УДК 514.764.227

КОНФОРМНОЕ УРАВНЕНИЕ КИЛЛИНГА НА 2-СИММЕТРИЧЕСКОМ ШЕСТИМЕРНОМ НЕРАЗЛОЖИМОМ ЛОРЕНЦЕВОМ МНОГООБРАЗИИ С ТРИВИАЛЬНЫМ ТЕНЗОРОМ ВЕЙЛЯ

М. Е. ГНЕДКО[1]***, О. П. ХРОМОВА***[1]

[1]*Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, 656049, г. Барнаул, Россия*

Аннотация. Исследован конформный аналог уравнения Киллинга на 2-симметрических шестимерных неразложимых лоренцевых многообразиях, а также изучены свойства конформного множителя данного уравнения. Для случая конформно-плоских метрик построены новые нетривиальные примеры конформно-киллинговых векторных полей с переменным конформным множителем.

Ключевые слова: конформно-киллингово векторное поле; лоренцево многообразие; *k*-симметрическое пространство; тензор Вейля.

Образец цитирования:
Гнедко МЕ, Хромова ОП. Конформное уравнение Киллинга на 2-симметрическом шестимерном неразложимом лоренцевом многообразии с тривиальным тензором Вейля. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;3:29–37.
EDN: BWDOWO

For citation:
Gnedko ME, Khromova OP. Conformal Killing equation on a 2-symmetric six-dimensional indecomposable Lorentzian manifold with trivial Weyl tensor. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;3:29–37. Russian.
EDN: BWDOWO

Авторы:
Максим Евгеньевич Гнедко – ассистент кафедры математического анализа Института математики и информационных технологий.
Олеся Павловна Хромова – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математического анализа Института математики и информационных технологий.

Authors:
Maxim E. Gnedko, assistant at the department of mathematical analysis, Institute of Mathematics and Information Technologies.
gnedko98@mail.ru
Olesya P. Khromova, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical analysis, Institute of Mathematics and Information Technologies.
khromova.olesya@gmail.com

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2025;3:29–37
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2025;3:29–37

CONFORMAL KILLING EQUATION ON A 2-SYMMETRIC SIX-DIMENSIONAL INDECOMPOSABLE LORENTZIAN MANIFOLD WITH TRIVIAL WEYL TENSOR

M. E. GNEDKO[a]***, O. P. KHROMOVA***[a]

[a]*Altai State University, 61 Lenina Avenue, Barnaul 656049, Russia*
Corresponding author: O. P. Khromova (khromova.olesya@gmail.com)

Abstract. In this paper, we study the conformal analogue of the Killing equation on 2-symmetric six-dimensional indecomposable Lorentzian manifolds, and also study the properties of the conformal factor of this equation. For the case of conformally flat metrics, new non-trivial examples of conformal Killing vector fields with a variable conformal factor are constructed.

Keywords: conformal Killing vector field; Lorentzian manifold; *k*-symmetric space; Weyl tensor.

Введение

Конформно-киллинговы векторные поля являются естественным обобщением векторных полей Киллинга и играют важную роль в изучении группы конформных преобразований многообразия, потоков Риччи на многообразии, теории солитонов Риччи. Псевдоримановы симметрические пространства порядка k, где $k \geq 2$, возникают в исследованиях по псевдоримановой геометрии и в физике. В случаях, когда $k = 2$ и $k = 3$, они изучены Д. В. Алексеевским и А. С. Галаевым [1]. При малых размерностях эти пространства и векторные поля Киллинга на них исследовали Д. Н. Оскорбин, Е. Д. Родионов и И. В. Эрнст [2].

Солитоны Риччи являются обобщением метрик Эйнштейна на (псевдо)римановых многообразиях. Уравнение солитонов Риччи изучалось на различных классах многообразий многими математиками. В частности, Д. Н. Оскорбиным и Е. Д. Родионовым [3] найдено общее решение уравнения солитона Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях малой размерности, доказана локальная разрешимость этого уравнения в классе 3-симметрических лоренцевых многообразий. В случае постоянства константы Эйнштейна в уравнении солитона Риччи векторные поля Киллинга позволяют найти общее решение уравнения солитона Риччи, отвечающее данной константе. Однако для различных значений константы Эйнштейна роль векторных полей Киллинга играют конформно-киллинговы векторные поля, в связи с чем возникает потребность в их изучении.

