

Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра теоретической и прикладной механики

СОГЛАСОВАНО Заведующий кафедрой _____ М.А. Журавков «28» октября 2025 г.	СОГЛАСОВАНО Декан факультета _____ С.М. Босяков «28» октября 2025 г.
---	---

Механико-математические модели современной геомеханики

Электронный учебно-методический комплекс для специальности:
7-06-0533-06 «Механика и математическое моделирование»

Регистрационный № 2.4.3-24 / 695

Авторы:

Журавков М.А., доктор физ.-мат. наук, профессор;
Лопатин С.Н., кандидат физ.-мат. наук, доцент.

Рассмотрено и утверждено на заседании Совета механико-математического факультета БГУ. Протокол № 2 от 28.10.2025 г.

Минск 2025

УДК 622.83:519.6(075.8)
Ж 91

Утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ.
Протокол № 4 от 27.11.2025 г.

А в т о р ы:

Журавков Михаил Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики механико-математического факультета БГУ,

Лопатин Сергей Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики механико-математического факультета БГУ.

Рецензенты:

кафедра теоретической механики и механики материалов машиностроительного факультета БНТУ (заведующий кафедрой Крушевский Е.А., кандидат физ.-мат. наук, доцент);

Щербаков С.С., заместитель председателя Президиума Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор.

Журавков, М. А. Механико-математические модели современной геомеханики : электронный учебно-методический комплекс для специальности 7-06-0533-06 «Механика и математическое моделирование» / М. А. Журавков, С. Н. Лопатин ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. теоретической и прикладной механики: БГУ, 2025. – 70 с. : ил. – 5. – Библиогр.: с. 68–70.

Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Механико-математические модели современной геомеханики» предназначен для студентов специальности 7-06-0533-06 «Механика и математическое моделирование».

В ЭУМК рассматриваются вопросы математического и численного моделирования геомеханических процессов с точки зрения теорий, подходов и методов современной механики. Для успешного овладения дисциплиной «Механико-математические модели современной геомеханики» необходимы базовые знания по таким дисциплинам, как: «Механика сплошной среды», «Математические методы механики деформируемого твёрдого тела и основы механики разрушения»; «Численные методы механики сплошной среды», «Вычислительная механика», «Компьютерная механика».

СОДЕРЖАНИЕ	
ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.....	4
1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	7
1.1. Актуальные задачи современной геомеханики с точки зрения механико-математического моделирования	7
1.2. Геомеханика как раздел современной механики	16
1.3. Основные подходы, принципы и особенности механико-математического моделирования в геомеханике	27
1.4. Основные механические характеристики горных пород	27
1.5. Механические характеристики породных массивов	27
1.5.1. Прочность породных массивов	28
1.5.2. Влияние технологической неоднородности на прочностные характеристики	37
1.5.3. Деформационные характеристики трещиноватого породного массива	40
1.6. Напряженное состояние породной толщи	43
1.6.1. О понятии горного давления в массивах горных пород.....	44
1.7. О механико-математической постановке задач геомеханики в рамках моделей МДТТ	48
1.8. Модели МДТТ применительно к решению задач определения НДС в массивах горных пород в окрестности глубоких подземных сооружений	49
1.9. Предельное состояние массивов горных пород и геотехнических сооружений	49
1.10. Моделирование сопряженных геомеханических процессов.....	53
1.11. Основные правила, подходы и технологии построения численных моделей задач подземной геомеханики	56
2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ	58
3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ	66
3.1. Вопросы к экзамену.....	66
3.2. Средства диагностики	66
4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ.....	68
4.1. Рекомендуемая литература	68
4.2. Электронные ресурсы	70

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Целью учебного издания по дисциплине «Механико-математические модели современной геомеханики» является предоставление как собственно материала, так и ссылок на специальные ресурсы (учебники, учебные пособия, научные монографии и статьи, электронные ресурсы) для получения студентами новых знаний по специальному разделу современной механики – геомеханики.

Задачами дисциплины «Механико-математические модели современной геомеханики» являются:

- знакомство с геомеханикой как разделом современной механики;
- знакомство с классификацией задач геомеханики с точки зрения постановки граничных задач механики;
- знакомство с механико-математическими моделями решения различных классов задач геомеханики;
- знакомство с механико-математическими моделями решения различных классов сопряженных задач геомеханики (гидрогеомеханики, геомеханики и газодинамики);
- знакомство с современными подходами численного решения модельных задач геомеханики;
- овладение навыками построения модельных задач прикладной геомеханики, их численное решение, анализ и интерпретация результатов расчетов.

В результате изучения студент должен знать:

- классификацию задач геомеханики (как раздела современной механики);
- современные подходы и методы к построению механико-математических аналогов и численных моделей задач геомеханики;

уметь:

- осуществлять постановку начально-краевых задач геомеханики и сопряженных задач геомеханики как задач механики деформируемого твердого тела с учетом специфики объекта исследования – массивов горных пород и подземных геотехнических сооружений;
- выполнять численное решение модельных задач геомеханики;
- выполнять анализ и обобщение результатов решения и моделирования, выдавать рекомендации и заключения.

Как результат усвоения материала обучающийся сможет применять аналитические, приближенные и численные методы механики сплошных сред и механики деформируемого твердого тела применительно к решению широкого класса задач современной геомеханики.

В связи со все более широкомасштабным освоением подземного пространства спектр и количество актуальных фундаментальных и прикладных задач геомеханики стремительно возрастает.

Интенсивное освоение приповерхностного и подземного пространства приводит к количественным и качественным изменениям в геомеханических процессах и явлениях и даже к новым, ранее не имеющим места проявлениям. В связи с этим, в настоящее время, иногда даже коренным образом, меняются представления о природе геомеханических явлений и процессов. Поэтому появляется целый ряд новых научных проблем и вопрос, связанных, с одной стороны, с исследованием влияния техногенных факторов на геофизическую среду, а, с другой стороны, с изучением поведения породной толщи и умением управлять природными процессами в новых изменившихся условиях.

На сегодня математическое и компьютерное моделирование стало неотъемлемым элементом решения задач геомеханики. Успехи в решении проблемы качественного соответствия реальных геомеханических процессов и их математического описания впечатляют. Вместе с тем, с задачей количественного соответствия результатов вычислений и данных натурных наблюдений дело обстоит не столь успешно, так как достичь высокой количественной точности при рассмотрении математических моделей крайне сложно. Одна из причин такого положения заключается, например, в несоответствии механических и прочностных характеристик, используемых для расчетов, и реальных характеристик рассматриваемой породной толщи, вследствие сильно статистического их характера. Следующей причиной служит то обстоятельство, что невозможно построить механико-математическую модель, которая бы в точности отражала все особенности реального процесса и т.д.

Основная задача моделирования заключается в том, чтобы по результатам выполнения модельных исследований можно было дать необходимые ответы о качественных и количественных особенностях и эффектах изучаемого явления в натурных условиях.

Моделирование в общем случае можно разделить на три вида: физическое, математическое и функциональное.

В данном ЭУМК рассматриваются вопросы математического моделирования геомеханических процессов с точки зрения теорий, подходов и методов современной механики.

В общем случае математическое моделирование применяют для изучения тех процессов, которые можно описать математически (т.е. для которых можно построить математические модели), причем таким образом, что построенная модельная математическая задача является решаемой.

В отличие даже от совсем недавнего времени, компьютер сегодня является не просто инструментом для работы, а становится все более «интеллектуальным помощником». Сегодня исследователи не сосредоточивают внимания на разработку способов и подходов решения той либо иной отдельной задачи, а занимаются проблемой адекватности постановки модельной задачи и реального

процесса. При этом методы решения модельной задачи могут быть весьма сложными, даже “громоздкими и тяжеловесными”. Так как задачи сегодня решаются с привлечением специализированного программного обеспечения, то данное обстоятельство не является определяющим фактором. Такой подход открывает новые возможности в связи с тем, что каждая индивидуальная задача решается в строгой математической постановке, а не приближенными методами по инженерным формулам.

Следует подчеркнуть, что сегодня подходы к компьютерному моделированию качественно изменяются и одно из важных направлений развития современных технологий компьютерного моделирования в механике – наличие в таких технологиях элементов машинного обучения (МО) или методов искусственного интеллекта (ИИ).

Можно констатировать, что современные компьютерные технологии моделирования физических процессов это: высокопроизводительные вычислительные средства + системы Баз Знаний и Данных + математические модели + элементы технологий искусственного интеллекта.

Для успешного овладения дисциплиной «Механико-математические модели современной геомеханики» необходимы базовые знания по таким дисциплинам, как: «Механика сплошной среды», «Математические методы механики деформируемого твёрдого тела и основы механики разрушения»; «Численные методы механики сплошной среды», «Вычислительная механика», «Компьютерная механика».

Материал данной ЭУМК существенным образом базируется на более ранних учебных публикациях авторов, содержание которых используется в качестве составных элементов для дисциплины «Механико-математические модели современной геомеханики».

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1.1. Актуальные задачи современной геомеханики с точки зрения механико-математического моделирования

Рассматриваются основные направления разработки и построения механико-математических моделей, создания вычислительных алгоритмов и компьютерных систем нового типа для решения широкого класса задач геомеханики.

Как правило, решение большого количества прикладных механических задач требует выполнения пассивного или активного эксперимента. Основным недостатком *пассивного эксперимента* (под данным термином понимаем натурные исследования или наблюдения) заключается в невозможности достаточного варьирования входными параметрами, что ограничивает использование полученных результатов рамками конкретных условий, в которых были выполнены исследования.

Чтобы избежать этого недостатка, прибегают к процедуре замены реального процесса его моделью, с помощью которой и выполняются последующие исследования с достаточно широким варьированием входных параметров (будем называть это *активным экспериментом*).

Наиболее широко используемыми технологиями проведения активного эксперимента являются подходы, основанные на использовании физических, механико-математических моделей, численных моделей (построенных, как правило, на основе математических моделей).

До массового внедрения компьютерных технологий методы математического моделирования не имели значительного распространения при изучении сложных прикладных процессов из-за трудоемкости, а порой и невозможности проведения реальных вычислений в соответствии с построенной математической моделью. В связи с этим предпочтение отдавалось исследованиям на физических моделях. Физическое моделирование, в свою очередь, помимо положительных моментов, имеет и большое количество отрицательных факторов, препятствующих его распространению в качестве универсальной технологии.

С появлением мощных персональных вычислительных средств сегодня появилась реальная возможность выполнять *компьютерные модельные эксперименты* без использования дорогостоящих и долговременных натурных исследований. То есть заменить процедуру создания физической модели на математическую и построенную на ее основе численную модель, решаемую, в свою очередь, с привлечением компьютерных технологий, и проводить исследования на основе последней в соответствии с заранее определенными физическими уравнениями, описывающими поведение среды. Помимо этого, развивается и такое направление компьютерного моделирования, в основе

которого лежат различные методы и технологии имитационного компьютерного моделирования. В последние годы в качестве последних все более завоевывают популярность методы машинного обучения (МО), составляющие технологии искусственного интеллекта (ИИ).

Поэтому необходимо четко представлять области эффективного использования и ограничения того либо иного подхода к проведению моделирования реальных процессов. Разрабатывать новые «сопряженные» технологии моделирования геомеханических процессов, включающих в себя методы активного (физического, механико-математического, численного), пассивного (в натурных условиях) эксперимента и компьютерного имитационного моделирования (симулирования).

Таким образом, на сегодня в качестве одной из важных задач можно обозначить проблему разработки, развития и адаптация современных продвинутых подходов и методов механико-математического и численного моделирования, имитационного компьютерного моделирования для исследования геомеханических процессов и решения прикладных задач. При этом основной упор должен быть сделан на изучение физических (механических) процессов, моделирование которых весьма трудоемко или практически невозможно произвести с помощью иных подходов.

В. Геомеханические процессы в породных массивах являются одними из наиболее сложных с точки зрения адекватного качественного и тем более количественного их описания на основе математического моделирования. Качественным критерием приемлемого математического решения задач геомеханики является ясная интерпретация, достаточно просто и четко объясняющая получаемые числовые и экспериментальные результаты. Это является возможным лишь тогда, когда в качестве исходной используется физически обоснованная гипотеза механического поведения породного массива, учитывающая сложные граничные условия, гетерогенность строения и состава толщи пород и т.д.

Поэтому, весьма важной в настоящее время является следующая задача: **Углубление и расширение фундаментальных знаний о поведении подрабатываемых массивов горных пород с геотехническими сооружениями (подземными, приповерхностными, наземными)**

Существенное продвижение в решении данной задачи позволяет разработать новые механико-математических модели поведения подрабатываемых породных массивов, наиболее адекватно описывающих их состояние и поведение с учетом накопленных к настоящему времени новых фактов и представлений о поведении породных массивов.

В свою очередь, такая общая задача включает большое количество важных подзадач. Среди них, например, такие:

В1. Весьма сложным является корректный учет изменчивости во времени полей напряжений в массиве в окрестности геотехнических сооружений (в особенности подземных) в связи с большим разнообразием влияющих факторов. Основное затруднение вызывает структурно-неоднородное строение массива.

Корректное описание напряженного состояния в породной толще с подземными сооружениями тесным образом связано с построением механико-математических моделей для описания напряженно-деформированного состояния (НДС) и горного давления в породном массиве.

В2. Наличие в массиве систем мелко- и крупноблоковой трещиноватости, разрывов и крупных тектонических нарушений, различная ориентировка этих структурных неоднородностей и нарушений относительно геометрических параметров подземных сооружений, разнообразие заполнителей трещин и контактных условий по трещинам делает задачу учета структурных неоднородностей при построении модельных задач весьма сложной. Помимо этого, в массивах горных пород, естественное равновесное состояние которых нарушено техногенной деятельностью, в общем случае формируются области, находящиеся в различных структурных состояниях. В связи с этим в общем случае математические формулировки модельных задач для изучения геомеханических процессов в выделенных характерных зонах подработанной породной толщи должны быть различными.

Поэтому, проблема построения механико-математических моделей, предназначенных для изучения напряженно-деформированного состояния породной толщи от глубин техногенной деятельности вплоть до дневной поверхности, является задачей актуальной и весьма сложной.

В3. Разработка критериев предельного состояния массивов горных пород с геотехническими сооружениями и для выделения в подработанном породном массиве областей, находящихся в различном деформированном состоянии.

Под *предельным состоянием (ПС)* породных массивов и геотехнических систем понимается такое их состояние, при котором в рассматриваемой области массива горных пород или в геотехническом сооружении имеют место значительные по размерам зоны нарушения критериев ПС (зоны нарушения сплошности, разрушения, трещиноватости и т.д.), совокупность которых может привести к полному разрушению, потере устойчивости рассматриваемой области массива горных пород или переходу породной толщи в данной области в новое структурное состояние.

Под *геотехнической системой*, в свою очередь, понимается механическая система «вмещающий массив горных пород – инженерное подземное сооружение в совокупности всех составляющих его элементов».

Под *устойчивостью* понимается способность системы сохранять текущее состояние под действием внешних нагрузок. *Долговечность* определяется, как

способность механической системы сохранять эксплуатационно-пригодное состояние в течение длительного (заданного) периода времени.

В геомеханике понимание прочности и устойчивости значительно отличается от общепринятого классического определения. Данное обстоятельство связано с тем, что нарушение сплошности, которое проявляется в виде образования макротрещин или систем трещин, а также формирования блочной структуры в рассматриваемой области массива горных пород не всегда приводит к полному разрушению данной области и не всегда рассматривается как его эксплуатационно-непригодное состояние. Так, при решении прикладных задач образование локальных зон нарушения сплошности массива (зон разрушения) является допустимым, если это не приводит к нарушению устойчивости в целом всей выделенной области массива горных пород.

В связи с этими обстоятельствами при рассмотрении прочности и устойчивости массивов горных пород речь идет не о критериях прочности горных пород в классическом понимании, а о критериях, в соответствии с которыми массив горных пород переходит в ПС.

При оценке ПС массивов горных пород важным является следующее обстоятельство: выбор условия ПС обусловлен типом НДС, сформированным в данной области массива горных пород, а также прогнозом поведения геотехнической системы при выполнении этого условия. Таким образом, при изучении прочности и устойчивости массивов горных пород, как правило, находящихся в условиях сложного напряженного состояния, следует говорить не об одном критерии ПС, а о системе критериев ПС.

Из-за большого разнообразия НДС, в которых может находиться исследуемая область массива горных пород, не представляется возможным сформулировать универсальный критерий ПС. Исследование массива горных пород на ПС необходимо выполнять на основании комплексного критерия, включающего несколько условий ПС.

В4. Общеизвестно, что для горных пород и массивов, как правило, неоднородных по строению и сложенных структурными элементами различных размеров при отсутствии стандартного оборудования и стандартных методов испытаний механические свойства материала (горной породы), механические свойства образцов горной породы, образцов породного массива и механические свойства породного массива различны и в некоторых случаях существенным образом. Работ, относящихся к определению свойств подрабатываемых массивов горных пород, достаточно много и в этом направлении достигнуты значительные успехи, позволяющие устранить указанные недостатки и открывающие новые направления исследований. И все же нерешенных вопросов и проблем в задаче определения физико-механических свойств породных масс, массивов горных пород различных масштабов с естественными и техногенными нарушениями остается еще достаточно много. В настоящее время активно

развивается новое научное направление – горное породоведение, связанное с построением классификаций горных пород и массивов по физико-механическим свойствам в канонических шкалах. Для количественного описания блочно-иерархического строения разрабатывается кластерный подход, основанный на существовании канонических рядов структурных отдельностей и сопряженных с ними амплитудно-периодных спектров геофизических и геомеханических полей.

В5. Следует отметить и актуальные задачи, связанные с моделированием геофизических процессов в массивах горных пород как многослойных сред (с учетом наличия газовой фракции и жидкости). Для надежного решения такого класса задач необходимо построение сопряженных механико-математических моделей. На их базе решаются, в частности, такие важные задачи, как разработка мер борьбы с внезапными выбросами породы и газа в калийных рудниках и на угольных шахтах, предотвращение затопления рудников и др.

В6. Несмотря на выполненное существенное количество научно-исследовательских работ, до настоящего времени остается не изученной и не решенной проблема прогнозирования и механико-математического описания такого опасного явления, как динамические явления при ведении крупномасштабных горных работ.

Формы проявления динамических явлений весьма разнообразны. Это горные удары, внезапные обрушения больших объемов горных пород в окрестности подземного сооружения, динамические удары по крепи выработок и др.

