УДК 519.624.1, 517.927.2

# РАЗНОСТНАЯ ТРАКТОВКА НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРИЗОВАННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

***Д. М. ДОВЛЕТОВ***[1)]

[1)]*Независимый исследователь, г. Ашхабад, Туркменистан*

***Аннотация.*** Изучена нелокальная начальная задача с соответствующей конечно-разностной трактовкой для линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с параметром при производной. Нелокальное начальное условие задано в терминах линейной многоточечной комбинации. На равномерной сетке предложена разностная схема с экспоненциальной подгонкой. Выявлены требования на расположение носителей нелокальных данных в многоточечном условии, на значения соответствующих коэффициентов и на интервал изменения параметра, при которых доказаны как равномерная по параметру устойчивость классического и разностного решений, так и равномерная по параметру сходимость разностного решения к классическому решению. Выявление и доказательство таких условий, которые обеспечивают равномерную по параметру аппроксимацию классического решения нелокальной начальной задачи решением экспоненциально-подгоночной разностной схемы, определяют новизну настоящей работы.

***Ключевые слова:*** нелокальная начальная задача; равномерная устойчивость; равномерная сходимость; многоточечное условие; экспоненциальная подгонка.

**Образец цитирования:**
Довлетов ДМ. Разностная трактовка нелокальной задачи с параметризованным дифференциальным уравнением первого порядка. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;2:89–104.
EDN: FXGPSJ

**For citation:**
Dovletov DM. A finite-difference interpretation of a nonlocal problem with a parameterised first-order differential equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;2:89–104. Russian.
EDN: FXGPSJ

**Автор:**
***Довлет Мейданович Довлетов*** – кандидат физико-математических наук; независимый исследователь.

**Author:**
***Dovlet M. Dovletov***, PhD (physics and mathematics); independent researcher.
*dovlet.dovletov@gmail.com*
*https://orcid.org/0000-0003-0834-2163*

# A FINITE-DIFFERENCE INTERPRETATION OF A NONLOCAL PROBLEM WITH A PARAMETERISED FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

***D. M. DOVLETOV***[a]

[a]*Independent researcher, Ashgabat, Turkmenistan*

***Abstract.*** In this work the nonlocal initial value problem and corresponding finite-difference interpretation for the first-order linear ordinary differential equation with a parameter at the derivative is studied. The nonlocal initial value condition is given by terms of multipoint linear combination. The difference scheme with exponential fit is proposed on a uniform mesh. The article identifies the requirements on the location of nonlocal data carriers in the multipoint condition, on the values of corresponding coefficients and on the parameter variation interval, under which a uniform on parameter stability of classical and difference solutions, as well as a uniform on parameter convergence of difference solution to classical solution are proved. The identification and proof of such conditions, which provide a uniform on parameter approximation of the nonlocal initial value problem classical solution by the solution of exponentially fitted difference scheme, define the novelty of the current work.

***Keywords:*** nonlocal initial value problem; uniform stability; uniform convergence; multipoint condition; exponentially fitted parameter.

## Введение

В данном кратком обзоре не затрагиваются работы, имеющие отношение к нелокальным задачам с нелинейными дифференциальными уравнениями и с уравнениями в частных производных.

В настоящей статье изучаются дифференциальная и разностная трактовки нелокальной начальной задачи для уравнения $\varepsilon u'(x) + a(x)u(x) = f(x)$, $x > 0$, с параметром $\varepsilon > 0$ при нелокальном условии $u(0) - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u(\zeta_k) = \varphi$. Решение дифференциальной задачи рассматривается из класса функций $C^1(0, +\infty) \cap C[0, +\infty)$. Конечно-разностная схема выписывается на равномерной сетке с шагом $h > 0$ и содержит параметр экспоненциальной подгонки. Определяются и доказываются условия равномерной по параметру $\varepsilon$ устойчивости как классического решения $u(x)$ дифференциальной задачи, так и решения $u_i$ соответствующей разностной задачи, на основании которых доказывается равномерная по параметру $\varepsilon$ сходимость разностного решения к классическому решению.

Исследования различных постановок нелокальных граничных задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в работах [1–6] наводят на вопросы о том, какие факторы будут влиять на однозначную разрешимость нелокальной задачи при наличии параметра в уравнении, при каких условиях решение будет обладать свойством равномерной по параметру устойчивости, какая разностная схема обеспечит равномерное по параметру дискретно-устойчивое решение и будет ли иметь место соответствующая равномерная по параметру сходимость разностного решения к дифференциальному решению. В этом аспекте, в частности, некоторые постановки нелокальных граничных задач для линейных уравнений второго порядка с параметром при старшей производной изучались в работах [4; 7–11], а нелокальная начальная задача для линейного уравнения первого порядка с параметром при производной рассматривалась в статье [12]. В публикациях [11; 12] имеется соответствующий тематике библиографический обзор. Уместно будет добавить, что в книге [13] содержится перечень работ, касающихся различных численных методов, включая используемый в настоящей статье метод экспоненциальной подгонки [13, с. 20]. В завершение данного краткого обзора стоит отметить, что результаты работ [1] и [5], полученные при изучении нелокальной краевой задачи первого рода для уравнения Штурма – Лиувилля, актуально использовались в статьях [14] и [15] соответственно при изучении однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи для уравнения Пуассона в прямоугольнике.

Все упомянутые исследования так или иначе нацелили нас на изучение описанной выше формулировки нелокальной начальной задачи. Для такой задачи в рамках настоящей работы будут выясняться требования на расположение носителей нелокальных данных $\zeta_k$ в задаваемом многоточечном начальном условии, на значения соответствующих им коэффициентов $\alpha_k$ и на интервал изменения параметра $\varepsilon$, при которых и будет доказываться равномерная по параметру устойчивость классического и разностного решений, а также равномерная по параметру сходимость решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи.

## Постановка задачи и общие результаты

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} Lu(x) \equiv \varepsilon u'(x) + a(x)u(x) = f(x),\ x > 0, \\ \ell[u] \equiv u(0) - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u(\zeta_k) = \varphi, \end{cases} \tag{1}$$

в которой $\varepsilon > 0$, $a(x) \in C[0, +\infty)$, $f(x) \in C[0, +\infty)$, $a(x) \geq a > 0$, $x \in [0, +\infty)$, $m \in N$, $\alpha_k \in R$, $\zeta_k \in R$, $0 < \zeta_1 < \ldots < \zeta_m < X$, $k = 1, \ldots, m$, $X \in R$ и $\varphi \in R$. Решение задачи (1) подразумевается классическим, т. е. $u(x) \in C^1(0, +\infty) \cap C[0, +\infty)$. На равномерной сетке с шагом $h > 0$ задача (1) интерпретируется разностной схемой

$$\begin{cases} L^h u_i \equiv \varepsilon\sigma_i(\rho) D_+ u_i + a_i u_i = f_i,\ i \geq 0, \\ \ell^h[u_i] \equiv u_0 - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \left[\theta u_{i_{\zeta_k}} + (1-\theta) u_{i_{\zeta_k}+1}\right] = \varphi, \end{cases} \tag{2}$$

в которой $D_+ u_i \equiv \dfrac{u_{i+1} - u_i}{h}$, $a_i = a(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = ih$, подгоночный параметр [13, с. 20] $\sigma_i(\rho) = \rho a_i \left[1 - \exp(-\rho a_i)\right]^{-1}$, $i \geq 0$, $\rho = \dfrac{h}{\varepsilon}$, $0 \leq \theta \leq 1$, а каждый номер $i_{\zeta_k}$ задается неравенством $i_{\zeta_k} h \leq \zeta_k < (i_{\zeta_k} + 1)h$, $k = 1, \ldots, m$, при этом шаг $h$ удовлетворяет условию

$$h < \Delta,\ \Delta = 2^{-1} \min\left\{\zeta_1,\ \zeta_k - \zeta_{k-1},\ k = 2, \ldots, m,\ X - \zeta_m\right\}. \tag{3}$$

Всюду далее будем использовать обозначение $\omega(x)$ для функции

$$\omega(x) = \exp\left(-\varepsilon^{-1}\int_0^x a(t)\,dt\right),\ 0 < x < +\infty. \tag{4}$$

С учетом формулы (4) и соответствующего обозначения в задаче (1) имеем

$$\ell[\omega] = \omega(0) - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \omega(\zeta_k). \tag{5}$$

**Лемма 1.** *Пусть при некотором $\delta > 0$ выполняется условие $\left|\ell[\omega]\right| \geq \delta$ для всех $\varepsilon \in E$, где $E = \{\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ или $E = \{\varepsilon,\ 0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}\}$ при фиксированном значении $\tilde{\varepsilon} > 0$. Тогда для классического решения задачи (1) справедлива равномерная по параметру $\varepsilon$ оценка устойчивости*

$$|u(x)| \leq C\left(|\varphi| + \max_{0 \leq t \leq X}|f(t)|\right),\ 0 \leq x \leq X, \tag{6}$$

