ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

DISCRETE MATHEMATICS
AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

УДК 519.157.2

УСЛОВИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ВЫБОРА. ЧАСТЬ 2

В. М. ДЕМИДЕНКО[1)]

[1)]*Белорусский государственный экономический университет, пр. Партизанский, 26, 220070, г. Минск, Беларусь*

Аннотация. В современной терминологии условия классической теоремы Харди, Литлвуда и Полиа о перестановке трех систем гарантируют строгую разрешимость задачи оптимизации билинейной формы с симметрической матрицей Тёплица специального вида. Билинейная форма с указанной матрицей принимает экстремальные значения на подстановках двух видов в зависимости от того, одинаковые или противоположные упорядочения имеют компоненты двух векторов, определяющих значения переменных. В предыдущей части статьи были описаны условия достижения минимума функционала квадратичной задачи выбора на первой из заданных подстановок, обобщающие ряд результатов аналогичного плана для задачи минимизации квадратичной формы и квадратичной задачи о назначениях. В этой части работы рассматриваются условия, накладывание которых на элементы четырехиндексной матрицы гарантирует достижение минимума функционала квадратичной задачи выбора на второй подстановке, приведенной в теореме о перестановке трех систем. Результаты, представленные в двух частях статьи, на сегодняшний день описывают наиболее широкие классы четырехиндексных матриц, для которых функционал квадратичной задачи выбора принимает экстремальные значения на фиксированных подстановках.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация; квадратичная задача о назначениях; оптимизация на подстановках; эффективно разрешимые случаи.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.5.01).

Образец цитирования:
Демиденко ВМ. Условия эффективной разрешимости квадратичной задачи выбора. Часть 2. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;2:75–88.
EDN: EWYKDZ

For citation:
Demidenko VM. Conditions for the effective solvability of the quadratic choice problem. Part 2. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;2:75–88. Russian.
EDN: EWYKDZ

Автор:
Виталий Михайлович Демиденко – доктор физико-математических наук, доцент; профессор кафедры высшей математики факультета цифровой экономики.

Author:
Vitaliy M. Demidenko, doctor of science (physics and mathematics), docent; professor at the department of higher mathematics, faculty of digital economics.
vmdemidenko@yandex.ru

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2025;2:75–88
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2025;2:75–88

CONDITIONS FOR THE EFFECTIVE SOLVABILITY OF THE QUADRATIC CHOICE PROBLEM. PART 2

V. M. DEMIDENKO[a]

[a]*Belarus State Economic University, 26 Partyzanski Avenue, Minsk 220070, Belarus*

Abstract. In modern terminology, the conditions of the classical Hardy, Littlewood and Pólya theorem on the permutation of three systems guarantee the strict solvability of the optimisation problem for a bilinear form with a symmetric Toeplitz matrix of a special type. The bilinear form with the specified matrix takes extreme values on substitutions of two types, depending on whether the components of two vectors have the same or opposite orderings. Here the vectors determine the values of the variables of the bilinear form. The previous part of the article describes the conditions for achieving the minimum of the functional of the quadratic choice problem on the first of these substitutions. These conditions generalise all previously obtained results of a similar plan for the quadratic form minimisation problem and the quadratic assignment problem. This section of the paper considers conditions, imposing of which on the elements of a four-index matrix, guarantee the achievement of the minimum of the quadratic choice problem functional on the second substitution given in the three-system permutation theorem. The results presented in the two sections of the article describe by far the widest classes of four-index matrices for which the quadratic choice problem functional takes extreme values on fixed substitutions.

Keywords: combinatorial optimisation; quadratic assignment problem; substitutions optimisation; strict solvability of problems.

Acknowledgements. The work was carried out within the framework of the state programme of scientific research «Convergence-2025» (subprogramme «Mathematical models and methods», assignment 1.5.01).

Введение

Одним из направлений в исследовании квадратичной задачи о назначениях [1] является выделение условий, сужающих множество допустимых решений до одной или нескольких подстановок. Известными зарубежными математиками Г. Харди, Дж. Литлвудом и Г. Полиа в 1926 г. были получены условия [2], которые в современной терминологии гарантируют строгую разрешимость задачи максимизации билинейной формы с матрицей Тёплица специального вида на декартовом квадрате симметрической группы подстановок. Позже этот результат был сформулирован в виде теоремы о перестановке трех систем в монографии [3], переведенной в 1948 г. на русский язык [4]. Из этой теоремы непосредственно следует строгая разрешимость частного случая квадратичной задачи о назначениях, а именно достижение экстремумов билинейной формы на паре подстановок специального вида. Если упорядочение компонент одного из векторов переменных билинейной формы по невозрастанию влечет упорядочение компонент другого вектора переменных по неубыванию, то при перенумерации их компонент в соответствии с упорядочением из теоремы о перестановке трех систем следует, что минимум билинейной формы достигается на паре подстановок вида

$$\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \dots, 6, 4, 2 \rangle, \ \sigma_1 = \langle 2, 4, 6, \dots, 5, 3, 1 \rangle.$$

В первой части статьи [5] приведены наиболее общие условия достижения минимального значения функционала квадратичной задачи выбора (в терминологии зарубежных исследователей биквадратичной задачи о назначениях) на подстановке $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \dots, 6, 4, 2 \rangle$, которые обобщают все результаты аналогичного плана, полученные в 1969–1998 гг. [6–11] и начале XXI в. [12; 13], включая условия строгой разрешимости квадратичной задачи о назначениях с матрицами, выходящими за рамки класса матриц Тёплица [14–16]. Результаты исследования квадратичной задачи о назначениях и ее обобщения – биквадратичной задачи о назначениях – изложены в книгах [17; 18].