В настоящей работе исследован конформный аналог уравнения Киллинга на 2-симметрических шестимерных неразложимых лоренцевых многообразиях, изучены свойства конформного множителя этого уравнения на них. Установлено, что конформный множитель конформного аналога уравнения Киллинга зависит от поведения тензора Вейля. Так, если тензор Вейля нетривиален, то конформный множитель постоянен (данный случай исследован ранее в работах [3; 4]). Если же тензор Вейля тривиален, то конформный множитель и общее решение конформного аналога уравнения Киллинга выражаются через функции Эйри. Кроме того, для случая равенства нулю тензора Вейля построены новые нетривиальные примеры конформно-киллинговых векторных полей с переменным конформным множителем.

Предварительные сведения

Псевдоримановым многообразием называется гладкое многообразие M, на котором задан гладкий невырожденный симметричный метрический тензор g. Если метрический тензор имеет сигнатуру $(1,\ n-1)$, то $(M,\ g)$ называется лоренцевым многообразием.

Псевдориманово многообразие $(M,\ g)$ называется симметрическим порядка k, или k-симметрическим, если $\nabla^k R = 0,\ \nabla^{k-1} R \neq 0$, где $k \geq 1$, R – тензор кривизны $(M,\ g)$, а ∇ – связность Леви-Чивиты.

В работах [5–7] М. Каэн и Н. Уоллах показали, что односвязное лоренцево симметрическое пространство изометрично произведению риманова симметрического пространства и одного из следующих лоренцевых многообразий: $\left(\mathbb{R},\ dt^2\right)$, универсальной накрывающей k-мерного пространства де Ситтера или анти де Ситтера ($k \leq 2$), пространства Каэна – Уоллаха, т. е. пространства $CW^{n+2}(A) = \left(\mathbb{R}^{n+2},\ g\right)$ с метрикой

$$g = -2du\left(dv + A_{ij}x^i x^j du\right) + \delta_{ij}x^i z^j,$$

где δ_{ij} – символы Кронекера; A_{ij} – матричные константы.

Далее все рассматриваемые лоренцевы многообразия будем полагать локально неразложимыми, так как из теоремы Ву [8] вытекает, что любое лоренцево многообразие локально может быть представлено в виде прямого произведения некоторого риманова многообразия (M_1, g_1) и локально неразложимого лоренцева многообразия (M_2, g_2).

Определение 1. Обобщенное пространство Каэна – Уоллаха $\left(CW_d^{n+2}, g\right)$ размерности $n+2 \geq 4$, порядка d определяется как $\mathbb{R}^{n+2}$ с метрикой

$$g = 2dudv + \sum_{i=1}^{n}\left(dx^i\right)^2 + \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(u)x^i x^j du^2,\ A = \left(a_{ij}(u)\right) = \sum_{i=0}^{n} H_i u^i,$$

где H_i – симметрические постоянные матрицы размера $n \times n$.

Теорема 1 [1; 9]. *Локально неразложимое лоренцево многообразие (M, g) размерности $n+2 \geq 4$ является 2-симметрическим (3-симметрическим) в том и только в том случае, если оно локально изометрично обобщенному пространству Каэна – Уоллаха $\left(CW_d^{n+2}\right)$ порядка $d = 1$ ($d = 2$).*

Определение 2. Гладкое полное векторное поле K на (псевдо)римановом многообразии (M, g) называется векторным полем Киллинга, если выполняется равенство $L_K g = 0$, где $L_K g$ – производная Ли метрического тензора вдоль поля K.

Определение 3. Гладкое полное векторное поле K на (псевдо)римановом многообразии (M, g) называется конформно-киллинговым векторным полем, если выполняется равенство $L_K g = f(p)g$, где $L_K g$ – производная Ли метрического тензора вдоль поля K, $p \in M$, а $f(p)$ – гладкая вещественная функция на многообразии.

Пусть (M, g) – 2-симметрическое локально неразложимое лоренцево многообразие размерности n. Исходя из работы Д. В. Алексеевского и А. С. Галаева [1], выберем в (M, g) локальную систему координат $\left(v, x^1, x^2, \ldots, x^n, u\right)$ такую, что

$$g = 2dudv + \sum_{i=1}^{n}\left(dx^i\right)^2 + \sum_{i,\,j=1}^{n} H_{ij0}x^i x^j + \sum_{i=1}^{n} uH_{ii1}\left(x^i\right)^2 du^2, \tag{1}$$

где H_0 – симметрические постоянные матрицы размера $n \times n$; H_1 – невырожденная диагональная матрица.

