

Учреждение образования
«Международный государственный экологический институт
имени А.Д. Сахарова»
Белорусского государственного университета

УТВЕРЖДАЮ

Директор

МГЭИ им. А.Д. Сахарова БГУ

О.И. Родькин

«15» августа 2025

Регистрационный № УД-14574257уч.

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для
специальностей:

7-07-0533-03 Ядерная и радиационная безопасность

2025 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 7-07-0533-03-2023 Ядерная и радиационная безопасность от 10.08.2023 и учебного плана учреждения образования для специальности Ядерная и радиационная безопасность Рег.№ 161-23/уч. от 07.04.2023

СОСТАВИТЕЛИ:

А.В. Баран, доцент кафедры ядерной и радиационной безопасности учреждения образования «Международный государственный экологический институт имени А.Д. Сахарова» Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

В.М. Редьков, главный научный сотрудник Центра «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика» (ЦФВА) Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор;

Н.Д. Шайковская, старший научный сотрудник Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси, кандидат физико-математических наук

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой ядерных и медицинских технологий учреждения образования «Международный государственный экологический институт имени А.Д. Сахарова» Белорусского государственного университета (протокол №11 от 20.06.2025);

Научно-методическим советом учреждения образования «Международный государственный экологический институт имени А.Д. Сахарова» Белорусского государственного университета (протокол № 9 от 25.06.2025)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Целью освоения дисциплины является изучение теоретических основ классического векторного анализа в трехмерном евклидовом пространстве, а также современного векторного и тензорного анализа в пространствах произвольного числа измерений.

Задачи дисциплины:

- систематически и полно излагать основные понятия и методы векторного и тензорного анализа, в первую очередь, на двумерной евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве;
- показать важнейшие приложения векторного и тензорного анализа к решению типовых задач физики и техники;
- способствовать развитию научного мировоззрения;
- подготовить студентов к изучению других специальных дисциплин.

Вместе с учебной дисциплиной «Инженерная компьютерная графика» учебная дисциплина «Тензорный анализ и компьютерная геометрия» составляют модуль «Компьютерная графика и геометрия» компонента учреждения образования.

Векторное и тензорное исчисление является мощным инструментом в решении сложных научно-технических задач в области геометрии, механики и физики в целом.

Оно находит свое применение как в физике ядер и элементарных частиц, так и в приложениях к механике сплошной среды, теории деформаций, теории колебаний и волн, медицинской физики, а также во многих других разделах физики и техники.

Векторный и тензорный анализ формирует язык компьютерной геометрии – прикладного раздела математики, лежащего в основе проектирования и конструирования.

Инженер по ядерной и радиационной безопасности должен уметь моделировать сложные геометрические объекты, каким является ядерный реактор, система отведения тепла из активной зоны, механические напряжения, возникающие в конструкциях атомной станции, от которых зависит надежность, тело человека и т. п. Он должен владеть теорией процессов, происходящих в любых других источниках ионизирующего излучения, а также быть способным описывать распространение в пространстве и времени радионуклидов, находящихся в составе выбросов. К тому же, ионизирующее излучение и взаимодействие его с веществом требуют для своего описания знания релятивистской физики, применение которой без тензорного исчисления становится весьма ограниченным, а важнейшие результаты – недоступными для понимания.

Тензорный анализ, являясь эффективным инструментом для решения прикладных задач, позволяет сформировать особый стиль мышления физика и инженера. Начала его закладываются при изучении аналитической геометрии и

линейной алгебры, и основаны на идее линейной зависимости. Тензорный анализ дает в руки не только инструмент сведения геометрических задач к алгебраическим, но и прививает культуру понимания того, что линейные алгебраические операции применимы лишь к соразмерным объектам. Это находит свое применение, например, в теории размерностей и подобия, широко применяемой в механике жидкости и газа. Это позволяет инженеру проверять проводимые им вычисления на наличие в них возможных ошибок и устранять их.

Воспитательное значение учебной дисциплины «Тензорный анализ и компьютерная геометрия» заключается в развитии у студентов исследовательских умений, креативности, творческой инициативы, ответственности и организованности. Изучение данной учебной дисциплины способствует созданию условий для формирования личности которой присущи стремление к профессиональному совершенствованию, патриотизм, готовность к активному участию в экономической, производственной и социально-культурной жизни страны.

