

Учреждение образования
«Международный государственный экологический институт
имени А. Д. Сахарова»
Белорусского государственного университета

УТВЕРЖДАЮ

Директор
МГЭИ им. А. Д. Сахарова БГУ
О.И. Родькин

2024

Регистрационный № УД- 1607-24 /уч.



ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО И ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для
специальности:

6-05-0533-03 Медицинская физика

2024г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 6-05-0533-03-2023 от 01.09.2023 и учебного плана учреждения высшего образования для специальности 6-05-0533-03 Медицинская физика Рег.№158-23/уч. от 07.04.2023

СОСТАВИТЕЛИ:

Баран А.В. доцент кафедры ядерной и радиационной безопасности учреждения образования «Международный государственный экологический институт имени А.Д. Сахарова» БГУ, кандидат физико-математических наук

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Редьков В.М. главный научный сотрудник Центра «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика» (ЦФВА) Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор;

Кудряшов В.В. ведущий научный сотрудник Центра «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика» (ЦФВА) Института физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси, кандидат физико-математических наук

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой ядерной и радиационной безопасности учреждения образования «Международного государственного экологического института имени А.Д. Сахарова» БГУ

(протокол № 10 от 20.05.24);

Научно-методическим советом учреждения образования «Международный государственный экологический институт имени А.Д. Сахарова» БГУ (протокол № 10 от 19.06.2024)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Векторное и тензорное исчисление является мощным инструментом в решении сложных научно-технических задач в области геометрии, механики и физики в целом.

Оно находит свое применение как в физике ядер и элементарных частиц, так и в приложениях к механике сплошной среды, теории деформаций, теории колебаний и волн, медицинской физики, а также во многих других разделах физики и техники. Векторный и тензорный анализ формирует язык компьютерной геометрии – прикладного раздела математики, лежащего в основе проектирования и конструирования.

Медицинский физик, разрабатывающий методы планирования облучения пациентов, должен уметь моделировать сложные геометрические объекты, каким является тело человека и т. п. Он должен владеть теорией процессов, происходящих в любых других источниках ионизирующего излучения. К тому же, ионизирующее излучение и взаимодействие его с веществом требуют для своего описания знания релятивистской физики, применение которой без тензорного исчисления становится весьма ограниченным, а важнейшие результаты недоступными для понимания.

Тензорный анализ, являясь эффективным инструментом для решения прикладных задач, позволяет сформировать особый стиль мышления физика и инженера. Начала его закладываются при изучении аналитической геометрии и линейной алгебры, и основаны на идее линейной зависимости. Тензорный анализ дает в руки не только инструмент сведения геометрических задач к алгебраическим, но и прививает культуру понимания того, что линейные алгебраические операции применимы лишь к соразмерным объектам. Это находит свое применение, например, в теории размерностей и подобия, широко применяемой в механике жидкости и газа. Это позволяет инженеру проверять проводимые им вычисления на наличие в них возможных ошибок и устранять их.

Целью освоения дисциплины является изучение теоретических основ классического векторного анализа в трехмерном евклидовом пространстве, а также современного векторного и тензорного анализа в пространствах произвольного числа измерений.

Задачи дисциплины:

- систематически и полно излагать основные понятия и методы векторного и тензорного анализа, в первую очередь, на двумерной евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве;
- показать важнейшие приложения векторного и тензорного анализа к решению типовых задач физики и техники;
- способствовать развитию научного мировоззрения;
- подготовить студентов к изучению других специальных дисциплин.

Кроме того, этот курс должен способствовать успешному изучению дисциплины «Основы квантовой механики».

В результате усвоения дисциплины студент должен

знать:

- общее определение тензора, тензорной плотности и псевдотензора;

- основные алгебраические операции над величинами;
- определения метрического тензора и символа Леви – Чивитта в трехмерном евклидовом пространстве и запись с их помощью скалярного и векторного произведений векторов;
- понятия кривизны и кручения линии, нормальных кривизн поверхности в трехмерном евклидовом пространстве;
- основные методы моделирования кривых и поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве и их проекций на плоскость;
- основные методы описания векторов и тензоров в четырехмерном пространстве Минковского;
- понятие многообразия и классификацию геометрических объектов на многообразиях, основные виды неевклидовых пространств, используемых в физике;
- применение тензорного исчисления в теории упругости и оптике;
- о важнейших группах преобразований и их наиболее употребительных представлениях: группа вращения, группа Лоренца, группа унитарных преобразований, общая линейная группа;

уметь:

- производить алгебраические операции над векторами и тензорами;
- производить бескоординатные вычисления с векторами и тензорами в трехмерном евклидовом пространстве;
- вычислять кривизну и кручение линии, первую и вторую квадратичные формы поверхности и ее кривизны в трехмерном евклидовом пространстве;
- аппроксимировать кривые и участки поверхностей различными функциями;
- использовать правила действия векторных дифференциальных операторов на скалярные, векторные и тензорные функции в произвольных системах координат;
- выполнять вычисления с векторами и тензорами, заданными в пространстве Минковского;
- применять тензорное исчисление в типовых задачах теории деформаций.