*в которой константа $C$ не зависит от $x$ и $\varepsilon$.*

Доказательство. Исходя из работы [12, p. 86], решение $u(x)$ задачи (1) существует, причем $u(x) = v(x) + w(x)$, где $v(x)$ и $w(x)$ являются решениями задач

$$Lv(x) = f(x),\ x > 0,\ v(0) = 0, \tag{7}$$

$$Lw(x) = 0,\ x > 0,\ \ell[w] = \varphi - \ell[v], \tag{8}$$

соответственно. Для $v(x)$ и $w(x)$ имеют место следующие оценки и формулы [12, p. 88]:

$$|v(x)| \leq a^{-1} \max_{0 \leq t \leq X}|f(t)|,\ 0 \leq x \leq X, \tag{9}$$

$$\left|\ell[v]\right| \leq a^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k|\right) \max_{0 \leq x \leq X}|f(x)|, \tag{10}$$

$$w(0) = \ell[w]^{-1}(\varphi - \ell[v]), \tag{11}$$

$$w(x) = w(0)\omega(x),\ 0 \leq x \leq X. \tag{12}$$

Тогда, используя формулы (9)–(12), с учетом монотонного убывания функции $\omega(x)$ получаем оценку

$$\left|w(x)\right| \le \delta^{-1}\left(\left|\varphi\right| + a^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m}\left|\alpha_k\right|\right)\max_{0 \le t \le X}\left|f(t)\right|\right),\ 0 \le x \le X. \tag{13}$$

Применяя оценки (9) и (13) в неравенстве треугольника $\left|u(x)\right| \le \left|v(x)\right| + \left|w(x)\right|$, убеждаемся в справедливости оценки устойчивости (6) с не зависящей от $x$ и $\varepsilon$ константой $C$. Лемма 1 доказана.

Всюду далее под $\omega_i$ подразумевается сеточная функция, определяемая формулой

$$\omega_i = \exp\left(-\rho\sum_{j=0}^{i-1} a(x_j)\right),\ i > 0,\ \omega_0 = 1. \tag{14}$$

С учетом формулы (14) и обозначения для разностного аналога оператора нелокального условия в задаче (2) имеем

$$\ell^h\left[\omega_i\right] = \omega_0 - \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left[\theta\omega_{i_{\zeta_k}} + (1-\theta)\omega_{i_{\zeta_k}+1}\right]. \tag{15}$$

**Лемма 2.** *Пусть при некоторых* $\delta > 0$ *и* $\tilde{h} > 0$ *выполняется условие* $\left|\ell^h\left[\omega_i\right]\right| \ge \delta$ *для всех* $h \le \tilde{h}$ *и* $\varepsilon \in E$, *где* $E = \{\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ *или* $E = \{\varepsilon,\ 0 < \varepsilon \le \tilde{\varepsilon}\}$ *при фиксированном значении* $\tilde{\varepsilon} > 0$. *Тогда для решения разностной задачи (2) справедлива равномерная по параметру* $\varepsilon$ *оценка дискретной устойчивости*

$$\left|u_i\right| \le C\left(\left|\varphi\right| + \max_{0 \le jh \le X}\left|f(x_j)\right|\right),\ 0 \le ih \le X, \tag{16}$$

*с не зависящей от i, h и* $\varepsilon$ *константой C.*

Доказательство. Рассмотрим две разностные задачи:

$$L^h v_i = f(x_i),\ i \ge 0,\ v_0 = 0, \tag{17}$$

$$L^h w_i = 0,\ i \ge 0,\ \ell^h\left[w_i\right] = \varphi - \ell^h\left[v_i\right]. \tag{18}$$

Решение задачи (17) есть не что иное, как решение алгебраической системы уравнений

$$v_0 = 0,\ v_1 = F_0,\ v_{i+1} + s_i v_i = F_i,\ i = 1, \ldots, n-1,$$

где $s_i = \exp(-\rho a_i)$, $F_i = \left[1 - \exp(-\rho a_i)\right] f_i a_i^{-1}$, $i = 0, \ldots, n-1$, $n = \left\lfloor \dfrac{X}{h} \right\rfloor$, определяемое из этой системы единственным образом. Однозначно разрешимой является и задача (18). В самом деле, используя метод математической индукции, несложно убедиться в том, что решение разностного уравнения $L^h w_i = 0$, $i \ge 0$, имеет вид

$$w_i = w_0\omega_i,\ i \ge 0. \tag{19}$$

Поскольку $\ell^h\left[\omega_i\right] \ne 0$, то из задачи (18) с учетом формулы (19) получаем формулу

$$w_0 = \ell^h\left[\omega_i\right]^{-1}\left(\varphi - \ell^h\left[v_i\right]\right), \tag{20}$$

единственным образом определяющую $w_0$, а значит, и решение $w_i$ задачи (18). Учитывая вышеприведенные рассуждения и тот факт, что сеточная функция $u_i = v_i + w_i$, $i \ge 0$, является решением разностной задачи (2), приходим к выводу, что и разностная задача (2) будет однозначно разрешимой.

Для решения задачи (17) справедлива равномерная по параметру $\varepsilon > 0$ оценка устойчивости (см., например, [13, с. 26])

$$\left|v_i\right| \le a^{-1}\max_{0 \le jh \le X}\left|f(x_j)\right|,\ 0 \le ih \le X, \tag{21}$$

из которой следует, что

$$\left|\ell^h\left[v_i\right]\right| \le a^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m}\left|\alpha_k\right|\right)\max_{0 \le jh \le X}\left|f(x_j)\right|. \tag{22}$$

Так как при $i \ge 0$ дискретная функция $\omega_i$ является положительной и к тому же монотонно убывающей, то, используя формулы (19)–(22), получаем оценку

$$\left|w_i\right| \le \delta^{-1}\left(\left|\varphi\right| + a^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m}\left|\alpha_k\right|\right)\max_{0\le jh\le X}\left|f\left(x_j\right)\right|\right),\ 0\le ih\le X, \tag{23}$$

не зависящую от значений $\varepsilon\in E$. Наконец, из неравенства $\left|u_i\right|\le\left|v_i\right|+\left|w_i\right|,\ i\ge 0$, с учетом оценок (21) и (23) следует равномерная оценка дискретной устойчивости (16) с не зависящей от $i$, $h$ и $\varepsilon$ константой $C$. Лемма 2 доказана.

Всюду далее при доказательстве нижеследующей теоремы с применением метода двух сеток будут использоваться обозначения сеточных функций:

• $u_i^h,\ v_i^h,\ w_i^h$ – решения задач (2), (17), (18) на разностной сетке с шагом $h$ (и значение в сеточном узле с номером $i$) соответственно;

• $u_{2i}^{\frac{h}{2}},\ v_{2i}^{\frac{h}{2}},\ w_{2i}^{\frac{h}{2}}$ – решения задач (2), (17), (18) на разностной сетке с шагом $\dfrac{h}{2}$ (и значение в сеточном узле с номером $2i$) соответственно.

**Теорема 1.** *Пусть* $a(x)\in C^1[0,+\infty)$, $f(x)\in C^1[0,+\infty)$ *и при* $\delta>0$ *и* $\tilde h>0$ *выполняются оба неравенства* $\left|\ell[\omega]\right|\ge\delta$ *и* $\left|\ell^h[\omega_i]\right|\ge\delta$ *для всех* $h\le\tilde h$ *и* $\varepsilon\in E$, *где* $E=\{\varepsilon,\ \varepsilon>0\}$ *или* $E=\{\varepsilon,\ 0<\varepsilon\le\tilde\varepsilon\}$ *при фиксированном значении* $\tilde\varepsilon>0$. *Тогда решение* $u_i^h$ *задачи (2) равномерно по параметру* $\varepsilon$ *сходится к решению* $u(x)$ *задачи (1) так, что при* $h\to 0$ *справедлива оценка*

$$\left|u(ih)-u_i^h\right|\le Ch,\ 0\le ih\le X, \tag{24}$$

*с не зависящей от i, h и* $\varepsilon$ *константой C.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем решение задачи (1) в виде $u(x)=v(x)+w(x)$, где $v(x)$ – решение задачи (7), а $w(x)$ – решение задачи (8). В свою очередь, решение разностной задачи (2) запишем в виде $u_i^h=v_i^h+w_i^h$, где $v_i^h$ – решение задачи (17), а $w_i^h$ – решение задачи (18). Известно [13, с. 22], что разностное решение задачи (17) равномерно по параметру $\varepsilon\in E$ сходится к решению задачи Коши (7) так, что при $h\to 0$ имеет место оценка

$$\left|v\left(x_i^h\right)-v_i^h\right|\le Ch,\ 0\le ih\le X, \tag{25}$$

с не зависящей от $i$, $h$ и $\varepsilon$ константой $C$. Так как в силу неравенства треугольника

$$\left|u\left(x_i^h\right)-u_i^h\right|\le\left|v\left(x_i^h\right)-v_i^h\right|+\left|w\left(x_i^h\right)-w_i^h\right|,$$