Изучение учебной дисциплины способствует формированию следующих специализированных **компетенций**: использовать средства векторного и тензорного анализа для построения и решения научно-исследовательских и научно-технических задач.

В результате усвоения дисциплины студент должен

знать:

- общее определение тензора, тензорной плотности и псевдотензора;
- основные алгебраические операции над величинами;
- определения метрического тензора и символа Леви-Чивита в трехмерном евклидовом пространстве и запись с их помощью скалярного и векторного произведений векторов;
- понятия кривизны и кручения линии, нормальных кривизн поверхности в трехмерном евклидовом пространстве;
- основные методы моделирования кривых и поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве и их проекций на плоскость;
- основные методы описания векторов и тензоров в четырехмерном пространстве Минковского;
- понятие многообразия и классификацию геометрических объектов на многообразиях, основные виды неевклидовых пространств, используемых в физике;
- применение тензорного исчисления в теории упругости и оптике;
- о важнейших группах преобразований и их наиболее употребительных представлениях: группа вращения, группа Лоренца, группа унитарных преобразований, общая линейная группа;

уметь:

- производить алгебраические операции над векторами и тензорами;
- производить бескоординатные вычисления с векторами и тензорами в трехмерном евклидовом пространстве;

- вычислять кривизну и кручение линии, первую и вторую квадратичные формы поверхности и ее кривизны в трехмерном евклидовом пространстве;

- аппроксимировать кривые и участки поверхностей различными функциями;

- использовать правила действия векторных дифференциальных операторов на скалярные, векторные и тензорные функции в произвольных системах координат;

- выполнять вычисления с векторами и тензорами, заданными в пространстве Минковского;

- применять тензорное исчисление в типовых задачах теории деформаций.

иметь навык:

- использовать алгебраические операции над векторами и тензорами;

- оперировать методикой бескоординатных вычислений с векторами и тензорами в трехмерном евклидовом пространстве;

- использовать правила действия векторных дифференциальных операторов на скалярные, векторные и тензорные функции в произвольных системах координат.

Для организации самостоятельной работы студентов по дисциплине следует использовать информационные технологии: разместить в свободном доступе комплекс учебных и учебно-методических материалов (программа, методические указания к практическим занятиям, список рекомендуемой литературы, задания для самоконтроля, электронные пособия и учебники и др.).

Программа рассчитана на 216 часов, из которых – 96 часов аудиторных, в том числе на лекции отводится 44 часа, на практические занятия – 52 часа.

Контроль знаний предполагает проведение опросов на занятиях, тестирование, написание контрольной работ, сдачу зачета и экзамена.

Программа предполагает проведение управляемой самостоятельной работы студентов, включающей в себя выполнение индивидуальных заданий.

Форма промежуточной аттестации – зачет, экзамен в 5-м семестре.

Форма получения высшего образования – очная (дневная).

Трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Векторная и тензорная алгебра на двумерной евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве

Двумерная евклидова плоскость и трехмерное евклидово пространство. Декартов базис. Косоугольный базис. Понятие о контра- и ковариантных векторах. Понятие о метрическом тензоре. Первичные общие понятия о тензорах. Свертка. Тензоры второй валентности на двумерной плоскости. Преобразования базисов на двумерной плоскости. Основные алгебраические операции над величинами. Метрический тензор и скалярное произведение векторов в трехмерном евклидовом пространстве. Диадное (тензорное) произведение векторов в декартовом базисе трехмерного евклидового пространства. Символы Леви-Чивита в трехмерном евклидовом пространстве. Векторное произведение векторов в трехмерном евклидовом пространстве. Бивекторы. Тензор, дуальный вектору. Геометрические образы антисимметричных тензоров в трехмерном евклидовом пространстве. Взаимный тензор второй валентности. Определитель тензора второй валентности. Тензор, взаимный к сумме тензоров и определитель суммы тензоров в трехмерном евклидовом пространстве. Классификация тензоров второй валентности в трехмерном евклидовом пространстве.

Тема 2. Дифференциальная геометрия в трехмерном евклидовом пространстве

Векторные и тензорные функции. Предел, непрерывность, дифференцируемость векторных функций скалярного аргумента.

