Краткие сообщения

Short communications

УДК 519.2, 519.7, 519.8

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДСТВ С УЧЕТОМ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ О НАДЕЖНОСТИ ВЫПУСКАЕМЫХ ПРИБОРОВ

М. С. БАРКЕТОВ[1)]

[1)]*Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь*

Аннотация. Рассматривается задача распределения средств среди исполнителей проекта с учетом статистической информации о надежности выпускаемых приборов. Приводятся формулировки математического программирования, необходимые для построения оптимальной стратегии распределения. Для учета влияния потраченной суммы денег на количество отказов компонента предлагается построить линейную или обобщенную линейную регрессию, коэффициенты которой используются в формулировках математического программирования.

Ключевые слова: распределение средств; математическое программирование; стандартная ошибка случайной величины; математическая статистика.

Благодарность. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф23РНФ-017).

Образец цитирования:
Баркетов МС. Распределение средств с учетом статистической информации о надежности выпускаемых приборов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;2:118–125.
EDN: SVJUOO

For citation:
Barketau MS. Distribution of finances taking into account statistical information on the reliability of the items produced. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;2:118–125. Russian.
EDN: SVJUOO

Автор:
Максим Сергеевич Баркетов – кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник лаборатории математической кибернетики.

Author:
Maksim S. Barketau, PhD (physics and mathematics), docent; senior researcher at the laboratory of mathematical cybernetics.
barketau@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-5209-0149

DISTRIBUTION OF FINANCES TAKING INTO ACCOUNT STATISTICAL INFORMATION ON THE RELIABILITY OF THE ITEMS PRODUCED

M. S. BARKETAU[a]

[a]*United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus, 6 Surganava Street, Minsk 220012, Belarus*

Abstract. This paper examines the problem of distribution of finances among project contractors taking into account statistical information on the reliability of the items produced. Mathematical programming formulations necessary for constructing an optimal strategy of distribution are presented. To account for the influence of the spent amount of money on the number of component failures, it is proposed to build a linear or generalised linear regression, the coefficients of which are used in mathematical programming formulations.

Keywords: distribution of finances; mathematical programming; standard error of a random variable; mathematical statistics.

Acknowledgements. This work was carried out with partial financial support from the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project F23RNF-017).

Введение

Предполагается, что организация производит сложный прибор, который включает в себя n компонентов. Известна статистика по отказам каждого компонента за определенный период, т. е. количество отказов компонента i за определенный период является случайной величиной X_i, из распределения которой экспериментальным путем получено некоторое количество значений. Будем считать, что статистика собрана для каждого прибора, т. е. для k произведенных приборов указано количество отказов каждого компонента за определенный период. Другими словами, даны векторы $x_j = \left(x_{j,1},\ x_{j,2},\ \ldots,\ x_{j,n}\right)$, $1 \leq j \leq k$, где $x_{j,i}$ – количество отказов компонента i прибора j за определенный период. Также дан некоторый неотрицательный бюджет R потенциальных инвестиций, который необходимо распределить между отделами, занимающимися разработкой каждого компонента. Предполагается, что один компонент производится одним отделом. Таким образом, допустимое разбиение бюджета – это вектор

$$r = \left(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n\right),\ \underline{r_i} \leq r_i \leq \overline{r_i},\ 1 \leq i \leq n,\ \sum_{i=1}^{n} r_i \leq R. \tag{1}$$

Ограничение $\underline{r_i} \leq r_i \leq \overline{r_i}$ определяет минимальную и максимальную сумму для отдела i. Ограничение $\sum_{i=1}^{n} r_i \leq R$ устанавливает, что сумма выплат всем отделам не должна превышать бюджет R.

Определим игру[1], а затем на ее основе статистическую игру. Множеством стратегий природы является множество случайных величин $X = \left(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\right)$. Множество стратегий игрока есть множество допустимых разбиений бюджета (1).