В этой части статьи рассматриваются условия строгой разрешимости квадратичной задачи выбора на подстановке $\sigma_1 = \langle 2, 4, 6, \dots, 5, 3, 1 \rangle$ из теоремы Харди, Литлвуда и Полиа о перестановке трех систем, которые расширяют условия указанной теоремы на случай минимизации функционала, определяемого произвольной четырехиндексной матрицей $A = \left(a_{i,\,j,\,k,\,\ell}\right)$. Предложенные условия обобщают аналогичные результаты, полученные для частного случая рассматриваемой задачи, а именно минимизации билинейной формы с матрицей Тёплица специального вида на симметрической группе подстановок.

Предварительные сведения и обозначения

В данной работе используются те же обозначения, что и ранее. В связи с этим напомним, что симметрическая группа, действующая на множестве $N_{1,\,n} = \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$, обозначается через S_n. Любая подстановка $\sigma \in S_n$ является взаимно однозначным (биективным) отображением $\sigma : N_{1,\,n} \to N_{1,\,n}$, переводящим элемент $i \in N_{1,\,n}$ в $\sigma(i) \in N_{1,\,n}$. При этом $\sigma(i)$ называется образом элемента i, а элемент i – прообразом $\sigma(i)$. Подстановка, как и ранее, задается строкой образов $\sigma = \langle \sigma(1),\, \sigma(2),\, \ldots,\, \sigma(i),\, \ldots,\, \sigma(n) \rangle$ всех элементов множества $N_{1,\,n}$. Для любых элементов $i < j$ множества $N_{1,\,n}$ подмножество $\{i,\, i+1,\, \ldots,\, j-1,\, j\}$ обозначается через $N_{i,\,j}$. Произведение упорядоченной пары подстановок σ, ρ – это подстановка $\sigma \circ \rho$ такая, что $\sigma(\rho(i))$, $i \in N_{1,\,n}$, где символом $\circ$ обозначена операция умножения подстановок.

Напомним, что квадратичная задача выбора состоит в нахождении подстановки $\sigma_1 \in S_n$, минимизирующей определенный на S_n функционал

$$f_A(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,\, j,\, \sigma(i),\, \sigma(j)},$$

где $A = \left(a_{i,\, j,\, k,\, \ell}\right)$ – произвольная вещественная четырехиндексная матрица размера $n \times n \times n \times n$.

Выделим в множестве $N_{1,\,n}$ восемь подмножеств, порождаемых любой подстановкой $\sigma \in S_n$:

$$\begin{gathered} J_{1,1}^{\sigma} = \left\{ i \in \mathbb{N}_{1,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \,\middle|\, \sigma(i) < \sigma(n+1-i) \right\},\ J_{1,2}^{\sigma} = \left\{ n+1-i \in \mathbb{N}_{1,\,n} \,\middle|\, i \in J_{1,1}^{\sigma} \right\}, \\ J_{1,3}^{\sigma} = \mathbb{N}_{1,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \backslash J_{1,1}^{\sigma},\ J_{1,4}^{\sigma} = \left\{ n+1-i \in \mathbb{N}_{1,\,n} \,\middle|\, i \in J_{1,3}^{\sigma} \right\}, \end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} J_{0,1}^{\sigma} = \left\{ j \in N_{1,\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \,\middle|\, \sigma(j) > \sigma(n-j) \right\},\ J_{0,2}^{\sigma} = \left\{ n-j \in N_{1,\,n} \,\middle|\, j \in J_{0,1}^{\sigma} \right\}, \\ J_{0,3}^{\sigma} = N_{1,\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \backslash J_{0,1}^{\sigma},\ J_{0,4}^{\sigma} = \left\{ n-j \in N_{1,\,n} \,\middle|\, j \in J_{0,3}^{\sigma} \right\}. \end{gathered} \tag{2}$$

Определим две подстановки, порождаемые подмножествами $J_{1,1}^{\sigma}$ и $J_{0,1}^{\sigma}$:

$$\zeta_\sigma = \prod_{i \in J_{1,1}^{\sigma}} (i,\, n+1-i),\ \xi_\sigma = \prod_{j \in J_{0,1}^{\sigma}} (j,\, n-j). \tag{3}$$

Связанные с подстановкой $\sigma \in S_n$ произведения независимых транспозиций вида (3) определяют две подстановки: $\sigma_\zeta = \sigma \circ \zeta_\sigma$ и $\sigma_\xi = \sigma \circ \xi_\sigma$. В случае если подмножество $J_{1,1}^{\sigma}$ или подмножество $J_{0,1}^{\sigma}$ является пустым, подстановка ζ_σ либо подстановка ξ_σ полагается равной тождественной подстановке.

При описании свойств введенных подмножеств (1) и (2) используется понятие разбиения конечного множества. В связи с этим напомним, что семейство подмножеств некоторого конечного множества образует его разбиение, если подмножества данного семейства попарно не пересекаются и их объединение совпадает со всем множеством.

Из определения подмножеств вида (1), (2) и подстановок вида (3) непосредственно вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Для любой подстановки $\sigma \in S_n$, порождаемых ею подмножеств вида (1), (2) и подстановок вида (3) справедливы следующие утверждения:*

1) семейство подмножеств $J_{1,1}^{\sigma}$, $J_{1,2}^{\sigma}$, $J_{1,3}^{\sigma}$, $J_{1,4}^{\sigma} \subset N_{1,\,n}$ является разбиением множества $N_{1,\,n}$ при четном n и множества $N_{1,\,n} \backslash \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ при нечетном n;

2) семейство подмножеств $J_{0,1}^{\sigma}$, $J_{0,2}^{\sigma}$, $J_{0,3}^{\sigma}$, $J_{0,4}^{\sigma} \subset N_{1,\,n}$ является разбиением множества $N_{1,\,n-1}$ при нечетном n и множества $N_{1,\,n-1} \backslash \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ при четном n;

