

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского  
государственного университета

А.Д.Король

24 мая 2025 г.

Регистрационный № УД-14154/уч.



**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для  
специальности:

**1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям)**

Направление специальности:

1-31 03 03-01 Прикладная математика (научно-производственная деятельность)

Логинов, М.И.

Подпись А.Д.Король

2025 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 03-2021 и учебного плана № G31-1-212/уч.. от 22.03.2022.

### **СОСТАВИТЕЛИ:**

**А.И.Калинин**, профессор кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор

### **РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**О.И.Костюкова**, главный научный сотрудник отдела нелинейного и стохастического анализа Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларусь» доктор физико-математических наук, профессор

### **РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой методов оптимального управления БГУ  
(протокол № 10 от 18.05.2025)

Научно-методическим Советом БГУ  
(протокол № 10 от 22.05.2025)

Заведующий кафедрой



Н.М.Дмитрук



Слобачева Г.В.

## **ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

Учебная программа по учебной дисциплине «Асимптотические методы оптимального управления» разработана в соответствии с учебным планом и образовательным стандартом высшего образования первой ступени по специальности: 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)».

Учебная дисциплина «Асимптотические методы оптимального управления» знакомит студентов с асимптотическими методами решения задач оптимального управления, содержащих малые параметры. Регулярно и сингулярно возмущенные задачи исследуются с помощью единого подхода, который опирается, с одной стороны, на фундаментальный результат теории оптимальных процессов – принцип максимума Л.С. Понtryгина, а, с другой стороны, – на асимптотические методы теории дифференциальных уравнений. Излагаемые методы иллюстрируются на конкретных задачах оптимального управления механическими системами.

### **Цели и задачи учебной дисциплины**

**Цель учебной дисциплины** – изучение современных методов оптимизации, применяемых для решения прикладных задач. Образовательная цель: формирование и развитие практико-ориентированной компетентности, позволяющей использовать полученные знания для решения задач в сфере профессиональной и социальной деятельности. Развивающая цель: формирование знаний, умений и навыков анализа и решения различных оптимизационных задач.

### **Задачи учебной дисциплины:**

- изучить основные асимптотические методы задач оптимизации динамических систем с малыми параметрами.
- выработать навыки применения полученных знаний при решении прикладных задач оптимального управления.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Асимптотические методы оптимального управления» относится к дисциплинам специализации компонента учреждения высшего образования.

**Связи** с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Дисциплина базируется на знаниях, полученных студентами, в результате изучения дисциплин «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Методы оптимизации».

### **Требования к компетенциям**

Освоение учебной дисциплины «Асимптотические методы оптимального управления» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

#### **Универсальные компетенции:**

Решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно-коммуникационных технологий.

В результате изучения дисциплины студент должен:

**знать:**

- методы асимптотического разложения решений регулярно и сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений;
- классификацию задач оптимального управления с малыми параметрами;
- основные асимптотические методы решения возмущенных задач оптимального управления.

**уметь:**

- применять полученные знания при решении прикладных задач оптимального управления, математические модели которых, содержат малые параметры.

**владеть:**

- основными методами построения асимптотических приближений к решениям возмущенных задач оптимального управления.

**Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается в 7 семестре. В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Асимптотические методы оптимального управления» отведено для очной формы получения высшего образования – 200 часов, в том числе 72 аудиторных, лекции – 36 часов, лабораторные занятия – 36 часов. Из них:

Лекции – 36 часов, лабораторные – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины 6 зачетных единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## Раздел 1. Некоторые предварительные сведения

### ***Тема 1.1. Теоремы о неявной функции.***

Зависимость решений обыкновенных дифференциальных уравнений от начальных данных и параметров. Асимптотические приближения по параметру и асимптотические ряды.

### ***Тема 1.2. Регулярно возмущенные дифференциальные уравнения.***

Формализм Пуанкаре. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения. Метод пограничных функций.

### ***Тема 1.3. Основные задачи оптимального управления.***

Задачи оптимального управления. Принципы максимума.

### ***Тема 1.4. Задачи оптимизации возмущенных динамических систем.***

Методика исследования.

## Раздел 2. Задача терминального управления квазилинейной системой

### ***Тема 2.1. Постановка задачи.***

Невозмущенная задача.