В уравнении конформного аналога уравнения Киллинга $L_K g = f(p)g$ вид конформного множителя $f(p)$ зависит от того, является ли метрика g конформно-плоской. Путем прямых вычислений компонент тензора Вейля метрики (1) доказывается следующая лемма.

Лемма. *Равенство тензора Вейля метрики (1) нулю ($W = 0$) равносильно условиям, что все H_{ii1} равны между собой, все H_{ii0} равны между собой, а при $i \neq j$ имеем $H_{ij0} = 0$.*

Доказательство. Тензор Вейля на многообразии с метрикой (1) принимает вид

$$W = \frac{1}{n-2}\left((2-n)\left(H_{ii1}u + H_{ii0}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(H_{jj1}u + H_{jj0}\right)\right) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n}\left(dudx^i dudx^i + dx^i dudx^i du - dudx^i dx^i du - dx^i dududx^i\right) +$$

$$+ H_{ij0}\left(1 - \delta_{ij}\right)\sum_{i,\,j=1}^{n}\left(dudx^i dx^j du + dx^i dududx^j - dudx^i dudx^j - dx^i dudx^j du\right).$$

Заметим, что в случае, когда $i \neq j$, компоненты тензора Вейля при $dudx^i dx^j du$, $dx^i dududx^j$, $dudx^i dudx^j$ и $dx^i dudx^j du$ равны H_{ij0}. Следовательно, если $W = 0$, то при $i \neq j$ имеем $H_{ij0} = 0$.

Все компоненты тензора Вейля при $dudx^i dudx^i$, $dx^i dudx^i du$, $dudx^i dx^i du$ и $dx^i dududx^i$ с точностью до знака имеют следующий вид:

$$-H_{ii1}u - H_{ii0} + \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n}\left(H_{jj1}u + H_{jj0}\right).$$

Приравняем к нулю коэффициент при u, а также свободный член данного выражения:

$$-H_{ii1} + \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n} H_{jj1} = 0,$$

$$-H_{ii0}+\frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n}H_{jj0}=0.$$

Так как эти уравнения должны быть справедливы при любых $1\le i\le n$, то из них следует, что все H_{ii1} равны между собой и все H_{ii0} также равны между собой. Лемма доказана.

Шестимерный случай

Перейдем к анализу уравнения конформно-киллингова векторного поля. Зафиксируем точку $p\in M$ и рассмотрим уравнение $L_K g=fg$ в локальных координатах (1) в окрестности этой точки. С учетом результатов работы [10] будем считать, что гладкая функция f зависит только от переменной u. Исходя из этого, можем принять, что $f=\frac{dF(u)}{du}$ для некоторой функции $F(u)$. Для простоты изложения будем полагать, что $x^1=x,\ x^2=y,\ x^3=z,\ x^4=t$. Обозначим координаты искомого векторного поля K через $V=V(v,x,y,z,t,u)$, $X=X(v,x,y,z,t,u)$, $Y=Y(v,x,y,z,t,u)$, $Z=Z(v,x,y,z,t,u)$, $T=T(v,x,y,z,t,u)$, $U=U(v,x,y,z,t,u)$ (V, X, Y, Z, T, U – гладкие функции), $H=H_{110}x^2+2H_{120}xy+$ $+2H_{130}xz+2H_{140}xt+H_{220}y^2+2H_{230}yz+2H_{240}yt+H_{330}z^2+2H_{340}zt+H_{440}t^2+u\left(H_{111}x^2+H_{221}y^2+\right.$ $\left.+H_{331}z^2+H_{441}t^2\right)$. В результате получим систему уравнений конформно-киллинговых векторных полей в локальных координатах:

$$\begin{cases}U_v=0,\\ U_x+X_v=0,\ U_y+Y_v=0,\ U_z+Z_v=0,\ U_t+T_v=0,\\ X_y+Y_x=0,\ X_z+Z_x=0,\ Z_y+Y_z=0,\ X_t+T_x=0,\ Y_t+T_y=0,\ Z_t+T_z=0,\\ 2X_x=f,\ 2Y_y=f,\ 2Z_z=f,\ 2T_t=f,\\ U_u+V_v=f,\\ HU_x+X_u+V_x=0,\ HU_y+Y_u+V_y=0,\ HU_z+Z_u+V_z=0,\ HU_t+T_u+V_t=0,\\ -fH+2HU_u+2V_u+XH_x+YH_y+ZH_z+TH_t+UH_u=0.\end{cases}\tag{2}$$