3) для подстановки $\sigma \circ \zeta_\sigma = \sigma_\zeta$ выполняются равенства

$$\sigma_\zeta(i)=\sigma(n-i),\ \sigma_\zeta(n-i)=\sigma(i)\ \textit{для всех}\ i\in J_{1,1}^{\sigma},$$
$$\sigma_\zeta(j)=\sigma(j),\ \sigma_\zeta(n-j)=\sigma(n-j)\ \textit{для всех}\ j\in J_{1,3}^{\sigma}; \qquad (4)$$

4) для подстановки $\sigma\circ\xi_\sigma=\sigma_\xi$ *выполняются равенства*

$$\sigma_\xi(i)=\sigma(n-i),\ \sigma_\xi(n-i)=\sigma(i)\ \textit{для всех}\ i\in J_{0,1}^{\sigma},\ n-i\in J_{0,2}^{\sigma},$$
$$\sigma_\xi(j)=\sigma(j),\ \sigma_\zeta(n-j)=\sigma(n-j)\ \textit{для всех}\ j\in J_{0,3}^{\sigma},\ n-j\in J_{0,4}^{\sigma}. \qquad (5)$$

Из приведенных в лемме 1 свойств подмножеств $J_{1,1}^{\sigma}$, $J_{0,1}^{\sigma}$ и подстановок ζ_σ, ξ_σ непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 2. *Для любой подстановки* $\sigma\in S_n$ *существует последовательность подстановок*

$$\sigma=\eta_0,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_i,\ \eta_{i+1},\ \ldots,\ \eta_m=\sigma' \qquad (6)$$

такая, что $\sigma'=\sigma_1$, $\eta_i=\eta_{i-1}\circ\zeta_{\eta_{i-1}}$ *либо* $\eta_i=\eta_{i-1}\circ\xi_{\eta_{i-1}}$, *где* $\zeta_{\eta_{i-1}}$ *и* $\xi_{\eta_{i-1}}$, $i=0,1,\ldots,m-1$, *– связанные с подстановкой* η_{i-1} *подстановки вида (3).*

Доказательство. Убедимся в том, что для любой подстановки $\sigma\in S_n$ существует последовательность подстановок вида (6) такая, что для каждого $1\le\ell\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$

$$\sigma'=\langle 2,4,6,\ldots,2\ell-2,2\ell,\sigma(\ell+1),\ldots,n,\ldots,\sigma(n-\ell),2\ell-1,2\ell-3,\ldots,5,3,1\rangle.$$

Из справедливости приведенного утверждения очевидно следует справедливость леммы 2, так как при $\ell=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ подстановка σ' совпадает с подстановкой σ_1.

Пусть для определенности n является нечетным. Тогда $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor=\frac{n-1}{2}$, $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil=\frac{n+1}{2}$. Докажем существование последовательности подстановок вида (6) при $\ell=1$ для подстановки σ такой, что $\sigma(n)\ne1$ и $\sigma(1)\ne2$. Возможны два случая: в записи подстановки σ единица стоит правее $\sigma\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$ либо левее $\sigma\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right)$.

В первом случае $\sigma(\ell)=1$, где $\ell=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1,\ldots,n-1$, так как при $\ell=n$ имеем $\sigma(n)=1$. Полагая, что $\ell=n-k$, получаем $\sigma(n-k)=1$, где $1\le k\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ и $\sigma(n-k)<\sigma(k)\ne1$. Следовательно, $k\in J_{0,1}^{\sigma}$, транспозиция $(k,n-k)$ входит в запись подстановки ξ_σ и в силу равенств (5) для подстановки $\eta_1=\sigma\circ\xi_\sigma$ справедливы соотношения $\eta_1(k)=\sigma\circ\xi_\sigma(k)=\sigma(n-k)=1$. Так как $\eta_1(k)<(n+1-k)$, то $k\in J_{1,1}^{\sigma}$, транспозиция $(k,n+1-k)$ входит в запись подстановки ζ_{η_1} и в силу равенств (4) для подстановки $\eta_2=\eta_1\circ\zeta_{\eta_1}$ имеют место соотношения

$$\eta_2(n+1-k)=\eta_1\circ\zeta_{\eta_1}(n+1-k)=\eta_1(k)=1.$$

Таким образом, в записи подстановки η_2 единица сдвинута вправо на одну позицию, т. е. имеем последовательность подстановок $\sigma=\eta_0,\eta_1,\eta_2=\sigma'$ вида (6), в которой $\sigma'(n)=1$.

Если $2\le k\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$, то, продолжив по аналогии построение подстановок η_{2j-1}, η_{2j}, где $\eta_{2j-1}=\eta_{2j-2}\circ\xi_{\eta_{2j-2}}$, а $\eta_{2j}=\eta_{2j-1}\circ\zeta_{\eta_{2j-1}}$, $j=2,3,\ldots,k$, получим последовательность подстановок, в которой для последней подстановки $\eta_{2k}=\sigma'$ будут выполняться равенства $\eta_{2k}(n)=\sigma'(n)=1$. Таким образом, в первом случае для любой подстановки σ существует последовательность подстановок вида (6), в которой для последней подстановки σ' выполняется равенство $\sigma'(n)=1$.

Во втором случае $\sigma(k)=1$, где $1\le k\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$. Следовательно, $\sigma(k)<\sigma(n+1-k)\ne1$, $k\in J_{1,1}^{\sigma}$, транспозиция $(k,n+1-k)$ входит в запись подстановки ζ_σ и в силу равенств (4) для подстановки $\eta_1=\sigma\circ\zeta_\sigma$ справедливы соотношения

$$\eta_1(n+1-k) = \sigma \circ \zeta_\sigma(n+1-k) = \sigma(k) = 1.$$

Таким образом, при $k=1$ для подстановки $\sigma' = \eta_1$ выполняются равенства $\sigma'(n) = \eta_1(n) = 1$. При $2 \le k \le \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ для подстановки η_1 имеет место первый случай, поскольку $\eta_1(n+1-k) = \eta_1(n-(k-1)) = 1$, где $2 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$.