то с учетом оценки (25) для доказательства оценки (24) достаточно будет установить равномерную по параметру $\varepsilon$ сходимость $w_i^h$ к $w(x)$. Для этого прежде всего докажем оценку

$$\left|w\left(x_i^h\right)-w_i^h\right|\le C_\varepsilon h, \tag{26}$$

в которой константа $C_\varepsilon$ не зависит от $i$ и $h$. Для доказательства оценки (26) воспользуемся оценкой [13, с. 29]

$$\left|v'(x)\right|\le C\left(1+\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{ax}{\varepsilon}\right)\right),\ 0\le x\le X,$$

из которой при любом фиксированном значении $x_0\in(0,\ X)$, в том числе при $x_0=\dfrac{1}{2}\zeta_1$, вытекает оценка

$$\left|v'(x)\right|\le C,\ x_0\le x\le X, \tag{27}$$

с не зависящей от $x$ и $\varepsilon$ константой $C$. Выбирая $x_0=\dfrac{1}{2}\zeta_1$, а затем учитывая оценку (27) при разложении в ряд Тейлора функции $v(x)$, получаем соотношения

$$v(\zeta_k)-v_{i_{\zeta_k}}^h=v\left(i_{\zeta_k}h\right)-v_{i_{\zeta_k}}^h+O(h),\ v(\zeta_k)-v_{i_{\zeta_k}+1}^h=v\left(\left(i_{\zeta_k}+1\right)h\right)-v_{i_{\zeta_k}+1}^h+O(h),$$

использование которых в совокупности с оценкой (25) приводит к оценке

$$\ell[v]-\ell^h\left[v_i^h\right]=O(h). \tag{28}$$

Из явного представления решения нелокальной задачи (8) с применением неравенства

$$t\exp(-t)\le C(\theta)\exp(-\theta t),\ t\in[0,+\infty),\ \theta\in(0,1),$$

получаем, что

$$\left|w'(x)\right| \leq C(\theta)a(x)\frac{|w(0)|}{\int\limits_0^x a(t)dt}\exp\left(-\varepsilon^{-1}\theta\int\limits_0^x a(t)dt\right),\ 0 \leq x \leq X. \tag{29}$$

Отсюда, учитывая формулы (4) и (8)–(10), в силу леммы 1 получаем оценку

$$|w(0)| \leq C\left(|\varphi| + \max_{0 \leq x \leq X}|f(x)|\right),$$

в которой константа $C$ не зависит от $x$ и ε. При любом фиксированном $x_0 \in (0,\ X)$ эта оценка вместе с неравенством (29) приводит к оценке

$$\left|w'(x)\right| \leq C,\ x_0 \leq x \leq X. \tag{30}$$

Выбирая $x_0 = \frac{1}{2}\zeta_1$ и используя оценку (30) при разложении в ряд Тейлора функции $w(x)$, получаем соотношение

$$\ell[w] - \ell^h\left[w\left(x_i^h\right)\right] = O(h), \tag{31}$$

в котором $O(h)$ не зависит от ε. Поскольку

$$\ell^h\left[w\left(x_i^h\right) - w_i^h\right] = \ell^h\left[w\left(x_i^h\right)\right] - \left(\varphi - \ell^h\left[v_i^h\right]\right) = -\left(\ell[w] - \ell^h\left[w\left(x_i^h\right)\right]\right) - \left(\ell[v] - \ell^h\left[v_i^h\right]\right),$$

то с учетом формул (28) и (31) получаем соотношение

$$\ell^h\left[w\left(x_i^h\right) - w_i^h\right] = O(h). \tag{32}$$

Принимая во внимание погрешность аппроксимации для $L^h$, имеем

$$L^h\left(w\left(x_i^h\right) - w_i^h\right) = O_\varepsilon(h),\ \ell^h\left[w\left(x_i^h\right) - w_i^h\right] = O(h). \tag{33}$$

Интерпретируя сеточную функцию $W_i^h = w\left(x_i^h\right) - w_i^h$ как решение разностной задачи (33) и применяя доказанную оценку (16), получаем желаемую оценку (26).

Теперь применим метод двух сеток, чтобы доказать равномерную по параметру ε оценку

$$\left|w\left(x_i^h\right) - w_i^h\right| \leq Ch. \tag{34}$$

Известно [13, с. 23], что оценка

$$\left|L^h\left(w_{2i}^{\frac{h}{2}} - w_i^h\right)\right| \leq Ch \tag{35}$$

справедлива при не зависящей от $i$, $h$ и ε константе $C$. Чтобы убедиться в справедливости оценки (34), достаточно доказать оценку

$$\left|\ell^h\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}} - w_i^h\right]\right| \leq Ch, \tag{36}$$

в которой константа $C$ не зависит от $i$, $h$ и ε. В самом деле, если имеет место оценка (36), то, учитывая оценку (35) и применяя оценку (16) к сеточной функции $\overline{W}_i^h = w_{2i}^{\frac{h}{2}} - w_i^h$, получаем желаемую оценку (34). Для доказательства оценки (36), используя равенство

$$\ell^h\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right] = \ell^{\frac{h}{2}}\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right] - \left(\ell^{\frac{h}{2}}\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right] - \ell^h\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right]\right) = \varphi - \ell^{\frac{h}{2}}\left[v_{2i}^{\frac{h}{2}}\right] - \left(\ell^{\frac{h}{2}}\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right] - \ell^h\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right]\right),$$

получаем соотношение

$$\ell^h\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}} - w_i^h\right] = -\left(\ell^{\frac{h}{2}}\left[v_{2i}^{\frac{h}{2}}\right] - \ell^h\left[v_i^h\right]\right) - \left(\ell^{\frac{h}{2}}\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right] - \ell^h\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right]\right). \tag{37}$$

Так как

$$v_{2i}^{\frac{h}{2}} - v_i^h = v_{2i}^{\frac{h}{2}} - v\left(2i\frac{h}{2}\right) + v(ih) - v_i^h,$$

то с учетом оценки (25) имеем соотношение

$$v_{2i}^{\frac{h}{2}} - v_i^h = O(h) + O\left(\frac{h}{2}\right). \tag{38}$$

Таким же образом устанавливается и тот факт, что для любой точки $\zeta \in \{\zeta_1, \ldots, \zeta_m\}$

$$v_{2i_\zeta+1}^{\frac{h}{2}} - v_{i_\zeta}^h = O(h) + O\left(\frac{h}{2}\right), \tag{39}$$

$$v_{2i_\zeta-1}^{\frac{h}{2}} - v_{i_\zeta}^h = O(h) + O\left(\frac{h}{2}\right). \tag{40}$$

Так, например, соотношение (39) получается при использовании оценок (25) и (27) с выбором $x_0 = \frac{1}{2}\zeta_1$ при разложении функции $v(x)$ в ряд Тейлора:

$$v_{2i_\zeta+1}^{\frac{h}{2}} - v_{i_\zeta}^h = v\left(i_\zeta^h h\right) - v_{i_\zeta}^h + v_{2i_\zeta+1}^{\frac{h}{2}} - v\left(2i_\zeta^h \frac{h}{2}\right) = O(h) + O\left(\frac{h}{2}\right),\ i_\zeta^h \equiv i_\zeta.$$

Аналогично устанавливается и соотношение (40). Далее с учетом соотношений (38)–(40) имеем

$$\ell^{\frac{h}{2}}\left[v_{2i}^{\frac{h}{2}}\right] - \ell^h\left[v_i^h\right] = O(h). \tag{41}$$

С другой стороны, поскольку

$$\ell^{\frac{h}{2}}\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right] - \ell^h\left[w_i^h\right] = -\left(\ell[w] - \ell^{\frac{h}{2}}\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right]\right) + \left(\ell[w] - \ell^h\left[w_i^h\right]\right),$$

то, учитывая соотношения (31) и (32), получаем

$$\ell^{\frac{h}{2}}\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right] - \ell^h\left[w_i^h\right] = O(h). \tag{42}$$

Тогда с учетом формул (41) и (42) оценка (36) вытекает из соотношения (37). Установленные оценки (35) и (36) позволяют применить оценку (16) к сеточной функции $\overline{W}_i^h = w_{2i}^{\frac{h}{2}} - w_i^h$, интерпретируемой как решение разностной задачи

$$L^h \overline{W}_i^h = O(h),\ \ell^h\left[\overline{W}_i^h\right] = O(h),$$

и в итоге получить оценку

$$\left|w_{2i}^{\frac{h}{2}} - w_i^h\right| \le Ch, \tag{43}$$

в которой константа $C$ не зависит от $i$, $h$ и $\varepsilon$. В свою очередь, из оценки (26) следует, что

$$\lim_{h \to 0}\left|w(ih) - w_i^h\right| = 0. \tag{44}$$

Наконец, оценка (43) и предельное равенство (44) позволяют утверждать (см. теорему 5.1, приведенную в работе [13, с. 21]), что равномерная по параметру $\varepsilon$ оценка (34) установлена. Окончательно из оценок (25) и (34) следует оценка равномерной сходимости (24). Теорема 1 доказана.

Отметим, что в теореме 1, как и в леммах 1 и 2, никакие ограничения на знак или величины коэффициентов $\alpha_k$, $k = 1, \ldots, m$, не накладываются.

