

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король

27 июня 2025 г.

Регистрационный № 3764/б.



ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для
специальности:

6-05-0533-08 Компьютерная математика и системный анализ

2025 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-08-2023, учебного плана № 6-5.4-56/01 от 15.05.2023, № 6-5.4-56/11 ин. от 31.05.2023.

СОСТАВИТЕЛИ:

Н.В.Бровка, заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор;

Е.В.Громак, доцент кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Л.А.Хвоцинская, доцент кафедры общей и медицинской физики учреждения образования «Международный государственный экологический институт имени А.Д.Сахарова» Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Н.В.Гриб, заведующий кафедрой математики и методики преподавания математики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой теории функций БГУ
(протокол № 17 от 03.06.2025);

Научно-методическим Советом БГУ
(протокол № 11 от 26.06.2025)

Заведующая кафедрой



Н.В.Бровка

 (Н.Б. Яблонская)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Теория функций комплексного переменного» относится к числу дисциплин, составляющих основу математического образования. Эта дисциплина включает в себя не только основные понятия, но и рассматривает более глубокие понятия комплексного анализа, связанные с аналитическим продолжением и его конкретными реализациями.

Освоение дисциплины «Теория функций комплексного переменного» позволит студентам самостоятельно решать теоретические и прикладные задачи комплексного анализа.

Цели и задачи учебной дисциплины:

Цель учебной дисциплины – основных понятий и методов современной математики, повышение уровня профессионально-математической компетентности студентов, формирование знаний о методах и прикладных возможностях одного из разделов комплексного анализа.

Образовательная цель: изложение основ комплексного анализа, путей и методов его использования в моделях классического и современного естествознания.

Развивающая цель: формирование у студентов умений использования методов комплексного анализа для самостоятельного построения и исследования математических моделей.

Задачи учебной дисциплины:

- освоение важнейших понятий теории функций комплексного переменного (предел, непрерывность, дифференцируемость);
- знакомство с понятием многозначных функций комплексного переменного и понятием аналитического продолжения;
- изучение основ теории интегрирования и освоение специальных приемов интегрирования функций комплексного переменного, в том числе различных аспектов теории вычетов;
- разработка элементов теории рядов в комплексной области и характеристики особых точек однозначного характера;
- знакомство с понятием аналитического продолжения;
- изучение основ теории однолистных функций и конформных отображений областей в комплексной плоскости;

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Теория функций комплексного переменного» относится к дополнительным видам обучения компонента учреждения образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Учебная дисциплина «Теория функций комплексного переменного» тесно связана с такими дисциплинами как «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики». В рамках дисциплины «Теория функций комплексного

переменного» на случай комплексных переменных переносятся теория функциональных рядов и теория интегрирования, рассматриваемые при изучении дисциплины «Математический анализ». С другой стороны, аналитические методы, разрабатываемые на основе базовых понятий дисциплины «Теория функций комплексного переменного», используются при изучении учебной дисциплины «Уравнения математической физики». На базе теории функций комплексного переменного строятся примеры, иллюстрирующие основные элементы теории метрических, нормированных и гильбертовых пространств (дисциплина «Функциональный анализ»). Свойства функций комплексного переменного используются при построении спектральной теории операторов и теории разрешимости некоторых классов интегральных уравнений (дисциплины «Функциональный анализ» и «Интегральные уравнения»).

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Теория функций комплексного переменного» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

Базовые профессиональные компетенции:

Использовать понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа и применять их для изучения моделей окружающего мира.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные понятия теории функций одной комплексной переменной;
- доказательства фактов и алгоритмы решения задач комплексного анализа;
- новейшие достижения в области теории функций комплексного переменного применительно к задачам естествознания;
- основные понятия и факты, связанные с аналитическим продолжением функций одной комплексной переменной;
- свойства однолистных функций;
- теорему Римана об однолистных отображениях;

уметь:

- использовать основные результаты комплексного анализа в математике;
- использовать теоретические основы теории функций комплексного переменного в практической деятельности;
- использовать основные результаты теории однолистных функций в практической деятельности;

иметь навык:

- владения методами теории аналитических функций;
- владения методами решения основных вычислительных задач теории функций комплексного переменного;

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5 семестре. В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Теория функций комплексного переменного» отведено для очной формы получения высшего образования: 104 часа, в том числе 36 аудиторных часов: лекции – 18 часов, лабораторные занятия – 18 часов. Из них:

Лекции – 18 часов, лабораторные занятия – 14 часов, управляемая самостоятельная работа (аудиторный контроль) – 4 часа.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Введение в комплексный анализ

Предмет теории функций комплексного переменного.

Комплексная плоскость. Операции с комплексными числами. Поле комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрические формы записи.

Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана, стереографическая проекция, сферическое расстояние.

Топология (расширенной) плоскости, компактность, связность. Предел, непрерывность.

Кривые и области, контуры, многосвязные области.

Тема 2. Дифференцируемые функции комплексного переменного

Дифференцируемые функции комплексного переменного. Правила дифференцирования (производная и арифметические операции, производная сложной функции, производная обратной функции).