Покажем, что для любой подстановки σ такой, что $\sigma(n) = 1$, существует последовательность подстановок вида (6), в которой $\sigma'(1) = 2$. Возможны два случая: в записи подстановки σ двойка стоит слева от $\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ либо справа от $\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$. В первом случае $\sigma(k) = 2$ при $2 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, так как $\sigma(1) = 2$ при $k = 1$. Для указанных k выполняется неравенство $\sigma(k) < \sigma(n+1-k) \ne 1, 2$, следовательно, $k \in J_{1,1}^{\sigma}$, транспозиция $(k,\ n+1-k)$ входит в запись подстановки ζ_σ и в силу равенств (4) для подстановки $\eta_1 = \sigma \circ \zeta_\sigma$ справедливы соотношения $\eta_1(n+1-k) = \sigma \circ \zeta_\sigma(n+1-k) = \sigma(k) = 2$.

Так как $\eta_1(n+1-k) = \eta_1(n-(k-1)) < \eta_1(k-1)$, то $k-1 \in J_{0,1}^{\sigma}$, транспозиция $(k,\ n-(k-1))$ входит в запись подстановки $\eta_1 = \xi_{\eta_1}$ и в силу равенств (5) для подстановки $\eta_2 = \eta_1 \circ \xi_{\eta_1}$ имеют место соотношения

$$\eta_2(k-1) = \eta_1 \circ \xi_{\eta_1}(k-1) = \eta_1(n-(k-1)) = 2. \tag{7}$$

Из соотношений (7) следует, что в записи подстановки η_2 двойка сместилась влево на одну позицию. При этом если $k = 2$, то имеем последовательность подстановок $\sigma = \eta_0,\ \eta_1,\ \eta_2 = \sigma'$ вида (6), в которой для последней подстановки σ' выполняются равенства $\sigma'(1) = 2,\ \sigma'(n) = 1$. Если $3 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, то по аналогии строится последовательность подстановок

$$\sigma = \eta_0,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_{2j-2},\ \eta_{2j-1},\ \eta_{2j},\ \ldots,\ \eta_{2k-1},\ \eta_{2k} = \sigma'$$

такая, что $\eta_{2j} = \eta_{2j-1} \circ \xi_{\eta_{2j-1}}$, $\eta_{2j-1} = \eta_{2j-2} \circ \zeta_{\eta_{2j-2}}$, при этом для подстановки σ' выполняются равенства $\sigma'(1) = 2,\ \sigma'(n) = 1$.

Пусть имеет место второй случай, т. е. в записи подстановки σ двойка располагается правее $\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$. Тогда $\sigma(\ell) = 2$, где $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \le \ell \le n-1$. Полагая, что $\ell = n - k$, преобразуем приведенные соотношения к равносильному соотношению $\sigma(n-k) = 2$, где $1 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Так как $\sigma(k) \ne 1$, то $\sigma(n-k) < \sigma(k) \ne 2$, следовательно, $k \in J_{0,1}^{\sigma}$, транспозиция $(k,\ n-k)$ входит в запись подстановки ξ_σ и в силу равенств (5) для подстановки $\eta_1 = \sigma \circ \xi_\sigma$ должны выполняться равенства $\eta_1(k) = \sigma \circ \xi_\sigma(k) = \sigma(n-k) = 2$.

Очевидно, что в записи подстановки η_1 двойка стоит слева от $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$, т. е. для подстановки η_1 имеет место первый случай. Таким образом, для любой подстановки σ доказано существование последовательности подстановок вида (6) такой, что для последней подстановки σ' справедливы равенства $\sigma'(1) = 2$, $\sigma'(n) = 1$.

Для окончательного доказательства леммы 2 достаточно убедиться в том, что для любой подстановки

$$\sigma = \Big\langle 2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2\ell-2,\ 2\ell,\ \sigma(\ell+1),\ \ldots,\ \sigma(\ell+i),\ \ldots,\ \sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right),\ \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right),\ \ldots,$$
$$\sigma(n-\ell-i),\ \ldots,\ \sigma(n-\ell),\ 2\ell-1,\ 2\ell-3,\ \ldots,\ 5,\ 3,\ 1\Big\rangle \tag{8}$$

такой, что $\sigma(\ell+1) \ne 2\ell+2$, $\sigma(n-\ell) \ne 2\ell+1$, где $2 \le \ell \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$, существует последовательность подстановок вида (6), для последней подстановки σ' которой выполняются равенства $\sigma'(\ell+1) = 2\ell+2$, $\sigma'(n-\ell) = 2\ell+1$.

Пусть в записи подстановки σ элемент $2\ell+1$ расположен между $\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ и $\sigma(n-\ell)$, т. е. $2\ell+1 = \sigma(n-\ell-i)$, где $1 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \ell$. Так как $2k+1 = \sigma(n-(\ell+i)) < \sigma(\ell+i)$, то $\ell+i \in J_{0,1}^{\sigma}$, транспозиция $(\ell+i,\, n-(\ell+i))$ входит в запись подстановки ξ_σ и в силу равенств (5) для подстановки $\eta_1 = \sigma \circ \xi_\sigma$ справедливы соотношения

$$\eta_1(\ell+i) = \sigma \circ \xi_\sigma(\ell+i) = \sigma(n-(\ell+i)) = 2k+1.$$

Так как $\eta_1(\ell+i) < \eta_1(n+1-(\ell+i))$, то $\ell+i \in J_{1,1}^{\eta_1}$, транспозиция $(\ell+i,\, n+1-(\ell+i))$ входит в запись подстановки ξ_{η_1} и в силу равенств (4) для подстановки $\eta_2 = \eta_1 \circ \zeta_{\eta_1}$ имеют место соотношения

$$\eta_2(n+1-(\ell+i)) = \eta_1 \circ \zeta_{\eta_1}(n+1-(\ell+i)) = \eta_1(\ell+i) = 2k+1.$$