## Нелокальное условие с коэффициентами одного знака

Рассмотрим случай, когда задача (1) и ее разностная интерпретация (2) имеют в нелокальном начальном условии все коэффициенты $\alpha_k$, $k = 1, \ldots, m$, одного знака. В работе [12, р. 85–86] дано определение критического значения параметра, которое будет использоваться и в настоящей статье. Для удобства приведем это определение.

**Определение.** Значение $\varepsilon^*$ параметра $\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, будем называть критическим, если при $\varepsilon = \varepsilon^*$ нелокальная начальная задача (1) не имеет единственное классическое решение.

Известно [12, p. 86–87], что если задача (1) имеет в нелокальном начальном условии коэффициенты только одного знака и при этом $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \le 1$, то критического значения параметра нет и при каждом $\varepsilon \in (0, +\infty)$ задача (1) имеет единственное классическое решение, если же $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k > 1$, то критическое значение параметра непременно есть и притом в единственном числе.

**Теорема 2.** *Пусть имеются коэффициенты $\alpha_k$, $k = 1, \ldots, m$, одного знака и выполняется одно из следующих условий.*

*1.* $-\infty < \sum_{k=1}^{m} \alpha_k < 1,\ \varepsilon > 0.$

*2.* $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \ge 1,\ 0 < \varepsilon \le \tilde{\varepsilon},\ \tilde{\varepsilon} = a\zeta_1 \cdot 2^{-1}\left[\ln\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k\right) - \ln(1-\delta)\right]^{-1},\ 0 < \delta < 1.$

*Тогда решения задач (1) и (2) являются равномерно устойчивыми по параметру $\varepsilon$. Если к тому же $a(x) \in C^1[0, +\infty)$ и $f(x) \in C^1[0, +\infty)$, то разностное решение задачи (2) равномерно по параметру $\varepsilon$ сходится к классическому решению задачи (1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначение $\alpha = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k$.

1. Пусть выполнено условие 1. Так как $-\infty < \alpha < 1$, то, учитывая формулы (4) и (5), имеем

$$\ell[\omega] \ge \begin{cases} 1 > 0 \text{ при } -\infty < \alpha < 0\ \ \forall \varepsilon > 0, \\ 1 - \alpha > 0 \text{ при } 0 < \alpha < 1\ \forall \varepsilon > 0. \end{cases} \tag{45}$$

С учетом соотношения (45) в силу леммы 1 для решения задачи (1) будет справедлива равномерная по параметру $\varepsilon > 0$ оценка устойчивости (6). Далее в силу порядка расположения носителей нелокальных данных и условия (3) получаем

$$0 < i_{\zeta_1} < i_{\zeta_1} + 1 < \ldots < i_{\zeta_m} < i_{\zeta_m} + 1 < X.$$

Исходя из этой упорядоченности и формулы (15), будет иметь место соотношение

$$\ell^h[\omega_i] \ge \begin{cases} 1 > 0 \text{ при } -\infty < \alpha < 0\ \ \forall \varepsilon > 0, \\ 1 - \alpha > 0 \text{ при } 0 < \alpha < 1\ \forall \varepsilon > 0, \end{cases} \tag{46}$$

поскольку в силу формулы (14) сеточная функция $\omega_i$ является положительной и строго убывающей, т. е.

$$\omega_0 > \ldots > \omega_i > \omega_{i+1} > \ldots > 0,\ i > 0. \tag{47}$$

Теперь, применяя леммы 1 и 2 соответственно, получаем равномерные по параметру $\varepsilon$ оценки устойчивости (6) и (16), с учетом которых, используя теорему 1, устанавливаем равномерную по параметру $\varepsilon$ сходимость разностного решения задачи (2) к классическому решению задачи (1).

2. Пусть выполнено условие 2. Тогда с учетом положительности коэффициентов $\alpha_k$, $k = 1, \ldots, m$, монотонного убывания и положительности функции $\omega(x)$, а также ограниченности снизу положительной функции $a(x)$ получим неравенства

$$\ell[\omega] \ge \omega(0) - \alpha\omega(\zeta_1) \ge 1 - \alpha \exp\left(-\frac{a\zeta_1}{\varepsilon}\right). \tag{48}$$

Несложно убедиться в том, что для $\alpha \ge 1$ при $\delta$ таком, что $0 < \delta < 1$, неравенство

$$1 - \alpha \exp\left(-\frac{a\zeta_1}{\varepsilon}\right) \ge \delta$$

будет выполнено для всех значений $\varepsilon$, удовлетворяющих требованию $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$, где

$$\varepsilon_1 = a\zeta_1\left[\ln\alpha - \ln(1-\delta)\right]^{-1},$$

а значит, в силу неравенств (48) для значений параметра $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ будет выполнено и неравенство $\ell[\omega] \ge \delta$. С другой стороны, учитывая условие (47), положительность всех коэффициентов $\alpha_k$, $k = 1, \ldots, m$, упорядоченность носителей нелокальных данных $\zeta_i$, $i = 1, \ldots, m$, ограниченность снизу положительной функции $a(x)$, а также используя формулу (14), получаем соотношение

$$\ell^h[\omega_i] \ge 1 - \alpha\omega_{i_{\zeta_1}} \ge 1 - \alpha \exp\left(-\frac{a i_{\zeta_1} h}{\varepsilon}\right),$$

из которого с учетом условия (3) вытекает неравенство

$$\ell^h\left[\omega_i\right] \ge 1 - \alpha \exp\left(-\frac{a\zeta_1}{2\varepsilon}\right). \tag{49}$$

Несложно убедиться в том, что для $\alpha \ge 1$ при $\delta$ таком, что $0 < \delta < 1$, неравенство

$$1 - \alpha \exp\left(-\frac{a\zeta_1}{2\varepsilon}\right) \ge \delta$$

будет выполнено для всех значений $\varepsilon$, удовлетворяющих требованию $0 < \varepsilon \le \varepsilon_2$, где

$$\varepsilon_2 = a\zeta_1 \cdot 2^{-1}\left[\ln\alpha - \ln\left(1-\delta\right)\right]^{-1},$$

а значит, в силу неравенства (49) для значений параметра $0 < \varepsilon \le \varepsilon_2$ будет выполнено и неравенство $\ell^h\left[\omega_i\right] \ge \delta$. В итоге из установленных фактов следует, что для значений параметра $0 < \varepsilon \le \tilde{\varepsilon}$, где $\tilde{\varepsilon} = \min\left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\right\}$, т. е. при $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_2$, будут выполнены оба неравенства $\ell\left[\omega\right] \ge \delta$ и $\ell^h\left[\omega_i\right] \ge \delta$. Наконец, применяя леммы 1 и 2 соответственно, убеждаемся в справедливости оценок (6) и (16), означающих равномерную по параметру $\varepsilon$ устойчивость решений задач (1) и (2), а затем, используя теорему 1, устанавливаем равномерную по параметру $\varepsilon$, $0 < \varepsilon \le \tilde{\varepsilon}$, сходимость разностного решения задачи (2) к классическому решению задачи (1). Теорема 2 доказана.

Отметим, что вышеиспользованный подход к доказательству теоремы 2 задает ограничивающее параметр значение $\tilde{\varepsilon}$ меньшим, чем критическое значение параметра.

## Нелокальное условие с коэффициентами разного знака

Рассмотрим постановку нелокальной начальной задачи и ее разностную трактовку при наличии коэффициентов разного знака в нелокальном начальном условии. Не теряя общности, будем изучать задачу

$$\begin{cases} Lu(x) \equiv \varepsilon u'(x) + a(x)u(x) = f(x),\ x > 0, \\ \ell[u] \equiv u(0) - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k u(\zeta_k) + \sum\limits_{p=1}^{m} \beta_p u(\eta_p) = \varphi, \end{cases} \tag{50}$$

где $\varepsilon > 0$, $a(x) \in C[0, +\infty)$, $f(x) \in C[0, +\infty)$, $a(x) \ge a > 0$, $x \in [0, +\infty)$, $n \in N$, $n \ge 1$, $m \in N$, $m \ge 1$, $\alpha_k > 0$, $\zeta_k \in (0, X)$, $k = 1, \ldots, n$, $\beta_p > 0$, $\eta_p \in (0, X)$, $p = 1, \ldots, m$, $X \in R$ и $\varphi \in R$, при этом будем считать, что все носители нелокальных данных различны между собой.

Разностную трактовку задачи на равномерной сетке с шагом $h > 0$ запишем в виде

$$\begin{cases} L^h u_i \equiv \varepsilon\sigma_i(\rho) D_+ u_i + a_i u_i = f_i,\ i \ge 0, \\ \ell^h\left[u_i\right] \equiv u_0 - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \left[\theta u_{i_{\zeta_k}} + (1-\theta) u_{i_{\zeta_k}+1}\right] + \sum\limits_{p=1}^{m} \beta_p \left[\theta u_{i_{\eta_p}} + (1-\theta) u_{i_{\eta_p}+1}\right] = \varphi, \end{cases} \tag{51}$$

где $D_+ u_i \equiv \dfrac{\left(u_{i+1} - u_i\right)}{h}$, $a_i = a(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = ih$, а подгоночный параметр $\sigma_i(\rho) = \rho a_i\left[1 - \exp\left(-\rho a_i\right)\right]^{-1}$, $i \ge 0$, $\rho = \dfrac{h}{\varepsilon}$, $0 \le \theta \le 1$.