В7. Экспериментально подтверждено и теоретически обосновано, что породные массивы перед разрушением разделяются на части, при этом сплошность массива в целом может сохраняться. В результате этого в массиве возникает блочная структура. В дальнейшем деформация такой структуры происходит за счет относительного скольжения блоков и их поворотов. Очевидно, что при возникновении блочной структуры сопротивление породного массива деформированию уменьшается, но все же остается конечным. Данное явление характеризуется появлением на диаграмме «напряжение-деформация» ниспадающей ветви. Очевидно, что в этом новом состоянии массива связь между напряжениями и деформациями отлична от стандартной. Следовательно, в настоящее время необходимо существенным образом расширить «стандартные» подходы и схемы к построению механико-математических моделей задач геомеханики. Следует обязательным образом исследовать поведение массивов горных пород при «попадании» на диаграмме деформирования на участок послепиковой стадии при развитии деформационных процессов. Как уже указывалось, важным является то обстоятельство, что на ниспадающей ветви напряжения и деформации не связаны между собой однозначной зависимостью, а представляют собой величины, определяемые независимо и по отдельности из

основных законов механики. В области послеупругого поведения массивов горных пород помимо общих деформаций развиваются деформации сдвига и проявляются площадки скольжения. Вследствие этого наблюдается эффект дилатансии (изменение объема за счет изменения напряжений и за счет сдвига). В свою очередь, проявление площадок скольжения и связанной с этим дилатансии, является важным для изучения большого круга процессов, например, геофильтрации в породной толще.

С. В качестве следующей важной проблемы хотелось бы выделить такую задачу, как «Построение корректных численных геомеханических моделей поведения и долговременного состояния породных массивов с системой геотехнических сооружений с учетом структурных нарушений естественного и техногенного характера».

С существенным развитием вычислительной техники и значительным прогрессом в разработке специализированного программного обеспечения для выполнения моделирования различных классов физических (механических) процессов и решения прикладных задач, актуальной задачей современной геомеханики является построение численных алгоритмов и расчетных схем компьютерного моделирования, позволяющих корректно моделировать геомеханическое состояние подрабатываемых массивов горных пород по всей глубине: от горизонтов ведения горных работ до дневной поверхности. Сложность построения таких алгоритмов определяется в первую очередь тем, что при подработке породных массивов формируются области, находящиеся в различном структурно-механическом состоянии.

Перспективными подходами, позволяющими построить эффективные алгоритмы для решения задач такого класса, являются модификация численных методов механики сплошных сред путем расширения границ их применения на те области, где нарушаются, например, классические условия сплошности, или комбинация численных методов механики сплошных сред и методов механики дискретных сред — сопряженные методы численного анализа.

Так, методы, основанные на понятии сплошности среды, не подходят для исследования геомеханических процессов после образования блочной структуры в массиве горных пород. Методы, в которых допускается нарушение условия сплошности, неэффективны для изучения поведения массива горных пород в рамках механики сплошной среды. Сопряженные (гибридные) методы базируются на преимуществах каждого из составляющих методов и нивелируют их недостатки. Применительно к моделированию геомеханических процессов сопряженный метод позволяет рассматривать все стадии поведения геоматериалов до и после разрушения.

Прямые сопряженные технологии заключаются в моделировании поведения породных масс в зонах нарушения сплошности на основе дискретных

методов и в областях сплошности — на основе континуальных численных методов.

Активное использование технологий компьютерного моделирования в геомеханике развивается по нескольким направлениям. Одно из наиболее «наукоемких» и имеющее очень широкий спектр приложений представляются такое направление, как построение компьютерных цифровых геомеханических моделей породных массивов с разветвленной системой подземных сооружений с учетом структурных особенностей породных массивов, и использование таких моделей для изучения и прогнозирования физических процессов в массивах горных пород при воздействии естественных и техногенных источников возмущений.

Д. Отдельно в качестве важной проблемы выделим такое научное направление фундаментальных исследований в геомеханике и геофизике, как: «Разработка теоретических основ теорий «динамического деформирования геосред при мощных природных и техногенных воздействиях». Динамическая устойчивость подземных сооружений и массивов горных пород с крупномасштабной сетью подземных сооружений. Техногенные катастрофы».

В формировании специфических динамических процессов в подрабатываемых породных массивах существенную роль играет их блочно-иерархическое строение. Сегодня является неоспоримым положение о том, что для правильного описания поведения породных массивов и их откликов на внешние воздействия необходимо учитывать сложное строение массивов, расчлененных поверхностями и зонами ослабления на отдельные блоки различного масштабного уровня.

Одной из важных задач освоения подземного пространства является достоверный прогноз длительной устойчивости породного массива как в окрестности сложной системы подземных выработок, так и устойчивости рассматриваемой области породной толщи в целом. Изменения, накапливаемые в массиве под воздействием техногенных факторов, способны вызвать катастрофические последствия не только для отдельного подземного сооружения, но и для региона ведения горных работ в целом. Результатом может быть крупномасштабная техногенная катастрофа, проявляющаяся в различном виде (что зависит от целого набора факторов). В соответствии с основными законами теории катастроф, для инициирования процесса выделения накопленной в приконтурной зоне потенциальной энергии при определенных условиях достаточно незначительного внешнего воздействия.

Все более возрастающий уровень техногенных нагрузок формируется в регионах активного освоения подземного пространства. Так, например, разработка месторождений полезных ископаемых ведется на достаточно ограниченном пространстве в пределах шахтных полей. Целый комплекс проблем влечет за собой наличие в пределах региона отвалов и шламохранилищ.

Необходимо отметить и тот факт, что в пределах региона ведения горных работ как правило существуют зоны новейшей геодинамической активности, зоны с замещениями, флексурами и разломами.

Сегодня представляется доказанным факт того, что вывести из состояния устойчивого равновесия геосреду можно источниками техногенного происхождения (например, крупномасштабными горными работами на ограниченном участке породной толщи). В качестве такого источника могут выступать, например, динамические импульсы малой амплитуды и интенсивности, но определенной частоты. Это может быть и горный удар, малоамплитудные подвижки по разлому или динамический срыв значительной величины. Вместе с тем, современный уровень развития науки и технологий не позволяет разработать единой теории управления техногенными динамическими процессами как реакцией на активное освоение подземного пространства. Кроме того, время «наступления эффекта» может быть разным.

Известно, что в зонах наиболее активно нагружаемого массива инициируются медленные деформационно-волновые процессы, распространяющиеся затем на другие участки шахтных полей [9]. Важным представляется такой факт, что деформационно-волновые процессы могут проявляться на значительном удалении от мест производства горных работ и профилактических мероприятий, а также над закладочным массивом. Причиной тому могут быть «глобальные» геомеханические процессы, происходящие в масштабе шахтных полей. Интерес представляет эффект усиления волн на значительных расстояниях от источника их возбуждения. Эффект состоит в том, что в сильно напряженных прочных горных породах скорость, приобретаемая частицами около выработок, нередко оказывается на порядок больше скорости частиц вблизи от источника сейсмической волны. Эффект усиления представляется исключительно важным для понимания того, как сравнительно слабые сейсмические возмущения могут вызвать опасные динамические явления – горные удары в шахтах. С точки зрения теории устойчивости, эти динамические явления представляют предельный случай усиления, когда бесконечно малое возмущение приводит к значительным, нередко катастрофическим последствиям.

Для получения замкнутой механико-математической модели массивов горных пород с учетом эффекта «дальнодействия» (или построение модели «самонапряженных» геосред) необходимо иметь физический закон, описывающий поведение и взаимодействие блоков рассматривающих соответствующих уровней между собой при заданном виде возмущений массива.

Разработка теории предвестника волновых процессов, приводящих к техногенным катастрофам представляется крайне важным как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения. Разработав соответствующие технологии и выполняя мониторинг изменения полей упругих

колебаний в ответственных регионах породных массивов (в том числе и в области разломов), можно предсказать начало динамических явлений большой интенсивности.

Дополнительную информации по рассматриваемым вопросам, можно найти, например, в следующих источниках:

1. Адушкин В.В., Опарин В.Н. От явления знакопеременной реакции горных пород на динамические воздействия – к волнам маятникового типа в напряженных геосредах. Ч.1. // ФТПРПИ. №2. 2012. С.3- 27.

2. Опарин В.Н., Танайно А.С. Каноническая шкала иерархических представлений в горном породоведении. Новосибирск: Наука, 2011.

3. M.Bryla, A.V. Krupoderov, A.A. Kushunin, V. Mityushev and M.A. Zhuravkov Mathematical Models of Mechanical Fields in Media with Inclusions and Holes // Handbook of Functional Equations. Functional Inequalities. Rassias, T.M. (Ed.). Springer. 2014, XI. Pp.15-42.

4. Шемякин Е.И. Деформации и разрушение горных пород (о кольцевой прочности) // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. Минск: УП «Технопринт». 2001. С.471-476. Шемякин Е.И. Об инвариантах напряженного и деформированного состояния в математических моделях сплошной среды // ДАН. 2000. Т. 373, №5. С.632-634.

5. Журавков М.А., Коновалов О.Л. К проблеме построения численных геомеханических моделей массивов горных пород со сложным структурным строением // коллективная монография «Геомеханические поля и процессы: экспериментально-аналитические исследования формирования и развития очаговых зон катастрофических событий в горнотехнических и природных системах». Том 2: Фундаментальные проблемы и новые методы контроля нелинейных геомеханических процессов в горнотехнических и природных системах / [В.Н. Опарин, В.В. Адушкин, А.А. Барях, М.А.Журавков и др.]; отв. ред. Н.Н. Мельников, Рос.акад. наук Сиб. отд-ние, Ин-т горного дела [и др.] – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019. С.253 – 297.

6. Курленя М.В., Опарин В.Н. Скважинные геофизические методы диагностики и контроля напряженно-деформированного состояния массивов горных пород. – Новосибирск: Наука, 1999.

7. Журавков М.А. Техногенные динамические события в регионах крупномасштабного освоения подземного пространства. Ч.1–3 // Горная механика и машиностроение. №1–3. 2014.

8. Журавков М.А., Богдан С.И. Моделирование и прогноз катастрофических явлений в геомеханике. Д200219 от 13.02. Реферативный сборник непубликуемых работ БелИСА. Вып.1 (24). 2002. 67с.

9. О возможных причинах увеличения сейсмической активности шахтных полей рудников «Октябрьский» и «Таймырский» Норильского месторождения в 2003 г. Ч.1 – 4 //ФТПРПИ. № 4 – 6. 2004; №1. 2005.

10. Линьков А.М. Об усилении сейсмических волн вблизи нарушений // ФТРПИ. – 2001 - №3.

1.2. Геомеханика как раздел современной механики

Давая определение **геомеханики**, будем учитывать общее определение механики.

Механику в целом определяют, как науку о механическом состоянии и поведении материальных тел и происходящих при этом взаимодействиях между телами. Современная механика охватывает огромное количество разделов и направлений, среди которых механика точки и системы точек, механика деформируемого твердого тела, гидродинамика и аэродинамика и т.д. Кроме того, механика представляет собой фундаментальную основу многих дисциплин и направлений (теория машин и механизмов, прочность и устойчивость сооружений и т. д.).

Термин *“геомеханика”* в первоначальном смысле означает механику Земли как планеты. То есть геомеханикой (как раздела фундаментальной и прикладной науки) называется наука о механическом поведении породных массивов под действием факторов естественного и техногенного происхождения.

Гравитация, тектонические, сейсмические и другие природные явления, а также производственная деятельность человека (техногенное воздействие) приводят к возникновению в верхней части Земной коры механических процессов. Изучением этих процессов с точки зрения их механико-математического моделирования занимается специальная область механики – геомеханика.

Таким образом, *содержание геомеханики* составляет качественное и количественное исследование механических процессов, протекающих в земной коре, т.е. поверхностных слоях Земли (мощностью от нескольких десятков - сотен метров до первых километров), видоизмененных механическими, физическими и иными видами воздействиями в течение длительного периода времени (измеряемого иногда тысячами и миллионами лет) естественного и техногенного происхождения.

Механические процессы оказывают значительное влияние на строение земной коры и на возводимые на ней и внутри сооружения, особенно в связи с все более интенсивным использованием земной коры для оснований крупномасштабных сооружений и все более глубоких горизонтов как среды для возведения подземных сооружений.

Значение геомеханики огромно как для теоретических исследований и решения глобальных и общих региональных задач для геофизических сред, так и в прикладных задачах при строительстве крупномасштабных (подземных, приповерхностных и наземных) геотехнических сооружений, добыче полезных ископаемых, что существенно влияет на состояние, свойства и механические

процессы в слоях земной коры, находящихся под их воздействием. Так, например, когда возводятся грандиозные сооружения (например, огромные плотины), перекрываются глубокие долины и природные каньоны для создания огромных водохранилищ, прокладываются на больших глубинах подземные коммуникации протяженностью в тысячи километров, строятся целые подземные города и т.п., то вопрос о влиянии этих сооружений на природную среду, в данном случае на свойства и состояние слоев земной коры, а также на изменение действия массовых сил (гравитационных, сейсмических, приливно-отливных в жидкой и твердой оболочках Земли и др.) на сооружения приобретает первостепенное значение.

Замечание. Под *геофизической средой* понимаем любую композицию твердых, жидких и газообразных тел, взаимодействующих между собой при механическом взаимодействии и движении в силовых полях Земли.

В качестве примеров необходимости и важности геомеханических исследований можно отметить следующие *прикладные направления геомеханики*:

1. Строительство ответственных инженерных поверхностных и приповерхностных сооружений

В качестве примера можно отметить строительство высоких плотин, которое, в свою очередь, обычно связано с образованием огромных водохранилищ.

Строительство масштабных геотехнических сооружений существенным образом сказывается на напряженно-деформированном состоянии верхних слоев земной коры, вызывая значительные количественные и качественные изменения.

Так, возведение высоких плотин требует делать прогнозы напряженно-деформированного состояния как тела плотины, так и его основания, а также устойчивости всего сооружения и бортов водохранилища.

Масштабные поверхностные и приповерхностные геотехнические сооружения кроме того зачастую служат причиной наведенной (техногенной) сейсмичности в регионе. Данное обстоятельство связано с изменением напряженного состояния верхних слоев земной коры (например, заполнение водохранилищ действует как своеобразный “спусковой” механизм).

2. Добыча полезных ископаемых.

На современном этапе развития горнодобывающей промышленности возводятся грандиозные по масштабам объекты горной промышленности, причем зачастую в новых уникальных горно-геологических условиях, что требует проведения серьезных исследований по прикладной геомеханике (изучение напряженно-деформированного состояния геотехнических сооружений и непосредственно окружающей их породной толщи).

3. Откачка подземных вод, нефти и газа.

Разработка эффективных технологий добычи углеводородного сырья, откачки подземных вод, газа требует выполнения большого комплекса серьезных модельных исследований. Кроме того, такие работы вызывают значительные оседания больших участков земной поверхности, что можно заранее и с достаточной точностью предусмотреть, используя методы прогноза, разработанные в прикладной геомеханике.

4. Устойчивость крупномасштабных откосов.

В этом случае необходимо решение прикладных задач геомеханики как по исследованию устойчивости и консолидации собственно откосов, так и рассмотрение, и изучение мероприятий по усилению их устойчивости.

5. Масштабное освоение подземного пространства (подземное строительство).

В настоящее время проблема масштабного освоения подземного пространства становится все более значимой и сложной.

Успешное освоение подземного пространства (строительство и эксплуатация масштабных подземных сооружений, и, в первую очередь, особо ответственных, таких как крупные транспортные коммуникации (например, линии метрополитена), атомные электростанции, хранилища и захоронения различного назначения, строительство масштабных подземных сооружений в условиях городских мегаполисов и др.) связано с обеспечением долговременной механической устойчивости породной толщи. Такие исследования, в свою очередь, требуют наличия как можно более полного комплекта знаний о породном массиве в регионе геомеханического влияния рассматриваемого объекта. Следует подчеркнуть, что данные знания являются динамическими (в режиме постоянного обновления), поэтому необходима организация системы регионального геомеханического мониторинга для изучения и контроля состояния породного массива, вмещающего объект, как в период его строительства, так и в период его эксплуатации.

Одной из самых основных задач освоения подземного пространства является достоверный прогноз длительной устойчивости породной толщи в окрестности сложной системы природных и инженерных подземных сооружений.

Изменения, накапливаемые в массиве горных пород под воздействием техногенных факторов, способны вызвать катастрофические последствия для подземного сооружения. При возрастании масштабов эксплуатируемого подземного пространства (размеров сооружений), размещении сооружений на больших глубинах, в зонах со сложными структурно-геологическими условиями механизм воздействия этих факторов на процессы деформирования и разрушения в породном массиве начинает играть главенствующую роль. При этом поведение породной толщи имеет неоднозначный характер, поэтому реакция массива на техногенное воздействие тоже будет неоднозначной.

Особенно актуальной эта проблема становится применительно к рассмотрению объектов повышенного риска и с длительными сроками службы.

В общем случае в такой области, как «Освоение подземного пространства» можно выделить несколько крупных направлений.

В первую очередь, это комплексная рациональная (с точки зрения новых концепций и положений) и высокоэффективная эксплуатация и отработка месторождений полезных ископаемых.

Во-вторых, это проблемы создания хранилищ с длительным и весьма длительным периодами эксплуатации (например, захоронение отходов ядерной энергетики, “хвостового” хозяйства химического производства и добычи минеральных ресурсов).

Третье направление связано с освоением подземного пространства больших городов и мегаполисов (освоение подземного пространства больших городов на такую же глубину, что и высоту).

Объединяющим и первостепенным моментом для обозначенных трех направлений является наличие и углубление фундаментальных знаний о геомеханическом и сопряженном с ним поведении массивов горных пород.

На современном этапе происходит существенное изменение представлений о состоянии и поведении породного массива, часто требующих существенного пересмотра подходов и методов к расчету устойчивости и прочности подземных объектов. Насущным требованием является задача увязки устойчивости природных объектов с их генезисом, режимом потребления энергии при деформировании и механически значимыми структурными характеристиками. Так, например, на сегодня такие факторы, как блочная структура массива и его остаточная прочность практически не учитываются в проектных решениях. Модели природных объектов необходимо строить как целостные структуры, не раскладывая их на слабо взаимообусловленные части. В связи с этим, одной из самых важных первостепенных задач в области освоения подземного пространства является задача разработки моделей породного массива, наиболее адекватно описывающих его состояние и поведение в зависимости от конечных целей исследований.

Замечание. Достаточно подробно об этом речь шла в предыдущем разделе.

Исходя из определения геомеханики как специальной области общей механики, посвященной изучению механических процессов в верхних слоях земной коры, в геомеханике можно выделить следующие дисциплины:

- механика сплошных массивно-кристаллических горных пород и массивов;
- механика трещиновато-блочных пород и массивов;
- механика одно-, двухфазных и многофазных горных пород и массивов, грунтов;
- механика органоминеральных и органических масс.