Функция потерь, определенная для каждой пары стратегия игрока – стратегия природы, является случайной величиной и выражается следующим образом:

$$w\left(r,\ X\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i \max\left\{c_i r_i + d_i X_i + e_i,\ 0\right\},$$

где w_i – некоторые неотрицательные действительные коэффициенты; c_i, d_i и e_i – некоторые коэффициенты. Коэффициенты w_i даны на входе задачи, они отражают тяжесть отказа соответствующего компонента. Будем сначала предполагать, что коэффициенты c_i, d_i и e_i также даны на входе задачи. В разделе «Определение коэффициентов линейной регрессии» обсудим возможность их вычисления при условии наличия дополнительных статистических данных.

Смысловая нагрузка функции потерь состоит в следующем. При условии, что в развитие компонента i вкладывается r_i инвестиций, ожидается уменьшение случайной величины количества отказов до значения $\max\left\{c_i r_i + d_i X_i + e_i,\ 0\right\}$. Эта величина, домноженная на коэффициент, и есть вклад компонента i в функцию потерь.

[1]*Боровков А. А.* Математическая статистика : учебник. 4-е изд., стер. СПб. : Лань, 2010. С. 575–625 (Учебники для вузов. Специальная литература).

В статистической игре присутствуют те же элементы, что и в вышеописанной игре. Однако один игрок (природа) загадывает вектор X, а второй игрок (статистик) имеет возможность проводить эксперименты. В данном случае значениями экспериментов являются $x_j = \left(x_{j,1},\ x_{j,2},\ \ldots,\ x_{j,n}\right)$, $1 \le j \le k$. На основе экспериментальных данных статистик выбирает стратегию $\delta(X)$. Тогда функция потерь, которая в статистической игре называется функцией риска, определяется следующим образом:

$$W\left(\delta(\cdot),\ X\right) = E_X w\left(\delta(X),\ X\right).$$

Хорошим ходом в исследовании игры было бы определить какое-либо распределение для вектора X, чтобы, отталкиваясь от него, строить байесовские стратегии игрока, т. е. стратегии, которые минимизируют функцию риска игрока при данном распределении стратегий природы. Теоретически в качестве такого распределения могло бы быть использовано распределение случайных величин отказов компонентов, но в реальности известно только эмпирическое распределение этих случайных величин на основе статистической информации. Оно представляет собой дискретное распределение, в котором вектор $x_j = \left(x_{j,1},\ x_{j,2},\ \ldots,\ x_{j,n}\right)$, $1 \le j \le k$, имеет вероятность $\frac{1}{k}$.

Далее будет использоваться следующая теорема[2].

Теорема 1. *Если для какого-либо распределения Q существует смешанная байесовская стратегия π_Q, то существует и чистая байесовская стратегия δ_Q, для которых функции риска (потерь) совпадают.*

Таким образом, можно найти чистую байесовскую стратегию для эмпирического распределения случайных величин отказов компонентов. При условии данной эмпирической функции функция риска имеет вид

$$W\left(\delta(X),\ X\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} w_i \max\left\{c_i r_i + d_i x_{j,i} + e_i,\ 0\right\} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \max\left\{\frac{w_i c_i}{k} r_i + \frac{w_i d_i x_{j,i}}{k} + \frac{w_i e_i}{k},\ 0\right\}.$$

Значения оптимальной чистой стратегии игрока $\delta(X)$ можно определить с помощью следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} z_{j,i},\\
&z_{j,i} \ge 0\ \forall i,\ j,\\
&z_{j,i} \ge \frac{w_i c_i}{k} r_i + \frac{w_i d_i x_{j,i}}{k} + \frac{w_i e_i}{k}\ \forall i,\ j,\\
&\underline{r_i} \le r_i \le \overline{r_i},\ 1 \le i \le n,\\
&\sum_{i=1}^{n} r_i \le R.
\end{aligned} \tag{2}$$

Эта задача допустима при подходящих значениях $\underline{r_i}$, $\overline{r_i}$. Решение может быть найдено, например, с помощью симплекс-метода. Приведем пример работы данной модели.