Рассмотрим все уравнения, кроме последнего. Из них, следуя рассуждениям работ [4; 11; 12], получаем систему

$$\begin{cases}U=F(u),\\ X=\frac{1}{2}\frac{dF(u)}{du}x+C_1y+C_2z+C_3t+b_1(u),\\ Y=-C_1x+\frac{1}{2}\frac{dF(u)}{du}y+C_3z+C_4t+b_2(u),\\ Z=-C_2x-C_3y+\frac{1}{2}\frac{dF(u)}{du}z+C_5t+b_3(u),\\ T=-C_3x-C_4y-C_5z+\frac{1}{2}\frac{dF(u)}{du}t+b_4(u),\\ V=-\frac{db_1(u)}{du}x-\frac{db_2(u)}{du}y-\frac{db_3(u)}{du}z-\frac{db_4(u)}{du}t-\frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{4}\frac{d^2F(u)}{du^2}+C_6,\end{cases}\tag{3}$$

где C_i – произвольные константы, а $b_i(u)$ – гладкие функции, определяемые системой дифференциальных уравнений $\ddot{b}_i(u)=a_{ij}(u)b_j(u)$. Эта система с заданными начальными условиями разрешима, и размерность пространства решений при большей размерности равна $2n$ (подробнее см. [3; 12]).

Подставляя полученные выражения в уравнение (2), имеем

$$\frac{dF(u)}{du}\left(u\left(H_{111}x^2+H_{221}y^2+H_{331}z^2+H_{441}t^2\right)+H_{110}x^2+2H_{120}xy+\right.$$

$$+2H_{130}xz+2H_{140}xt+H_{220}y^2+2H_{230}yz+2H_{240}yt+H_{330}z^2+2H_{340}zt+H_{440}t^2\Big)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\frac{dF(u)}{du}x+C_1y+C_2z+C_3t+b_1(u)\right)\left(2H_{111}ux+2H_{110}x+2H_{120}y+2H_{130}z+2H_{140}t\right)+$$

$$+\left(-C_1x+\frac{1}{2}\frac{dF(u)}{du}y+C_3z+C_4t+b_2(u)\right)\left(2H_{221}uy+2H_{120}x+2H_{220}y+2H_{230}z+2H_{240}t\right)+$$

$$+\left(-C_2x-C_3y+\frac{1}{2}\frac{dF(u)}{du}z+C_5t+b_3(u)\right)\left(2H_{331}uz+2H_{130}x+2H_{230}y+2H_{330}z+2H_{340}t\right)+$$

$$+\left(-C_3x-C_4y-C_5z+\frac{1}{2}\frac{dF(u)}{du}t+b_4(u)\right)\left(2H_{441}uz+2H_{140}x+2H_{240}y+2H_{340}z+2H_{440}t\right)-$$

$$-2\frac{d^2b_1(u)}{du^2}x-2\frac{d^2b_2(u)}{du^2}y-2\frac{d^2b_3(u)}{du^2}z-2\frac{d^2b_4(u)}{du^2}t-\frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{2}\frac{d^3F(u)}{du^3}+$$

$$+F(u)\left(H_{111}x^2+H_{221}y^2+H_{331}z^2+H_{441}t^2\right)=0. \qquad (4)$$

Далее покажем, что в случае, когда тензор Вейля метрики (1) нетривиален, это равенство может выполняться только для постоянной функции $f=\dfrac{dF(u)}{du}$.