В механическом смысле все выделенные породы и массивы подчиняются общим фундаментальным законам и зависимостям, но для каждого отдельного класса пород и массивов обязательно еще в каждом конкретном случае устанавливать вид физических уравнений, характеризующих связь между компонентами напряженно-деформированного состояния, то есть поведение среды. Только присоединяя к общим уравнениям механики сплошных или дискретных сред специфические *добавочные физические зависимости* (соотношения между напряжениями и относительными деформациями и скоростями деформаций, т.е. *уравнения состояния*), характеризующие изменения под действием внешних сил физического состояния и механических свойств каждого рассматриваемого класса пород и массивов, можно получить систему уравнений, достаточную для решения конкретных прикладных задач геомеханики рассматриваемого класса не только в качественном, но и в количественном отношении.

Содержание геомеханики составляет совокупность перечисленных выше разделов геомеханики, посвященных решению общей проблемы количественного исследования механических процессов, возникающих в верхних слоях земной коры в результате гравитационных, сейсмических и других процессов, а также под влиянием возведения крупномасштабных сооружений.

Исходя из круга решаемых задач, в геомеханике выделяют несколько направлений, например:

- механика горных пород и массивов,
- механика грунтов,
- гидрогеомеханика,
- глобальная геомеханика и космогеомеханика, другие направления.

Рассмотрим более подробно такое направление, как «Механика горных пород и массивов».

Механику горных пород и массивов можно определить, как науку о прочности, устойчивости и деформируемости массивов горных пород, горнотехнических объектов и сооружений в поле природных и вызванных влиянием горных работ и строительством подземных геотехнических сооружений сил горного давления.

Механика горных пород и массивов является наукой, изучающей свойства и состояние горных пород и массивов с учетом твердой, жидкой и газообразной фазы; естественного и “наведенного” напряженного состояния; механические процессы и явления, протекающие в массивах горных пород при ведении горных работ и строительстве подземных геотехнических сооружений для создания целесообразных методов разрушения породных масс, управления горным давлением и деформацией горных масс, а также устойчивости подземных сооружений.

Механика горных пород и массивов, являясь самостоятельным научным направлением геомеханики, в то же время носит ярко выраженный прикладной характер, поскольку область ее исследований и круг инженерных задач представляют непосредственный практический интерес для различных отраслей народного хозяйства и, в частности, для горнодобывающей промышленности и подземного строительства.

Замечание. В то же время в состав механики горных пород и массивов не следует включать круг вопросов, связанных с собственно механическим разрушением горных пород с помощью различных орудий, механизмов, способов. Этот раздел скорее всего должен быть отнесен к физике разрушения горных пород.

Механика горных пород и массивов в большинстве своем опирается на основные положения и концепции теоретической и прикладной механики, физики твердого тела, цикла геологических, геохимических и других наук.

Основные процессы, изучаемые механикой горных пород, можно подразделить на три группы:

1. *НДС массивов горных пород и его изменения* в связи с проведением подземных горных работ и строительством геотехнических объектов.
2. *Сдвигание и деформации породной толщи и земной поверхности*, проявляющиеся в самых разнообразных формах.
3. *Взаимодействие породных масс и крепей.*

Сопоставляя **задачи механики горных пород и массивов и общей геомеханики**, нетрудно видеть, что они, по существу, различаются предметом изучения и масштабами изучаемых объектов.

Механика горных пород и массивов может рассматриваться как один из разделов общей геомеханики. В механике горных пород и массивов объектами исследований выступают породные массивы, размеры которых ограничены влиянием производственной деятельности человека. То есть механика горных пород и массивов решает главным образом задачи, связанные с освоением породных массивов вследствие техногенной деятельности человека.

Механика горных пород и массивов включает в себя ряд *самостоятельных научных направлений*, таких как:

- Физико-механические свойства массивов горных пород.
- Механические процессы в породных массивах при ведении подземных горных работ.
- Механические процессы в обнажениях породных массивов при ведении открытых горных работ.
- Механика разрушения горных пород.
- Динамические процессы и явления в массивах горных пород.
- Процессы сдвижений земной поверхности и приповерхностной толщи под влиянием горных работ.

- Геогидромеханические и фильтрационные процессы в массивах горных пород под влиянием естественных и техногенных факторов.
- Газодинамические процессы в массивах горных пород при ведении горных работ и др.

Одним из важных понятий в механике горных пород и массивов является понятие **горного давления**, с которым, собственно, и связаны основные процессы в массивах горных пород. Вопрос отыскания определения, наиболее строго отражающего это понятие, обсуждается и сегодня. Большинство специалистов, предлагая различные формулировки этого понятия, так или иначе связывают его с понятием силы, имея в виду объемные силы, объективно существующие в массиве пород.

В широком смысле **горное давление** представляет собой тензор напряжений в массивах горных породах, а в узком смысле оно является равнодействующей всех сил, действующих в каждой данной точке на границах породных обнажений с искусственными и естественными опорами (целики, крепи, потолочины, краевые зоны).

Необходимо отметить, что не следует ограничивать понятие “горное давление” *условием неперемещения наличия подземной выработки*, так как это может быть истолковано как отрицание объективного существования сил горного давления, имеющих место в массиве независимо от наличия или отсутствия в нем выработок.

Таким образом, при формулировании понятия “горное давление” принципиально важно учитывать то обстоятельство, что к горному давлению необходимо относить все силовое поле в массиве горных пород с выработки. Это обстоятельство продиктовано тем, что в действительности фактические силовые поля в массиве пород, как будет показано в дальнейшем, значительно сложнее и многообразнее идеализированных гравитационных полей сил.

С учетом изложенного понятие **“горное давление”** может быть сформулировано как *“механические силы, действующие в массиве горных пород (как при наличии «горных выработок», так и при их отсутствии) и вызываемые собственным весом пород, тектоническими движениями земной коры, напорами подземных вод, давлением газов в породах и другими подобными факторами”*.

Следует выделить также понятие **“проявления горного давления”** как *результат действия сил горного давления, выражающегося в деформациях, сдвиге и разрушениях горных пород и масс, в силовом взаимодействии между породной толщей и крепью, т.е. результат процессов механики горных пород и массивов*.

Необходимо различать *видимые проявления горного давления*, наблюдаемые в горных выработках визуально, и такие проявления («неявные»), которые

можно лишь измерить точными инструментальными методами (например, упругие деформации в массиве пород).

В последнее время некоторые авторы употребляют сокращенный термин **“горный массив”**, отождествляемый с термином **“массив горных пород”**. Однако первым термином в геолого-географической и горной литературе обозначают скопление гор. Поэтому более правильно применение термина **“породный массив”** в качестве сокращенного термина **“массив горных пород”**.

В горной и геологической литературе часто употребляют термин **“физико-механические свойства горных пород”**.

До недавнего времени практику горного дела интересовали в основном механические свойства пород, их пористость, плотность и объемный вес, которые и объединялись указанным термином. В последнее время, однако, возрос интерес к электромагнитным, акустическим, тепловым, радиоактивным свойствам пород как объективным параметрам, меняющим свои значения с изменением напряженного состояния массива, а также определяющим условия разрушаемости пород новыми физическими методами.

В связи с этим термин физико-механические свойства пород стал неточен, и его целесообразно заменить более общим термином **“физические свойства пород”**, объединяя в нем, в частности, механические и плотностные свойства, которые наряду с электромагнитными, тепловыми и другими характеристиками могут рассматриваться как отдельные классы физических свойств.

При этом **механические свойства пород** – класс свойств, представляющий наибольший интерес в механике горных пород, – можно определить как класс физических свойств, характеризующих способность пород сопротивляться деформированию и разрушению в сочетании со способностью деформироваться под действием внешних механических сил.

Механика однофазных, двухфазных и многофазных грунтов рассматривает природные грунты, т. е. рыхлые горные породы коры выветривания литосферы, состоящие из взаимодействующих твердых (минеральных), жидких (водных и водно-коллоидных) и газообразных (паров и газов) частиц, не связанных или связанных так, что прочность внутренних связей между минеральными частицами во много раз меньше прочности самих минеральных частиц.

Замечание. **Литосфера Земли** – внешняя, относительно жесткая и хрупкая оболочка планеты, включающая кору и часть верхней мантии. Литосфера разделена на небольшое число плит, изостатически уравновешенных на пластичной астеносфере. Разделение на плиты не связано с разделением на океаны и материки. Литосфера состоит из земной коры и верхов мантии примерно до глубины 70 – 100 км. Астеносфера продолжается на несколько сотен километров вглубь от литосферы к ядру, вещество в ней находится в состоянии, близком к точке плавления, и способно к перетеканию, ползучести.

В механике грунтов выделяют несколько разделов:

- Механика сыпучих сред. Это однофазные породы (пески и т. п.).
- Механика грунтовой массы. Двухфазные грунты, состоящие из минеральных частиц и поровой воды, полностью заполняющей их пустоты.
- Механика трехфазных грунтов (твердые минеральные частицы, вода, газы), базирующаяся на закономерностях механики деформируемых сред и теории консолидации грунтов, но с поправками, вносимыми теорией объемных сил с учетом влияния содержащегося в грунте газа, сжимаемости поровой газосодержащей жидкости, ползучести и старения минерального скелета грунта.

*В зависимости от направленности и масштаба геомеханических исследований в геомеханике можно выделить такие основные направления научных исследований: **глобальная и региональная геомеханика, гидрогеомеханика, прикладная строительная геомеханика** и др.*

Глобальная и региональная геомеханика рассматривает широкий круг вопросов, связанный с механизмом протекания геомеханических процессов в верхних слоях земной коры в связи с общекоровыми движениями (образование складок, разломов, поднятием и опусканием земной поверхности и пр.). Глобальная и региональная геомеханика тесным образом связана с **геодинамикой**, которая изучает главным образом глубинные структуры и геофизические процессы земной коры подкоровых верхних слоев мантии Земли (формирование геологических структур, движение материков, взаимное перемещение геологических платформ, внутреннее строение Земли и т. д.).

Поэтому весьма *важным* является *проведение совместных геомеханических геодинамических и сейсмических исследований.*

Интенсивное освоение подземного пространства в ряде случаев приводит к изменению структурной организации массива горных пород. В свою очередь, развитие новых структур или “оживление” старых сопровождается подвижками (сейсмичными или асейсмичными, т.е. “тихими”) по растущим или имеющимся разломам и проявляется в виде деформаций поверхности и сейсмических толчков (в общем смысле этого слова). Сейсмические события одного и того же энергетического уровня могут быть генетически связаны со структурами разного масштаба, имеющими разные пространственные и временные характеристики. Так, например, слабые события могут вызываться не только релаксацией полей напряжений на локальных неоднородностях вследствие различных факторов как естественной природы, так и техногенного происхождения, но и быть предвестниками более глобальных процессов (например, подготовкой крупных динамических сбросов). Особым случаем является техногенная сейсмичность, когда воздействие, оказываемое на горный массив вследствие технической деятельности людей (заполнение водохранилищ, эксплуатация месторождений полезных ископаемых, увеличение объемов выработанного пространства), активизирует структуры разных размеров.

В связи с этим актуальной представляется задача разработки методов выявления сейсмоактивных структур породного массива.

В дальнейшем рассматриваемые в данном курсе вопросы будут относиться главным образом к механике горных пород и массивов.

Основным объектом механики горных пород и массивов (подземной геомеханики) являются механические процессы, происходящие в массиве горных пород, связанные главным образом с техногенным нарушением его равновесного состояния (проведением в нем выработок и т.д.).

В отличие от других смежных разделов, например, строительной механики, механика горных пород и массивов весьма специфична, что обусловлено, во-первых, особенностями горных пород и массивов, механические свойства которых весьма различны, а степень неоднородности гораздо выше, чем для отдельных кристаллов, металлов, полимерных материалов и других твердых тел. Во-вторых, механические и геометрические схемы задач здесь также обычно существенно отличны от схем классических задач теорий упругости, пластичности, типовых задач строительной механики, машиноведения и других смежных областей.

Как правило, в механике горных пород и массивов использование известных решений классической теории упругости весьма ограничено, тем более что и деформации горных пород лишь в ограниченном диапазоне следуют закономерностям теории упругости.

Существенную роль в ряде задач, стоящих перед механикой горных пород и массивов, играют реологические процессы, т.е. процессы, связанные с деформациями пород и породных масс во времени. Этот тип задач занимает здесь значительно большее место, чем в других разделах механики.

Наконец, механика горных пород и массивов сталкивается с широким классом задач, связанных с деформированием массивов пород не только за пределами упругих и пластических деформаций, с учетом реологических эффектов, но и после разрыва сплошности массива горных пород в процессе его деформирования. Задачи такого рода обычно не встречаются в других разделах механики и характерны в первую очередь именно для механики горных пород и массивов.

Первостепенное значение имеет анализ характера и форм проявления геомеханических процессов в различных условиях ведения горных работ, в разнообразных горно-геологических условиях. Особенно важны при этом инструментальные измерения с целью определения в конкретных горно-геологических условиях основных параметров и характеристик изучаемых процессов: напряжений, деформаций, сдвижений горных пород и их изменения в зависимости от основных действующих факторов. Данные, получаемые из натурных исследований, позволяют типизировать изучаемые явления и процессы, понять их общий механизм и физическую сущность и проводить

дальнейшие теоретические обобщения, устанавливать допустимую степень схематизации задач.

Для геомеханики, как ни для какого другого раздела механики, характерно широкое использование различных методов моделирования, позволяющих выявить в исследуемых процессах роль различных действующих факторов и получить значения необходимых параметров при невозможности сведения поставленных задач к схемам, решаемым аналитическими методами.

Аналитические методы решения задач геомеханики используются наиболее активно (например, на основе общих закономерностей теорий упругости, пластичности и предельного равновесия и т.д.). При этом параметры и коэффициенты расчетных формул определяют обычно из результатов натурных измерений и моделирования.

Важно подчеркнуть при этом, что, имея приложения для инженерной горной практики, механика горных пород не стремится к получению точных решений, тем более что по отношению к такому неоднородному объекту, как горные породы, это было бы невозможно, а подобная постановка попросту абсурдна. Речь идет о предрасчете основных параметров процессов, которыми определяются условия горных работ, с точностью, удовлетворяющей практику, т.е. обычно до нескольких десятков процентов, а в некоторых случаях — о прогнозировании форм и характера проявления процессов механики горных пород в различных условиях (последовательность во времени и пространстве, геометрические размеры и т.д.) ведения горных работ в недрах и об определении оптимальных условий горных работ.

Дополнением к этому могут служить высказывания Ю.Н. Работнова “...Поэтому расчеты на ползучесть необходимы, хотя бы для определения времени, когда деформации станут недопустимо большими. Второй фактор — это относительно большой разброс опытных данных по ползучести. Первое обстоятельство заставило искать решения практических задач еще тогда, когда общая теория находилась в зачаточном состоянии, второе же убедило в бесполезности стремления к чрезмерному уточнению самой теории. Действительно, учет тонких вторичных эффектов вряд ли имеет смысл, если при расчете мы вынуждены пользоваться исходными опытными данными, полученными на образцах, и у нас нет никакой уверенности в том, что материал изделия обладает теми же характеристиками и к тому же достаточно однороден...”.

Итак, *общая методология механики горных пород и массивов состоит в широком использовании и анализе натурных наблюдений с одновременным привлечением методов и приемов моделирования, и аналитических исследований на базе теоретических положений из основных разделов современной механики, математических и физических аналогий.*

1.3. Основные подходы, принципы и особенности механико-математического моделирования в геомеханике

В рамках данного раздела рассматриваются основные общие правила, базовые принципы и особенности механико-математического моделирования, построения гранично-краевых задач геомеханики. В качестве примеров рассматриваются задачи подземной геомеханики (механики горных пород и массивов).

Раздел основан на материалах ЭУМК, опубликованной в электронной библиотеке БГУ: Журавков, М. А. Основные подходы, принципы и особенности механико-математического моделирования в геомеханике: курс лекций / М. А. Журавков, С. Н. Лопатин; БГУ, Механико-математический фак., Каф. теоретической и прикладной механики. – Минск: БГУ, 2024. – 125 с.

1.4. Основные механические характеристики горных пород

Раздел основан главным образом на материалах, изложенных в следующих изданиях:

Журавков М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах (на примере задач механики горных пород и массивов). Мн.: БГУ, 2002. 456с.

Журавков М.А., Зубович В.С. Устойчивость и сдвигание массивов горных пород. М.: РУДН, 2009. 432 с.

Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Математические модели механики твердых тел: учеб.пособие. – Минск: БГУ, 2021 – 535 с. (Классическое университетское издание). (Допущено Министерством образования республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений по специальности «Механика и математическое моделирование», «Физика (по направлениям)», «Промышленное и гражданское строительство», «Автомобильные дороги»). ISBN 978-985-881-131-0. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/326996>

Zhuravkov M., Lyu Y., Starovoitov E. Mechanics of Solid Deformable Body. Springer. 2023. 317p. ISBN 978-981-19-84009-9. <https://doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5>

1.5. Механические характеристики породных массивов

Раздел основан на материалах, изложенных в следующих изданиях:

Журавков М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах (на примере задач механики горных пород и массивов). Мн.: БГУ, 2002. 456с.

Zhuravkov M., Lyu Y., Starovoitov E. Mechanics of Solid Deformable Body. Springer. 2023. 317p. ISBN 978-981-19-84009-9. <https://doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5>

Дополнительный материал по данному разделу.

1.5.1. Прочность породных массивов

Как известно, *значения прочности горных пород являются функциями размера испытываемых объемов породы*. Вследствие этого, прочность породного массива, как и иные механические характеристики массива, отлична от прочности элементарных объемов пород, взятых в качестве испытываемых для проведения экспериментов по численному определению механических свойств.

В многочисленных, выполненных различными авторами, экспериментальных исследованиях установлено, что при увеличении размеров образцов их прочность, как правило, уменьшается. Вместе с тем отдельные исследователи поддерживают **гипотезу о существовании двух масштабных эффектов относительно прочности пород – объемного и поверхностного**.

Под влиянием объемного масштабного эффекта (являющегося главным), зависящего от наличия дефектов в объеме, прочность разрушаемого куска горной породы с увеличением объема уменьшается.

Под влиянием поверхностного масштабного эффекта прочность горной породы при увеличении размера образца возрастает. Введение теории двух масштабных эффектов позволяет объяснить проявляющиеся на опытах явления как увеличения, так и уменьшения прочности образцов породы.

Природа влияния размеров образцов пород на их прочность определяется в основном статистическими причинами: в большем объеме больше вероятность присутствия дефектов. *Однако такая связь выполняется до определенного предела, пока число дефектов на единицу объема образца не достигнет предельной величины, характерной для данной среды*. В большинстве своем прочность изменяется с объемом образца по степенной зависимости:

$$\sigma^* \sim V^{-1/m}, \quad (1.4.1)$$

где $m=10-12$ для прочности на сжатие и $m=4-6$ для прочности на растяжение.

Замечание 1. Более слабая зависимость прочности от объема в случае испытаний на сжатие отражает тот факт, что в этом случае часть дефектов оказывается в зажатом (стесненном) состоянии, что препятствует их развитию.