Пример. Пусть выпускаемый прибор состоит из двух компонентов, а статистика по отказам является равной $x_1 = \left(x_{1,1},\ x_{1,2}\right) = (10, 15)$, $x_2 = \left(x_{2,1},\ x_{2,2}\right) = (20, 18)$. Коэффициенты c_i, d_i и e_i имеют значения $c_1 = -0{,}001$, $d_1 = \frac{1}{2}$, $e_1 = 2$, $c_2 = -0{,}00112$, $d_2 = \frac{1}{3}$, $e_2 = 4$, а коэффициенты w_i – значение $w_1 = w_2 = 1$. Общая сумма инвестиций равна 10 000. Суммы r_i, $i = 1, 2$, могут принимать любые неотрицательные значения, меньшие или равные 10 000. Система (2) сводится к виду

$$\begin{aligned}
&\min z_{1,1} + z_{2,1} + z_{1,2} + z_{2,2},\\
&z_{1,1} \ge 0,\\
&z_{2,1} \ge 0,\\
&z_{1,2} \ge 0,
\end{aligned}$$

[2] *Боровков А. А.* Математическая статистика… С. 578.

$$z_{2,2} \ge 0,$$
$$r_1 \ge 0,$$
$$r_2 \ge 0,$$
$$z_{1,1} \ge -0{,}000\,5r_1 + 3{,}5,$$
$$z_{2,1} \ge -0{,}000\,5r_1 + 6,$$
$$z_{1,2} \ge -0{,}000\,56r_2 + 4{,}5,$$
$$z_{2,2} \ge -0{,}000\,56r_2 + 5,$$
$$r_1 + r_2 \le 10\,000.$$

Найдя решение этой задачи линейного программирования с помощью пакета *CPLEX*, получим оптимальные значения переменных сумм вкладов $r_1 = 1964{,}285\,714$, $r_2 = 8035{,}714\,286$.

Определение коэффициентов линейной регрессии

Рассмотрим вопрос об определении коэффициентов c_i, d_i и e_i. Предположим, что приборы выпускаются без модернизации. Однако когда отделу выделяется некоторая инвестиционная сумма, то приборы выпускаются в новой модификации.

Предположим, что отделу i была выделена сумма r_i^l. До внедрения новшества статистика по отказам компонента составляла $x_1^l < x_2^l < \ldots < x_{t_l}^l$, где компонент i продемонстрировал x_g^l отказов $n\left(x_g^l\right)$ раз. После внедрения новшества статистика по отказам компонента составила $y_1^l < y_2^l < \ldots < y_{h_j}^l$, где компонент i продемонстрировал y_f^l отказов $n\left(y_f^l\right)$ раз. Рассмотрим случайную величину ξ_l с эмпирическим распределением на основе случайной последовательности $x_1^l, x_2^l, \ldots, x_{t_l}^l$, т. е. $P\left(\xi_l = x_g^l\right) = \dfrac{n\left(x_g^l\right)}{\sum_{k=1}^{t_l} n\left(x_k^l\right)}$.

Аналогично пусть τ_l – случайная величина с эмпирическим распределением на основе последовательности $y_1^l, y_2^l, \ldots, y_{h_l}^l$. Необходимо подобрать такие параметры c_i, d_i и e_i, чтобы случайные величины $c_i r_i^l + d_i \xi_j + e_i$ и τ_j имели наиболее близкое распределение для всех j. Указанная задача является довольно трудной, поэтому изложим два простых подхода к нахождению приближенных значений коэффициентов c_i, d_i и e_i.

Рассмотрим первый подход. Дано некоторое количество статистических данных $\left(r_i^l, \xi_l, \tau_l\right)$. Сначала определим оптимальное в некотором смысле значение коэффициента d_i. Будем исходить из того, что если высказанные предположения о линейной зависимости верны, то значения $\left(c_i r_i^l + d_i x_{t_l}^l + e_i\right) - \left(c_i r_i^l + d_i x_1^l + e_i\right) = d_i\left(x_{t_l}^l - x_1^l\right)$ и $y_{h_l}^l - y_1^l$ не должны сильно отличаться при довольно большом объеме выборки, поскольку оставшийся компонент линейной функции является сдвигом. Следовательно, выберем такое значение коэффициента d_i, чтобы значение функции $\max\limits_l \left| d_i\left(x_{t_l}^l - x_1^l\right) - \left(y_{h_l}^l - y_1^l\right)\right|$ было минимальным. Эта задача легко моделируется с помощью задачи линейного программирования. Далее зафиксируем значение коэффициента d_i и будем рассматривать регрессию $c_i r_i^l + e_i$ с факторами $\left(r_i^l, 1\right)$ на значение $y_1^l - d_i x_1^l$. Вычислим стандартными методами[3] коэффициенты c_i и e_i.