Наконец, в постановке задачи (50), не теряя общности, считаем, что носители нелокальных данных упорядочены в виде

$$0 < \zeta_1 < \ldots < \zeta_n < X,\ 0 < \eta_1 < \ldots < \eta_m < X,\ \zeta_k \ne \eta_p,\ k = 1, \ldots, n,\ p = 1, \ldots, m, \tag{52}$$

а в разностной задаче (51) соответствующие точкам $\zeta_k$ и $\eta_p$ номера $i_{\zeta_k}$ и $i_{\eta_p}$ задаем неравенствами

$$i_{\zeta_k} h \le \zeta_k < \left(i_{\zeta_k} + 1\right)h,\ k = 1, \ldots, n,\ i_{\eta_p} h \le \eta_p < \left(i_{\eta_p} + 1\right)h,\ p = 1, \ldots, m,$$

при этом на шаг сетки накладываем следующее требование (далее – условие на $h$): шаг $h$ строго меньше половины длины наименьшего расстояния между парами, составленными из различных точек множества $\left\{0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n, \eta_1, \ldots, \eta_m, X\right\}$.

В дальнейшем с учетом формул (4) и (14) будем использовать формулы

$$\ell[\omega] = \omega(0) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega(\zeta_k) + \sum_{p=1}^{m} \beta_p \omega(\eta_p), \tag{53}$$

$$\ell^h[\omega_i] = \omega_0 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left[\theta\omega_{i_{\zeta_k}} + (1-\theta)\omega_{i_{\zeta_k}+1}\right] + \sum_{p=1}^{m} \beta_p \left[\theta\omega_{i_{\eta_p}} + (1-\theta)\omega_{i_{\eta_p}+1}\right], \tag{54}$$

которые выписаны в соответствии с обозначениями в задачах (50) и (51).

Сперва рассмотрим задачи (50) и (51) при условии, что

$$\eta_m < \zeta_1. \tag{55}$$

**Теорема 3.** *Пусть имеется упорядоченность (55) и выполняется одно из следующих условий.*

*1.* $-\infty < \sum_{k=1}^{n} \alpha_k - \sum_{p=1}^{m} \beta_p < 1,\ \varepsilon > 0.$

*2.* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k - \sum_{p=1}^{m} \beta_p \ge 1,\ 0 < \varepsilon \le \tilde{\varepsilon},\ \tilde{\varepsilon} = a\eta_m \left[\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k - \sum_{p=1}^{m} \beta_p\right) - \ln(1-\delta)\right]^{-1},\ 0 < \delta < 1.$

*Тогда классическое решение задачи (50) и разностное решение задачи (51) являются равномерно устойчивыми по параметру* $\varepsilon$. *Если к тому же* $a(x) \in C^1[0, +\infty)$ *и* $f(x) \in C^1[0, +\infty)$, *то решение задачи (51) равномерно по параметру* $\varepsilon$ *сходится к решению задачи (50).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем использовать обозначения $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$, $\beta = \sum_{p=1}^{m} \beta_p$.

1. Пусть выполнено условие 1. Так как $-\infty < \alpha - \beta < 1$, то из формулы (53), учитывая условия (52) и (55) и свойства функции $\omega(x)$, получаем неравенство

$$\ell[\omega] \ge 1 - \omega(\zeta_1)\sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \omega(\zeta_1)\sum_{p=1}^{m} \beta_p \ge 1 - (\alpha - \beta)\omega(\zeta_1),$$

из которого следует справедливость соотношения

$$\ell[\omega] \ge \begin{cases} 1 > 0 \text{ при } -\infty < \alpha - \beta \le 0\ \forall \varepsilon > 0, \\ 1 - (\alpha - \beta) > 0 \text{ при } 0 < \alpha - \beta < 1\ \forall \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Далее в силу формулы (53), условий (52) и (55), а также условия на $h$ имеем

$$0 < i_{\eta_1} < i_{\eta_1} + 1 < \ldots < i_{\eta_m} < i_{\eta_m} + 1 < i_{\zeta_1} < i_{\zeta_1} + 1 < \ldots < i_{\zeta_n} < i_{\zeta_n} + 1 < X. \tag{56}$$

Тогда из формулы (54) с учетом условий (47) и (56) получаем неравенство

$$\ell^h[\omega_i] \ge 1 - \omega_{i_{\zeta_1}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \omega_{i_{\zeta_1}} \sum_{p=1}^{m} \beta_p \ge 1 - (\alpha - \beta)\omega_{i_{\zeta_1}},$$

из которого следует справедливость соотношения

$$\ell^h[\omega_i] \ge \begin{cases} 1 > 0 \text{ при } -\infty < \alpha - \beta \le 0\ \forall \varepsilon > 0, \\ 1 - (\alpha - \beta) > 0 \text{ при } 0 < \alpha - \beta < 1\ \forall \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Применяя леммы 1 и 2 соответственно, получаем равномерные по параметру $\varepsilon$ оценки устойчивости (6) и (16) решений задач (50) и (51) соответственно, а затем, используя теорему 1, устанавливаем равномерную по параметру $\varepsilon$ сходимость разностного решения задачи (51) к классическому решению задачи (50).

2. Пусть выполнено условие 2. С учетом свойств функции $\omega(x)$, ограниченности функции $a(x)$, а также условий (52) и (55) из формулы (53) следует, что

$$\ell[\omega] \ge 1 - (\alpha - \beta)\omega(\eta_m) \ge 1 - (\alpha - \beta)\exp\left(-\frac{a\eta_m}{\varepsilon}\right). \tag{57}$$

Несложно убедиться в том, что для $\alpha - \beta \ge 1$ при $\delta$ таком, что $0 < \delta < 1$, неравенство

$$1 - (\alpha - \beta)\exp\left(-\frac{a\eta_m}{\varepsilon}\right) \ge \delta$$

будет выполнено для всех значений ε, удовлетворяющих требованию $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$, где

$$\varepsilon_1 = a\eta_m \left[ \ln(\alpha - \beta) - \ln(1 - \delta) \right]^{-1},$$

а значит, в силу неравенств (57) для значений параметра $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ будет выполнено и неравенство $\ell[\omega] \ge \delta$. С другой стороны, с учетом условий (47), (52) и (55), ограниченности функции $a(x)$ и формулы (14) из формулы (54) имеем

$$\ell^h[\omega_i] \ge 1 - (\alpha - \beta)\exp\left( -\frac{a i_{\zeta_1} h}{\varepsilon} \right).$$

Отсюда, принимая во внимание условия (55) и (56), а также условие на $h$, получаем неравенство

$$\ell^h[\omega_i] \ge 1 - (\alpha - \beta)\exp\left( -\frac{a\eta_m}{\varepsilon} \right).$$

Несложно убедиться в том, что для $\alpha - \beta \ge 1$ при δ таком, что $0 < \delta < 1$, неравенство

$$1 - (\alpha - \beta)\exp\left( -\frac{a\eta_m}{\varepsilon} \right) \ge \delta$$

будет выполнено для всех значений ε, удовлетворяющих требованию $0 < \varepsilon \le \varepsilon_2$, где

$$\varepsilon_2 = a\eta_m \left[ \ln(\alpha - \beta) - \ln(1 - \delta) \right]^{-1},$$

а значит, при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_2$ будет выполнено и неравенство $\ell^h[\omega_i] \ge \delta$. В итоге из вышеизложенного следует, что для $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}]$, где $\tilde{\varepsilon} = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, т. е. при $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$, будут выполнены оба неравенства $\ell[\omega] \ge \delta$ и $\ell^h[\omega_i] \ge \delta$. Наконец, применяя леммы 1 и 2 соответственно, устанавливаем оценки (6) и (16), означающие равномерную по параметру $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}]$ устойчивость решений задач (50) и (51), а затем, используя теорему 1, устанавливаем равномерную по параметру $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}]$ сходимость разностного решения задачи (51) к классическому решению задачи (50). Теорема 3 доказана.

При отсутствии упорядоченности (55) в задаче (50), т. е. при произвольном расположении носителей нелокальных данных, докажем следующее утверждение.