Таким образом, в записи подстановки η_2 элемент $2k+1$ смещается вправо на одну позицию. Построив аналогичным образом $i-1$ пар подстановок

$$\eta_{2j-1} = \eta_{2j-2} \circ \xi_{\eta_{2j-2}},\ \eta_{2j} = \eta_{2j-1} \circ \zeta_{\eta_{2j-1}},$$

где $j = 2, 3, \ldots, i$, получим последовательность подстановок

$$\sigma = \eta_0,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_{2j-2},\ \eta_{2j-1},\ \eta_{2j},\ \ldots,\ \eta_{2i-2},\ \eta_{2i} = \sigma',$$

в которой для последней подстановки σ' будет выполняться равенство $\sigma'(n-\ell) = 2\ell+1$.

Пусть имеет место второй случай, т. е. в записи подстановки σ вида (8) элемент $2\ell+1$ расположен между $\sigma(\ell) = 2\ell$ и $\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$. Тогда $2\ell+1 = \sigma(\ell+i)$, где $1 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \ell$. Так как $\sigma(n+1-(\ell+i)) \ge 2\ell+2$, то $\sigma(n+1-(\ell+i)) > \sigma(\ell+i)$, следовательно, $\ell+i \in J_{0,1}^{\sigma}$, транспозиция $(\ell+i,\, n+1-(\ell+i))$ входит в запись подстановки ζ_{η_σ} и в силу равенств (4) для подстановки $\eta_1 = \sigma \circ \zeta_{\eta_\sigma}$ справедливы соотношения

$$\eta_1(n+1-(\ell+i)) = \eta_1(n-(\ell+i-1)) = 2\ell+1,$$

где $1 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \ell$. Из полученных соотношений следует, что при $i = 1$ имеем $\eta_1(n-\ell) = 2\ell+1$, т. е. требуемая последовательность состоит из двух подстановок: $\sigma = \eta_0$ и $\eta_1 = \eta_0 \circ \zeta_{\eta_\sigma} = \sigma'$.

Если $2 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \ell$, то в записи подстановки σ элемент $2\ell+1$ расположен между $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$ и $\sigma(n-(\ell+1))$, т. е. для подстановки η_1 имеет место первый случай. Таким образом, доказано, что для подстановки σ вида (8) существует последовательность подстановок вида (6), в которой для последней подстановки σ' выполняются равенства

$$\sigma'(i) = 2i,\ \sigma'(n+1-i) = 2i-1,\ \sigma'(n-\ell) = 2\ell+1, \tag{9}$$

где $i = 1, 2, \ldots, \ell$.

Пусть теперь для подстановки σ справедливы равенства (9), $\sigma(\ell+1) \ne 2(\ell+1)$, т. е.

$$\sigma = \Big\langle 2, 4, 6, \ldots, 2\ell-2, 2\ell, \sigma(\ell+1), \ldots, \sigma(\ell+i), \ldots, \sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \ldots,$$
$$\sigma(n-(\ell+j)), \ldots, \sigma(n-(\ell+1)), 2\ell+1, 2\ell-1, \ldots, 5, 3, 1\Big\rangle. \tag{10}$$

Для завершения доказательства леммы 2 осталось убедиться в том, что для подстановки σ вида (10) можно построить последовательность подстановок вида (6) такую, что для последней подстановки σ' выполняются равенства

$$\sigma'(i) = 2i,\ \sigma'(n+1-i) = 2i-1,$$

где $i = 1, 2, \ldots, \ell, \ell+1$. Возможны два случая: в записи подстановки σ вида (10) элемент $2(\ell+1)$ стоит между $\sigma(\ell+1)$ и $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$ либо между $\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ и $2(\ell+1)$. В первом случае $2(\ell+1) = \sigma(\ell+i)$, где $2 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \ell$, следовательно, $\ell+1 \in J_{1,1}^{\sigma}$, транспозиция $(\ell+i,\, n+1-(\ell+i))$ входит в запись подстановки ζ_σ и в силу равенств (4) для подстановки $\eta_1 = \sigma \circ \zeta_\sigma$ должны выполняться равенства

$$\eta_1\left(n+1-(\ell+i)\right)=\sigma\circ\zeta_\sigma\left(n+1-(\ell+i)\right)=\sigma(\ell+i)=2(\ell+1).$$

Так как $\eta_1\left(n+1-(\ell+i)\right)=\eta_1\left(n-(\ell+i-1)\right)=2(\ell+1)$, то

$$\eta_1(\ell+i-1)>2(\ell+1)=\eta_1\left(n-(\ell+i-1)\right),\ \ell+i-1\in J_{1,1}^{\sigma},$$

транспозиция $\left(\ell+i-1,\ n-(\ell+i-1)\right)$ входит в запись подстановки ξ_{η_1} и в силу равенств (5) для подстановки $\eta_2=\eta_1\circ\xi_{\eta_1}$ имеют место соотношения

$$\eta_2(\ell+i-1)=\eta_1\circ\xi_{\eta_1}(\ell+i-1)=\eta_1\left(n-(\ell+i-1)\right)=2(\ell+1). \tag{11}$$

Из соотношений (11) следует, что в записи подстановки η_2 элемент $2(\ell+1)$ сместился влево на одну позицию. При $i=2$, полагая, что $\sigma'=\eta_2$, получаем искомую последовательность подстановок вида

$$\sigma=\eta_0,\ \eta_1=\eta_0\circ\zeta_{\eta_0},\ \eta_2=\eta_1\circ\zeta_{\eta_1}=\sigma'.$$

Если $3\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-\ell$, то, построив по аналогии $i-1$ пар подстановок

$$\eta_{2j-1}=\eta_{2j-2}\circ\zeta_{\eta_{2j-2}},\ \eta_{2j}=\eta_{2j-1}\circ\xi_{\eta_{2j-1}},$$

где $j=3,\ \dots,\ j-1$, получим последовательность подстановок

$$\sigma=\eta_0,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \dots,\ \eta_{2j-1},\ \eta_{2j},\ \dots,\ \eta_{2i-3},\ \eta_{2(i-1)}=\sigma',$$

при этом для подстановки σ' будут справедливы соотношения (11).