владеть:

- алгебраическими операциями над векторами и тензорами;
- методикой бескоординатных вычислений с векторами и тензорами в трехмерном евклидовом пространстве;
- правилами действия векторных дифференциальных операторов на скалярные, векторные и тензорные функции в произвольных системах координат.

Изучение учебной дисциплины способствует формированию следующих **компетенций (БПК-3)**: применять преобразование координат тензора, дифференциальных операторов для решения научно-исследовательских и научно-практических задач.

Для организации самостоятельной работы студентов по дисциплине следует использовать информационные технологии: разместить в свободном доступе комплекс учебных и учебно-методических материалов (программа, методические указания к практическим занятиям, список рекомендуемой литературы, задания для самоконтроля, электронные пособия и учебники и др.).

Программа рассчитана на 108 часов, из которых – 58 часов аудиторных, в том числе на лекции отводится 28 часов, на практические занятия – 30 часов.

Контроль знаний предполагает проведение опросов на занятиях, тестирование, написание контрольной работ, сдачу зачета.

Программа предполагает проведение управляемой самостоятельной работы студентов, включающей в себя выполнение индивидуальных заданий.

Форма промежуточной аттестации – зачет в 3-ем семестре.

Форма получения высшего образования – очная (дневная).

Трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Векторная и тензорная алгебра на двумерной евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве

Двумерная евклидова плоскость и трехмерное евклидово пространство. Декартов базис. Косоугольный базис. Понятие о контра- и ковариантных векторах. Понятие о метрическом тензоре. Первичные общие понятия о тензорах. Свертка. Тензоры второй валентности на двумерной плоскости. Преобразования базисов на двумерной плоскости. Основные алгебраические операции над величинами. Метрический тензор и скалярное произведение векторов в трехмерном евклидовом пространстве. Диадное (тензорное) произведение векторов в декартовом базисе трехмерного евклидова пространства. Символы Леви – Чивита в трехмерном евклидовом пространстве. Векторное произведение векторов в трехмерном евклидовом пространстве. Бивекторы. Тензор, дуальный вектору. Геометрические образы антисимметричных тензоров в трехмерном евклидовом пространстве. Взаимный тензор второй валентности. Определитель тензора второй валентности. Тензор, взаимный к сумме тензоров и определитель суммы тензоров в трехмерном евклидовом пространстве. Классификация тензоров второй валентности в трехмерном евклидовом пространстве.

Тема 2. Дифференциальная геометрия в трехмерном евклидовом пространстве

Векторные и тензорные функции. Предел, непрерывность, дифференцируемость векторных функций скалярного аргумента.

Кривые в трехмерном пространстве, их параметризация. Сопровождающий трехгранник кривой. Формулы Френе. Кривизна и кручение кривой в трехмерном евклидовом пространстве.

Поверхности в трехмерном пространстве. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Первая и вторая квадратичные формы и их применение. Площадь поверхности. Нормальные кривизны поверхности. Изометрическая проекция. Стереографическая проекция.

Тема 3. Векторные и тензорные поля. Дифференцирование и интегрирование

Оператор «набла». Действие оператора «набла» на скалярные и векторные функции в декартовом базисе. Криволинейные, поверхностные и объемные интегралы. Инвариантное определение дифференциальных операций в трехмерном евклидовом пространстве. Формулы Грина, Стокса и Остроградского – Гаусса. Повторные дифференциальные операции. Потенциальные и соленоидальные поля. Прямые и координатные вычисления. Криволинейные системы координат. Глобальные и локальные базисы криволинейных систем координат. Базис Ламе. Дифференциальные операции в криволинейных координатах. Понятие о ковариантной производной.

Коэффициенты линейной связности в криволинейной системе координат. Понятие о неголономном базисе. Интегрирование в криволинейных координатах.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
(очная (дневная) форма получения высшего образования)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	Тема 1. Векторная и тензорная алгебра на двумерной евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве	8	10					1-5
2	Тема 2. Дифференциальная геометрия в трехмерном евклидовом пространстве	8	6					1-5
3	Тема 3. Векторные и тензорные поля. Дифференцирование и интегрирование	12	14					1-5
	ИТОГО	28	30					

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Инновационные методы и подходы к преподаванию дисциплины

Для формирования современных социально-профессиональных компетенций выпускника вуза в практику проведения занятий целесообразно внедрять методики активного обучения и дискуссионные формы.

При организации образовательного процесса следует использовать:

практико-ориентированный метод, который предполагает освоение материала, приобретения студентами знаний и умений, через решение практических задач;

метод учебной дискуссии, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, согласованию существующих позиций по определенной проблеме. Использование метода обеспечивает появления нового уровня понимания изучаемой темы, применения знаний для решения различных исследовательских, творческих и технических задач.