**Теорема 4.** *Пусть выполняется одно из нижеприведенных условий.*

*1.* $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k < 1,\ \varepsilon > 0.$

*2.* $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \ge 1,\ 0 < \varepsilon \le \tilde{\varepsilon},\ \tilde{\varepsilon} = a\zeta_1 \cdot 2^{-1} \left[ \ln\left( \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \right) - \ln(1 - \delta) \right]^{-1},\ 0 < \delta < 1.$

*Тогда решение задачи (50) и решение задачи (51) являются равномерно устойчивыми по параметру ε, а если к тому же* $a(x) \in C^1[0, +\infty)$ *и* $f(x) \in C^1[0, +\infty)$, *то решение разностной задачи (51) равномерно по параметру ε сходится к решению дифференциальной задачи (50).*

Доказательство. Доказательством будет формальное повторение доказательства теоремы 2. Отличия состоят лишь в том, что $\ell[\omega]$ задается формулой (53), $\ell^h[\omega_i]$ – формулой (54), вместо соотношения (45) имеет место только одно неравенство:

$$\ell[\omega] \ge 1 - \alpha > 0,$$

а вместо соотношения (46) используется неравенство

$$\ell^h[\omega_i] \ge 1 - \alpha > 0,$$

при этом и здесь $0 < \alpha < 1$, $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$. Теорема 4 доказана.

Теперь рассмотрим задачу (50), когда для случая $n = m$ расположение носителей нелокальных данных $\zeta_k$ и $\eta_k$, $k = 1, \ldots, n$, задано чередующимся образом. Для лаконичности формулировки нижеследующего результата введем обозначения

$$\gamma_k = \alpha_k - \beta_k,\ \gamma_k^+ = 2^{-1}\left[ (\alpha_k - \beta_k) + |\alpha_k - \beta_k| \right],\ \gamma_k^- = 2^{-1}\left[ (\alpha_k - \beta_k) - |\alpha_k - \beta_k| \right],$$

$$\gamma^+ = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^+,\ \gamma^- = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^-,\ \gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k.$$

**Теорема 5.** *Пусть* $n = m$, $\eta_k < \zeta_k < \eta_{k+1}$, $k = 1, \ldots, n-1$, $\eta_n < \zeta_n$ *и выполняется одно из следующих условий.*

*1.* $\gamma_k \le 0$ $(\gamma_k \ge 0)$, $k = 1, \ldots, n$, $-\infty < \gamma < 1$, $\varepsilon > 0$.

*2.* $\gamma_k \ge 0$, $k = 1, \ldots, n$, $\gamma \ge 1$, $0 < \varepsilon \le \tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon} = a\eta_1 \cdot 2^{-1}\left[\ln\gamma - \ln(1-\delta)\right]^{-1}$.

*3.* $0 < \gamma^{+} < 1$, $\varepsilon > 0$.

*4.* $\gamma^{+} \ge 1$, $0 < \varepsilon \le \tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon} = a\eta_s \cdot 2^{-1}\left[\ln\gamma^{+} - \ln(1-\delta)\right]^{-1}$, $s = \min\limits_{1 \le k \le n}\left\{k,\ \gamma_k^{+} > 0\right\}$.

*5.* $\gamma_k \le 0$, $k = 1, \ldots, r$, $\gamma_k \ge 0$, $k = r+1, \ldots, n$, $0 < r < n$, $r \in N$, $-\infty < \gamma < 1$, $\varepsilon > 0$.

*6.* $\gamma_k \le 0$, $k \le r$, $\gamma_k \ge 0$, $k > r$, $r < n$, $r \in N$, $\gamma \ge 1$, $0 < \varepsilon \le \tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon} = a\eta_r \cdot 2^{-1}\left[\ln\gamma - \ln(1-\delta)\right]^{-1}$.

*При этом в условиях 2, 4 и 6 значение* $\delta$ *такое, что* $0 < \delta < 1$. *Тогда классическое решение задачи (50) и соответствующее разностное решение задачи (51) являются равномерно устойчивыми по параметру* $\varepsilon$, *а если к тому же* $a(x) \in C^1[0, +\infty)$ *и* $f(x) \in C^1[0, +\infty)$, *то разностное решение задачи (51) равномерно по параметру* $\varepsilon$ *сходится к классическому решению задачи (50).*

Доказательство. Учитывая леммы 1, 2 и теорему 1, достаточно доказать, что при каждом из шести условий теоремы выполняются неравенства $\ell[\omega] \ge \delta$ и $\ell^h[\omega_i] \ge \delta$. Прежде всего с учетом формул (4) и (14), (53) и (54) соответственно получим, что

$$\ell[\omega] \ge 1 - \sum_{k=1}^{n}\gamma_k\,\omega(\eta_k),\ \ell^h[\omega_i] \ge 1 - \sum_{k=1}^{n}\gamma_k\left[\theta\omega_{i_{\eta_k}} + (1-\theta)\omega_{i_{\eta_k}+1}\right]. \tag{58}$$

1. Пусть выполнено условие 1. Тогда из неравенств (58) вытекают соотношения

$$\ell[\omega] \ge \begin{cases} 1 > 0 \text{ при } -\infty < \gamma \le 0\ \forall\varepsilon > 0, \\ 1 - \gamma > 0 \text{ при } 0 \le \gamma < 1\ \forall\varepsilon > 0, \end{cases}$$

$$\ell^h[\omega_i] \ge \begin{cases} 1 > 0 \text{ при } -\infty < \gamma \le 0\ \forall\varepsilon > 0, \\ 1 - \gamma > 0 \text{ при } 0 \le \gamma < 1\ \forall\varepsilon > 0. \end{cases}$$

2. Пусть выполнено условие 2. В этом случае из неравенств (58) следует, что

$$\ell[\omega] \ge 1 - \gamma\exp\left(-\frac{a\eta_1}{2\varepsilon}\right),\ \ell^h[\omega_i] \ge 1 - \gamma\exp\left(-\frac{a\eta_1}{2\varepsilon}\right).$$

Отсюда с учетом того факта, что при $\tilde{\varepsilon} = a\eta_1 \cdot 2^{-1}\left[\ln\gamma - \ln(1-\delta)\right]^{-1}$ для всех значений параметра $0 < \varepsilon \le \tilde{\varepsilon}$ выполняется неравенство

$$1 - \gamma\exp\left(-\frac{a\eta_1}{2\varepsilon}\right) \ge \delta,$$

имеем $\ell[\omega] \ge \delta$ и $\ell^h[\omega_i] \ge \delta$.

3. Пусть выполнено условие 3. Тогда из неравенств (58) при $\varepsilon > 0$ получаем

$$\ell[\omega] \ge 1 - \gamma^{+} > 0,\ \ell^h[\omega_i] \ge 1 - \gamma^{+} > 0.$$

4. Пусть выполнено условие 4. В этом случае из неравенств (58) следует, что

$$\ell[\omega] \ge 1 - \gamma^{+}\exp\left(-\frac{a\eta_s}{2\varepsilon}\right),\ \ell^h[\omega_i] \ge 1 - \gamma^{+}\exp\left(-\frac{a\eta_s}{2\varepsilon}\right),$$

где $s = \min\limits_{1 \le k \le n}\left\{k,\ \gamma_k^{+} > 0\right\}$. Отсюда с учетом того факта, что при $\tilde{\varepsilon} = a\eta_s \cdot 2^{-1}\left[\ln\gamma^{+} - \ln(1-\delta)\right]^{-1}$ для всех значений параметра $0 < \varepsilon \le \tilde{\varepsilon}$ выполняется неравенство

$$1 - \gamma^{+}\exp\left(-\frac{a\eta_s}{2\varepsilon}\right) \ge \delta,$$

получаем $\ell[\omega] \ge \delta$ и $\ell^h[\omega_i] \ge \delta$.

5. Пусть выполнено условие 5. Тогда из неравенств (58) вытекают неравенства

$$\ell[\omega] \ge 1 - \omega(\eta_r)\left[\sum_{k=1}^{r}\gamma_k^{-} + \sum_{k=r+1}^{n}\gamma_k^{+}\right],\ \ell^h[\omega_i] \ge 1 - \omega_{i_{\eta_{r+1}}}\left[\sum_{k=1}^{r}\gamma_k^{-} + \sum_{k=r+1}^{n}\gamma_k^{+}\right],$$

из которых следует, что

$$\ell[\omega] \ge 1 - \gamma > 0,\ \ell^h[\omega_i] \ge 1 - \gamma > 0.$$

6. Пусть выполнено условие 6. В этом случае из неравенств (58) получаем

$$\ell\left[\omega\right] \geq 1-\gamma\omega\left(\eta_r\right) \geq 1-\gamma\exp\left(-\frac{a\eta_r}{\varepsilon}\right),\ \ell^h\left[\omega_i\right] \geq 1-\gamma\omega_{i_{\eta_r+1}} \geq 1-\gamma\exp\left(-\frac{a\eta_r}{\varepsilon}\right).$$

Отсюда с учетом того факта, что при $\tilde{\varepsilon} = a\eta_r \cdot 2^{-1}\left[\ln\gamma - \ln\left(1-\delta\right)\right]^{-1}$ для всех значений параметра $0<\varepsilon\leq\tilde{\varepsilon}$ выполняется неравенство

$$1-\gamma\exp\left(-\frac{a\eta_r}{\varepsilon}\right) > \delta,$$

следует, что $\ell\left[\omega\right]\geq\delta$ и $\ell^h\left[\omega_i\right]\geq\delta$. Теорема 5 доказана.