Кривые в трехмерном пространстве, их параметризация. Сопровождающий трехгранник кривой. Формулы Френе. Кривизна и кручение кривой в трехмерном евклидовом пространстве.

Поверхности в трехмерном пространстве. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Первая и вторая квадратичные формы и их применение. Площадь поверхности. Нормальные кривизны поверхности. Изометрическая проекция. Стереографическая проекция.

Тема 3. Основы компьютерной геометрии

Моделирование натуральных уравнений кривой. Применение полиномов к моделированию плоских кривых. Приближение кривых сплайнами. Моделирование участков поверхностей с помощью полиномов и сплайнов. Понятие о компьютерной геометрии проективно преобразованных изображений. Основные методы геометрического моделирования. Геометрические вычисления. Понятие о методах компьютерной графики.

Тема 4. Векторные и тензорные поля. Дифференцирование и интегрирование

Оператор «набла». Действие оператора «набла» на скалярные и векторные функции в декартовом базисе. Криволинейные, поверхностные и объемные интегралы. Инвариантное определение дифференциальных операций в трехмерном евклидовом пространстве. Формулы Грина, Стокса и Остроградского – Гаусса. Повторные дифференциальные операции. Потенциальные и соленоидальные поля. Прямые и координатные вычисления. Криволинейные системы координат. Глобальные и локальные базисы криволинейных систем координат. Базис Ламе. Дифференциальные операции в криволинейных координатах. Понятие о ковариантной производной. Коэффициенты линейной связности в криволинейной системе координат. Понятие о неголономном базисе. Интегрирование в криволинейных координатах.

Тема 5. Алгебра тензоров над произвольным линейным пространством

Аксиомы линейного пространства. Аффинные пространства. Сопряженные линейные и аффинные пространства. Прямое (тензорное) произведение линейных пространств. Абстрактное определение тензора.

Комплексные линейные пространства и тензоры над ними.

Скалярное произведение. Норма. Евклидовы и унитарные пространства. Пространства с неопределенной сигнатурой метрики.

Тема 6. Векторы и тензоры в четырехмерном пространстве Минковского

Псевдоевклидовы пространства. Геометрические объекты в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве. Тензорные плотности. Псевдотензоры. Инварианты антисимметричных геометрических объектов в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве. Применение к специальной теории относительности.

Тема 7. Понятие о группах преобразований

Элементы теории групп непрерывных преобразований. Понятие о представлениях групп. Группа движений трехмерного евклидова пространства. Группа движений четырехмерного псевдоевклидова пространства.

Тема 8. Применение тензорного исчисления в теории упругости и оптике

Тензор деформаций. Тензор напряжений. Равномерное сжатие. Тензор дилатации. Закон Гука. Тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости в оптике анизотропных сред.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
(очная (дневная) форма получения высшего образования)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	Векторная и тензорная алгебра на двумерной евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве	10	10					1–5
2	Дифференциальная геометрия в трехмерном евклидовом пространстве	10	6					1–5
3	Основы компьютерной геометрии	10	10					1–5
4	Векторные и тензорные поля. Дифференцирование и интегрирование	6	10					1–5
5	Алгебра тензоров над произвольным линейным пространством	2	4					1,3–5
6	Векторы и тензоры в четырехмерном пространстве Минковского	2	4					1,3–5
7	Понятие о группах преобразований	2	4					1,3–5
8	Применение тензорного исчисления в теории упругости и оптике	2	4					1,3–5
	ИТОГО	44	52					5,6

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Рекомендуемая литература

Основная

1. Клиот-Дашинский, М. И. Алгебра матриц и векторов / М. И. Клиот-Дашинский. – Изд. 3-е, стер. – СПб : Лань, 2001. – 160 с.