### ***Тема 2.2. Асимптотический анализ решения квазилинейной задачи.***

Теорема о существовании асимптотических свойствах оптимального управления.

### ***Тема 2.3. Построение асимптотически субоптимальных управлений.***

Вычисление коэффициентов полиномов Тейлора точек переключения оптимального управления.

### ***Тема 2.4. Задача об управлении материальной точкой в слабосопротивляющейся среде.***

Построение асимптотического субоптимального управления нулевого и первого порядка в рассматриваемой задаче.

### ***Тема 2.5. Задача оптимизации квазилинейной динамической системы с интегральным квадратичным параметром и нефиксированным временем перехода.***

Построение асимптотического субоптимального управления нулевого и первого порядка в рассматриваемой задаче.

## Раздел 3. Задача оптимального быстродействия для линейной сингулярно возмущенной системы

### ***Тема 3.1. Постановка задачи.***

Первая базовая задача. Вторая базовая задача.

### ***Тема 3.2. Теорема о существовании и асимптотических свойствах решения исходной задачи.***

Асимптотический анализ решения сингулярно возмущенной задачи. Теорема о существовании асимптотических свойствах оптимального управления.

***Тема 3.3. Построение асимптотики решения возмущенной задачи.***

Вычисление коэффициентов асимптотических разложений точек переключений оптимального управления.

***Тема 3.4. Задача об управлении звеном манипуляционного робота.***

Построение асимптотических субоптимальных управлений нулевого и первого порядка в рассматриваемой задаче.

***Тема 3.5. Задача оптимального быстродействия для линейно сингулярно возмущенной системы.***

Построение асимптотических субоптимальных управлений нулевого и первого порядка в рассматриваемой задаче.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий  
(ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы, занятия	Количество аудиторных часов					Формы контроля
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Количество часов УСР	
1	2	3	4	5	6	7	8
<b>1</b>	<b>Некоторые предварительные сведения</b>	<b>16</b>			<b>12</b>		
1.1	Теоремы о неявной функции.	4			4		
1.2	Регулярно возмущенные дифференциальные уравнения.	4			4		Решение задач, расчетно-графическое задание № 1
1.3	Основные задачи оптимального управления. Принципы максимума.	4			4		Решение задач, расчетно-графическое задание № 2
1.4	Задачи оптимизации возмущенных динамических систем. Методика исследования.	4					Устный опрос
<b>2</b>	<b>Задача терминального управления квазилинейной системой</b>	<b>8</b>			<b>8</b>	<b>2</b>	
2.1	Постановка задачи.	2			2		Решение задач, расчетно-графическое задание № 3

2.2	Асимптотический анализ решения квазилинейной задачи.	2					Устный опрос
2.3	Построение асимптотически субоптимальных управлений.	2			2		Контрольная работа
2.4	Задача об управлении материальной точкой в слабосопротивляющейся среде.				2		Решение задач
2.5	Задача оптимизации квазилинейной динамической системы с интегральным квадратичным параметром и нефиксированным временем перехода.	2			2	2	Решение задач, расчетно-графическое задание № 4
<b>3</b>	<b>Задача оптимального быстродействия для линейной сингулярно возмущенной системы (24 ч.)</b>	<b>10</b>			<b>10</b>	<b>4</b>	
3.1	Постановка задачи.	2			2		Решение задач, расчетно-графическое задание № 5
3.2	Теорема о существовании и асимптотических свойствах решения исходной задачи.	4			2		Решение задач
3.3	Построение асимптотики решения возмущенной задачи.	4			2		Решение задач
3.4	Задача об управлении звеном манипуляционного робота				4	2	Решение задач, расчетно-графическое задание № 6
3.5	Задача оптимального быстродействия для линейно сингулярно возмущенной системы					2	Контрольная работа
<b>ИТОГО</b>		<b>36</b>			<b>30</b>	<b>6</b>	

## **ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ**

### **Основная литература**

1. Калинин, А. И. Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем / А.И. Калинин.– Мн.: Экоперспектива, 2000.
2. Калинин А. И. Асимптотический метод решения задачи оптимизации переходного процесса в трехтепловой сингулярно возмущенной системе/ А. И. Калинин, Л. И. Лавринович //Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2024. – Т. 68. – №. 3. – С. 183-187.
3. Курина, Г. А. Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными / Г. А. Курина, М. А. Калашникова // Автоматика и телемеханика. - 2022. - № 11. - С. 3-61.