## Оценка близости решений нелокальных начальных задач

Введем обозначения

$$E_1 = \left\{\varepsilon,\ 0<\varepsilon<\infty\right\} \text{ либо } E_1 = \left\{\varepsilon,\ 0<\varepsilon\leq\varepsilon_1\right\},$$

$$E_2 = \left\{\varepsilon,\ 0<\varepsilon<\infty\right\} \text{ либо } E_2 = \left\{\varepsilon,\ 0<\varepsilon\leq\varepsilon_2\right\}.$$

Далее будем полагать, что формулировка каждой из задач

$$Lu_1\left(x\right) = f\left(x\right),\ x>0,\ \ell_1\left[u_1\right] \equiv u_1\left(0\right) - \sum_{k=1}^{n}\alpha_{1k}u_1\left(\zeta_k\right) = \varphi,\ \varepsilon\in E_1, \tag{59}$$

$$Lu_2\left(x\right) = f\left(x\right),\ x>0,\ \ell_2\left[u_2\right] \equiv u_2\left(0\right) - \sum_{k=1}^{n}\alpha_{2k}u_2\left(\zeta_k\right) = \varphi,\ \varepsilon\in E_2, \tag{60}$$

отвечает всем условиям, требуемым при общей постановке задачи (1). Также будем считать, что все условия, требуемые при постановке разностной задачи (2), выполняются и для разностных интерпретаций задач (59) и (60), формулируемых в следующем виде:

$$L^h u_{1_i}^h = f_i,\ i\geq 0,\ \ell_1^h\left[u_{1_i}\right] \equiv u_{1_0} - \sum_{k=1}^{n}\alpha_{1k}\left[\theta u_{1_{i_{\zeta_k}}} + \left(1-\theta\right)u_{1_{i_{\zeta_k}+1}}\right] = \varphi, \tag{61}$$

$$L^h u_{2_i}^h = f_i,\ i\geq 0,\ \ell_2^h\left[u_{2_i}\right] \equiv u_{2_0} - \sum_{k=1}^{n}\alpha_{2k}\left[\theta u_{2_{i_{\zeta_k}}} + \left(1-\theta\right)u_{2_{i_{\zeta_k}+1}}\right] = \varphi. \tag{62}$$

**Теорема 6.** *Пусть для некоторого* $\delta>0$ *неравенство* $\left|\ell_1\left[\omega\right]\right|\geq\delta$ *выполняется при всех* $\varepsilon\in E_1$*, а неравенство* $\left|\ell_2\left[\omega\right]\right|\geq\delta$ *выполняется при всех* $\varepsilon\in E_2$*. Тогда для решений задач (59) и (60) справедлива оценка*

$$\left|u_1-u_2\right| \leq C\sum_{k=1}^{n}\left|\alpha_{1k}-\alpha_{2k}\right|,\ 0\leq x\leq X, \tag{63}$$

*с константой C, не зависящей от x и параметра* $\varepsilon\in E$*, где* $E=E_1\cap E_2$*. Если к тому же* $a\left(x\right)\in C^1\left[0,+\infty\right)$ *и* $f\left(x\right)\in C^1\left[0,+\infty\right)$*, при этом для* $\varepsilon\in E$ *выполняются неравенства* $\left|\ell_1^h\left[\omega_i\right]\right|\geq\delta$ *и* $\left|\ell_2^h\left[\omega_i\right]\right|\geq\delta$*, то для решений задач (61) и (62) при* $h\to 0$ *справедлива оценка*

$$\left|u_{1_i}-u_{2_i}\right| \leq C\sum_{k=1}^{n}\left|\alpha_{1k}-\alpha_{2k}\right| + C'h,\ 0\leq ih\leq X, \tag{64}$$

*с константами C и C′, не зависящими от i, h и* $\varepsilon$*.*

Доказательство. В силу леммы 1 для решения каждой из задач (59) и (60) выполняется оценка устойчивости (6). Запишем решения задач (59) и (60) в виде

$$u_1\left(x\right) = v\left(x\right) + w_1\left(x\right),\ u_2\left(x\right) = v\left(x\right) + w_2\left(x\right)$$

соответственно. Здесь функции $v\left(x\right)$, $w_1\left(x\right)$, $w_2\left(x\right)$ являются решениями задач

$$Lv\left(x\right) = f\left(x\right),\ x>0,\ v\left(0\right) = 0,$$

$$Lw_1\left(x\right) = 0,\ x>0,\ \ell_1\left[w_1\right] = \varphi - \ell_1\left[v\right],$$

$$Lw_2\left(x\right) = 0,\ x>0,\ \ell_2\left[w_2\right] = \varphi - \ell_2\left[v\right],$$

соответственно. С учетом формул (4) и (12) имеем

$$\max_{0 \le x \le X} \left| u_1(x) - u_2(x) \right| \le \left| w_1(0) - w_2(0) \right|.$$

Учитывая формулу (11), получаем

$$w_1(0) - w_2(0) = \frac{\left(\ell_2[\omega] - \ell_1[\omega]\right)\varphi + \ell_2[v]\,\ell_1[\omega] - \ell_1[v]\,\ell_2[\omega]}{\ell_1[\omega]\,\ell_2[\omega]}.$$

В числителе последней дроби

$$\left(\ell_2[\omega] - \ell_1[\omega]\right)\varphi = \varphi \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_{1k} - \alpha_{2k}\right)\omega\left(\zeta_k\right),$$

$$\ell_2[v]\,\ell_1[\omega] - \ell_1[v]\,\ell_2[\omega] = \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_{2k} v\left(\zeta_k\right)\right]\left[1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k}\omega\left(\zeta_k\right)\right] - \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k} v\left(\zeta_k\right)\right]\left[1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{2k}\omega\left(\zeta_k\right)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_{2k} - \alpha_{1k}\right) v\left(\zeta_k\right) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k} v\left(\zeta_k\right) \sum_{l=1}^{n} \alpha_{2l}\omega\left(\zeta_l\right) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{2k} v\left(\zeta_k\right) \sum_{l=1}^{n} \alpha_{1l}\omega\left(\zeta_l\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_{2k} - \alpha_{1k}\right) v\left(\zeta_k\right) + \sum_{\substack{1 \le k \le n, \\ 1 \le l \le n}}^{k \ne l} \left(\alpha_{1k}\alpha_{2l} - \alpha_{2k}\alpha_{1l}\right) v\left(\zeta_k\right)\omega\left(\zeta_l\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_{2k} - \alpha_{1k}\right) v\left(\zeta_k\right) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \le k \le n, \\ 1 \le l \le n}}^{k \ne l} \left[\left(\alpha_{1k} - \alpha_{2k}\right)\left(\alpha_{1l} + \alpha_{2l}\right) - \left(\alpha_{1l} - \alpha_{2l}\right)\left(\alpha_{1k} + \alpha_{2k}\right)\right] v\left(\zeta_k\right)\omega\left(\zeta_l\right).$$

С учетом этого

$$\max_{0 \le x \le X} \left| u_1(x) - u_2(x) \right| \le \left| w_1(0) - w_2(0) \right| \le$$

$$\le \delta^{-2} \left\{ |\varphi| + a^{-1} \max_{0 \le x \le X} \left| f(x) \right| \left[ 1 + (n-1) \max_{1 \le k \le n} \left( \left|\alpha_{1k}\right| + \left|\alpha_{2k}\right| \right) \right] \right\} \sum_{k=1}^{n} \left| \alpha_{1k} - \alpha_{2k} \right|,$$

что завершает доказательство оценки (63). Для доказательства второго утверждения теоремы воспользуемся равенством

$$u_{1_i} - u_{2_i} = u_{1_i} - u_1(ih) + u_2(ih) - u_{2_i} + u_1(ih) - u_2(ih),$$

из которого в силу неравенства треугольника следует, что

$$\left| u_{1_i} - u_{2_i} \right| \le \left| u_{1_i} - u_1(ih) \right| + \left| u_{2_i} - u_2(ih) \right| + \left| u_1(ih) - u_2(ih) \right|.$$

Применяя к правой части последнего неравенства теорему 1, а также уже полученную оценку (63), завершаем доказательство оценки (64). Теорема 6 доказана.

Отметим, что в доказанной теореме 6 отсутствуют какие-либо требования на знаки коэффициентов в нелокальных начальных условиях задач (59) и (60).

