2}}\right)$.

Заключение

Представленные результаты могут быть использованы как в теоретических научных исследованиях, так и в инженерных расчетах, а также в образовательных программах по вычислительной математике. Итоги работы создают основу для дальнейшего развития спектральных методов, их адаптации к новым постановкам и интеграции в современные вычислительные комплексы.

Библиографические ссылки

1. Иванов ВВ. *Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений*. Киев: Наукова думка; 1968. 288 с.

2. Elliott D. A comprehensive approach to the approximate solution of singular integral equations over the arc (–1, 1). *Journal of Integral Equations and Applications*. 1989;2(1):59–94. DOI: 10.1216/JIE-1989-2-1-59.

3. Sahlan MN, Feyzollahzadeh H. Operational matrices of Chebyshev polynomials for solving singular Volterra integral equations. *Mathematical Sciences*. 2017;11(2):165–171. DOI: 10.1007/s40096-017-0222-4.

4. Расолько ГА. Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;3:68–74. EDN: ZLJXDF.

5. Расолько ГА. К численному решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;1:58–68. EDN: CKPPHZ.

6. Расолько ГА, Шешко СМ, Шешко МА. Об одном методе численного решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения*. 2019;55(9):1285–1292. DOI: 10.1134/S0374064119090115.

7. Габдулхаев БГ. Прямые методы решения уравнения теории крыла. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1974;2:29–44.

8. Бейтмен Г, Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*. 2-е издание. Виленкин НЯ, переводчик. Москва: Наука; 1973. 296 с. (Справочная математическая библиотека).

9. Мусхелишвили НИ. *Сингулярные интегральные уравнения: граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике*. 3-е издание. Москва: Наука; 1968. 513 с.

10. Rasolko GA, Volkov VM. Chebyshev spectral method for one class of singular integro-differential equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2025;65(2):339–348. DOI: 10.1134/S0965542524701963.

11. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*. Киро СН, переводчик; Лебедев ВИ, редактор. Москва: Наука; 1983. 384 с.

Получена 07.10.2025 / исправлена 06.11.2025 / принята 06.11.2025.
Received 07.10.2025 / revised 06.11.2025 / accepted 06.11.2025.