Рекомендуемая литература

Основная

1. Векторный и тензорный анализ в примерах и задачах = Vector and Tensor Analysis through Examples and Exercises : учеб. пособие / Н. Г. Абрашина-Жадаева, И. А. Тимощенко. – Минск : БГУ, 2019. – 250 с.
2. Радюк, Д. И. Высшая математика : практикум / Д. И. Радюк ; УО "МГЭИ им. А. Д. Сахарова" БГУ. - Минск : ИВЦ Минфина, 2023. - 63 с. : ил. - Библиогр.: с. 63. - ISBN 978-985-880-390-2.

Дополнительная

1. Абрашина-Жадаева, Н. Г. Основы векторного и тензорного анализа: теория, задачи / Н. Г. Абрашина-Жадаева, И. А. Тимощенко. – Минск: БГУ, 2011. – 255 с.
2. Будак Б.М. Кратные интегралы и ряды / Б.М. Будак, С.В. Фомин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 511 с.
3. Высшая математика: математический анализ, дифференциальные уравнения [Текст] : учеб.-метод. пособие / сост. Т. Е. Кузьменкова, А. В. Шевцова. - Минск : МГЭУ им. А.Д. Сахарова, 2009. - 44 с. - ISBN 978-985-6823-87-2.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 559 с.
5. Ильин В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – Ч. 2. – 464 с.
6. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е. Кочин. – М.: Наука, 1965. – 426 с.
7. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Наука, 1981. – Ч. 2. – 416 с.
8. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство / Э.Г. Позняк, Е.В. Шикин. – М.: Из.-во МГУ, 1990. – 384 с.

9. Сборник задач по дифференциальной геометрии / И.В. Белько [и др.]; под общ. ред. А.С. Феденко. – М.: Наука, 1979. – 272 с.
10. Высшая математика : сборник задач : учеб. пособие для студ. Учреждений высш. образования по физико-математическим спец. : в 3 ч. Ч. 1. Аналитическая геометрия. Анализ функции одной переменной / [авт.: В. К. Ахраменко и др.] ; под ред. Н. Г. Абрашиной-Жадаевой, В. Н. Русака / БГУ. – Минск : БГУ, 2013. – 359 с.
11. Дифференциальная геометрия, топология и тензорный анализ: сб. задач / Н.И. Кованцов [и др.] – 2-е изд. – К.: Выща шк., 1989. – 398 с.
12. Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике / А.Дж. Мак-Коннел. – М.: Физматгиз, 1963. – 411 с.
13. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление / М.А. Акивис, В.В. Гольдберг. – М.: Наука, 1972. – 352 с.
14. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков / Я.А. Схоутен. – М.: Наука, 1965. – 456 с.
15. Смирнов, В. И. Курс высшей математики [Текст] : в 3 т. Т. 3, Ч. 1 / В. И. Смирнов. - Изд. 9-е, испр. - М. : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. - 323 с.

Наименования и виды методических средств:

№ п / п	Наименование	Вид
1	Сборник заданий к практическим занятиям	Учебное пособие, электронный файл
2	Презентации РРТ	электронный файл

Формы контроля знаний:

№ п / п	Форма
1	Выборочный контроль на лекциях
2	Опрос и решение задач на практических занятиях
3	Проведение контрольной работы в группе
4	Тестирование на зачете
5	Проведение зачета по курсу

Перечень тем практических занятий

Тема 1. Векторная и тензорная алгебра на двумерной евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве

Аффинные образы векторов. Косоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Диадное произведение векторов. Скалярное произведение векторов. Планарные тензоры. Метрический тензор. Геометрический образ симметричного тензора второй валентности.

Векторное произведение векторов. Бивекторы. Геометрический образ бивектора. Свойства символов Леви – Чивитта.

Задачи на собственные значения и собственные векторы тензоров второй валентности. Нормальные формы некоторых тензоров на двумерной евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве.

Тема 2. Дифференциальная геометрия в трехмерном евклидовом пространстве

Линии в трехмерном пространстве, их параметризация. Криволинейные системы координат. Глобальные и локальные базисы криволинейных систем координат. Базис Ламе.

Сопровождающий трехгранник кривой. Формулы Френе. Кривизна и кручение.

Поверхности в трехмерном пространстве. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Первая и вторая квадратичные формы и их применение. Площадь поверхности.

Тема 3. Векторные и тензорные поля. Дифференцирование и интегрирование

Действие оператора «набла» на скалярные и векторные функции. Повторные дифференциальные операции. Потенциальные и соленоидальные поля.

Криволинейные, поверхностные и объемные интегралы. Формулы Грина, Стокса и Остроградского – Гаусса.

Коэффициенты линейной связности в криволинейной системе координат.

**ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ С ДРУГИМИ
ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ**

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Не требуется согласование с другими дисциплинами			