Второй подход является еще более простым. Подсчитаем выборочное среднее рядов значений $x_1^l < x_2^l < \ldots < x_{t_l}^l$ и $y_1^l < y_2^l < \ldots < y_{h_l}^l$: $\overline{x}^l = \dfrac{\sum_{k=1}^{t_l} n\left(x_k^l\right) x_k^l}{\sum_{k=1}^{t_l} n\left(x_k^l\right)}$ и $\overline{y}^l = \dfrac{\sum_{k=1}^{h_l} n\left(y_k^j\right) y_k^j}{\sum_{k=1}^{h_l} n\left(y_k^l\right)}$. Рассмотрим регрессию факторов $\left(r_i^l, \overline{x}^l, 1\right)$ на значение $\overline{y}^l$. С помощью стандартных методов[4] найдем коэффициенты c_i, d_i и e_i.

[3] *Боровков А. А.* Математическая статистика… С. 477.

[4] Там же.

Более сложные подходы к определению вышеуказанных коэффициентов будут изложены в работе автора «Вычисление параметров связывающей две случайные величины линейной функции по статистической информации», планируемой к публикации в ближайшее время.

Использование обобщенных линейных моделей

Если производство устроено таким образом, что приборы выпускаются, а потом модернизируются и снова применяются, то возможны следующие модификации вышеизложенных подходов.

Предлагаем использовать обобщенную линейную модель для пуассоновского распределения [1]. Предположим, что есть статистика по отказам компонента i до внедрения новой технологии, размер бюджета, выделенного отделу i, и статистика по отказам этого компонента после внедрения новой технологии. В качестве вектора факторов выберем $\left(1, x_j, r_j\right)$, $1 \leq j \leq N$, где x_j – количество отказов компонента i до внедрения новой технологии; r_j – размер вложенных в модернизацию компонента i средств; y_j – количество отказов компонента i после внедрении новой технологии. Допустим, что количество отказов компонента i после внедрения новшества является случайной величиной с пуассоновским распределением и математическим ожиданием m_j. В соответствии с обобщенной линейной моделью пуассоновского распределения $\ln m = X\alpha$, где $\ln m = \left(\ln m_1, \ln m_2, \ldots, \ln m_N\right)^T$; X – матрица из строк $\left(1, x_j, r_j\right)$, $1 \leq j \leq N$; $\alpha = \left(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i\right)^T$ – коэффициенты, которые возможно определить методом максимального правдоподобия, используя данную модель [1, p. 116].

Функцию риска можно представить в виде

$$W\left(\delta(X), X\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} w_i e^{\alpha_1^i + \alpha_2^i x_{j,i} + \alpha_3^i r_i} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{k} e^{\alpha_1^i + \alpha_2^i x_{j,i} + \alpha_3^i r_i}.$$

Заметим, что в функции риска отсутствуют максимумы, так как математическое ожидание для случайной величины, распределенной по пуассоновскому закону, и так неотрицательное.

Значения оптимальной чистой стратегии игрока $\delta(X)$, как и в предыдущем случае, можно определить с помощью следующей задачи выпуклого программирования:

$$\min \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} z_{j,i},$$

$$z_{j,i} \geq \frac{w_i}{k} e^{\alpha_1^i + \alpha_2^i x_{j,i} + \alpha_3^i r_i} \ \forall i, j,$$

$$\underline{r_i} \leq r_i \leq \overline{r_i}, \ 1 \leq i \leq n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \leq R.$$

Для данного типа выпуклых программ существуют полиномиальные методы построения оптимальных решений [2].