Условия Коши-Римана. Аналитические функции. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Гармонические функции, их связь с аналитическими. Сопряженные гармонические функции. Элементарные аналитические функции.

Тема 3. Интегрирование функций комплексного переменного

Пути и кривые на плоскости. Комплексные криволинейные интегралы и их свойства. Первообразная, формула Ньютона-Лейбница.

Интегральная теорема Коши для простого и составного контуров. Интегральная формула Коши.

Формула среднего значения и принцип максимума. Формула Шварца. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций, формулы Коши для производных аналитических функций. Теорема Морера.

Принцип максимума, теорема единственности, теорема о среднем. Интегралы Пуассона и Шварца.

Тема 4. Ряды аналитических функций

Степенной ряд, теорема Абеля. Радиус сходимости, формула Коши – Адамара. Аналитичность суммы степенного ряда. Разложение аналитической функции в степенной ряд, единственность разложения, ряд Тейлора.

Эквивалентные описания аналитичности.

Нули аналитической функции, порядок нуля. Локальная форма единственности. Теорема единственности Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса о рядах аналитических функций. Теорема Рунге.

Тема 5. Ряд Лорана и особые точки однозначного характера

Ряд Лорана, область его сходимости. Разложение аналитической функции в ряд Лорана, единственность разложения. Формулы для коэффициентов разложения, неравенства Коши.

Теорема об устранимой особой точке, теорема Лиувилля. Классификация изолированных особых точек однозначного характера. Полус и существенно особая точка. Случай бесконечно удаленной точки. Теорема Сохоцкого, понятие о теореме Пикара. Целые и мероморфные функции.

Тема 6. Теория вычетов и ее приложения.

Определение вычета, теорема о вычетах. Формулы для вычисления вычетов. Теорема Коши о вычетах. Вычет в бесконечно удаленной точке. Теорема о полной сумме вычетов.

Применение к вычислению интегралов (несобственные интегралы, интегралы от произведений и от тригонометрических функций).

Логарифмический вычет, принцип аргумента. Теорема Руше, теорема Гурвица. Принцип сохранения области. Принцип сохранения границ.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Введение в комплексный анализ	2			2			
2	Дифференцируемые функции комплексного переменного	4			4			опрос
3	Интегрирование функций комплексного переменного	2			2		2	контрольная работа
4	Ряды аналитических функций	2			2			опрос
5	Ряд Лорана и особые точки однозначного характера	4			2			опрос
6	Теория вычетов и ее приложения	4			2		2	контрольная работа
	Всего за семестр	18			14		4	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

- 1 Пантелеев, А. В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. — 3-е изд., испр. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 448 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система.
URL: <https://e.lanbook.com/book/212138>.
- 2 Зверович, Э. И. Вещественный и комплексный анализ: учеб. пособие для студ. учреждений, обеспечивающих получение высш. образования по мат. специальностям: в 6 ч. Кн. 4: Ч. 6: Теория аналитических функций комплексного переменного / Э. И. Зверович. - Минск: Вышэйшая школа, 2008. — 320 с.
- 3 Кротов В.Г., Ровба Е.А., Старовойтов А.П., Сетько Е.А., Смотрицкий К.А. Теория функций комплексного переменного (учебное пособие) // Минск: Высшейшая школа, 2019. — 431 с.
- 4 Ганичева, А. В. Основы теории функции комплексной переменной. Операционное исчисление: учебное пособие для вузов / А. В. Ганичева. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 148 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система.
URL: <https://e.lanbook.com/book/173082>.

Дополнительная литература

- 5 Волковыский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: учеб. пособие для студ. вузов / Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. — Изд. 4-е, перераб. — Москва: Физматлит, 2004. — 312с.
- 6 Коган, Е. А. Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление: учебное пособие / Е. А. Коган, Г. С. Жукова. — Москва: ИНФРА-М, 2020. — 180 с. — Текст: электронный.
URL: <https://znanium.com/catalog/product/1058889>
- 7 Курс высшей математики. Теория функций комплексной переменной: учебное пособие / И. М. Петрушко, А. Г. Елисеев, В. И. Качалов, С. Ф. Кудин. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 368 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система.
URL: <https://e.lanbook.com/book/210425>
- 8 Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ: учебник для студ. мех-мат. спец. ун-тов: [в 2 ч.]. Ч. 1: Функции одного переменного / Б. В. Шабат. — Изд. 3-е, перераб. и доп. — Москва: Наука, 1985. — 336 с.
- 9 Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1968 и др. издания.
- 10 Сборник задач по теории аналитических функций / Под ред. М.А. Евграфова. М., 1972.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания и умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля: опрос и контрольная работа.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине учебным планом предусмотрен зачет в 5 семестре.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

Тема 3. Интегрирование функций комплексного переменного (2 часа)

1. Вычислить интеграл $\int_C (1 + i - 2\bar{z})dz$ по прямой, соединяющей точки $z_1=0$, $z_2=1+i$.
2. Вычислить интеграл $\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)dz$.
3. Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить интеграл $\int_C \left(\frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} \right) dz$, если $C: |z-2|=1$.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 6. Теория вычетов и ее приложения (2 часа)

1. Определение вычета, теорема о вычетах.
2. Формулы для вычисления вычетов.
3. Теорема Коши о вычетах.
4. Вычет в бесконечно удаленной точке.
5. Теорема о полной сумме вычетов.
6. Логарифмический вычет, принцип аргумента.
7. Теорема Руше, теорема Гурвица.
8. Принцип сохранения области. Принцип сохранения границ.