Если имеет место второй случай, т. е. в записи подстановки σ вида (10) элемент $2(\ell+1)$ расположен между $\sigma\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$ и $2(\ell+1)=\sigma(n-\ell)$, то $2(\ell+1)=\sigma\left(n-(\ell+j)\right)$, где $1\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-\ell$. Следовательно, $\sigma(\ell+j)>\sigma\left(n-(\ell+j)\right)$, а значит, $\ell+j\in J_{0,1}^{\sigma}$, транспозиция $\left(\ell+j,\ n-(\ell+j)\right)$ входит в запись подстановки ξ_σ и в силу равенств (5) для подстановки $\eta_1=\sigma\circ\xi_\sigma$ должны выполняться соотношения

$$\eta_1(\ell+j)=\sigma\circ\xi_\sigma(\ell+j)=\sigma\left(n-(\ell+j)\right)=2(\ell+1),$$

т. е. для подстановки η_1 имеет место рассмотренный выше первый случай. Таким образом, справедливость леммы 2 доказана.

Лемма 3. *Если для любой подстановки* $\sigma\in S_n$ *выполняются неравенства*

$$\Delta f_A(\sigma,\ \sigma\circ\zeta_\sigma)\le 0,\ \Delta f_A(\sigma,\ \sigma\circ\xi_\sigma)\le 0, \tag{12}$$

где ζ_σ *и* ξ_σ *– подстановки вида (6), то функционал* $f_A(\sigma)$ *достигает минимума на подстановке* σ_1.

Доказательство. Из леммы 2 следует существование для любой подстановки $\sigma\in S_n$ последовательности подстановок $\sigma=\eta_0,\eta_1,\ \eta_2,\ \dots,\ \eta_{i-1},\ \eta_i,\ \dots,\ \eta_m=\sigma_1$ такой, что $\eta_i=\eta_{i-1}\circ\omega_{\eta_{i-1}}$, где $\omega_{\eta_{i-1}}=\zeta_{\eta_{i-1}}$ либо $\omega_{\eta_{i-1}}=\xi_{\eta_{i-1}}$, $i=1,\ \dots,\ m$. Проверка показывает, что для приращения функционала $f_A(\sigma)$ на паре подстановок η_0, η_m справедлива цепочка равенств

$$\Delta f_A(\eta_0,\ \eta_m)=f_A(\eta_m)-f_A(\eta_0)=\sum_{i=1}^{m}\left(f_A(\eta_i)-f_A(\eta_{i-1})\right)=\sum_{i=1}^{m}\Delta f_A(\eta_{i-1},\ \eta_i).$$

Так как $\eta_i=\eta_{i-1}\circ\omega_{\eta_{i-1}}$, где $\omega_{\eta_{i-1}}=\zeta_{\eta_{i-1}}$ либо $\omega_{\eta_{i-1}}=\xi_{\eta_{i-1}}$, то в силу неравенств (12) для всех $i=1,\ \dots,\ m$ выполняется неравенство $\Delta f_A(\eta_{i-1},\ \eta_i)=\Delta f\left(\eta_{i-1},\ \eta_{i-1}\circ\omega_{\eta_{i-1}}\right)\le 0$, следствием которого является неравенство $f_A(\eta_m)-f_A(\eta_0)=f_A(\sigma_1)-f_A(\sigma)\le 0$. Таким образом, справедливость леммы 3 доказана.

Аддитивные разложения приращений функционала квадратичной задачи выбора

Из леммы 3 следует, что при выполнении для любой подстановки $\sigma\in S_n$ неравенств (12) функционал $f_A(\sigma)$ достигает минимума на подстановке σ_1. Следовательно, достаточно выявить условия, при наложении которых на элементы матрицы $A=\left(a_{i,\ j,\ k,\ \ell}\right)$ будет гарантировано выполнение неравенств (12) для функционала $f_A(\sigma)$. Для этого достаточно записать в явном виде приращения этого функционала на парах подстановок σ, $\sigma \circ \zeta_\sigma$ и σ, $\sigma \circ \xi_\sigma$.

Для подмножеств (1) и подстановок $\sigma_\xi = \sigma \circ \xi_\sigma$ вида (3) в силу леммы 1 справедливы следующие утверждения:

(i) для множества $N_{i,\,n}$ имеет место разложение

$$N_{1,\,n} = \begin{cases} J_{1,\,1}^{\sigma} \cup J_{1,\,2}^{\sigma} \cup J_{1,\,3}^{\sigma} \cup J_{1,\,4}^{\sigma} \text{ при четном } n, \\ J_{1,\,1}^{\sigma} \cup J_{1,\,2}^{\sigma} \cup J_{1,\,3}^{\sigma} \cup J_{1,\,4}^{\sigma} \cup \left\{ \left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil \right\} \text{ при нечетном } n; \end{cases}$$

(ii) для любого элемента $k \in J_{1,\,2}^{\sigma}$ существует единственный элемент $i \in J_{1,\,1}^{\sigma}$ такой, что $k = n + 1 - i$, $\sigma_\xi(k) = \sigma_\xi(n + 1 - i) = \sigma(i)$ и $\sigma_\xi(i) = \sigma(n + 1 - i)$;

(iii) для любого элемента $\ell \in J_{1,\,4}^{\sigma}$ существует единственный элемент $j \in J_{1,\,3}^{\sigma}$ такой, что $\ell = n + 1 - j$, $\sigma_\xi(\ell) = \sigma_\xi(n + 1 - j) = \sigma(n + 1 - j)$ и $\sigma_\xi(j) = \sigma(j)$.