Замечание 2. В результате работ, выполненных различными исследователями, установлено, что с увеличением размеров образцов их относительная прочность на сжатие уменьшается в результате действия масштабного фактора. Поэтому нижний предел, к которому стремится прочность образцов на сжатие, при бесконечном увеличении размеров образцов может рассматриваться как прочность пород в массиве.

Предельный размер, при котором прочность перестает падать, для различных горных пород меняется в широком диапазоне: для прочных горных пород он составляет порядка десятков сантиметров, а для слабых, особенно неоднородных пород может достигать несколько метров. Но, в связи с тем, что,

во-первых, эти размеры, в сущности, соизмеримы с размерами образцов, с которыми обычно проводятся стандартные испытания горных пород, и, во-вторых, вследствие (1.4.1), прочность находится в слабой зависимости от объема, то можно считать влияние масштабного фактора по характеристике “объем” на прочность незначительным.

В настоящее время одной из наиболее распространенных является статистическая теория, согласно которой *прочность разрушаемого объема определяется прочностью наиболее слабого его участка*, обусловленного неоднородностью горных пород. Изменение прочности происходит в связи с изменением вероятности встречи с дефектами в кусках различного размера.

Энергетическая теория объясняет увеличение значений удельных показателей прочности кусков меньшего размера *уменьшением запаса упругой энергии в системе “разрушаемый кусок и механизм сжатия”*.

Механические характеристики горных пород в значительной мере зависят от скорости их нагружения. Следует отметить, что при небольшом количестве циклов динамических нагружений пределы прочности и текучести горных пород в несколько раз выше, чем при статических испытаниях. В то же время, при многократных нагружениях с нагрузкой, изменяющейся по значению и, может быть, и по знаку, разрушение может произойти при напряжениях, значительно меньших статических показателей прочности. При высокоскоростном динамическом нагружении (например, горные удары, взрывы) механизм разрушения горных пород имеет характер, отличный от рассмотрения данных процессов с точки зрения “классических представлений”. В этом случае имеют место сложные волновые процессы, в результате которых вначале происходит упрочнение материала, а при повторных периодических нагружениях – усталостное разрушение.

Итак, при построении паспорта прочности пород необходимо учитывать, что на прочность пород оказывает влияние масштаб исследуемой области. *Причем данное влияние проявляется двояким образом.* С одной стороны, изменение масштаба явления происходит при изменении линейных размеров зон разрушения и скорости деформирования. С другой стороны, паспорт прочности зависит от соотношения характерных линейных размеров процесса разрушения и среды, в которой происходит процесс разрушения.

Распространенным подходом к оценке прочности породной толщи по известной прочности образцов является подход, основанный на использовании методов статистической механики. При этом выделяется класс факторов, оказывающих наибольшее влияние на изменение прочности породной толщи, и определяющие соотношения включают данные факторы. Коэффициенты, входящие в эти соотношения, определяются по результатам обработки данных лабораторных исследований. Например, принимая за основной параметр только соотношение между объемом рассматриваемой области и объемом образца,

прочность породной толщи объема V по известной прочности пород в объеме V_0 может быть рассчитана в соответствии с уравнениями вида

$$\Omega = \Omega_0 \left\{ 1 - 3,2V_0 \left[1 - (V_0/V)^{0,28} \right] \right\}$$

$$s = \Omega_0 v_0 (V_0/V)^{0,28}, v = \frac{v_0 (V_0/V)^{0,28}}{1 - 3,2 \left[1 - (V_0/V)^{0,28} \right]},$$

где Ω, Ω_0 – характеристики пределов прочности пород соответственно объемов V, V_0 ; s – среднеквадратическое отклонение; v, v_0 – вариация показателей прочности соответственно для образцов объемами V, V_0 .

Для оценки прочности пород в массиве по известной прочности образцов пород наиболее распространенным способом является использование **коэффициента структурного ослабления μ_σ** . Например, при оценке устойчивости подземных сооружений часто возникает необходимость предусчитывать прочность массива по данным испытаний образцов в лабораторных условиях. Для выполнения этой задачи существенное значение имеет коэффициент структурного ослабления μ_σ , представляющий собой отношение сцепления по контактам естественных трещин к сцеплению в монолитной породе. Этот коэффициент для широкого диапазона породных массивов достаточно устойчив и составляет 0,01–0,02. Он наглядно иллюстрирует влияние неоднородностей второго и третьего порядков (естественной трещиноватости) на прочностные характеристики массива пород.

Коэффициент структурного ослабления определяется еще и как отношение значения прочностной характеристики (как правило, предела прочности на одноосное сжатие) в массиве (σ_M) к аналогичному значению, определенному на образцах ($\langle \sigma \rangle$):

$$\mu_\sigma = \frac{\sigma_M}{\langle \sigma \rangle}. \quad (1.4.2)$$

Замечание. Зачастую в качестве $\langle \sigma \rangle$ используется среднее значение пределов прочности образцов.

Следует отметить, что влияние других видов структурных неоднородностей на прочность массива изучено менее детально, имеются лишь обобщенные данные о прочностных характеристиках, в частности, значения сцепления и углов внутреннего трения по контактам слоев различных осадочных толщ и отдельных петрографических наименований пород.

На сегодняшний день существует большое количество способов по прогнозу свойств массивов по свойствам горных пород в образцах. Сложность такого перехода заключается в том, что коэффициент снижения прочности μ_σ (или коэффициент структурного ослабления) зависит от целого ряда факторов. Одним из наиболее весомых факторов является интенсивность

трещиноватости и направление основных систем трещин относительно направления главных напряжений.

Определение численных значений коэффициентов осуществляется в основном экспериментальными методами. Данные значения существенным образом зависят от конкретного вида пород и условий их залегания.

Замечание. Для количественной оценки факторов влияния требуется проведение трудоемких натурных испытаний.

Необходимо подчеркнуть, что эффективные механические характеристики породных массивов, отражающие зависимость характеристик от структуры массивов, могут быть изотропными по отношению к данным факторам лишь в определенных случаях. Так, под руководством проф. И.В. Баклашова были выполнены исследования по вычислению эффективных параметров, характеризующих свойства массивов как породных образований. Показано, что полнокристаллические горные породы равномерной структуры являются изотропными, в следующих случаях: если составляющие их минеральные зерна изотропны и если составляющие их минеральные зерна анизотропны, но ориентированы случайным образом. На основе метода осреднения было выполнено определение эффективных характеристик породного массива калийных пород. Получено, что эффективные деформационные параметры для каменной соли составляют $E_{ef}^{kc} = 3,85 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu_{ef}^{kc} = 0,246$, $G_{ef}^{kc} = 1,54 \cdot 10^{10}$ Па и для сильвинита – $E_{ef}^c = 2,86 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu_{ef}^c = 0,231$, $G_{ef}^c = 1,16 \cdot 10^{10}$ Па.

Замечание. Следует отметить, что результаты экспериментальных исследований по определению модуля упругости динамическим и статическим методами и их сопоставления с расчетными эффективными модулями упругости показали, что *динамический модуль упругости в меньшей степени зависит от условий эксперимента, чем статический модуль упругости.* Поэтому динамический модуль упругости в большей степени отражает свойства горной породы как материала, причем динамический модуль упругости увеличивается с увеличением образцов и приближается к расчетному эффективному модулю.

Структурно-механические характеристики породных массивов определяются не только вещественно-гранулометрическим составом, но и зависят от напряженного состояния, приводящего к изменениям таких характеристик. Так, по данным Ю.М. Либермана относительное закрытие трещин на 0.002 уменьшает модуль деформации в 2.5 раза (соответственно возрастает модуль упругости). Под нагрузкой в породах происходят структурные изменения в виде смыкания трещин и др., причем такие процессы проявляются тем больше, чем больше боковое давление в массиве.

Исследования влияния параметров макротрещиноватости на свойства трещиноватых образцов (моделей горных пород) показали, что с увеличением степени трещиноватости образцов (оценивается отношением высоты куба H к

размеру отдельности l) их прочность постепенно уменьшается. Более интенсивное уменьшение прочности наблюдается при небольшом количестве отдельностей.

Одним из подходов к учету изменения прочности массивов является введение дискретного ряда коэффициентов, в зависимости от количества нарушений, имеющих в рассматриваемом объеме. Например, эффективным способом учета наличия глинистых прослоек с небольшими мощностями является введение коэффициентов ослабления в прочностные характеристики массивов.

Для оценки коэффициента μ_σ может быть использован и *подход, основанный на построении эмпирических зависимостей вида*

$$\mu_\sigma = \eta_m \eta_\varphi / \eta_\alpha, \quad (1.4.3)$$

где η_m – коэффициент снижения прочности, зависящий от отношения размера выработки к размеру элементарного блока; η_φ и η_α учитывают снижение прочности пород, обусловленное пространственным расположением плоскостей ослабления в элементах контура подземного сооружения (стенках и кровли выработок) (если плоскости ослабления направлены от стенок выработки вглубь массива, то $\eta_\varphi = 1$).

Выражение (1.4.3) может быть дополнено введение дополнительных коэффициентов. Например, можно учесть снижение прочности массива со временем посредством коэффициента η_t . Структура функциональной зависимости прочности от фактора времени может иметь такой вид (по результатам обработки лабораторных исследований):

$$\eta_t = \eta_\infty + (1 - \eta_\infty) \exp(-\alpha t).$$

Здесь η_∞ – параметр, характеризующий предел длительной прочности; α – параметр, характеризующий скорость снижения прочности со временем.

Замечание. В большинстве случаев является корректным при отсутствии экспериментальных данных принять $\alpha = 0.02$ (если время t измеряется в сутках).

Рассмотрим некоторые **аналитические подходы для определения коэффициента структурного ослабления**. Породный массив представляем как конструкцию, состоящую из отдельных параллельно работающих элементов различной прочности. При разрушении одного из них нагрузка перераспределяется между остальными элементами.

Способ 1. Если на конструкцию действует нагрузка

$$P = a < \sigma >, \quad (1.4.4)$$

где $< \sigma >$ – средняя прочность эталонного образца, то элементы, имеющие предел прочности меньше $< \sigma >$ разрушаются. Число этих элементов составляет a_σ .

Вероятность нахождения такого элемента в конструкции равна:

$$P(\sigma) = \frac{a_\sigma}{a}. \quad (1.4.5)$$

Если известна функция распределения предела прочности элементов $f(\sigma)$, то:

$$a_{<\sigma>} = a f(<\sigma>). \quad (1.4.6)$$

Таким образом, получаем, что число неразрушенных элементов будет равно $a(1 - f(<\sigma>))$. После перераспределения нагрузки среди оставшихся элементов значения напряжений увеличиваются и будут равны:

$$a\sigma_M / a(1 - f(<\sigma>)). \quad (1.4.7)$$

После этого разрушаются элементы, предел прочности которых меньше значения выражения (1.4.7), но при этом больше $<\sigma>$ и т.д. Описанный процесс прекратится, когда напряжения на оставшихся элементах станут меньше их предела прочности.

Пусть величина напряжения в оставшихся элементах равна σ . Соответственно число уцелевших элементов составляет $a(1 - f(\sigma))$. При этом

$$\sigma = P / a(1 - f(\sigma)) = a\sigma_M / a(1 - f(\sigma)). \quad (1.4.8)$$

Получаем, что

$$\sigma_M = \sigma(1 - f(\sigma)). \quad (1.4.9)$$

или $<\sigma> = \sigma \left[1 - \int_0^\sigma (1 - f(\sigma)) d\sigma \right]$, где $f(\sigma)$ – плотность распределение прочности элементов.

Таким образом, предел прочности массива определится выражением:

$$\sigma_M = \max(\sigma(1 - f(\sigma))). \quad (1.4.10)$$

Конкретный вид для (1.4.10) зависит от выбранной функции распределения прочности структурных элементов массива.

Способ 2. Разрушение структурного элемента можно рассматривать как «отказ» системы, связанный с выходом из строя наиболее слабого звена. Распределение Вейбулла получено именно как распределение крайних значений в выборке и широко используется в статистических моделях, связанных с надежностью систем.

Функция распределения Вейбулла имеет вид:

$$f(\sigma) = 1 - \exp(-(\sigma/\lambda)^n), \quad (1.4.11)$$

где λ и n – параметры распределения.

Тогда выражение (1.4.10) будет равно:

$$\sigma_M = \max(\sigma \exp(-(\sigma/\lambda)^n)). \quad (1.4.12)$$

Окончательно, минимизировав выражение в скобках, для σ_M получаем:

$$\sigma_M = \lambda \exp(-1/n) n^{1/n}. \quad (1.4.13)$$

Выражение (1.4.13) показывает значение прочности пород в массиве с учетом случайно распределенных дефектов. С помощью данного выражения можно получить значение коэффициента структурного ослабления (образцы пород рассматриваем как структурные компоненты системы). Среднее значение прочности образцов будет равно математическому ожиданию случайной величины, распределенной по закону Вейбулла. Математическое ожидание для распределения Вейбулла выражается как:

$$M(\sigma) = \lambda \Gamma(1 + 1/n), \quad (1.4.14)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Таким образом, коэффициент структурного ослабления равен:

$$k = \frac{\sigma_M}{M(\sigma)} = \frac{\exp(-1/n) n^{-1/n}}{\Gamma(1 + 1/n)}. \quad (1.4.15)$$

Выражение (1.4.15) определяет коэффициент структурного ослабления массива в зависимости от параметра n кривой распределения Вейбулла.

Пусть распределение прочности структурных элементов подчиняется нормальному закону распределения. Интегральная функция нормального распределения имеет вид:

$$f(\sigma) = \frac{1}{\xi \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sigma} \exp(-(\sigma - \mu)^2 / 2\xi^2) d\sigma, \quad (1.4.16)$$

где μ и ξ – параметры распределения, соответственно математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение случайной величины.

Выполнив последовательные преобразования (дифференцирование, затем нахождение корней уравнения, получаемого приравниванием к нулю), получаем выражение для σ_M :

$$\sigma_M = \mu(1 - \sqrt{0.5\eta} \exp(-0.25\eta)), \quad (1.4.17)$$

η – коэффициент вариации прочности ($\eta = \xi/\mu$).

Математическое ожидание нормально распределенной величины равно μ . Следовательно, для коэффициента структурного ослабления имеем:

$$k = \frac{\sigma_M}{\mu} = 1 - \sqrt{0.5\eta} \exp(-0.25\eta). \quad (1.4.18)$$

Данный результат связывает коэффициент структурного ослабления и вариацию значений прочности относительно своего среднего значения. При $\eta = 0$, т.е. случай идеально упругой среды, получим $k = 1$.

При увеличении вариации данных, значение коэффициента структурного ослабления уменьшается. Однако важно отметить, что значения коэффициента структурного ослабления из (1.4.18) могут быть завышены, поскольку при преобразовании исключается вероятность появления отрицательных величин путем использования функции Лапласа, которая ограничена слева, когда график

плотности распределения вероятностей может находиться и в отрицательной области (закон Гаусса).

Рассмотрим вероятностно-статистические подходы к моделированию прочности породного массива. Прочность массива должна оцениваться величиной σ_M , так чтобы прочность структурных элементов (и лабораторных образцов) с заданной точностью удовлетворяли этому значению. Вероятность данного события определяется следующим образом:

$$P(\sigma > \sigma_M) = 1 - f(\sigma_M). \quad (1.4.19)$$

Относительно σ_M выражение (1.4.19) разрешается как:

$$\sigma_M = \arg f(1 - P), \quad (1.4.20)$$

где $\arg f(1 - P)$ – аргумент функции $f(\sigma)$ при ее значении $(1 - P)$.

Выражение для k принимает вид:

$$k = \frac{\sigma_M}{M(\sigma)} = \frac{\arg f(1 - P)}{M(\sigma)}. \quad (1.4.21)$$

Выбор закона распределения осуществляется исходя из физической сути случайной величины и анализа статистических данных.

Ранее было описано нормальное распределение, но также стоит отметить, что если руководствоваться законом больших чисел и центральной теоремой, то получим подчинение распределения случайной величины нормальному закону.

При использовании закона нормального распределения для коэффициента структурного ослабления получаем следующее выражение:

$$k = \eta \arg f(1 - P) + 1. \quad (1.4.22)$$

Следует отметить, что при $\eta > 0.4$, величина k может принимать отрицательные значения, что неадекватно физической сущности процесса. Поэтому рассмотрим нормальный усеченный закон распределения. Дифференциальный закон распределения усеченного нормального закона имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_1; \\ \frac{A}{\xi \sqrt{2\pi}} \exp(-(x - \mu)^2 / 2\xi^2), & x_1 < x < x_2; \\ 0, & x_2 < x < \infty; \end{cases} \quad (1.4.23)$$

где μ и ξ – соответственно математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение случайной величины. Параметр «А» определяется из выражения:

$$\frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int \exp(-\frac{w^2}{2}) dw = 1, \quad w = (x - \mu)^2 / 2\xi^2. \quad (1.4.24)$$

Коэффициент структурного ослабления для данного вида распределения будет равен:

$$k = 1 + \eta \arg F \left\{ (1 - P) F\left(\frac{x_2 - x_0}{\sqrt{D}}\right) + P F_1\left(\frac{x_1 - x_0}{\sqrt{D}}\right) \right\}, \quad (1.4.25)$$

где

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\alpha \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) dw,$$

$$G(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right),$$

$$D_{2m} = G\left(\frac{x_2 - x_0}{\xi}\right) / \left\{ F\left(\frac{x_2 - x_0}{\xi}\right) - F\left(\frac{x_1 - x_0}{\xi}\right) \right\},$$

$$D_1 = 1 / \left\{ F\left(\frac{x_2 - x_0}{\xi}\right) - F\left(\frac{x_1 - x_0}{\xi}\right) \right\},$$

Таким образом, полученные выражения позволяют получить расчетную прочность породного массива и коэффициент структурного ослабления, который подразумевает под собой величину, на которую необходимо уменьшить прочность горной породы, полученную при испытании выборки образцов, как математическое ожидание усеченного нормального закона, для получения расчетного значения прочности.

С учетом обозначенных коэффициентов ослабления условие прочности Кулона-Мора может быть представлено, например, в таком виде:

$$\tau_n - \sigma_n - \sin \varphi [\tau_n + \sigma_n + 2\Phi(k_\varphi) - k_t \operatorname{ctg} \varphi] = 0, \quad (1.4.26)$$

где $k_t = k \cdot \eta_t \cdot \eta_\sigma$; k и $\operatorname{ctg} \varphi$ – соответственно, как и ранее, сцепление и коэффициент внутреннего трения; $\Phi(k_\varphi)$ – функция, характеризующая изменение коэффициента сцепления как функции от η_φ и η_α .

Соотношение (1.4.26) может быть дополнено еще и введением коэффициента, учитывающего динамический характер нагружения рассматриваемой области.