Дополнительная

2. Абрашина-Жадаева, Н. Г. Основы векторного и тензорного анализа: теория, задачи / Н. Г. Абрашина-Жадаева, И. А. Тимощенко. – Минск: БГУ, 2011. – 255 с.
3. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление / М.А. Акивис, В.В. Гольдберг. – М.: Наука, 1972. – 352 с.
4. Будак Б.М. Кратные интегралы и ряды / Б.М. Будак, С.В. Фомин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 511 с.
5. Векторный и тензорный анализ в примерах и задачах = Vector and Tensor Analysis through Examples and Exercises : учеб. пособие / Н. Г. Абрашина-Жадаева, И. А. Тимощенко. – Минск : БГУ, 2019. – 250 с.
6. Вильчевская, Е. Н. Тензорная алгебра и тензорный анализ : учеб. пособие / Е.Н. Вильчевская. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 46 с.
7. Высшая математика.: математический анализ, дифференциальные уравнения [Текст] : учеб.-метод. пособие / сост. Т. Е. Кузьменкова, А. В. Шевцова. - Минск : МГЭУ им. А.Д. Сахарова, 2009. - 44 с. - ISBN 978-985-6823-87-2.
8. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц : учеб. пособие / Ф. Р. Гантмахер. – 5-е изд. – М. : Физматлит, 2010. – 560 с.
9. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 559 с.
10. Зубелевич, О. Э. Методическое пособие по курсу «Элементы тензорного анализа» в двух частях / О. Э. Зубелевич, О. В. Павловский. – М. : ИТЭФ, 2008. – 50 с.
11. Ильин В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – Ч. 2. – 464 с.
12. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е. Кочин. – М.: Наука, 1965. – 426 с.
13. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Наука, 1981. – Ч. 2. – 416 с.
14. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство / Э.Г. Позняк, Е.В. Шикин. – М.: Из-во МГУ, 1990. – 384 с.
15. Сборник задач по дифференциальной геометрии / И.В. Белько [и др.]; под общ. ред. А.С. Феденко. – М.: Наука, 1979. – 272 с.

16. Высшая математика : сборник задач : учеб. пособие для студ. Учреждений высш. образования по физико-математическим спец. : в 3 ч. Ч. 1. Аналитическая геометрия. Анализ функции одной переменной / [авт.: В. К. Ахраменко и др.] ; под ред. Н. Г. Абрашиной-Жадаевой, В. Н. Русака / БГУ. – Минск : БГУ, 2013. – 359 с.
17. Дифференциальная геометрия, топология и тензорный анализ: сб. задач / Н.И. Кованцов [и др.] – 2-е изд. – К.: Выща шк., 1989. – 398 с.
18. Ибрагимов, Н. Х. Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. – М. : Наука, 1983. – 280 с.
19. Коренев, Г. В. Тензорное исчисление : учеб. пособие для вузов / Г. В. Коренев. – М. : МФТИ, 2000. – 240 с.
20. Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике / А. Дж. Мак-Коннел. – М.: Физматгиз, 1963. – 411 с.
21. Любимов, Д. В. Векторный и тензорный анализ : учеб. пособие / Д. В. Любимов, Б. С. Марышев, К. Б. Циберкин. – Пермь : Перм. гос. нац. исслед. ун-т, 2016. – 92 с.
22. Мантуров, О.В. Элементы тензорного исчисления : учеб. пособие / О. В. Мантуров. – М. : Просвещение, 1991. – 255 с.
23. Мусин, Ю. Р. Тензорный анализ. Вводный курс с приложениями к анализу и геометрии : учеб. пособие для вузов / Ю. Р. Мусин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2023. – 184 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-06198-7. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/515095> (дата обращения: 26.06.2023).
24. Постников, М. М. Лекции по геометрии : в 5 т. : учеб. пособие для студентов вузов / М. М. Постников. – М. : Наука, 1979. – Т. 1: Аналитическая геометрия. – 336 с.
25. Розендорн, Э. Р. Задачи по дифференциальной геометрии : учеб. пособие / Э. Р. Розендорн. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Физматлит, 2008. – 142 с.
26. Радюк, Д. И. Высшая математика : практикум / Д. И. Радюк ; УО "МГЭИ им. А. Д. Сахарова" БГУ. - Минск : ИВЦ Минфина, 2023. - 63 с. : ил. - Библиогр.: с. 63. - ISBN 978-985-880-390-2.
27. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков / Я.А. Схоутен. – М.: Наука, 1965. – 456 с.
28. Смирнов, В. И. Курс высшей математики [Текст] : в 3 т. Т. 3, Ч. 1 / В. И. Смирнов. – Изд. 9-е, испр. – М. : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. – 323 с.