Для подмножеств (2) и подстановок $\sigma_\xi = \sigma \circ \xi_\sigma$ вида (3) справедливы следующие утверждения:

(j) для множества $N_{i,\,n}$ имеет место разложение

$$N_{1,\,n} = \begin{cases} J_{0,\,1}^{\sigma} \cup J_{0,\,2}^{\sigma} \cup J_{0,\,3}^{\sigma} \cup J_{0,\,4}^{\sigma} \cup \{ n \} \text{ при нечетном } n, \\ J_{0,\,1}^{\sigma} \cup J_{0,\,2}^{\sigma} \cup J_{0,\,3}^{\sigma} \cup J_{0,\,4}^{\sigma} \cup \left\{ \left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil, n \right\} \text{ при четном } n; \end{cases}$$

(jj) для любого элемента $k \in J_{0,\,2}^{\sigma}$ существует единственный элемент $i \in J_{0,\,1}^{\sigma}$ такой, что $k = n - i$, $\sigma_\xi(k) = \sigma_\xi(n - i) = \sigma(i)$ и $\sigma_\xi(i) = \sigma(n - i)$;

(jjj) для любого элемента $\ell \in J_{0,\,4}^{\sigma}$ существует единственный элемент $j \in J_{0,\,3}^{\sigma}$ такой, что $\ell = n - j$, $\sigma_\xi(\ell) = \sigma_\xi(n - j) = \sigma(n - j)$ и $\sigma_\xi(j) = \sigma(j)$.

Из утверждений (i) – (iii) следует, что значение функционала квадратичной задачи выбора на подстановке σ_ζ допускает аддитивное разложение в виде сумм

$$\begin{aligned} f_A(\sigma_\zeta) = \sum_{i \in N_{1,\,n}} \sum_{j \in N_{1,\,n}} a_{i,\,j,\,\sigma_\zeta(i),\,\sigma_\zeta(j)} = \\ = \sum_{i \in J_{1,1}^{\sigma}} \sum_{j \in J_{1,1}^{\sigma}} \Big(a_{i,\,j,\,\sigma(n+1-i),\,\sigma(n+1-j)} + a_{i,\,n+1-j,\,\sigma(n+1-i),\,\sigma(j)} + \\ + a_{n+1-i,\,j,\,\sigma(i),\,\sigma(n+1-j)} + a_{n+1-i,\,n+1-j,\,\sigma(i),\,\sigma(j)} \Big) + \\ + \sum_{i \in J_{1,1}^{\sigma}} \sum_{j \in J_{1,3}^{\sigma}} \Big(a_{i,\,j,\,\sigma(n+1-i),\,\sigma(j)} + a_{i,\,n+1-j,\,\sigma(n+1-i),\,\sigma(n+1-j)} + \\ + a_{n+1-i,\,j,\,\sigma(i),\,\sigma(j)} + a_{n+1-i,\,n+1-j,\,\sigma(i),\,\sigma(n+1-j)} \Big) + \\ + \sum_{j \in J_{1,3}^{\sigma}} \sum_{i \in J_{1,1}^{\sigma}} \Big(a_{j,\,i,\,\sigma(j),\,\sigma(n+1-i)} + a_{j,\,n+1-i,\,\sigma(j),\,\sigma(i)} + \\ + a_{n+1-j,\,i,\,\sigma(n+1-j),\,\sigma(n+1-i)} + a_{n+1-j,\,n+1-i,\,\sigma(n+1-j),\,\sigma(i)} \Big) + \\ + \sum_{i \in J_{1,3}^{\sigma}} \sum_{j \in J_{1,3}^{\sigma}} \Big(a_{i,\,j,\,\sigma(i),\,\sigma(j)} + a_{i,\,n+1-j,\,\sigma(i),\,\sigma(n+1-j)} + \\ + a_{n+1-i,\,j,\,\sigma(n+1-i),\,\sigma(j)} + a_{n+1-i,\,n+1-j,\,\sigma(n+1-i),\,\sigma(n+1-j)} \Big). \end{aligned} \tag{13}$$

при четном n и дополнительных сумм

$$\sum_{i \in J_{1,1}^{\sigma}} \left(a_{i, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma(n+1-i), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} + a_{n+1-i, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma(i), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, i, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(n+1-i)} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n+1-i, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(i)} \right) +$$

$$+ \sum_{i \in J_{1,3}^{\sigma}} \left(a_{i, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma(i), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} + a_{n+1-i, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma(n+1-i), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, i, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(i)} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n+1-i, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(n+1-i)} \right) \quad (14)$$

при нечетном n.

Записав аналогичное аддитивное разложение функционала $f_A(\sigma)$ на подстановке σ, путем непосредственной проверки с учетом утверждений (ii) и (iii) нетрудно убедиться в том, что четвертая двойная сумма с индексами суммирования $i \in J_{1,3}^{\sigma}$, $j \in J_{1,3}^{\sigma}$ в формуле (13) и вторая сумма с индексом суммирования $i \in J_{1,3}^{\sigma}$ в формуле (14) в разложениях $f_A(\sigma_\zeta)$ и $f_A(\sigma)$ совпадают. Следовательно, вычислив разность $f_A(\sigma_\zeta) - f_A(\sigma)$ и сгруппировав слагаемые сумм с индексами суммирования $i, j \in J_{1,1}^{\sigma}$, $i \in J_{1,1}^{\sigma}$ и $j \in J_{1,3}^{\sigma}$, получим аддитивное разложение приращения $\Delta f_A(\sigma, \sigma_\zeta)$ функционала $f_A(\sigma)$ на паре подстановок σ, σ_ζ вида