Модернизация подмножества приборов

Допустим, что из всего множества приборов, по которым известна статистика за определенный период, необходимо модернизировать только те, у которых количество отказов компонента l больше или равно $\underline{x_l}$ и меньше или равно $\overline{x_l}$ (в общем случае вектор отказов приборов находится в некотором множестве A). Тогда из всех векторов $x_j = \left(x_{j,1}, x_{j,2}, \ldots, x_{j,n}\right)$, $1 \leq j \leq k$, будем рассматривать только те, которые находятся в множестве

$$\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right] \times [-\infty, +\infty] \times \ldots \times [-\infty, +\infty] \bigcup [-\infty, +\infty] \times \left[\underline{x_2}, \overline{x_2}\right] \times \ldots \times [-\infty, +\infty] \bigcup \ldots$$
$$\bigcup [-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty] \times \ldots \times \left[\underline{x_n}, \overline{x_n}\right]$$

(в общем случае они находятся в множестве A), и относительно них будем применять вышеизложенные подходы. Это действие эквивалентно рассмотрению случайной величины с эмпирическим распределением при условии нахождения значения данной случайной величины в указанном множестве.

Если даны только один прибор, подлежащий модернизации, и бюджет, выделенный отделу для этой цели, то можно найти t векторов статистики, наиболее близких к вектору отказов этого прибора, и применить вышеперечисленные подходы относительно указанного набора статистических данных.

Подсчет стандартных ошибок

Используя известную технику [1], можно подсчитать стандартную ошибку стоимости игры. Рассмотрим эмпирическое распределение. Напомним, что это дискретное распределение, в котором вектор $x_j = \left(x_{j,1}, x_{j,2}, \ldots, x_{j,n}\right)$, $1 \le j \le k$, имеет вероятность $\frac{1}{k}$. Обозначим данное распределение через F^*. Сгенерируем из него k векторов и вычислим на их основе значения игры с помощью одной из вышеприведенных программ. Повторим шаги по генерации векторов и вычислению значений игры B раз, при этом получим B значений игры, выражаемых в виде $\hat{\theta}^{(l)}$, $1 \le l \le B$. Подсчитаем оценку стандартного отклонения распределения значения игры при эмпирическом распределении F^* следующим образом:

$$sd\left(F^*\right) = \left[\sum_{l=1}^{B} \frac{\left(\hat{\theta}^{(l)} - \hat{\theta}^{(\cdot)}\right)^2}{B-1}\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $\hat{\theta}^{(\cdot)} = \sum_{l=1}^{B} \frac{\hat{\theta}^{(l)}}{B}$. Эта величина называется оценкой стандартной ошибки значения игры при данной статистической информации. Использовав стандартную ошибку и неравенство Чебышева [3], можно построить доверительные интервалы для значения игры.

Для большей весомости информации, изложенной в данном разделе, докажем, что $sd\left(F^*\right) \xrightarrow[\text{п. н.}]{} sd\left(F\right)$, где F – неизвестное распределение значения игры; $sd\left(F\right)$ – среднеквадратичное отклонение случайной величины значения игры θ. Основная идея доказательства – спроецировать величины значений игры на пространство переменных X. С этой целью рассмотрим подробнее задачу (2) и на ее основе сформулируем систему неравенств

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} z_{j,i} \le Z, \\ &z_{j,i} \ge 0 \ \forall i, j, \\ &\underline{r_i} \le r_i \le \overline{r_i}, \ 1 \le i \le n, \\ &\sum_{i=1}^{n} r_i \le R, \end{aligned} \tag{3}$$

где Z – некоторая константа. Для каждого допустимого значения вектора переменных этой системы неравенств, т. е. вектора $\left(z, r\right)$, определим многогранник возможных значений переменных x, используя ограничение $z_{j,i} \ge \frac{w_i c_i}{k} r_i + \frac{w_i d_i x_{j,i}}{k} + \frac{w_i e_i}{k} \ \forall i, j$ из задачи (2) и предполагая, что коэффициент d_i является положительным:

$$R\left(z, r\right) = \prod_{j,i} R_{j,i}\left(z, r\right),$$

$$R_{j,i}\left(z, r\right) = \left\{ x_{j,i} \,\middle|\, \frac{k}{w_i d_i} z_{j,i} - \frac{c_i}{d_i} r_i - \frac{e_i}{d_i} \ge x_{j,i} \right\}.$$

Отметим, что многогранник $R_{j,i}\left(z, r\right)$ – это полуинтервал.