Теорема 2. *Пусть M – 2-симметрическое шестимерное неразложимое лоренцево многообразие с метрикой (1) и нетривиальным тензором Вейля. Тогда конформный множитель* $f(p)$ *конформного аналога уравнения Киллинга* $L_X g=f(p)g$ *постоянен.*

Доказательство. Левая часть уравнения (4) является полиномом относительно переменных x, y, z, t, его коэффициенты при x^2, y^2, z^2, t^2 должны обращаться в нуль:

$$-\frac{1}{2}\frac{d^3F(u)}{du^3}+2\frac{dF(u)}{du}\left(uH_{111}+H_{110}\right)-2C_1H_{120}-2C_2H_{130}-2C_3H_{140}+H_{111}F(u)=0,$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d^3F(u)}{du^3}+2\frac{dF(u)}{du}\left(uH_{221}+H_{220}\right)+2C_1H_{120}-2C_3H_{230}-2C_4H_{240}+H_{221}F(u)=0,$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d^3F(u)}{du^3}+2\frac{dF(u)}{du}\left(uH_{331}+H_{330}\right)+2C_2H_{130}+2C_3H_{230}-2C_5H_{340}+H_{331}F(u)=0,$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d^3F(u)}{du^3}+2\frac{dF(u)}{du}\left(uH_{441}+H_{440}\right)+2C_3H_{140}+2C_4H_{240}+2C_5H_{340}+H_{441}F(u)=0.$$

Рассмотрим почленные разности этих уравнений:

$$2\frac{dF(u)}{du}\left(uH_{111}+H_{110}-uH_{221}-H_{220}\right)+F(u)\left(H_{111}-H_{221}\right)-$$

$$-4C_1H_{120}-2C_2H_{130}-2C_3H_{140}+2C_3H_{230}+2C_4H_{240}=0, \qquad (5)$$

$$2\frac{dF(u)}{du}\left(uH_{111}+H_{110}-uH_{331}-H_{330}\right)+F(u)\left(H_{111}-H_{331}\right)-$$

$$-2C_1H_{120}-4C_2H_{130}-2C_3H_{140}-2C_3H_{230}+2C_5H_{340}=0, \qquad (6)$$

$$2\frac{dF(u)}{du}\left(uH_{111}+H_{110}-uH_{441}-H_{440}\right)+F(u)\left(H_{111}-H_{441}\right)-$$

$$-2C_1H_{120}-2C_2H_{130}-4C_3H_{140}-2C_4H_{240}-2C_5H_{340}=0, \qquad (7)$$

$$2\frac{dF(u)}{du}\left(uH_{221}+H_{220}-uH_{331}-H_{330}\right)+F(u)\left(H_{221}-H_{331}\right)+2C_1H_{120}-$$
$$-2C_2H_{130}-4C_3H_{230}-2C_4H_{240}+2C_5H_{340}=0,$$
$$2\frac{dF(u)}{du}\left(uH_{221}+H_{220}-uH_{441}-H_{440}\right)+F(u)\left(H_{221}-H_{441}\right)+2C_1H_{120}-$$
$$-2C_3H_{230}-2C_3H_{140}-4C_4H_{240}-2C_5H_{340}=0,$$
$$2\frac{dF(u)}{du}\left(uH_{331}+H_{330}-uH_{441}-H_{440}\right)+F(u)\left(H_{331}-H_{441}\right)+$$
$$+2C_2H_{130}+2C_3H_{230}-2C_3H_{140}-2C_4H_{240}-4C_5H_{340}=0.$$

Далее рассмотрим полученные уравнения в разных случаях.

Случай 1. Если $H_{111}=H_{221}=H_{331}=H_{441}$, то рассматриваемые уравнения принимают вид

$$2\frac{dF(u)}{du}\left(H_{110}-H_{220}\right)-4C_1H_{120}-2C_2H_{130}-2C_3H_{140}+2C_3H_{230}+2C_4H_{240}=0,$$
$$2\frac{dF(u)}{du}\left(H_{110}-H_{330}\right)-2C_1H_{120}-4C_2H_{130}-2C_3H_{140}-2C_3H_{230}+2C_5H_{340}=0,$$
$$2\frac{dF(u)}{du}\left(H_{110}-H_{440}\right)-2C_1H_{120}-2C_2H_{130}-4C_3H_{140}-2C_4H_{240}-2C_5H_{340}=0,$$
$$2\frac{dF(u)}{du}\left(H_{220}-H_{330}\right)+2C_1H_{120}-2C_2H_{130}-4C_3H_{230}-2C_4H_{240}+2C_5H_{340}=0,$$
$$2\frac{dF(u)}{du}\left(H_{220}-H_{440}\right)+2C_1H_{120}-2C_3H_{230}-2C_3H_{140}-4C_4H_{240}-2C_5H_{340}=0,$$
$$2\frac{dF(u)}{du}\left(H_{330}-H_{440}\right)+2C_2H_{130}+2C_3H_{230}-2C_3H_{140}-2C_4H_{240}-4C_5H_{340}=0.$$

Следовательно, при $H_{111}=H_{221}=H_{331}=H_{441}$ и $H_{ii0}\neq H_{jj0}$, $i=\overline{1,4}$, $j=\overline{1,4}$, имеем $\dfrac{dF(u)}{du}=\text{const}$.