Пусть $\sigma_{\max.d}$ – усталостная объемная прочность породы при динамическом нагружении, а $\sigma_{c.st}$ и $\sigma_{p.st}$ – соответственно пределы прочности породы на сжатие и растяжение при статическом нагружении. Отношение напряжений $k_d = \sigma_{\max.d} / \sigma_{c.st(h.st)}$ называется *коэффициентом динамического нагружения*.

1.5.2. Влияние технологической неоднородности на прочностные характеристики

Вследствие причин различного характера (в качестве которых может выступать проведение подземных выработок, большие глубины, на которых напряжения превышают предел прочности пород, наличие большого количества неоднородностей и др.), в рассматриваемых областях породного массива могут образовываться зоны, в которых породы находятся в состояниях, описываемых различными механическими законами поведения среды (упругость, пластичность и т.п.). Подчеркнем, что такое различие в механическом поведении среды вызвано причинами техногенного, а не естественного (природного) характера. В соответствии с этим, количественные и качественные характеристики одноименных механических свойств пород в различных зонах различны, иногда значительным образом. Такую неоднородность механических свойств обычно называют **технологической неоднородностью**.

Подход к описанию технологической неоднородности для механических упругих характеристик пород приведен в последующих разделах. Здесь же остановимся более подробно на *учете технологической неоднородности прочностных свойств массивов*.

Для описания прочностных свойств массива ненарушенных горных пород в окрестности подземной выработки в условиях одноосного обобщенного напряженного состояния может быть использован *подход, основанный на рассмотрении прямолинейной огибающей кругов Мора*. Основная идея данного подхода состоит в следующем.

Одним из следствий технологической нарушенности областей породного массива является изменение коэффициента сцепления пород. Вследствие этого коэффициент сцепления может быть представлен как функция расстояния до области технологического нарушения. Поэтому *прочностные свойства пород, подверженных технологическому нарушению, могут быть описаны псевдоогibaющей кругов Мора, но со сцеплением, зависящим от текущего радиуса*.

Итак, назначение остаточной прочности пород на контуре поперечного сечения выработки и в зоне неупругих деформаций связано с гипотезой распространения условия прочности Кулона-Мора, справедливое до перехода горных пород в предельное состояние, на случай запредельного деформирования. Однако, как показано Б. З. Амусиным, такой подход допустим при том условии, что действующие напряжения не выходят за пределы области сжатия

В соответствии с данной гипотезой в условие прочности необходимо ввести функцию снижения прочности, учитывающую степень деформирования пород. Исследованиями, выполненными различными авторами, на основании обработки данных экспериментальных исследований установлено, что такая

зависимость является существенно нелинейной и может быть принята экспоненциальной.

При ограниченности сведений о запредельном деформировании горных пород в качестве меры разрушения может быть принят коэффициент разрыхления. Тогда учет влияния технологической неоднородности породной толщи на его прочностные свойства можно выполнять по коэффициенту разрыхления K_p . Для коэффициента K_p может быть принят следующий закон изменения с удалением от технологического нарушения (контура выработки):

$$F(K_p) = \exp[-\alpha_k(K_p - K_p^H)]. \quad (1.4.27)$$

Здесь K_p^H – начальный коэффициент разрыхления пород на пределе прочности (определяется экспериментально); α_k – параметр, значения которого изменяются в диапазоне от 15 до 25. Конкретное значение α_k определяется из условия, что при $K_p \rightarrow K_p^\Pi$ функция $F(K_p) \rightarrow 0$. В свою очередь, здесь K_p^Π – предельный коэффициент разрыхления. Величина K_p^Π находится в довольно узком диапазоне изменения значений от 1.1 до 1.3, причем меньшее значение характерно для более прочных пород. Данный коэффициент тоже определяется экспериментально, но вследствие малого отклонения этого коэффициента от единицы можно принять с запасом прочности, что $K_p^\Pi = 1$.

Если в качестве меры разупрочнения принят коэффициент разрыхления, то в этом случае два крайних значения функции снижения прочности можно принять равными:

$$C(\rho) = C - \frac{C_1}{\rho^n}, \quad (1.4.28)$$

где C – сцепление пород в ненарушенном массиве, $\rho = R/R_0$, R – радиальная координата, R_0 – радиус выработки, C_1 , n – параметры, определяемые экспериментальным путем.

Из зависимости (1.4.28) видно, что функция сцепления принимает максимальное значение лишь на бесконечности (при $\rho \rightarrow \infty$).

Из физических соображений следует, что представляется более корректным считать, что *коэффициент сцепления в зависимости от текущего радиуса возрастает от минимального значения C_0 на контуре выработки до своего максимального значения C_1 на границе, отделяющей упругую (ненарушенную) область от неупругой зоны* (на учет данного обстоятельства обращено внимание многих исследователей). В связи с данным обстоятельством, при изучении механических процессов в окрестности подземных выработок, переменный коэффициент $C(\rho)$ удобно представить в виде:

$$C(\rho) = \begin{cases} (C_1 - C_0)f(\rho) + C_0, & \text{if } 1 \leq \rho \leq \rho_0 \\ C, & \text{if } \rho > \rho_0 \end{cases}. \quad (1.4.29)$$

Здесь C – сцепление в ненарушенном массиве, $f(\rho)$ – функция разупрочнения, отражающая характер неоднородности свойств породы по мере удаления от контура выработки вглубь массива.

Функция $f(\rho)$, в свою очередь, может иметь одно из следующих представлений:

$$f(\rho) = \frac{\rho_0^n}{\rho_0^n - 1} \left(1 - \frac{1}{\rho^n} \right); \quad f(\rho) = \left(\frac{\rho^n - 1}{\rho_0^n - 1} \right)^m; \\ f(\rho) = \log_{\rho_0} \rho; \quad f(\rho) = \frac{l^{\rho-1} - 1}{l^{\rho_0-1} - 1} \text{ и др.} \quad (1.4.30)$$

В данных выражениях $\rho = r/R_0$ – безразмерный текущий радиус, r – размерная радиальная координата, R_0 – радиус выработки, $\rho = r_0/R_0$ – безразмерный внешний радиус зоны неупругих деформаций, m и n – параметры, определяемые экспериментально.

Замечание. Можно подобрать другой вид функции $f(\rho)$, либо комбинацию функций вида (1.4.30) или им подобных, наиболее адекватно описывающих характер изменения неоднородности свойств рассматриваемых пород по мере удаления от контура выработки вглубь массива.

Итак, изменение прочностных характеристик породы в окрестности конкретно рассматриваемой выработки по мере удаления от ее контура можно описать зависимостью вида (1.4.30) и функцией вида (1.4.29).

Замечание. Учет наличия нескольких выработок, расположенных произвольным образом в пространстве породного массива может быть выполнен с использованием аппарата R -функций по методу, описанному в работе [Журавков М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах (на примере задач механики горных пород и массивов). Мн.: БГУ, 2002. 456с.].

Аналогичным образом можно учесть и снижение деформационных свойств пород вокруг выработки, сооруженной буровзрывным способом, или полости, образованной в результате взрыва. В этом случае вместо константы E следует ввести переменный модуль деформации в соответствии с зависимостью:

$$E(\rho) = \begin{cases} (E - E_0)f(\rho) + E_0, & \text{if } 1 \leq \rho \leq \rho_B \\ E, & \text{if } \rho > \rho_B \end{cases}, \quad (1.4.31)$$

где E_0 – модуль деформации пород на контуре выработки (может принимать нулевое значение), E – модуль деформации массива вне зоны действия возмущения (взрыва), ρ_B – внешний контур зоны действия взрыва.

В случае наличия упрочняющего эффекта зависимость для $C(\rho)$ подобна (1.4.29), но необходимо учесть, что упрочнение увеличивает сцепление пород:

$$C(\rho) = \begin{cases} (C_0 - C_1)\psi(\rho) + C_1, & \text{if } 1 \leq \rho \leq \rho_0 \\ C, & \text{if } \rho > \rho_0 \end{cases}. \quad (1.4.32)$$

Здесь $\psi(\rho) = \frac{\rho_0^n / \rho^n - 1}{\rho_0^n - 1}$; $\psi(\rho) = 1 - \log_{\rho_0} \rho$; $\psi(\rho) = \frac{l^{\rho_0 - \rho} - 1}{l^{\rho_0 - 1} - 1}$ и др.

1.5.3. Деформационные характеристики трещиноватого породного массива

При построении модели трещиноватого массива можно выделить несколько основных направлений.

Одно из направлений – трещины рассматриваются как геометрически правильные полости или разрезы, берега которых не соприкасаются между собой. Следующий подход – учет контакта между берегами трещины, при этом трещина может рассматриваться как особый слой массива, имеющий свои характерные свойства.

В зависимости от подхода к представлению трещин по-разному определяются и физико-механические характеристики трещиноватого массива.

Так, выражение для определения эффективного модуля упругости трещиноватого массива E_{ef} , рассматривая плоскую задачу теории упругости для массива с трещинами в виде эллипса, в предположении, что трещины не влияют друг на друга (первый из описанных подходов) имеет вид:

$$\frac{1}{E_{ef}} = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{4\pi^2}{3\nu} \right),$$

где E – модуль упругости ненарушенной горной породы; s – средняя длина трещин, ν – средний объем породы, приходящийся на одну трещину (то есть объем зоны влияния трещины).

К сожалению, эти и другие формулы, входящие в «первую» из обозначенных групп, дают результаты, значительно отличающиеся от реальности, вследствие принятых допущений. Поэтому, более перспективным является второй из обозначенных подходов, когда учитывается реальная геометрия трещин.

Профессором К.В. Руппенейтом предложена модель деформирования трещиноватых горных пород с серией параллельных трещин. Выражение для модуля деформации такой модели E через модуль упругости слагающей модель горной породы E_0 имеет вид:

$$E = \frac{E_0}{1 + \eta}, \quad (1.4.33)$$

где $\eta = \delta/(\xi h)$; δ - суммарная ширина «зияния» (раскрытия) трещин; h - суммарное расстояние между трещинами; ξ - относительная суммарная площадь поверхности контактов берегов трещин.

Замечание. Уравнение деформации трещиноватого образца, полученное из уравнения закона Гука, соответствующее (1.4.33), имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma}{E_0} \left(1 + \frac{\delta}{\xi h} \right).$$

Формула (1.4.33) получена без учета такого важного обстоятельства, что по мере нагружения площадь поверхности контактов ξ возрастает, а ширина раскрытия трещин δ - уменьшаться. Если принять, что деформирование контактирующих «выступов» берегов трещин является упругим, а при высоких концентрациях напряжений коэффициент Пуассона ν стремится к значению $\nu = 0.5$, и ввести начальные значения параметров $\delta = \delta_0$ и $\xi = \xi_0$, тогда выражение для текущего модуля деформации трещиноватой породы (1.4.33) принимает такой вид:

$$E(\sigma) = E_0 \left(1 + \frac{\delta_0}{h} \frac{E_0}{(\xi_0 E_0 + \sigma)} \right)^{-1}. \quad (1.4.34)$$

Замечание. Уравнение деформации трещиноватого образца, соответствующее (1.4.34), имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} \left(1 + \frac{\delta_0}{h} \frac{E_0}{\xi_0 E_0 + \sigma} \right).$$

Модуль упругости E_0 горной породы определяется в лабораторных условиях. Неопределенными являются величины h, δ_0, ξ_0 . Их значения можно определить, например, на основе феноменологического подхода, что бы опытные и расчетные графики деформаций образцов максимально соответствовали друг другу. Однако, такой подход требует проведения натурных испытаний, что не всегда представляется возможным. Например, на стадии проектирования. Можно выполнять оценку величины значений h, δ_0, ξ_0 на основе статистического (имитационного) моделирования.

Для определения значений сцепления C' и угла внутреннего трения ϕ' в породах с раскрытой трещиной проф. Barton N. и Choubey V. предложили следующие зависимости:

$$C' = \frac{\sigma_n \operatorname{tg}(K \lg \sigma_{press}/\sigma_n)}{1 - \operatorname{tg}(K \lg \sigma_{press}/\sigma_n) \operatorname{tg} \phi}, \quad (1.4.35)$$

$$\operatorname{tg} \phi' = \frac{\operatorname{tg} \phi}{1 - \operatorname{tg}(K \lg \sigma_{press}/\sigma_n) \operatorname{tg} \phi}, \quad (1.4.36)$$

где σ_n - действующее нормальное напряжение, МПа; σ_{press} - предел прочности на одноосное сжатие пород в образце, МПа; K - коэффициент, характеризующий

шероховатость контакта, численно равен среднему углу наклона шероховатостей; C и C' – соответственно значения сцепления пород в образце и в массиве, МПа; φ и φ' – соответственно значения угла внутреннего трения пород в образце и в массиве, градус.

Значения модуля Юнга E' , коэффициента Пуассона ν' и модуля сдвига G' для породных массивов с различными характеристиками трещиноватости могут быть определены, например, из следующих выражений:

1. Случай, когда трещины больше размера исследуемой области. Число различно ориентированных систем трещин составляет от одной до трех.

$$E'_{\perp} = \frac{E}{1 + \sum_{i=1}^n \eta_i (1 - \sin^4 \Theta_i)}, \quad (1.4.37)$$

$$E'_{\parallel} = \frac{E}{1 + \sum_{i=1}^n \eta_i (1 - \cos^4 \Theta_i)}, \quad (1.4.38)$$

$$\nu'_{\perp, \parallel} = \nu + \sum_{i=1}^n \eta_i \sin^2 \Theta_i \cos^2 \Theta_i, \quad (1.4.39)$$

$$G'_{\perp} = \frac{E}{2 \left(1 + \nu + \sum_{i=1}^n \eta_i (1 - \cos^2 \Theta_i) \right)}, \quad (1.4.40)$$

$$G'_{\parallel} = \frac{E}{2 \left(1 + \nu + \sum_{i=1}^n \eta_i \sin^2 \Theta_i \right)}, \quad (1.4.41)$$

где $E'_{\perp, \parallel}$ – соответственно значения модуля Юнга в породном массиве в направлениях, параллельном и перпендикулярном оси X , МПа; $\nu'_{\perp, \parallel}$ – значения коэффициента Пуассона в породном массиве в направлениях, параллельном и перпендикулярном оси X ; $G'_{\perp, \parallel}$ – значения модуля сдвига в направлениях, параллельном и перпендикулярном оси X ; E – значение модуля Юнга в образце, МПа; Θ_i – угол между направлением трещины i -ой системы и осью X , градус; η – число систем трещин, шт.; параметр η_i в свою очередь равен:

$$\eta_i = \frac{\delta_i}{\beta_i h_i},$$

здесь δ_i – ширина раскрытия i -ой трещины, м; $\beta_i = 3 \cdot 10^{-4}$ – среднестатистическая относительная площадь скальных контактов; h_i – среднее расстояние между двумя трещинами i -ой системы, м;

Описанная ситуация обуславливает определенный произвол в выборе надежных значений прочностных характеристик пород в массиве. Положение усугубляется еще и тем, что, как правило, реальный массив горных пород сложен различными породами, расчлененными различными системами трещин.

Поэтому детальное изучение параметров шероховатости контактов трещин не представляется возможным.

2. Хаотичное расположение трещин. Мощность образуемых расслоений примерно одинакова. Массив рассматривается как изотропный.

В этом случае модуль Юнга E' может быть определен по формуле (1.4.37) или по упрощенной формуле:

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{5n\eta}{8}}. \quad (1.4.42)$$

3. Породный массив эквивалентен сыпучей среде:

$$E' = 1.6(1 + 1/K)\beta E, \quad (1.4.43)$$

где K – коэффициент пустотности (отношение объема трещин к объему породы).

4. Система выклинивания трещин. Длина трещин l меньше размера исследуемой области L :

$$E'_{\perp} = \frac{E}{1 + \sum_{i=1}^n \eta_i (1 - \sin^4 \Theta_i) \frac{l}{L} \cos \Theta_i}. \quad (1.4.44)$$

5. Трещины с заполнителем:

$$E'_{\perp} = \frac{E_1}{1 + \eta (1 - \sin^4 \theta_i) \frac{2\nu_1^2}{1 - \nu_1} \eta \cos^4 \Theta_i}, \quad \nu_1 \neq 0.5, \quad (1.4.45)$$

$$E'_{\perp} = \frac{E_1}{1 + 2 \sum_{i=1}^n \eta_i \cos^2 \Theta_i}, \quad \nu_1 = 0.5. \quad (1.4.46)$$

Здесь $\eta = \frac{\delta E}{h E_1}$; E_1 и ν_1 – соответственно значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона материала заполнителя трещин, МПа.

1.6. Напряженное состояние породной толщи

Основные важные положения, касающиеся общего напряженного состояния в породной толще с подземными геотехническими сооружениями.

Для адекватного построения модельных задач и выбора граничных условий необходимо:

1. Знать естественное (начальное) напряженное состояние породной толщи $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Замечание. Эти знания должны отражаться, в первую очередь, в выборе направления ориентирования выработок: ответственные выработки должны быть ориентированы по направлениям, сонаправленным с направлениями наибольших главных напряжений.

2. Помимо главных наибольших напряжений, весьма опасными являются кольцевые нормальные напряжения (академик Е.И. Шемякин для из обозначение

использует символ σ_4 , для подчеркивания их значимости сравнимой с главными напряжениями), возникающие при проходке подземных выработок.

Замечание. Следует отметить, что до настоящего времени кольцевыми напряжениями σ_4 при выполнении модельных исследований зачастую пренебрегают.

3. Следующим фактором, важным для геомеханического обоснования при проектировании подземных сооружений, является факт, что *при крупномасштабной отработке подземного пространства за счет увеличения пустот и обнажений (подземных сооружений) происходит изменение общего напряженного состояния породной толщи* в данном регионе.

Замечание. Такие изменения можно оценить только с помощью геомеханического мониторинга. Эти изменения могут касаться как самих величин напряжений главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ по отдельности, так и изменений в поворотах направлений, по которым эти напряжения действуют.

4. В массиве горных пород всегда действует сила Архимеда, в соответствии с объективным физическим законом.

Замечание. Наличие данной силы подтверждается, например, всплыванием газопроводов, заложенных на небольших глубинах в вечной мерзлоте.

Для адекватного определения (моделирования) НДС в породной толще необходимо в первую очередь знать начальное (естественное) геостатическое напряженное состояние.

Более подробно аспекты, касающиеся данной тематики изложены в работе [Журавков М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах (на примере задач механики горных пород и массивов). Мн.: БГУ, 2002. 456с.].

1.6.1. О понятии горного давления в массивах горных пород

Понятие “горное давление” является одним из основных в механике горных пород и массивов. Собственно, с горным давлением и связаны основные процессы в массивах горных пород.

В *широком смысле горное давление* представляет собой напряжения (тензор напряжений) в массивах горных пород с естественными и/или технологическими нарушениями, сооружениями.