Множество значений x, соответствующее системе (3), определяется как объединение многогранников $R\left(z, r\right)$ по всем допустимым векторам $\left(z, r\right)$:

$$R\left(Z\right) = \bigcup_{\sum_{j,i} z_{j,i} \le Z,\ z_{j,i} \ge 0,\ \underline{r_i} \le r_i \le \overline{r_i},\ 1 \le i \le n,\ \sum_{i=1}^{n} r_i \le R} R\left(z, r\right).$$

Множество $\sum_{j,i} z_{j,i} \le Z$, $z_{j,i} \ge 0$, $\underline{r_i} \le r_i \le \overline{r_i}$, $1 \le i \le n$, $\sum_{i=1}^{n} r_i \le R$ является многогранником с конечным количеством вершин. Тогда верна следующая лемма.

Лемма. $R(Z)=\bigcup_{(z_h,\, r_h)}\prod_{j,\, i}\left\{x_{j,\, i}\middle|\frac{k}{w_i d_i}z_{j,\, i}^h-\frac{c_i}{d_i}r_i^h-\frac{e_i}{d_i}\geq x_{j,\, i}\right\}$, *где* (z_h, r_h) *– вершина многогранника* $\sum_{j,\, i}z_{j,\, i}\leq Z,\ z_{j,\, i}\geq 0,\ \underline{r_i}\leq r_i\leq\overline{r_i},\ 1\leq i\leq n,\ \sum_{i=1}^{n}r_i\leq R.$

Доказательство. Пусть (z^1, r^1) – некоторая точка многогранника $\sum_{j,\, i}z_{j,\, i}\leq Z,\ z_{j,\, i}\geq 0,\ \underline{r_i}\leq r_i\leq\overline{r_i},$ $1\leq i\leq n,\ \sum_{i=1}^{n}r_i\leq R.$ Допустим, что x принадлежит многограннику, построенному для этой точки. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
&\min_{j,\, i} w_{j,\, i}\to\max,\\
&w_{j,\, i}=\frac{k}{w_i d_i}z_{j,\, i}-\frac{c_i}{d_i}r_i-\frac{e_i}{d_i}-\left(\frac{k}{w_i d_i}z_{j,\, i}^1-\frac{c_i}{d_i}r_i^1-\frac{e_i}{d_i}\right)\ \forall i,\, j,\\
&\sum_{j,\, i}z_{j,\, i}\leq Z,\\
&z_{j,\, i}\geq 0\ \forall i,\, j,\\
&\underline{r_i}\leq r_i\leq\overline{r_i},\ 1\leq i\leq n,\\
&\sum_{i=1}^{n}r_i\leq R.
\end{aligned}\tag{4}$$

Вектором переменных данной задачи является (z, r, w). Отметим, что ее допустимое решение – это точка (z^1, r^1, w^1), где w^1 вычисляется из первого ограничения. Целевая функция на этом допустимом решении равна нулю. Значит, оптимальное решение задачи (4), которое является одновременно вершиной многогранника, может быть найдено с помощью симплекс-метода и критерий на этом оптимальном решении больше нуля или равен нулю. Из метода построения первого ограничения следует, что верхние границы в компонентах многогранника $\prod_{j,\, i}\left\{x_{j,\, i}\middle|\frac{k}{w_i d_i}z_{j,\, i}^h-\frac{c_i}{d_i}r_i^h-\frac{e_i}{d_i}\geq x_{j,\, i}\right\}$, соответствующего этому решению, могли только увеличиваться, а значит, точка x остается допустимой для многогранника $R(z, r)$, соответствующего вершине многогранника $\sum_{j,\, i}z_{j,\, i}\leq Z,\ z_{j,\, i}\geq 0,\ \underline{r_i}\leq r_i\leq\overline{r_i},\ 1\leq i\leq n,\ \sum_{i=1}^{n}r_i\leq R.$

Лемма доказана.