Случай 2. Если один из H_{ii1} не будет равен остальным (пусть для определенности $H_{111}\neq H_{jj1}$, $j=\overline{2,4}$), поделив уравнение (5) на $H_{111}-H_{221}$, уравнение (6) на $H_{111}-H_{331}$ и уравнение (7) на $H_{111}-H_{441}$, получим

$$2\frac{dF(u)}{du}\left(u+\frac{H_{110}-H_{220}}{H_{111}-H_{221}}\right)+F(u)+\frac{-4C_1H_{120}-2C_2H_{130}-2C_3H_{140}+2C_3H_{230}+2C_4H_{240}}{H_{111}-H_{221}}=0,$$
$$2\frac{dF(u)}{du}\left(u+\frac{H_{110}-H_{330}}{H_{111}-H_{331}}\right)+F(u)+\frac{-2C_1H_{120}-4C_2H_{130}-2C_3H_{140}-2C_3H_{230}+2C_5H_{340}}{H_{111}-H_{331}}=0,$$
$$2\frac{dF(u)}{du}\left(u+\frac{H_{110}-H_{440}}{H_{111}-H_{441}}\right)+F(u)+\frac{-2C_1H_{120}-2C_2H_{130}-4C_3H_{140}-2C_4H_{240}-2C_5H_{340}}{H_{111}-H_{441}}=0.$$

Пусть $D_1=\dfrac{2H_{110}-2H_{220}}{H_{111}-H_{221}}$, $D_2=\dfrac{2H_{110}-2H_{330}}{H_{111}-H_{331}}$, $D_3=\dfrac{2H_{110}-2H_{440}}{H_{111}-H_{441}}$,

$$E_1=\frac{-4C_1H_{120}-2C_2H_{130}-2C_3H_{140}+2C_3H_{230}+2C_4H_{240}}{H_{111}-H_{221}},$$

$$E_2=\frac{-2C_1H_{120}-4C_2H_{130}-2C_3H_{140}-2C_3H_{230}+2C_5H_{340}}{H_{111}-H_{331}},$$

$$E_3=\frac{-2C_1H_{120}-2C_2H_{130}-4C_3H_{140}-2C_4H_{240}-2C_5H_{340}}{H_{111}-H_{441}}.$$

Тогда имеем

$$\frac{dF(u)}{du}(2u+D_1)+F(u)+E_1=0,$$

$$\frac{dF(u)}{du}(2u+D_2)+F(u)+E_2=0,$$

$$\frac{dF(u)}{du}(2u+D_3)+F(u)+E_3=0.$$

Заметим, что если $D_1=D_2=D_3$ и $E_1=E_2=E_3$, то достаточно рассмотреть первые два полученных уравнения. Остальные уравнения рассматриваются аналогично.

Пусть $D_1\neq D_2$. Вычтем из первого уравнения второе: $\frac{dF(u)}{du}(D_1-D_2)+E_1-E_2=0$. Следовательно, при $D_1\neq D_2$ получаем постоянство $\frac{dF(u)}{du}$.

Пусть $D_1=D_2$. Вычтем из уравнения (5), умноженного на H_{221}, уравнение (6), умноженное на H_{111}:

$$\frac{d^3F(u)}{du^3}\left(\frac{H_{111}-H_{221}}{2}\right)+\frac{dF(u)}{du}(2H_{110}H_{221}-2H_{220}H_{111})-4C_1H_{120}(H_{221}+H_{111})-$$
$$-2C_2H_{130}H_{221}-2C_3H_{140}H_{221}+2C_3H_{230}H_{111}+2C_4H_{240}H_{111}=0. \qquad (8)$$