Форма контроля – контрольная работа.

Примерная тематика лабораторных занятий

Занятие 1. Расширенная комплексная плоскость. Основные определения и факты, связанные с комплексными числами.

Занятие 2. Правила дифференцирования (производная и арифметические операции, производная сложной функции, производная обратной функции). Условия Коши-Римана. Аналитические функции. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Занятие 3. Гармонические функции, их связь с аналитическими. Сопряженные гармонические функции. Основные элементарные функции.

Занятие 4. Пути и кривые на плоскости. Комплексные криволинейные интегралы и их свойства. Первообразная, формула Ньютона-Лейбница. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши.

Занятие 5. Первообразная, формула Ньютона-Лейбница. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши

Занятие 6. Степенной ряд, теорема Абеля. Радиус сходимости, формула Коши – Адамара. Аналитичность суммы степенного ряда. Разложение аналитической функции в степенной ряд, единственность разложения, ряд Тейлора. Нули аналитической функции, порядок нуля

Занятие 7. Ряд Лорана, область его сходимости. Разложение аналитической функции в ряд Лорана, единственность разложения. Классификация изолированных особых точек однозначного характера. Полус и существенно особая точка.

Занятие 8. Определение вычета, теорема о вычетах. Формулы для вычисления вычетов. Теорема Коши о вычетах. Вычет в бесконечно удаленной точке. Теорема о полной сумме вычетов.

Занятие 9. Применение вычетов к вычислению интегралов. Логарифмический вычет, принцип аргумента. Принцип сохранения области. Принцип сохранения границ.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *практико-ориентированный подход*, который предполагает:

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие коммуникативной культуры;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Теория функций комплексного переменного» используются современные информационные ресурсы: размещается на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, материалы текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям

образовательного стандарта высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, примерные задания, список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.

При составлении заданий УСР по учебной дисциплине задания располагаются в порядке возрастания их сложности: задания, формирующие достаточные знания по изученному учебному материалу на уровне узнавания; задания, формирующие компетенции на уровне воспроизведения; задания, формирующие компетенции на уровне применения полученных знаний.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Основные определения и факты, связанные с комплексными числами. Расширенная комплексная плоскость.
2. Сфера Римана, стереографическая проекция, сферическое расстояние. Топология (расширенной) комплексной плоскости. Предел, непрерывность.
3. Дифференцируемые функции комплексного переменного. Правила дифференцирования (производная и арифметические операции, производная сложной функции, производная обратной функции).
4. Условия Коши-Римана. Аналитические функции. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.
5. Понятие о конформных отображениях. Однолиственность. Принцип сохранения области. Критерий локальной однолиственности.
6. Основные элементарные функции
7. Пути и кривые на плоскости. Комплексные криволинейные интегралы. Первообразная, формула Ньютона-Лейбница.
8. Интегральная теорема Коши для простого и составного контуров. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши.
9. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций, формулы Коши для производных аналитических функций. Теорема Морера.
10. Гармонические функции, их связь с аналитическими. Принцип максимума, теорема единственности, теорема о среднем.
11. Степенной ряд, теорема Абеля. Радиус сходимости. Формула Коши – Адамара. Аналитичность суммы степенного ряда. Разложение аналитической функции в степенной ряд, единственность разложения, ряд Тейлора.
12. Нули аналитической функции, порядок нуля. Теорема единственности для аналитических функций.
13. Ряд Лорана, область его сходимости. Разложение аналитической функции в ряд Лорана, единственность разложения. Формулы для коэффициентов разложения, неравенства Коши.
14. Теорема об устранимой особой точке, теорема Лиувилля. Классификация изолированных особых точек однозначного характера.
15. Полус и существенно особая точка. Случай бесконечно удаленной точки.
16. Теорема Сохоцкого, понятие о теореме Пикара.

17. Определение вычета, теорема о вычетах. Формулы для вычисления вычетов. Применение к вычислению интегралов.
18. Логарифмический вычет, принцип аргумента.
19. Теорема Руше, теорема Гурвица. Принцип сохранения области.
20. Целые и мероморфные функции.
21. Логарифмический вычет, принцип аргумента. Теорема Руше, теорема Гурвица. Принцип сохранения области. Принцип сохранения границ.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой теории функций,
д.п.н., профессор



Н.В.Бровка

03.06.2025

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УО
на ____/____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
 _____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

 (название кафедры)

Заведующий кафедрой

 (ученая степень, ученое звание)

 (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
 Декан факультета

 (ученая степень, ученое звание)

 (И.О.Фамилия)