Понятие «горное давление» не следует ограничивать условием неперенного наличия горной выработки или любого подземного геотехнического сооружения. При формулировке понятия «горное давление» принципиально важно учитывать то обстоятельство, что *к горному давлению необходимо относить все силовое поле в массиве горных пород, вмещающем выработки, какими бы естественными причинами оно не создавалось* (это обстоятельство продиктовано тем, что в действительности фактические силовые поля в массиве пород значительно сложнее и многообразнее идеализированных

гравитационных полей сил).

Поэтому, широкое распространение имеет определение понятия **“горное давление”** как **“механические силы, действующие в массиве горных пород (как при наличии горных выработок, так и при их отсутствии) и вызываемые собственным весом пород, тектоническими движениями земной коры, напорами подземных вод, давлением газов в породах и другими подобными факторами”**.

“Проявления горного давления” – результат действия сил горного давления, выражающегося в деформациях, сдвигении и разрушениях горных пород, в силовом взаимодействии между породами и крепью, т.е. результат процессов механики горных пород.

Необходимо различать **видимые проявления горного давления**, наблюдаемые в горных выработках явно, и **проявления, которые можно лишь измерить** точными инструментальными методами (например, упругие деформации в массивах горных пород).

подавляющее большинство работ по механике горных пород и массивов, в особенности касающихся теории горного давления, в той или иной мере затрагивают следующие два основных вопроса:

1. выявление, описание и расчет качественных и количественных изменений естественного напряженного состояния породной толщи в результате проведения горных выработок или иных геотехнических сооружений;

2. изучение и выявление реакций на такие изменения естественного поля напряжений породного массива, вмещающего выработки/геотехнические сооружения.

Развитие теорий горного давления происходит в нескольких направлениях. Одна из главных задач – разработка и развитие собственно теории горного давления на основе современных методов механики сплошных и дискретных сред. Немаловажной представляется и задача (второе направление) разработки и совершенствования подходов и методик определения и расчета воздействия горного давления на крепь выработок/ геотехнических сооружений.

Первые оценки величины горного давления были связаны с законом Паскаля (давление на некоторую малую площадку на данной глубине равно давлению веса столба окружающей среды и не зависит от ориентации площадки, т.е. от направления нормали к этой площадке). В связи с этим, увеличение глубины разработки ведет к пропорциональному росту горного давления. Однако практика эксплуатации месторождений полезных ископаемых на больших глубинах показала, что такого пропорционального роста давления в натурных условиях не наблюдается. Одним из первых, кто научно обосновал данный факт был, наверное, Протоdjаконов М.М. (старший). Он, в частности, установил и обосновал факт ограниченности нагрузки на крепь подземной выработки, несмотря на рост глубины расположения выработки.

Таким образом, с ростом глубины размещения выработки давление на ее крепь (то есть горное давление) растет до ограниченной величины, зависящей от наибольшего размера выработки и удельного веса окружающих выработку горных пород.

Как показал М.М. Протодяконов, данное обстоятельство определяется тем, что массив горных пород, в отличие от мирового океана (для которого справедлив закон Паскаля), обладает свойствами сопротивления сдвигу (изменению формы), а это сопротивление и не позволяет расти нагрузке на крепь.

М.М. Протодяконовым был отмечен парадоксальный результат: при переходе к большим глубинам горное давление перед стабилизацией ограниченной величины вырастает до максимального значения, которое больше этой величины на 15 – 20%, после чего стабилизируется на меньшем значении. Этот эффект был разъяснен и точно оценен много лет спустя (см., например, [Булычев Н.С. Механика подземных сооружений. М.: Недра, 1984. 382 с.]). Суть такого явления, как уже упоминалось ранее, состоит в том, что *твердые тела обладают сопротивлением сдвигу* (упругое, пластическое, вязкое, в зависимости от рассматриваемой модели поведения) в отличие от поведения жидкостей, подчиняющихся закону Паскаля. Так, в опытах по изучению горного давления установлено, что с увеличением глубины разработки в породах в окрестности выработки увеличивается объем зоны (области) необратимых деформаций. Но, так как этот объем не может расти безгранично (на определенной глубине сопротивление сдвигу исчерпывается), то рост такой области в какой-то момент прекращается.

Данная область по отношению к креплению выработки играет защитную роль. Пока в окрестности подземного сооружения растет область необратимых деформаций, то давление на крепь (нагрузка на массив по контуру выработки) возрастает. Кроме того, такое давление формируется весом пород из зоны необратимых деформаций, потерявших сцепление и отделенных от массива поверхностями скольжения. С другой стороны, поверхности скольжения (поверхности локализации деформаций) расположены в пределах зоны необратимых деформаций, следовательно, скольжение по ним и отделение пород (потеря сцепления) возможны только в пределах зоны необратимых деформаций.

В последствии эти заключения оформились в понятие **свода давления**.

Замечание. Формирование свода давления можно проследить, выполняя численные эксперименты методом конечных элементов, если в модель поведения массива горных пород ввести наличие поверхностей скольжения и областей пластических течений.

Проф. Т. фон Карман разработал теорию, подобную теории горного давления М.М. Протодяконова. У Т. фон Кармана при больших глубинах

залегания выработок главное значение имеет сопротивление горных пород сдвигу.

Итак, можно выполнить оценку двух крайних границ величин горного давления («вилку»): по закону Паскаля (учет веса столба массива над выработкой) и «по Протодяконову» (ограничение величины горного давления за счет учета реального сопротивления среды сдвигу).

Отметим, что расчет величины горного давления по закону Паскаля часто выполняется с корректировкой на боковое давление «по Диннику» (модель упругой среды).

При расчете давления по схеме Протодяконова значение имеют следующие параметры: наибольший размер выработки, угол внутреннего трения f (можно с поправкой на дилатансию), прочность горных пород на сдвиг.

Итак, начиная с некоторой глубины, давление на крепь горной выработки заданного размера не превышает расчетной, ограниченной величины, несмотря на рост глубины расположения выработки в массиве.

С этих позиций полезно рассмотреть понятие **“глубокого подземного сооружения”**. На основании выполненных нами исследований предлагается уточнить классификацию глубин, исходя из уровня действующих в породном массиве напряжений и физико-механических свойств пород (см., например, [Zhuravkov, M.A. Complex limit state criterion for rock masses / M.A. Zhuravkov, S.N. Lapatsin, S. Ji // Acta Mechanica Sinica. — 2023. — Vol. 39, iss. 1. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s10409-022-22194-x>]). Как уже было изложено во введении, предлагается следующая классификация глубин:

- *малые глубины* – глубины, на которых отношение коэффициента сцепления пород к литостатическому давлению больше единицы ($C/\gamma H > 1$).
- *умеренные глубины* – глубины, на которых отношение коэффициента сцепления пород к литостатическому давлению меньше или равно единице ($C/\gamma H \leq 1$), но при этом литостатическое давление не превышает предела прочности пород на сжатие ($\gamma H \leq \sigma_c$).
- *большие глубины* – глубины, на которых литостатическое давление превышает предел прочности пород на сжатие ($\gamma H > \sigma_c$).

Как следует из введенной классификации, понимание «значительной глубины» зависит не только от абсолютной величины вертикальной составляющей литостатического давления, но главным образом от величины эффективного предела прочности на сжатие массива горных пород σ_c в рассматриваемых пластах.

Рассмотрим определяющие моменты, касающиеся воздействия «горного давления» на подземное геотехническое сооружение и исследование *устойчивости подземного сооружения (выработки)*.

Напомним, что под «устойчивостью выработки» понимается обеспечение ее эксплуатационно-пригодного состояния на заданный срок. С позиций

механики – это задача расчета напряженно-деформированного состояния в окрестности контура подземного сооружения и определение момента времени, когда нарушается выбранный предельный критерий.

При решении задач об устойчивости выработок необходимо знать исходное напряженное состояние участка массива, в котором пройдена выработка. Кроме того, важным представляется учет не только упругих и реологических свойств вмещающего массива, но также параметров, характеризующих сцепление и трение массивов горных пород (напомним, что данное положение определяется тем, что, как следует из паспорта прочности горных пород, при увеличении нагрузок возрастает влияние внутреннего трения при сдвигении горных пород и уменьшается влияние сцепления).

В областях породной толщи, где $C/\gamma H < 1$ (области либо больших нагрузок, либо сравнительно непрочных областей вмещающего массива) в подработанной толще формируются зоны с нарушением сплошности массива (зоны развитой трещиноватости, блочной структуры). После формирования зон нарушения сплошности *прочность массива горных пород в таких областях определяется коэффициентов внутреннего трения пород, т.е. блочной структурой массива и взаимным перемещением блоков с трением по поверхностям скольжения.*

В этих областях представляется корректным использовать модели механики деформируемого твердого тела (МДТТ) при построении расчетных схем в локальной постановке или сопряженные модели МДТТ и механики дискретных сред (МДС). Таким образом, при рассмотрении общих расчетных схем необходимо использовать сопряженные модели, учитывающие образование блочной структуры в массиве/проявление поверхностей скольжения.

В «переходной области», где $C/\gamma H = 1 \pm \varepsilon$, необходимо учитывать и трение, и сцепление горных пород. В таких областях при малых перемещениях проявляется деформационная способность до исчерпания сцепления, а при развитых перемещениях дополнительная прочность определяется трением по возникающим поверхностям скольжения.

При выполнении условия $C/\gamma H < 1$ начинают проявляться поверхности скольжения и в массиве имеют место необратимые деформации. То есть преобладающими в картине формирования напряженного состояния массива являются свойства массива, определяющиеся трением пород по поверхностям скольжения. В этом случае создаются предпосылки для разделения массива на блоки по «подходящим» ослабленным поверхностям.

1.7. О механико-математической постановке задач геомеханики в рамках моделей МДТТ

Раздел основан на материалах ЭУМК, опубликованной в электронной библиотеке БГУ: Журавков, М. А. Основные подходы, принципы и особенности механико-математического моделирования в геомеханике: курс лекций / М. А.

Журавков, С. Н. Лопатин; БГУ, Механико-математический фак., Каф. теоретической и прикладной механики. – Минск: БГУ, 2024. – 125 с

1.8. Модели МДТТ применительно к решению задач определения НДС в массивах горных пород в окрестности глубоких подземных сооружений

В разделе рассматривается решение основных типовых задач геомеханики на основе различных постановок модельных задач МДТТ по определению напряженно-деформированного состояния породного массива вокруг заглубленных протяженных подземных горизонтальных и вертикальных выработок:

- решение модельных задач в рамках линейной теории упругости;
- решение модельных задач в рамках моделей линейной вязкоупругости;
- решение модельных задач в рамках моделей пластичности.

Базовые материалы, касающиеся построения аналитических решений перечисленных типов задач, изложены в следующих изданиях:

Журавков М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах (на примере задач механики горных пород и массивов). Мн.: БГУ, 2002. 456с.

Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности: учеб.пособие. – Минск: БГУ, 2011 – 543 с. (Классическое университетское издание). (Допущено Министерством образования республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений по специальности «Механика»).

1.9. Предельное состояние массивов горных пород и геотехнических сооружений

Задачи, связанные с изучением прочности и разрушения подземных сооружений до сих пор остаются не полностью решенными и требуют проведения дальнейших комплексных исследований. Механическое поведение подрабатываемых массивов горных пород является весьма сложным в связи с их внутренней структурой, а также вследствие большого разнообразия внешних силовых и кинематических воздействий на них. Поэтому для оценки прочности и разрушения массивов горных пород, а также долговечности подземных сооружений требуется разработка сложных математических моделей, описывающих их поведение. Кроме того, требуется построение специальных критериев, позволяющих выполнить оценку механического состояния подрабатываемых массивов горных пород под влиянием разнообразных факторов. Более того, структурное состояние массива горных пород может значительно изменяться в процессе ведения горных работ и эксплуатации подземных сооружений. Данный факт обуславливает необходимость учёта упомянутых структурных изменений при выполнении оценки предельного

состояния массивов горных пород. Таким образом для полной и достоверной оценки состояния массивов горных пород в окрестности подземных сооружений необходимо учитывать не только постоянное изменение НДС рассматриваемых геотехнических систем под влиянием внешних факторов, но и изменение свойств и структуры самого массива. Обусловлено это такими факторами как, например, возникновение деформаций ползучести или пластичности, формирование локальных зон релаксации и концентрации напряжений, формирование в массиве новых систем трещин и образования блочной структуры, а также полная деградация механических свойств конкретных слоев горной породы.

Сделаем некоторые замечания о понятии «предельное состояние подрабатываемых породных массивов и геотехнических сооружений».

Под **предельным состоянием (ПС)** породных массивов и геотехнических систем понимается такое их состояние, при котором в рассматриваемой области массива горных пород или в геотехническом сооружении имеют место значительные по размерам зоны нарушения критериев ПС, такие как зоны нарушения сплошности, разрушения, трещиноватости и т.д., совокупность которых может привести к полному разрушению, потере устойчивости рассматриваемой области массива горных пород или переходу породной толщи в данной области в новое структурное состояние.

Критерий ПС определяется как признак или совокупность признаков, по которому можно установить, находится ли механическая система в предельном состоянии.

Под геотехнической системой понимается геомеханическая система «вмещающий массив горных пород – инженерное подземное сооружение в совокупности всех составляющих его элементов».

Под устойчивостью понимается способность геотехнической системы сохранять текущее состояние под действием внешних нагрузок.

Долговечность определяется, как способность геотехнической системы сохранять эксплуатационно-пригодное состояние в течение длительного (заданного) периода времени.

Разрушение материала имеет определяющее значение при рассмотрении прочности и долговечности механических объектов. Для определения прочности и долговечности механических объектов используются критерии прочности, устойчивости и долговечности.

Подчеркнем, что в геомеханике (механике горных пород и массивов) понимание прочности и устойчивости значительно отличается от общепринятого классического определения. Данное обстоятельство связано с тем, что нарушение сплошности, которое проявляется в виде образования макротрещин или систем трещин, а также формирования блочной структуры в рассматриваемой области массива горных пород не всегда приводит к полному разрушению данной области и не всегда рассматривается как его

эксплуатационно-непригодное состояние. Так, при решении прикладных задач образование локальных зон нарушения сплошности массива (зон разрушения) является допустимым, если это не приводит к нарушению глобальной устойчивости всей выделенной области массива горных пород.

В связи с этими обстоятельствами при рассмотрении прочности и устойчивости массивов горных пород речь идет не о критериях прочности горных пород в классическом понимании, а о критериях, в соответствии с которыми массив горных пород переходит в ПС.

При оценке ПС массивов горных пород и подземных геотехнических сооружений важным является следующее обстоятельство: выбор условия ПС обусловлен типом НДС, сформированным в данной области массива горных пород, а также прогнозом поведения геотехнической системы при выполнении этого условия. Таким образом, при изучении прочности и устойчивости массивов горных пород, как правило, находящихся в условиях сложного напряженного состояния, следует говорить не об одном критерии ПС, а о системе критериев ПС. То есть из-за большого разнообразия НДС, в которых может находиться исследуемая область массива горных пород, не представляется возможным сформулировать универсальный критерий ПС. Исследование массива горных пород на ПС необходимо выполнять на основании комплексного критерия, включающего несколько условий ПС.

В общем виде **критерии ПС** записываются в следующем виде:

$$X = [X], \quad (1.8.1)$$

где X – некоторое выражение, характеризующее текущее напряженно-деформированное состояние системы, $[X]$ – значение некоторого параметра или совокупности параметров, при котором система переходит в состояние, которое можно характеризовать как предельное. В дальнейшем $[X]$ будем для краткости называть *предельным значением*.

Согласно введенному определению, запись (1.8.1) следует понимать следующим образом: ПС в системе имеет место в том случае, когда выражение X принимает значение, равное $[X]$. Зачастую, выражение X представляет собой функцию, записанную в терминах напряжений, деформаций, перемещений или, даже, энергий. В качестве предельного значения $[X]$ чаще всего выступает какой-либо предел прочности горной породы или выражение, зависящее от пределов прочности горных пород. Под термином **«предел прочности породы»** понимается значение, характеризующее её способность сопротивляться различным по интенсивности и характеру силовым воздействиям. Данный факт определяется тем, что предел прочности горных пород является величиной, определяемой экспериментально с достаточной степенью надежности.

Согласно общему виду критериев ПС (1.8.1), **условие ПС массивов горных пород** принимает такой вид:

$$X \leq [X]. \quad (1.8.2)$$

Условие ПС (1.8.2) позволяет выделить в массиве горных пород области, в которых породный массив находится в определенном предельном состоянии. При этом, для выделения областей, находящихся в различных ПС, условия (1.8.2) имеют различные явные представления.

Помимо критериев и условий ПС при оценке прочности и устойчивости породных массивов важным является введение понятия запаса прочности. **Запас прочности** (или **коэффициент запаса прочности**) в материаловедении определяется как отношение максимально допустимого значения внутреннего усилия (напряжения), определяемого в результате лабораторных испытаний материала, к фактическому значению внутренних усилий (напряжений), возникающих в конструкции под действием внешних факторов. Данное соотношение в общем виде можно записать следующим образом:

$$n = [X]/X. \quad (1.8.3)$$

Если данное отношение меньше единицы, то считается, что материал при таких внешних воздействиях разрушится.

Исходя из вышесказанного, в случае массивов горных пород определение понятия «запас прочности», необходимо расширить и уточнить, учитывая специфику объекта исследований. При рассмотрении массивов горных пород следует говорить не о коэффициенте запаса прочности, а о **коэффициенте ПС**. В общем виде коэффициент ПС записывается аналогично (1.8.3), однако *механическая суть данной записи иная*. Так, если значение коэффициента ПС $n \leq 1$ в определенной зоне рассматриваемой области массива горных пород, то считается, что в данной зоне массив находится в ПС в соответствии с конкретным условием ПС. То есть, в отличие от коэффициента запаса прочности, такое значение коэффициента ПС не говорит о том, что массив горных пород в данной зоне находится в состоянии полного разрушения. Если $n \leq 1$ хотя бы по одному из условий ПС в исследуемой области породного массива, то прочность и устойчивость данной области массива горных пород необходимо исследовать более детально. Как отмечалось ранее, прочность и устойчивость породных массивов необходимо оценивать не по одному конкретному критерию прочности, а по системе условий ПС. Если коэффициент ПС $n > 1$ во всей рассматриваемой области массива горных пород согласно всем принятым условиям ПС, то можно говорить, что в данной области породный массив удовлетворяет требованиям прочности в соответствии с принятой системой условий ПС. Следует также отметить, что НДС подработанных массивов горных пород изменяется во времени, как за счёт внутренних, так и за счёт внешних факторов. В связи с этим, об устойчивости породного массива в соответствии с выбранной системой критериев можно говорить в случае, если коэффициент ПС удовлетворяет условию $n > 1$ на всём рассматриваемом временном интервале.