Выразим из уравнения (5) производную функции $F(u)$ через функцию $F(u)$:

$$\frac{dF(u)}{du}=\frac{-F(u)(H_{111}-H_{221})-(4C_1H_{120}+2C_2H_{130}-2C_3H_{230}+2C_3H_{140}-2C_4H_{240})}{2u(H_{111}-H_{221})+2H_{110}-2H_{220}}.$$

Вычислим из полученного выражения поочередно вторую и третью производные. Полагая, что $S=$ $=4C_1H_{120}+2C_2H_{130}-2C_3H_{230}+2C_3H_{140}-2C_4H_{240}$, имеем

$$\frac{dF(u)}{du}=-\frac{F(u)(H_{111}-H_{221})+S}{2u(H_{111}-H_{221})+2H_{110}-2H_{220}},$$

$$\frac{d^2F(u)}{du^2}=\frac{3F(u)(H_{111}-H_{221})^2+3S(H_{111}-H_{221})}{\left(2u(H_{111}-H_{221})+2H_{110}-2H_{220}\right)^2},$$

$$\frac{d^3F(u)}{du^3}=-\frac{15F(u)(H_{111}-H_{221})^3+15S(H_{111}-H_{221})^2}{\left(2u(H_{111}-H_{221})+2H_{110}-2H_{220}\right)^3}.$$

Подставим эти производные в уравнение (8). В результате получим следующее уравнение в общем виде: $T_1(u)F(u)+T_2(u)=0$, где $T_1(u)$ и $T_2(u)$ – некоторые постоянные многочлены, зависящие от u, коэффициенты которых можно выразить через H_{ijk} и C_i.

Заметим, что $F(u)$ – рациональная функция. В то же время уравнение (8) с помощью линейной подстановки сводится к однородному дифференциальному уравнению третьего порядка с постоянными коэффициентами. В таком случае решением уравнения (8) не может быть рациональная функция. Следовательно, $F(u)$ – постоянная функция.

Конформно-плоский случай размерности 6

С учетом вышеприведенной леммы метрический тензор имеет вид

$$g=2dudv+dx^2+dy^2+dz^2+dt^2+\left(b\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right)+au\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right)\right)du^2,$$

где $a = H_{111} = H_{221} = H_{331} = H_{441}$ и $b = H_{110} = H_{220} = H_{330} = H_{440}$ – произвольные постоянные. В таком случае получаем дифференциальное уравнение относительно функции $F(u)$ следующего вида:

$$-\frac{1}{2}\frac{d^3F(u)}{du^3} + 2\frac{dF(u)}{du}(au + b) + aF(u) = 0.$$

Из этого уравнения функция $F(u)$ выражается как

$$F(u) = C_1 AiryAi\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right)^2 + C_2 AiryAi\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right) AiryBi\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right) + C_3 AiryBi\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right)^2, \tag{9}$$

где $AiryAi$ и $AiryBi$ – частные решения дифференциального уравнения $y'' - uy = 0$, называемые функциями Эйри. Это дифференциальное уравнение имеет на действительной оси точку, в которой вид решения меняется с колеблющегося на экспоненциальный. Для действительных u функция Эйри первого рода определяется следующим несобственным интегралом:

$$AiryAi(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \cos\left(\frac{x^3}{3} + ux\right)dx.$$

Другим линейно независимым частным решением данного уравнения является функция Эйри второго рода, у которой при $x \to \infty$ колебания имеют ту же амплитуду, что и у функции Эйри первого рода $AiryAi(u)$, но отличаются по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Для действительных u функция Эйри второго рода выражается следующим интегралом[1]:

$$AiryBi(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[\exp\left(-\frac{x^3}{3} + ux\right) + \sin\left(\frac{x^3}{3} + ux\right)\right]dx.$$

В данном случае имеем векторное поле вида (3), где

$$\begin{aligned}
b_1(u) &= C_4 AiryAi\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right) + C_5 AiryBi\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right),\\
b_2(u) &= C_6 AiryAi\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right) + C_7 AiryBi\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right),\\
b_3(u) &= C_8 AiryAi\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right) + C_9 AiryBi\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right),\\
b_4(u) &= C_{10} AiryAi\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right) + C_{11} AiryBi\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

являются решениями уравнения $L_K g = f(p)g$ для системы (1), а конформный множитель принимает вид

$$f(u) = \frac{2aC_{12} AiryAi\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right) AiryAi\left(1, \frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right)}{(-a)^{\frac{2}{3}}} + \frac{2aC_{13} AiryBi\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right) AiryBi\left(1, \frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right)}{(-a)^{\frac{2}{3}}} +$$