### **Дополнительная литература**

4. Понтрягин, Л.С .Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1983.
5. Васильева, А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Высшая школа, 1990.

### **Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки**

Для диагностики компетенций используются следующие формы:

*Устная форма:*

– устный опрос.

*Письменная форма:*

– контрольная работа;

– расчетно-графические задания.

*Устно-письменная форма:*

– решение задач;

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Асимптотические методы оптимального управления» учебным планом предусмотрен зачёт.

### **Примерный перечень заданий управляемой самостоятельной работы студентов**

**Тема 2.5. Задача оптимизации квазилинейной динамической системы с интегральным квадратичным параметром и нефиксированным временем перехода (2 часа)**

Задание 1. Построить асимптотические приближения к решению задачи оптимального управления материальной точки в слабо сопротивляющейся

среде. Провести численные эксперименты для оценки точности построенных асимптотических приближений.

Задание 2. Построить асимптотические приближения к решению задачи оптимального управления асциллятором. Провести численные эксперименты для оценки точности построенных асимптотических приближений.

Форма контроля – Расчетно-графическая работа

#### ***Тема 3.4. Задача об управлении звеном манипуляционного робота (2 часа)***

Задание. Построить асимптотическое приближение к решению задачи об управлении звеном манипуляционного робота. Провести численные эксперименты для оценки точности построенных асимптотических приближений.

Форма контроля – Расчетно-графическая работа

#### ***Тема 3.5 Задача оптимального быстродействия для линейно сингулярно возмущенной системы (2 часа)***

Задание 1. Построить асимптотическое приближение к решению задачи оптимального торможения вращений твердого тела. Провести численные эксперименты для оценки точности построенных асимптотических приближений.

Задание 2. Найти приближенное (в асимптотическом смысле) решение задачи оптимального управления материальной точкой малой массы. Провести численные эксперименты для оценки точности построенных асимптотических приближений.

Форма контроля – контрольная работа.

### **Описание инновационных подходов и методов преподавания учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса рекомендуется использовать перечисленные ниже методы.

**Метод учебной дискуссии**, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме. Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

**Метод группового обучения**, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

## **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы**

Для обеспечения возможности самостоятельной работы при изучении теории и выполнении практических заданий рекомендуется использовать изданные учебные пособия, размещенные в электронной библиотеке университета.

Для самоконтроля усвоения учебного материала рекомендуется использовать образовательный портал EDUFPMI, где размещены:

- учебно-методические материалы,
- учебные издания для теоретического изучения дисциплины,
- расчетно-графические задания и примеры их решений,
- материалы текущего контроля и текущей аттестации,
- вопросы для подготовки к зачету.

### **Примерный перечень вопросов к зачёту**

1. Теорема о неявной функции
2. Задачи оптимального управления. Принципы максимума.
3. Задачи оптимизации возмущенных динамических систем. Методика исследования.
4. Регулярно возмущенные дифференциальные уравнения. Формализм Пуанкаре.
5. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения. Метод пограничных функций.
6. Задача терминального управления квазилинейной системой
7. Теорема о существовании асимптотических свойствах оптимального управления в квазилинейной задаче.
8. Построение асимптотически субоптимальных управлений в квазилинейной задаче.
9. Задача оптимизации квазилинейной динамической системы с интегральным квадратичным параметром и нефиксированным временем перехода.
10. Задача оптимального быстродействия для линейной сингулярно возмущенной системы.
11. Асимптотический анализ решения сингулярно возмущенной задачи.
12. Теорема о существовании асимптотических свойствах оптимального управления
13. Построение асимптотики решения возмущенной задачи.
14. Задача оптимального быстродействия для линейно сингулярно возмущенной системы.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Управление по прогнозирующей модели	Кафедра методов оптимального управления	Предложения отсутствуют	Рекомендовать к утверждению учебную программу (протокол № 10 от 18.05.2025)

Заведующий кафедрой методов  
оптимального управления  
к.ф.-м.н., доцент

Н.М.Дмитрук

18.05.2025