При вычислении коэффициента ПС массивов горных пород необходимо учитывать статистический характер физико-механических свойств (ФМС) и прочностных характеристик горных пород и геоматериалов. При получении ФМС горных пород и геоматериалов экспериментальными методами имеет место большой разброс данных. Таким образом, условие, при котором в рассматриваемой области массива горных пород имеет место ПС, в общем виде можно записать с учётом погрешности определения ФМС:

$$\begin{aligned} n &\leq 1 + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_{rlt} &= 1 - X_{min}/\langle X \rangle, \end{aligned} \quad (1.8.4)$$

где ε_{rlt} – средняя относительная погрешность экспериментального определения физико-механических свойств горных пород; $\langle X \rangle$ – среднее значение определяемого параметра, полученное в результате серии экспериментов, X_{min} – минимальное значение данного определяемого параметра.

Условие вида (1.8.4) служит для оценки зон ПС сверху.

Как неоднократно подчеркивалось ранее, из-за большого разнообразия НДС, в которых может находиться исследуемая область массива горных пород, не представляется возможным сформулировать универсальный критерий ПС. Исследование массива горных пород на ПС необходимо выполнять на основании комплексного критерия, включающего несколько условий ПС.

Раздел основан на материалах ЭУМК, опубликованной в электронной библиотеке БГУ: Журавков, М. А. Основные подходы, принципы и особенности механико-математического моделирования в геомеханике: курс лекций / М. А. Журавков, С. Н. Лопатин; БГУ, Механико-математический фак., Каф. теоретической и прикладной механики. – Минск: БГУ, 2024. – 125 с., а также материалах монографии: Журавков М.А., Зубович В.С. Устойчивость и сдвигание массивов горных пород. М.: РУДН, 2009. 432 с.

1.10. Моделирование сопряженных геомеханических процессов

Под сопряженными геомеханическими процессами понимаем взаимосвязанные и взаимовлияющие (взаимозависимые) механические процессы в массивах горных пород. При этом массив может рассматриваться как многокомпонентная или многофазная среда. В этом случае исследование геомеханических процессов требует еще и совместного изучения геофильтрационных и/или газофильтрационных, газодинамических процессов.

В любом случае, при рассмотрении сопряженных геомеханических процессах для адекватного исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) одной из компонент среды невозможно без учета влияния НДС другой фазы. Таким образом, при рассмотрении геомеханических, гидромеханических и газодинамических процессов в подрабатываемых массивах горных пород как сопряженных геомеханических процессов

учитывается, что НДС одной из фаз, оказывает существенное воздействие на НДС другой фазы. При этом, изменение НДС второй из фаз, представляет собой источник дополнительных воздействий для первой фазы. Вследствие этого, уравнения, описывающие состояние такой сопряженной среды должны содержать одновременно слагаемые, относящиеся как к первой, так и второй фазовых составляющих среды.

Замечание. Сопряженные геомеханические, гидромеханические и газодинамические процессы в дальнейшем будем называть еще и как геогазодинамические, геогазомеханические или геогазодинамические в зависимости от того, какие процессы рассматриваются одновременно.

При рассмотрении сопряженных геомеханических процессов принципиальным является *вопрос выбора исходной гипотезы, описывающей состояние жидкости/газа в породном массиве.*

Жидкость/газ в породной толще могут находиться в виде большого скопления свободной жидкости/газа в некоторых конечных объемах породного массива (*схема 1*).

Кроме того, жидкость/газ могут быть и элементом многофазной среды, где твердым скелетом является горная порода. При этом жидкость/газ, в свою очередь, могут быть связанными или свободными и находится в поровом пространстве твердого деформируемого скелета (горных пород) (*схема 2*).

Исходя из выделенных схем рассмотрения сопряженных геомеханических процессов, следует, что для второй схемы массив горных пород рассматривается как многофазная среда. В рамках же первой схемы возможно рассмотрение совместного поведения нескольких сред между собой при внешних нагрузках.

Очевидно, что построение механико-математических моделей, описывающих поведение «сопряженной» (может быть многофазной) среды, существенным образом зависит от выбора одной из перечисленных схем состояния отдельных компонент.

Приведем некоторые замечания относительно данных двух схем.

Схема 1. В данном случае рассматриваются большие скопления свободной жидкости/газа в некоторых конечных объемах породной толщи. Тогда, изменение НДС массива, геофильтрационные процессы, геомиграция являются следствием нарушения начального равновесного состояния массива горных пород вследствие, например, ведения горных работ.

Схема 2. В рамках данного подхода массив горных пород с жидкостью/газом рассматривается как двух- или трехфазная среда. Можно рассмотреть различные случаи механического поведения многофазной (пористой) среды.

Движение жидкости/газа в многофазной среде происходит по многочисленным микроканалам и микротрещинам. Микроканалы хаотически пронизывают твердую породу – скелет пористой среды – по различным

направлениям. Способность отдельного участка пород пропускать жидкость/газ характеризуется проницаемостью и является вообще говоря динамической характеристикой.

Процесс пространственного перемещения жидкости/газа в породной толще как пористой среде, в соответствии с классическим определением, будем называть *геомиграцией*. Теоретической основой геомиграции является теория массопереноса в пористых и трещиноватых естественных и искусственных геоматериалах, именуемая также теорией *фильтрации*.

В отличие от движения жидкостей и газов по закрытым каналам, трубам и в открытых руслах геофильтрация имеет определенные характерные особенности: чрезвычайно малые поперечные размеры поровых каналов, крайне малые скорости движения жидкостей/газа, исключительно большая роль сил трения вследствие вязкости жидкостей/газа и др.

При моделировании *взаимовлияния двух фаз, наиболее распространенным в настоящее время является, по-видимому, использование модели «упругого режима» поведения двухфазной среды*: напряженное состояние, возникающее в твердом деформируемом скелете, оказывает давление на жидкость/газ, вследствие чего связанная жидкость/газ приходит в движение; с другой стороны, формирующееся давление в жидкой/газовой фазе представляет собой источник дополнительных напряжений в твердом деформируемом скелете.

Если же деформации твердого скелета в процессе фильтрации не учитываются, то такой режим называется «жестким».

Если в массиве горных пород поры заполнены жидкостью/газом, то поведение массива зависит от того, как распределена нагрузка между контактами элементарных объемов породы и жидкостью/газом. В случае, когда вся нагрузка воспринимается «каркасом» массива породной толщи, то данный участком породного массива будет устойчивым.

Развитием модели «упругого режима» деформирования двухфазной среды является случай, когда массив горных пород в некоторых частях разрушается. Если часть контактов между частицами породы утрачена (например, вследствие превышения напряжениями предела прочности и разрушения), то часть нагрузки воспринимается жидкостью/газом. Вследствие этого сила трения на данном участке будет настолько малой, что имеет место «растекание породной массы» (массив «разжижается» и элементы пород переносятся вместе с жидкостью/газом). Такой режим движения породных масс способствует структурной перестройки породной толщи и более плотной укладки горных пород.

В последние годы в геомеханике интенсивно развиваются теории, описывающие состояние и поведение массивов горных пород с учетом наличия стадии разрушения горных пород в окрестности выработанного пространства и формирования блоковой структуры в массиве. Построение моделей,

учитывающих наличие блоковой структуры в подработанном массиве горных пород, можно отнести к отдельной группе моделей.

Если рассмотреть блоковую структуру двухфазного массива горных пород, то пористые проницаемые слои возникают в зонах сдвиговых деформаций, например, на границах блоков. Перемещение блоков определяет сдвиговые напряжения на их границах. Давление же в пористом межблоковом пространстве определяется изменением объема (сближением или удалением блоков друг от друга).

Перспективным, на наш взгляд, представляется построение моделей, описывающих сопряженные геомеханические процессы с учетом образования блоковых структур в подработанном массиве.

Итак, в рамках данного раздела рассматриваются модели для описания состояния породных массивов как многокомпонентных или многофазных сред, где в качестве твердой компоненты/фракции выступают горные породы, «жидкая компонента/фаза» – вода или рассолы. Газообразная составляющая представляет собой различные газы в породном массиве.

Раздел основан на материалах, изложенных в следующих изданиях:

1) Журавков М.А., Аль-Момани Х.Р., Щерба В.Я. Проектирование систем сопряженного геоэкологического мониторинга. Системная организация сопряженного геоэкологического мониторинга. – Мн.: Выш. шк., 2003. 288 с.

2) Журавков М.А., Коновалов О.Л., Богдан С.И., Прохоров П.А., Круподеров А.В. Компьютерное моделирование в геомеханике / Под общ. ред. М.А. Журавкова. Мн. БГУ, 2008. 443 с.

3) Marta Bryla, Andrey V. Krupoderov, Alexey A. Kushunin, Vladimir Mityushev and Michail A. Zhuravkov Mathematical Models of Mechanical Fields in Media with Inclusions and Holes // Handbook of Functional Equations. Functional Inequalities. Rassias, T.M. (Ed.). Springer. 2014, XI. Pp.15-42. <http://www.springer.com/978-1-4939-1245-2>

1.11. Основные правила, подходы и технологии построения численных моделей задач подземной геомеханики

Раздел основан на материалах следующих изданий:

1) Журавков, М. А. Основные подходы, принципы и особенности механико-математического моделирования в геомеханике: курс лекций / М. А. Журавков, С. Н. Лопатин; БГУ, Механико-математический фак., Каф. теоретической и прикладной механики. – Минск: БГУ, 2024. – 125 с.

2) Журавков М.А. Технологии искусственного интеллекта и интеллектуальные системы компьютерного моделирования и инженерных расчетов. Вводный курс: учебное пособие / М.А. Журавков; БГУ, Механико-математический факультет – Минск: БГУ, 2024. – 177 с.

<https://elib.bsu.by/handle/123456789/309072>

- 3) Журавков М.А. Современные численные методы в механике: курс лекций / М.А. Журавков; БГУ, Механико-математический факультет, Кафедра теоретической и прикладной механики. – Минск: БГУ, 2022. – 132 с. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/286556>
- 4) Журавков М.А., Коновалов О.Л., Богдан С.И., Прохоров П.А., Круподеров А.В. Компьютерное моделирование в геомеханике / Под общ. ред. М.А. Журавкова. Мн. БГУ, 2008. 443 с.
- 5) Журавков М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах (на примере задач механики горных пород и массивов). Мн.: БГУ, 2002. 456с.

2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Программой курса «Механико-математические модели современной геомеханики» предусматривается чтение лекций, лабораторных занятий, а также самостоятельная работа магистрантов, связанная с выполнением индивидуальных заданий. Далее приведены примеры индивидуальных заданий, основанных на современных прикладных задачах геомеханики, по вариантам. При выполнении приведенных заданий разрешается использовать современные системы автоматизированного инженерного анализа, такие как ANSYS и др.

Задание 1. Определение НДС в упругом однородном массиве в двухмерной постановке в окрестности выработок различного поперечного сечения.

Выписать аналитические выражения для определения НДС в окрестности выработок круглого, прямоугольного и эллиптического поперечных сечений в упругой постановке (см., например, Булычев Н.С. Механика подземных сооружений. М.:Недра, 1982. (С.35 – 51); Баклашов Н.В., Картозия Б.А. Механика подземных сооружений и конструкции крепей. М.: Недра, 1984. (С.96 – 117); Мусхелишвили Математическая теория упругости. (С.181, 192).). Выполнить компьютерное моделирование для выработок с аналогичными поперечными сечениями. Выполнить сравнение результатов аналитических вычислений и компьютерного моделирования для характерных точек и направлений. Результаты исследований представить в виде графиков и картин распределения компонент НДС. Относительную отметку подошвы выработки принять равной номеру варианта в квадрате плюс 200 м.

Начальные данные, необходимые для решения задачи представлены в таблице 2.1.

Задание 2. Определение НДС в упругом массиве в окрестности вертикальной выработки круглого поперечного сечения.

Выписать аналитические выражения для определения НДС в окрестности вертикальной выработки круглого поперечного сечения в упругой постановке (Ершов Л.В., Либерман А.К., Нейман И.Б. Механика горных пород. М.:Недра, 1987. (С.84 - 92)). Выполнить компьютерное моделирование для вертикальных выработок в двухмерной и трехмерной постановках. Выполнить сравнение результатов аналитических вычислений и компьютерного моделирования для характерных точек и направлений. Результаты исследований представить в виде графиков и картин распределения компонент НДС. Относительную отметку сечения вертикальной выработки принять равной номеру варианта в квадрате плюс 100 м. Начальные данные, необходимые для решения задачи представлены в таблице 2.1.

Задание 3. Определение зон предельного состояния в упругом массиве в окрестности выработки круглого и прямоугольного поперечных сечений, находящихся на разных глубинах. Выделить зоны предельных состояний в соответствии с различными предельными условиями.

Для массива с выработками круглого и прямоугольного поперечных сечений определить НДС с учетом выполнения различных условий предельного состояния. Выделить в массиве зоны в различном напряженном состоянии. Построить картину обобщенного напряженного состояния с учетом параметра Надаи-Лоде. Относительную отметку подошвы выработки принять равной номеру варианта в квадрате плюс 200 м.

Задание 4. Расчёт НДС и прочности одиночной незакреплённой выработки в многослойном массиве горных пород.

Оценить НДС вмещающего породного массива в окрестности незакрепленной одиночной горной выработки, расположенной в многослойном породном массиве каменной соли, и сделать выводы о прочности массива в рассматриваемой области. Схема задачи приведена на рисунке 2.1. Начальные данные, необходимые для решения задачи представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Физико-механические свойства материалов

Порода (материал)	Плотность, (кг/м ³)	Модуль Юнга (ГПа)	Кэф. Пуассона	Предел прочности на сжатие, (МПа)	Предел прочности на растяжение, (МПа)	Угол внутреннего трения, град.	Кэф. сцепления (МПа)
Глина	2100	0,9	0,4	10	1	40	1,55
Каменная соль	2250	1,75	0,35	22	1	60	2,55
Сильвинит	2300	1,5	0,27	25	1	55	3

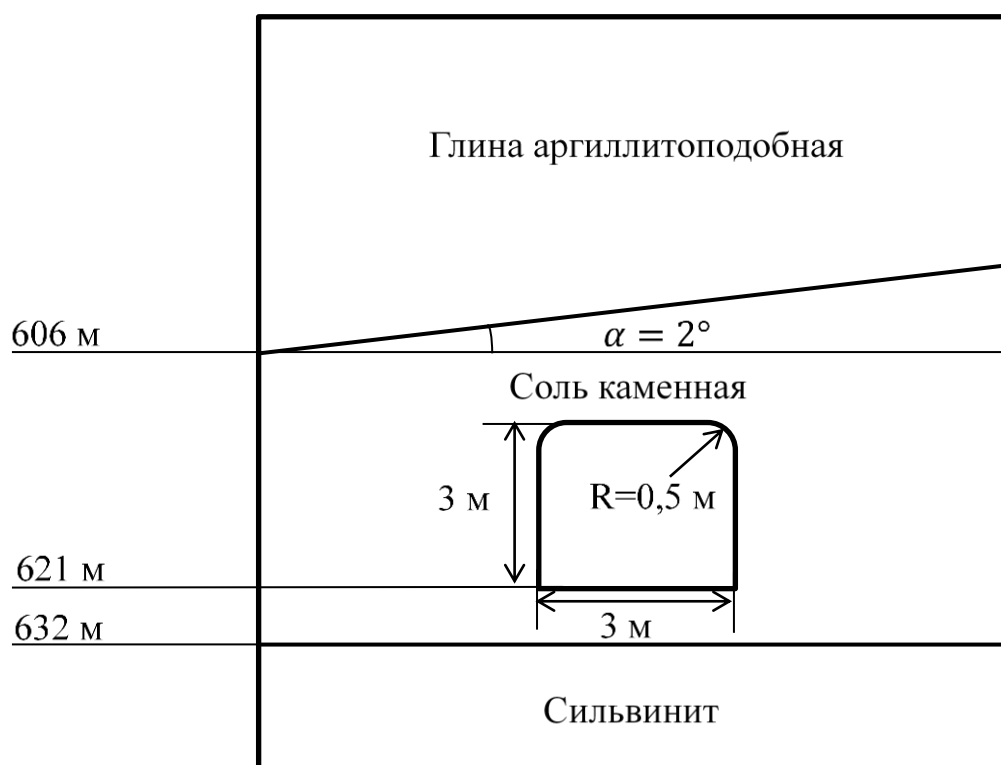


Рисунок 2.1 – Схема расположения одиночной выработки в соляном массиве

Таблица 2.2 – Числовые значения по вариантам

Вариант	Отн. Отметка подошвы выработки	Отн. Отметка глины	Отн. Отметка сильвинита	Пролёт выработки	Угол наклона слоя
1	250	248	252	3	1
2	280	275	283	4,5	2
3	300	299	301	6	2
4	320	315	322	9	3
5	350	347	355	3	3
6	400	399	402	4,5	4
7	450	441	457	6	4
8	500	496	501	9	5
9	520	519	521	3	5
10	550	543	558	9	6

Задание 5. Расчёт НДС и прочности парных выработок.

Оценить НДС вмещающего породного массива в окрестности системы незакрепленных горных выработок, расположенных в многослойном породном

массиве каменной соли, и сделать выводы о прочности массива в рассматриваемой области. При решении задачи учесть, что одна из выработок является разгружающей и проходится до основной. Сравнить полученные результаты со случаем одновременной проходки выработок. Схема задачи приведена на рисунке 2.2. Начальные данные, необходимые для решения задачи представлены в таблице 2.3.