[1] *Федорюк М. В.* Эйри функции // Математическая энциклопедия : в 5 т. Т. 5 / гл. ред. И. М. Виноградов. М. : Сов. энцикл., 1985. С. 939–941.

$$+\frac{2aC_{14}AiryAi\left(1,\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right)AiryBi\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right)}{(-a)^{\frac{2}{3}}}+\frac{2aC_{15}AiryAi\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right)AiryBi\left(1,\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right)}{(-a)^{\frac{2}{3}}}. \qquad (11)$$

Теорема 3. *Пусть M – 2-симметрическое шестимерное неразложимое лоренцево многообразие с метрикой (1), тензор Вейля которого равен нулю. Тогда решение конформного аналога уравнения Киллинга $L_K g = f(p)g$ и конформный множитель $f=\frac{dF(u)}{du}$ определяются в локальной системе координат $(v,\ x,\ y,\ z,\ t,\ u)$ точки p из соотношений (3), (9)–(11).*

Замечание. Доказанная теорема продолжает исследования, начатые в работе [4], и позволяет построить новые нетривиальные примеры конформно-киллинговых векторных полей с переменным конформным множителем на 2-симметрических неразложимых лоренцевых многообразиях. Кроме того, разработанные методы дают возможность получить многомерный аналог доказанной теоремы.

Библиографические ссылки

1. Alekseevsky DV, Galaev AS. Two-symmetric Lorentzian manifolds. *Journal of Geometry and Physics*. 2011;61(12):2331–2340. DOI: 10.1016/j.geomphys.2011.07.005.

2. Оскорбин ДН, Родионов ЕД, Эрнст ИВ. О размерностях пространства полей Киллинга на 2-симметрических лоренцевых многообразиях. *Математические заметки СВФУ.* 2019;26(3):47–56. EDN: RSCVOZ.

3. Оскорбин ДН, Родионов ЕД. Солитоны Риччи и поля Киллинга на обобщенных многообразиях Кахена – Уоллаха. *Сибирский математический журнал.* 2019;60(5):1165–1170. DOI: 10.33048/smzh.2019.60.513.

4. Андреева ТА, Оскорбин ДН, Родионов ЕД. О конформном множителе в конформном уравнении Киллинга на 2-симметрическом пятимерном неразложимом лоренцевом многообразии. *Владикавказский математический журнал.* 2023;25(3): 5–14. DOI: 10.46698/f6017-0875-0171-y.

5. Cahen M, Wallach N. Lorentzian symmetric spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society.* 1970;76(3):585–591. DOI: 10.1090/S0002-9904-1970-12448-X.

6. Cahen M, Kerbrat Y. Champs de vecteurs conformes et transformations conformes des espaces Lorentziens symétriques. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 1978;57(2):99–132.

7. Cahen M, Kerbrat Y. Transformations conformes des espaces symétriques pseudo-riemanniens. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 1982;132:275–289. DOI: 10.1007/BF01760985.

8. Wu H. On the de Rham decomposition theorem. *Illinois Journal of Mathematics*. 1964;8(2):291–311. DOI: 10.1215/ijm/1256059674.

9. Blanco OF, Senovilla JMM, Sánchez M. Structure of second-order symmetric Lorentzian manifolds. *Journal of the European Mathematical Society*. 2013;15(2):595–634. DOI: 10.4171/JEMS/368.

10. Hall GS. Conformal symmetries and fixed points in space-time. *Journal of Mathematical Physics*. 1990;31(5):1198–1207. DOI: 10.1063/1.528753.

11. Андреева ТА, Оскорбин ДН, Родионов ЕД. Исследование конформно-киллинговых векторных полей на пятимерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях. *Вестник Югорского государственного университета.* 2021;17(1):17–22. DOI: 10.17816/byusu20210117-22.

12. Blau M, O'Loughlin M. Homogeneous plane waves. *Nuclear Physics B*. 2003;654(1–2):135–176. DOI: 10.1016/S0550-3213(03)00055-5.

Получена 02.07.2025 / исправлена 07.07.2025 / принята 09.11.2025.
Received 02.07.2025 / revised 07.07.2025 / accepted 09.11.2025.