Итак, множество $R(Z)$ определяется как объединение конечного числа многогранников, каждый из которых является борелевским множеством. Другими словами, это множество измеримо. Найдем пересечение этого множества с множеством неотрицательных значений x $\prod_{j,\, i}\left\{x_{j,\, i}\middle|x_{j,\, i}\geq 0\right\}$:

$$R^+(Z)=R(Z)\bigcap\prod_{j,\, i}\left\{x_{j,\, i}\middle|x_{j,\, i}\geq 0\right\}=$$

$$=\left(\bigcup_{(z_h,\, r_h)}\prod_{j,\, i}\left\{x_{j,\, i}\middle|\frac{k}{w_i d_i}z_{j,\, i}^h-\frac{c_i}{d_i}r_i^h-\frac{e_i}{d_i}\geq x_{j,\, i}\right\}\right)\bigcap\left(\prod_{j,\, i}\left\{x_{j,\, i}\middle|x_{j,\, i}\geq 0\right\}\right)=$$

$$=\bigcup_{(z_h,\, r_h)}\left(\left(\prod_{j,\, i}\left\{x_{j,\, i}\middle|\frac{k}{w_i d_i}z_{j,\, i}^h-\frac{c_i}{d_i}r_i^h-\frac{e_i}{d_i}\geq x_{j,\, i}\right\}\right)\bigcap\left(\prod_{j,\, i}\left\{x_{j,\, i}\middle|x_{j,\, i}\geq 0\right\}\right)\right),$$

где (z_h, r_h) – вершина многогранника $\sum_{j,\, i}z_{j,\, i}\leq Z,\ z_{j,\, i}\geq 0,\ \underline{r_i}\leq r_i\leq\overline{r_i},\ 1\leq i\leq n,\ \sum_{i=1}^{n}r_i\leq R.$

Это множество останется борелевским и будет ограниченным, так как ограниченны многогранники $\left(\prod_{j,\, i}\left\{x_{j,\, i}\middle|\frac{k}{w_i d_i}z_{j,\, i}^h-\frac{c_i}{d_i}r_i^h-\frac{e_i}{d_i}\geq x_{j,\, i}\right\}\right)\bigcap\left(\prod_{j,\, i}\left\{x_{j,\, i}\middle|x_{j,\, i}\geq 0\right\}\right)$. Тогда предполагаемую функцию распределения значения игры можно записать в виде $F_\theta(t) = P\left(x \in R^+(t)\right)$. Множество допустимых значений x, принадлежащих $R^+(t)$, находится перебором, так как каждый многогранник, соответствующий своей вершине, ограничен. Можно доказать, что эта функция действительно является функцией распределения, т. е. обладает всеми свойствами такой функции. Этот вывод следует из того, что когда компоненты вектора x – неотрицательные целые случайные величины, то случайная величина θ является дискретной случайной величиной.

Выборочную функцию распределения, которая также является дискретной случайной величиной, можно записать как $F_\theta^*(t) = \frac{k_1}{k}$, где k_1 – количество векторов X в множестве $R^+(t)$.

Остается воспользоваться следующей теоремой[5].

Теорема 2. *Пусть* $X_n = [X_\infty]_n$ *имеет распределение F. Тогда если* $S(X) = G\left(F_n^*\right)$ *есть статистика типа I или II, то при* $n \to \infty$ $G\left(F_n^*\right) \xrightarrow[\text{п. н.}]{} G(F)$.

Заключение

Рассмотрена задача определения оптимального распределения инвестиционной суммы между отделами, разрабатывающими компоненты сложного прибора. Выбор распределения зависит от оправданности средств, ранее вложенных в надежность производимого компонента. Для учета влияния потраченной суммы денег на количество отказов компонента предложено построить линейную или обобщенную линейную регрессию, коэффициенты которой используются в формулировках математического программирования.

Библиографические ссылки

1. Efron B, Hastie T. *Computer age statistical inference: algorithms, evidence, data science.* New York: Cambridge University Press; 2016. XIX, 475 p.
2. Nemirovski A. *Modern convex optimization*. [S. l.]: Georgia Institute of Technology; 2005. 558 p.
3. Боровков АА. *Теория вероятностей*. Москва: Эдиториал УРСС; 1999. 472 с.

Получена 18.04.2024 / исправлена 24.06.2025 / принята 24.06.2025.
Received 18.04.2024 / revised 24.06.2025 / accepted 24.06.2025.

[5] *Боровков А. А.* Математическая статистика… С. 30.