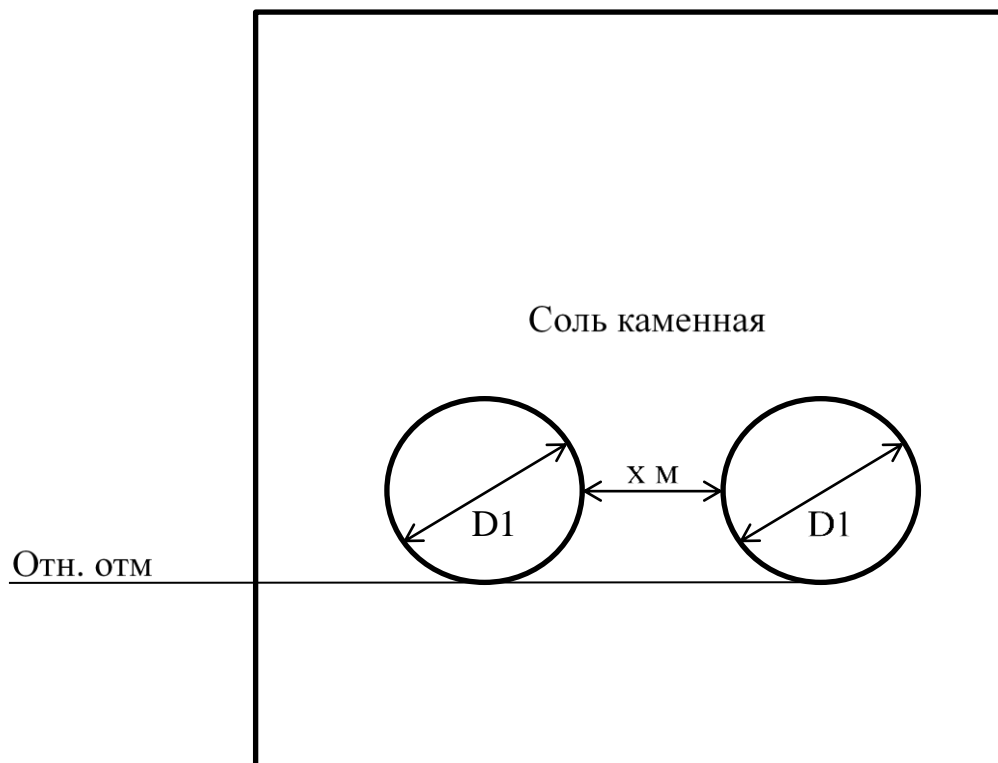


Рисунок 2.2 – Схема расположения парных выработок

Таблица 2.3 – Числовые значения по вариантам

Вариант	Отн. Отметка подошвы выработки	D1	D2	Расстояние x между выработками	Предел прочности каменной соли
1	250	3	3	1	20
2	300	4	3	2	21
3	350	5	3	3	22
4	400	6	3	4	23
5	450	7	3	5	24
6	500	8	4	6	25
7	550	9	4	7	26
8	600	3	4	8	20

9	650	4,5	4	9	22
10	700	6	4	10	24

Задание 6. Определение НДС в вязкоупругом массиве в окрестности выработки различного поперечного сечения в двухмерной постановке.

Выписать аналитические выражения для определения НДС в окрестности выработок круглого поперечного сечения в приближении массива вязкоупругой средой. Выполнить компьютерное моделирование для выработок с аналогичными поперечными сечениями. Выполнить сравнение результатов аналитических вычислений и компьютерного моделирования для характерных точек и направлений. Результаты исследований представить в виде графиков и картин распределения компонент НДС. Относительную отметку подошвы выработки принять равной номеру варианта в квадрате плюс 200 м.

Задание 7. Расчёт НДС и прочности закреплённой одиночной выработки. Рассчитать НДС вмещающего породного массива в окрестности одиночной горной выработки, расположенной в многослойном породном массиве каменной соли, и сделать выводы о прочности массива в рассматриваемой области. Оценить влияние анкеров на состояние рассматриваемой системы. При решении задачи учесть, что после проходки контур выработки укрепляется анкерной крепью. Схема задачи приведена на рисунке 2.3. Начальные данные, необходимые для решения задачи представлены в таблице 2.4.

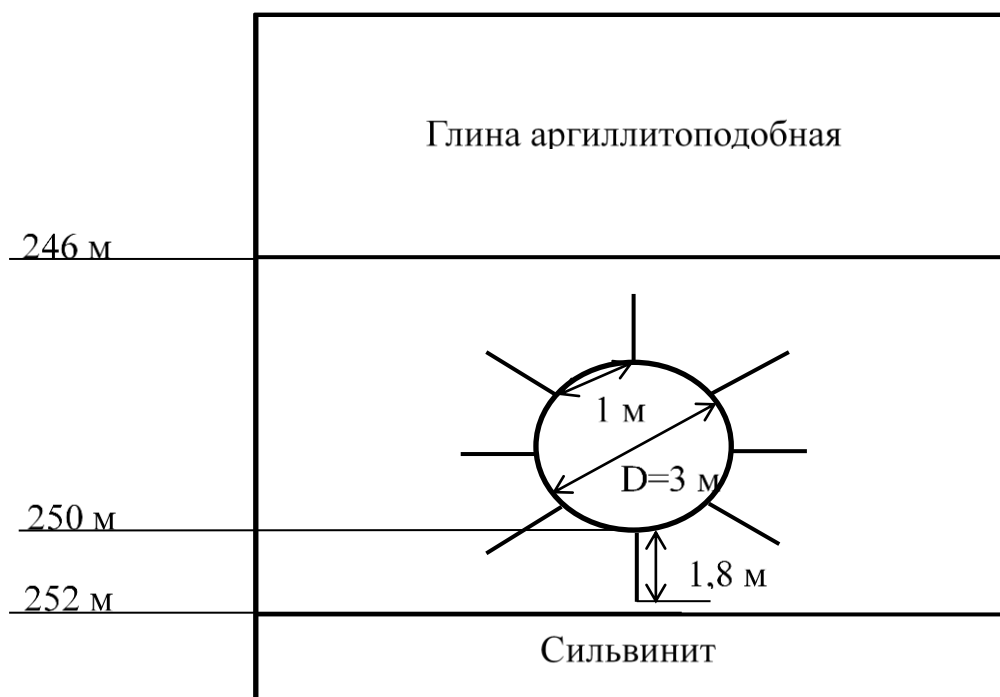


Рисунок 2.3 – Схема закреплённой выработки

Таблица 2.4 –Числовые значения по вариантам

Вариант	Отн. Отметка подошвы выработки	Шаг установки анкеров	Длина анкера	Расстояние до слоя глины	Расстояние до слоя сильвинита
1	250	0,5	0,8	0,8	0,8
2	300	0,6	1	1	1
3	350	0,7	1,1	1,1	1,1
4	400	0,8	1,2	1,2	1,2
5	450	0,9	1,4	1,4	1,4
6	500	1	1,6	1,6	1,6
7	550	1,2	1,8	1,8	1,8
8	600	1,4	1,9	1,9	1,9
9	650	1,5	2	2	2
10	700	2	2,1	2,1	2,1

Задание 8. Расчёт НДС и прочности “длинных очистных панелей”.

Оценить НДС и прочность рассматриваемой геотехнической системы при отработке длинными очистными панелями (лавами) и построить график оседания земной поверхности. Учесть, что отработка происходит поэтапно справа налево с определенной мощностью заходки. Схема задачи приведена на рисунке 2.4. Начальные данные, необходимые для решения задачи представлены в таблице 2.5.

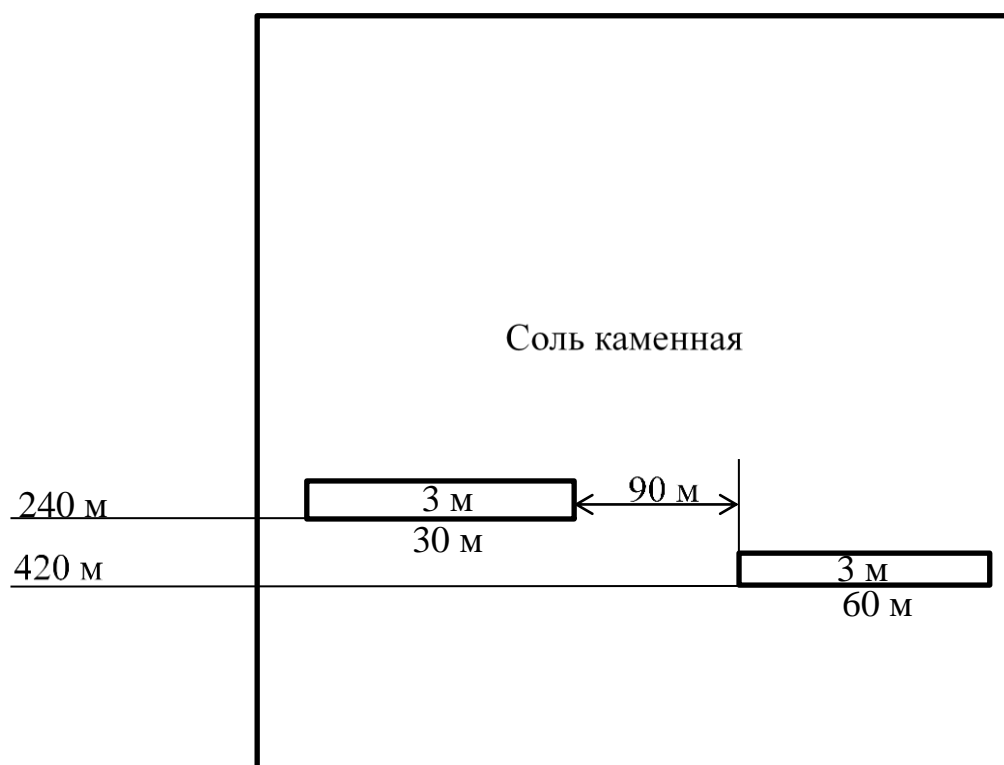


Рисунок 2.4 – Схема расположения очистных панелей

Таблица 2.5 – Числовые значения по вариантам

Вариант	Отн. Отметка подожвы лавы 1	Отн. Отметка подожвы лавы 1	Расстояние между лавами
1	250	300	80
2	300	350	90
3	350	400	100
4	400	450	80
5	450	500	90
6	500	550	100
7	550	600	120
8	600	650	150
9	650	700	160
10	700	720	180

Задание 9. Расчёт ледопородного ограждения (ЛПО) в окрестности шахтного ствола.

Оценить прочность вмещающего породного массива при проходке

вертикальной выработки (шахтного ствола) в интервале залегания глины аргиллитоподобной и сделать выводы о прочности горного массива в рассматриваемой области. При решении задачи учесть, что вокруг ствола перед проходкой было создано ледопородное ограждение (ЛПО) из системы замораживающих скважин, которые замораживали массив в течение определённого времени до начала проходки с постоянной мощностью. Диаметр замораживающих скважин принять равным 0,1 м. Оценить влияние отказа соседних скважин на НДС и прочность рассматриваемой системы. Схема задачи приведена на рисунке 2.5. Начальные данные, необходимые для решения задачи представлены в таблице 2.6.

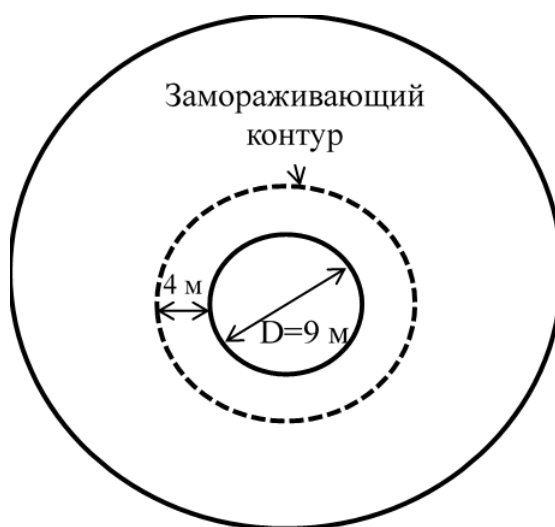


Рисунок 2.5 – Схема создания ЛПО

Таблица 2.6 – Числовые значения по вариантам

Вариант	Количество замораживающих скважин	Количество отключаемых скважин	Температура хладагента
1	30	1	-27
2	32	2	-28
3	34	3	-29
4	36	4	-30
5	38	5	-27
6	40	1	-28
7	42	2	-29
8	44	3	-27
9	46	4	-28
10	48	5	-29

3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

3.1. Вопросы к экзамену

- Геомеханика как раздел механики. Определение и классификация задач геомеханики как задач механики сплошных и дискретных сред.
- Особенности, правила и подходы к построению модельных краевых задач геомеханики.
- Естественное напряженное состояние массива горных пород. Подходы к определению.
- Понятие горного давления.
- Системы разрешающих уравнений задач геомеханики в рамках упругих моделей.
- Системы разрешающих уравнений задач геомеханики в рамках вязкоупругих моделей.
- Системы разрешающих уравнений задач геомеханики в рамках моделей упругопластических сред.
- Предельное состояние массивов горных пород.
- О построении модельных задач геомеханики с учетом формирования областей, находящихся в различном деформационном состоянии.
- Эффект образования зон дезинтеграции в окрестности подземных сооружений.
- Определение и описание сопряженных задач геомеханики (задачи гидрогеомеханики, газогеомиханики).
- Особенности компьютерного моделирования геомеханических процессов. Особенности построения численных расчетных моделей задач поверхностной, приповерхностной и подземной геомеханики.
- Основные подходы к построению компьютерных моделей задач геомеханики. Построение расчетных схем с учетом формирования областей, находящихся в различном деформационном состоянии.

3.2. Средства диагностики

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля: устный опрос, собеседование, отчет по индивидуальным работам / лабораторным работам с устной защитой.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Механико-математические модели современной геомеханики» учебным планом предусмотрен **экзамен**.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации:

Формирование отметки за текущую аттестацию:

- выполнение индивидуальных заданий – 25 %;
- выполнение контрольной работы – 50 %;
- опросы – 25 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) – 40% и экзаменационной отметки – 60%.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Вес оценка по текущей успеваемости составляет 40%, экзаменационная оценка – 60%.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

4.1. Рекомендуемая литература

Основная

1. Журавков М.А., Лопатин С.Н. Основные подходы, принципы и особенности механико-математического моделирования в геомеханике: курс лекций/ М.А. Журавков, С.Н. Лопатин; БГУ, Механико-математический факультет, Кафедра теоретической и прикладной механики. – Минск: БГУ, 2024. – 125 с.
2. Hassan A. Elsageer, Stephen D. Butt, Abdullah Omar Mohammad Bamousa, Wael Rashad Elrawy Abdellah, Mahrous Ali Mohamed Ali Essentials of Rock Mechanics. Springer Singapore. 2024. 255 p. <https://doi.org/10.1007/978-981-97-8189-8> – Дата доступа: 08.12.2025.
3. Zhuravkov M., Lyu Y., Starovoitov E. Mechanics of Solid Deformable Body. Springer. 2023. 317p.
4. Журавков М.А. Современные численные методы в механике: курс лекций / М.А. Журавков; БГУ, Механико-математический факультет, Кафедра теоретической и прикладной механики. – Минск: БГУ, 2022. – 132 с.
5. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Математические модели механики твердых тел: учеб.пособие. – Минск: БГУ, 2021 – 535 с. (Классическое университетское издание). (Допущено Министерством образования республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений по специальности «Механика и математическое моделирование», «Физика (по направлениям)», «Промышленное и гражданское строительство», «Автомобильные дороги»).

Дополнительная

6. Шашенко А.Н., Пустовойтенко В.П., Сдвижкова Е.А. Геомеханика: Учебник для вузов // К.: Новый друк, 2016. 528 с.
7. Deb Debases and Verma Abhiram Kumar. Fundamentals and Applications of Rock Mechanics. Pub. PHI Learning. 2016. 490 p.
8. Адушкин В.В., Турунтаев С.Б. Техногенная сейсмичность – индуцированная и триггерная. М.: ИДГ РАН. 2015.
9. Mitri Hani S and Abdellah Wael R. Applications of Finite Element Methods in Rock Mechanics. LAP Lambert Academic Publishing. 2015. 148 p.
10. Константинова С.А., Аптуков В.Н. Некоторые задачи механики деформирования и разрушения соляных пород / Новосибирск: Наука, 2013.
11. Александрова Н.И. Лекции по теме «Маятниковы волны» в рамках курса «Нелинейная геомеханика»: учебное пособие. Новосибирск: ИГД СО РАН, 2012.
12. Multiscale Modeling in Solid Mechanics. Editor Ugo Galvanetto. Imperical

College Press. London. 2010.

13. Кочарян Г.Г. Деформационные процессы в массивах горных пород. Учебное пособие. – М. МФТИ, 2009. – 378 с.

14. Журавков М.А., Зубович В.С. Устойчивость и сдвигание массивов горных пород. М.: РУДН, 2009. 432 с.

15. Механика – от дискретного к сплошному. Новосибирск. Изд-во СО РАН, 2008.

16. Журавков М.А. Фундаментальные решения теории упругости и некоторые их применения в геомеханике, механике грунтов и оснований. Курс лекций. Минск: БГУ, 2008. 247 с.

17. Журавков М.А., Коновалов О.Л., Богдан С.И., Прохоров П.А., Круподеров А.В. Компьютерное моделирование в геомеханике / Под общ. ред. М.А. Журавкова. Мн. БГУ, 2008. 443 с.

18. Певзнер М.Е., Иофис М.А., Попов В.Н. Геомеханика: учебник для вузов. – М.: Изд-во Московского государственного горного университета, 2008. 438 с.

19. J. C. Jaeger, N. G.W. Cook, and R. W. Zimmerman. Fundamentals of Rock Mechanics. Blackwell Publishing. 2007. 475 p.

20. Lanru Jing and Ove Stephansson. Fundamentals of Discrete Element Methods for Rock Engineering: Theory and Applications (Developments in Geotechnical Engineering). Elsevier Science. 2007. 562 p.

21. B.H.G. Brady, E.T. Brown Rock Mechanics: For Underground Mining. Springer Dordrecht. 2006. 628 p.

22. Revuzhenko A.F. Mechanics of Granular. Berlin; Heidelberg: Media Springer-Verlag, 2006.

23. Баклашов И.В., Картозия Б.А., Шашенко А.Н., Борисов В.Н. Геомеханика: Учебное пособие для вузов. В 2 т. – М.: Издательство Московского государственного горного университета. 2004. Т.2. Геомеханические процессы. 249 с.

24. Кочарян Г.Г., Спивак А.А. Динамика деформирования блочных массивов горных пород – М.: ИКИЦ «Академкнига», 2003.

25. Журавков, М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах. – Мн., БГУ, 2002. – 456 с.

26. Андрейко, С.С. Газодинамические явления в калийных рудниках: генезис, прогноз и управление / С.С. Андрейко, П.А. Калугин, В.Я. Щерба; под ред. В.Я. Прушака. Минск: Выш. школа, 2000. 335с.

27. Ревуженко А.Ф. Механика упругопластических сред и нестандартный анализ. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000.

28. Linkov, A.M. Instability, fracture acceleration and wave amplification / A.M. Linkov // Int. J. Rock Mech. Mining Sci. 2000. Vol. 1-2.

29. Numerical Models in Geomechanics. Ed. by G N Pande and S Pietruszczak. CRC Press. 1995. 720 p.

30. Касахара, К. Механика землетрясений / К. Касахара. – М.: Мир, 1985.
31. Николаевский, В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. / В.Н. Николаевский. М.: Недра, 1984. 232с.
32. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика, М.: Недра, 1983.
33. S. L. Crouch and A. M. Starfield Boundary Element Methods in Solid Mechanics: With Applications in Rock Mechanics and Geological Engineering. George Allen & Unwin. 1983. 322 p.
34. Шестаков В.М. Динамика подземных вод. М.: Изд-во МГУ, 1979. 368с.
35. Мироненко В.А., Шестаков В.М. Основы гидрогеомеханики – М.: Недра, 1974. 295с.

4.2. Электронные ресурсы

1. Основные подходы, принципы и особенности механико-математического моделирования в геомеханике: курс лекций [Электронный ресурс]. – Режим доступа <https://elib.bsu.by/handle/123456789/320041>. – Дата доступа: 08.12.2025.