Формы контроля знаний:

№ п / п	Форма
1	Выборочный контроль на лекциях

2	Опрос и решение задач на практических занятиях
3	Проведение контрольной работы в группе
4	Тестирование на зачете
5	Проведение зачета по курсу
6	Проведение экзамена по курсу

Инновационные методы и подходы к преподаванию дисциплины

Для формирования современных социально-профессиональных компетенций выпускника вуза в практику проведения занятий целесообразно внедрять методики активного обучения и дискуссионные формы.

При организации образовательного процесса следует использовать:

- практико-ориентированный метод, который предполагает освоение материала, приобретения студентами знаний и умений, через решение практических задач;

- метод учебной дискуссии, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, согласованию существующих позиций по определенной проблеме. Использование метода обеспечивает появления нового уровня понимания изучаемой темы, применения знаний для решения различных исследовательских, творческих и технических задач.

Примерный перечень тем практических занятий

Тема 1. Векторная и тензорная алгебра на двумерной евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве

Аффинные образы векторов. Косоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Диадное произведение векторов. Скалярное произведение векторов. Планарные тензоры. Метрический тензор. Геометрический образ симметричного тензора второй валентности.

Векторное произведение векторов. Бивекторы. Геометрический образ бивектора. Свойства символов Леви-Чивитта.

Задачи на собственные значения и собственные векторы тензоров второй валентности. Нормальные формы некоторых тензоров на двумерной евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве.

Тема 2. Дифференциальная геометрия в трехмерном евклидовом пространстве

Линии в трехмерном пространстве, их параметризация. Криволинейные системы координат. Глобальные и локальные базисы криволинейных систем координат. Базис Ламе.

Сопровождающий трехгранник кривой. Формулы Френе. Кривизна и кручение.

Поверхности в трехмерном пространстве. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Первая и вторая квадратичные формы и их применение. Площадь поверхности.

Тема 3. Основы компьютерной геометрии

Моделирование натуральных уравнений кривой. Применение полиномов к моделированию плоских кривых. Приближение кривых сплайнами. Моделирование участков поверхностей с помощью полиномов и сплайнов. Оболочки и тела. Элементарные тела. Построения на кривых и поверхностях.

Тема 4. Векторные и тензорные поля. Дифференцирование и интегрирование

Действие оператора «набла» на скалярные и векторные функции. Повторные дифференциальные операции. Потенциальные и соленоидальные поля.

Криволинейные, поверхностные и объемные интегралы. Формулы Грина, Стокса и Остроградского – Гаусса.

Коэффициенты линейной связности в криволинейной системе координат.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Поверхности и линии уровня скалярного поля.
2. Производная скалярного поля по направлению. Градиент.
3. Определение векторного поля. Векторные линии и трубки.
4. Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция.
5. Циркуляция векторного поля. Ротор.
6. Потенциальное поле.
7. Соленоидальное поле.
8. Лапласово поле.
9. Дифференциальные операции второго порядка.
10. Криволинейные ортогональные координаты в трёхмерном евклидовом пространстве.
11. Градиент в ортогональных криволинейных координатах.
12. Дивергенция в ортогональных криволинейных координатах.
13. Ротор в ортогональных криволинейных координатах.
14. Оператор Лапласа в ортогональных криволинейных координатах.
15. Определение аффинных пространств n измерений.
16. Аффинная система координат. Преобразование аффинного базиса.
17. Определение ковариантного тензора.
18. Определение контравариантного тензора.
19. Общее определение тензора в аффинном пространстве.
20. Алгебраические операции над тензорами.
21. Евклидово и псевдоевклидово пространство.
22. Тензорная алгебра в евклидовых пространствах.
23. Параллельное перенесение тензора.
24. Ковариантное дифференцирование тензора.
25. Уравнения Максвелла в тензорной записи.

Наименования и виды методических средств:

№ п / п	Наименование	Вид
1	Сборник заданий к практическим занятиям	Учебное пособие, электронный файл
2	Презентации РРТ	электронный файл

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Не требуется согласование с другими дисциплинами			

Учебную программу разработал:
доцент кафедры ядерных и медицинских технологий, к.ф.-м.н.

_____ А.В. Баран