## Примеры и комментарии

В настоящей работе имеется ссылка на статью [12, p. 86–87] (перед определением критического значения), указывающая на эффект появления критического значения параметра при определенных значениях коэффициентов в нелокальном начальном условии. Именно этот эффект и влияет на формулировки условий теоремы 2, а также теорем 3 и 4. Примеры задач вида (1), имеющих критическое значение, приведены в работе [12, p. 91, 97]. Ограничение сверху на вариацию ε, например, в условии 2 теоремы 2 связано именно с требованием $\varepsilon \ne \varepsilon^*$, где $\varepsilon^*$ – обозначение критического значения. В дополнение к примерам работы [12] проследим эффект появления критического значения на примере разностной трактовки нелокальной начальной задачи

$$\varepsilon u'(x) + u(x) = 0,\ x > 0,\ u(0) = \alpha u(\zeta) + 1,\ 0 < \zeta < X,\ \alpha \ne 0,$$

имеющей решение $u(x) = \left(\ell[\omega]\right)^{-1} \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$ при $\ell[\omega] \ne 0$, $\ell[\omega] = 1 - \alpha \exp\left(-\frac{\zeta}{\varepsilon}\right)$. Видно, что если $-\infty < \alpha < 1$ (условие 1 теоремы 2), то $\ell[\omega] > 1$ для любого ε > 0, а если α > 1 (условие 2 теоремы 2), то появляется критическое значение $\varepsilon^* = \dfrac{\zeta}{\ln\alpha}$, в окрестности которого $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon^* - 0} u(x) = +\infty$, т. е. при $\varepsilon \to \varepsilon^* - 0$ поведение решения не будет равномерно устойчивым по параметру ε. По этой причине уже отсюда напрашивается вывод о том, что разностная схема будет применима для значений параметра $0 < \varepsilon \le \tilde{\varepsilon}$, где $\tilde{\varepsilon}$ такое, что $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon^*$. В свою очередь, непосредственно соответствующая примеру разностная схема

$$\varepsilon\sigma(\rho) D_+ u_i + u_i = 0,\ u_0 - \alpha u_{i_\zeta} = 1,\ \sigma(\rho) = \rho\left[1 - \exp(-\rho)\right]^{-1},\ h = \frac{X}{n},$$

$$h < 2^{-1}\min\{\zeta,\ X - \zeta\},\ i_\zeta \in N,\ i_\zeta h \le \zeta < \left(i_\zeta + 1\right)h$$

имеет решение $u_i = \left(\ell^h[\omega_i]\right)^{-1}\exp(-i\rho)$ при $\ell^h[\omega_i] \ne 0$, $\ell^h[\omega_i] = 1 - \alpha\exp\left(-i_\zeta\rho\right)$. Видно, что если $-\infty < \alpha < 1$ (условие 1 теоремы 2), то $\ell^h[\omega_i] > 1$ при любом $\varepsilon > 0$, а если $\alpha > 1$ (условие 2 теоремы 2), то требование $\ell^h[\omega_i] \ne 0$ равносильно неравенству $\varepsilon \ne \dfrac{i_\zeta h}{\ln\alpha}$. Введя обозначение $\varepsilon_h^* = \dfrac{i_\zeta h}{\ln\alpha}$, заметим, что $\varepsilon_h^* \to \varepsilon^*$ при $h \to 0$. Далее убедимся в том, что использование разностных схем Эйлера не обеспечило бы равномерной по параметру аппроксимации. Убеждаемся, что аппроксимация явной схемой

$$\varepsilon D_+ u_i + u_i = 0,\ u_0 - \alpha u_{i_\zeta} = 1$$

определяет разностное решение $u_i = \left[1 - \alpha(1-\rho)^{i_\zeta}\right]^{-1}(1-\rho)^i$, которое при $\rho = 1$ не сходится к решению $u(x)$ равномерно по параметру ε, так как $\lim\limits_{h\to 0}\left|u(h) - u_1\right| = \exp(-1)$ противостоит тому, что $\left|u(0) - u_0\right| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. К тому же при значениях $\rho > 1$ приближенное решение $u_i$ еще и осциллирует в отличие от решения $u(x)$ (здесь подразумевается, что и точное, и разностное решения существуют). Наконец, отметим, что неявная схема

$$\varepsilon D_+ u_i + u_{i+1} = 0,\ u_0 - \alpha u_{i_\zeta} = 1$$

имеет решение, определяемое формулой $u_i = \left[1 - \alpha(1+\rho)^{-i_\zeta}\right]^{-1}(1+\rho)^{-i}$, которое тоже не сходится к решению $u(x)$ равномерно по параметру ε при значении $\rho = 1$, поскольку $\left|u(0) - u_0\right| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, в то время как $\lim\limits_{h\to 0}\left|u(h) - u_1\right| = \dfrac{1}{2} - \exp(-1)$.

## Заключение

Таким образом, в настоящей работе сформулированы требования на расположение носителей в нелокальном начальном условии, на значения коэффициентов при этих носителях, а также на интервал изменения параметра, при совокупности которых доказаны равномерная по параметру устойчивость классического решения сформулированной нелокальной начальной задачи, равномерная по параметру дискретная устойчивость решения соответствующей экспоненциально-подгоночной разностной схемы, а также равномерная по параметру сходимость решения предложенной разностной схемы к классическому решению дифференциальной задачи. В первую очередь были установлены результаты общего характера, касающиеся равномерной по параметру устойчивости классического решения нелокальной начальной задачи (1) (лемма 1), равномерной по параметру дискретной устойчивости решения разностной схемы (2) (лемма 2). На основании лемм 1 и 2 доказана общая теорема 1 о равномерной по параметру сходимости разностного решения задачи (2) к классическому решению задачи (1). С учетом этих результатов для нелокальных начальных задач с оригинально задаваемыми требованиями на входные данные нелокального начального условия и на интервал вариации параметра доказаны теоремы 2–5, касающиеся вопросов равномерной по параметру устойчивости решения дифференциальной и разностной задач, а также равномерной по параметру сходимости решения разностной задачи к классическому решению дифференциальной задачи. Завершает статью теорема 6, устанавливающая равномерную по параметру оценку близости классических решений двух разных нелокальных начальных задач, различающихся коэффициентами в нелокальных начальных условиях, равномерную по параметру дискретную оценку близости решений двух разностных схем, соответствующих двум разным нелокальным начальным задачам.

Подводя итог, заключаем, что нелокальная начальная задача, рассмотренная в дифференциальной и разностной трактовках, детально исследована, доказаны условия равномерной по параметру устойчивости и сходимости на равношаговой сетке.

## Библиографические ссылки

1. Ильин ВА, Моисеев ЕИ. Нелокальная краевая задача первого рода для оператора Штурма – Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках. *Дифференциальные уравнения.* 1987;23(7):1198–1207.
2. Ильин ВА, Моисеев ЕИ. Нелокальная краевая задача второго рода для оператора Штурма – Лиувилля. *Дифференциальные уравнения.* 1987;23(8):1422–1431.
3. Ильин ВА, Моисеев ЕИ. Априорная оценка решения задачи, сопряженной к нелокальной краевой задаче первого рода. *Дифференциальные уравнения.* 1988;24(5):795–804.
4. Ciegis R. Numerical solution of a problem with small parameter for the highest derivative and a nonlocal condition. *Lithuanian Mathematical Journal.* 1988;28(1):90–96. DOI: 10.1007/BF00972255.
5. Довлетов ДМ. О нелокальной краевой задаче первого рода в дифференциальной и разностной трактовках. *Дифференциальные уравнения.* 1989;25(8):1297–1307.
6. Dovletov DM. Nonlocal boundary value problem in terms of flow for Sturm – Liouville operator in differential and difference statements. *e-Journal of Analysis and Applied Mathematics.* 2018;2018:37–55. DOI: 10.2478/ejaam-2018-0004.
7. Ažić N. Spectral approximation and nonlocal boundary value problems. *Novi Sad Journal of Mathematics.* 2000;30(3):1–10.
8. Amiraliyev GM, Cakir M. Numerical solution of the singularly perturbed problem with nonlocal boundary condition. *Applied Mathematics and Mechanics.* 2002;23(7):755–764. DOI: 10.1007/BF02456971.
9. Cakir M, Amiraliyev GM. A finite difference method for the singularly perturbed problem with nonlocal boundary condition. *Applied Mathematics and Computation.* 2005;160(2):539–549. DOI: 10.1016/j.amc.2003.11.035.
10. Arslan D, Cakir M. A numerical solution study on singularly perturbed convection-diffusion nonlocal boundary problem. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara. Series A1, Mathematics and Statistics.* 2019;68(2):1482–1491. DOI: 10.31801/cfsuasmas.540631.
11. Dovletov DM. A uniformly stable solvability of NLBVP for parameterized ODE. *Proceedings of International Mathematical Sciences.* 2021;3(2):50–69. DOI: 10.47086/pims.975424.
12. Dovletov DM. On a multipoint nonlocal initial value problem for a singularly-perturbed first-order ODE. *e-Journal of Analysis and Applied Mathematics.* 2019;2019:84–103. DOI: 10.2478/ejaam-2019-0006.
13. Дулан Э, Миллер Дж, Шилдерс У. *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем.* Демидова ГВ, переводчик; Яненко НН, редактор. Москва: Мир; 1983. 200 с.
14. Ильин ВА, Моисеев ЕИ. Двумерная нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в дифференциальной и разностной трактовках. *Математическое моделирование.* 1990;2(8):139–156.
15. Dovletov DM. New solvability condition of 2-d nonlocal boundary value problem for Poisson's operator on rectangle. *e-Journal of Analysis and Applied Mathematics.* 2021;2021:12–28. DOI: 10.2478/ejaam-2021-0002.

*Получена 06.11.2024 / исправлена 26.06.2025 / принята 26.06.2025.*
*Received 06.11.2024 / revised 26.06.2025 / accepted 26.06.2025.*