$$\Delta f_A(\sigma, \sigma_\zeta) = \sum_{i \in J_{1,1}^{\sigma}} \sum_{j \in J_{1,1}^{\sigma}} \Big(a_{i, j, \sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)} + a_{i, n+1-j, \sigma(n+1-i), \sigma(j)} +$$

$$+ a_{n+1-i, j, \sigma(i), \sigma(n+1-j)} + a_{n+1-i, n+1-j, \sigma(i), \sigma(j)} - a_{i, j, \sigma(i), \sigma(j)} - a_{i, n+1-j, \sigma(i), \sigma(n+1-j)} -$$

$$- a_{n+1-i, j, \sigma(n+1-i), \sigma(j)} - a_{n+1-i, n+1-j, \sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)} \Big) +$$

$$+ \sum_{i \in J_{1,1}^{\sigma}} \sum_{j \in J_{1,3}^{\sigma}} \Big(a_{i, j, \sigma(n+1-i), \sigma(j)} + a_{i, n+1-j, \sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)} +$$

$$+ a_{n+1-i, j, \sigma(i), \sigma(j)} + a_{n+1-i, n+1-j, \sigma(i), \sigma(n+1-j)} - a_{i, j, \sigma(i), \sigma(j)} - a_{i, n+1-j, \sigma(i), \sigma(n+1-j)} +$$

$$+ a_{n+1-i, j, \sigma(n+1-i), \sigma(j)} + a_{n+1-i, n+1-j, \sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)} \Big) +$$

$$+ \sum_{j \in J_{1,3}^{\sigma}} \sum_{i \in J_{1,1}^{\sigma}} \Big(a_{j, i, \sigma(j), \sigma(n+1-i)} + a_{j, n+1-i, \sigma(j), \sigma(i)} +$$

$$+ a_{n+1-j, i, \sigma(n+1-j), \sigma(n+1-i)} + a_{n+1-j, n+1-i, \sigma(n+1-j), \sigma(i)} - a_{j, n+1-i, \sigma(j), \sigma(n+1-i)} -$$

$$- a_{j, n+1-i, \sigma(j), \sigma(n+1-i)} - a_{n+1-j, i, \sigma(n+1-j), \sigma(i)} - a_{n+1-j, n+1-i, \sigma(n+1-j), \sigma(n+1-i)} \Big) \quad (15)$$

при четном n с дополнительной суммой

$$\sum_{i \in J_{1,1}^{\sigma}} \left(a_{i, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma(n+1-i), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} + a_{n+1-i, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma(i), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, i, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(n+1-i)} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n+1-i, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(i)} - \right.$$

$$\left. - a_{i, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma(i), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} - a_{n+1-i, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma(n+1-i), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} - a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, i, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(i)} - a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n+1-i, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(n+1-i)} \right) \quad (16)$$

при нечетном n, где $\sigma(i)$, $\sigma(n+1-i)$, $\sigma(j)$, $\sigma(n+1-j)$ – попарно различные элементы множества $N_{1,n}$, при этом в формуле (15) для любых $i \in J_{1,1}^{\sigma}$, $j \in J_{1,3}^{\sigma}$ и в формуле (16) для любых $i \in J_{1,1}^{\sigma}$ справедливы неравенства $\sigma(i) < \sigma(n+1-i), \sigma(j) > \sigma(n+1-j)$ в силу определения подмножеств $J_{1,1}^{\sigma}$, $J_{1,3}^{\sigma}$.

Из утверждений (j) – (jjj) следует, что значение функционала квадратичной задачи выбора на подстановке σ_ξ допускает аддитивное разложение в виде сумм

$$f_A\left(\sigma_\xi\right) = \sum_{i \in N_{1,n}} \sum_{j \in N_{1,n}} a_{i,\, j,\, \sigma_\xi(i),\, \sigma_\zeta(j)} =$$

$$= \sum_{i \in J_{0,1}^\sigma} \sum_{j \in J_{0,1}^\sigma} \left(a_{i,\, j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(n-j)} + a_{i,\, n-j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(j)} + a_{n-i,\, j,\, \sigma(i),\, \sigma(n-j)} + a_{n-i,\, n-j,\, \sigma(i),\, \sigma(j)} \right) +$$

$$+ \sum_{i \in J_{0,1}^\sigma} \sum_{j \in J_{0,3}^\sigma} \left(a_{i,\, j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(j)} + a_{i,\, n-j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(n-j)} + a_{n-i,\, j,\, \sigma(i),\, \sigma(j)} + a_{n-i,\, n-j,\, \sigma(i),\, \sigma(n-j)} \right) +$$

$$+ \sum_{i \in J_{0,3}^\sigma} \sum_{j \in J_{0,1}^\sigma} \left(a_{i,\, j,\, \sigma(i),\, \sigma(n-j)} + a_{i,\, n-j,\, \sigma(i),\, \sigma(j)} + a_{n-i,\, j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(n-j)} + a_{n-i,\, n-j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(j)} \right) +$$

$$+ \sum_{i \in J_{0,3}^\sigma} \sum_{j \in J_{0,3}^\sigma} \left(a_{i,\, j,\, \sigma(i),\, \sigma(j)} + a_{i,\, n-j,\, \sigma(i),\, \sigma(n-j)} + a_{n-i,\, j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(j)} + a_{n-i,\, n-j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(n-j)} \right) +$$

$$+ \sum_{i \in J_{0,1}^\sigma} \left(a_{i,\, n,\, \sigma(n-i),\, \sigma(n)} + a_{n-i,\, n,\, \sigma(i),\, \sigma(n)} + a_{n,\, i,\, \sigma(n),\, \sigma(n-i)} + a_{n,\, n-i,\, \sigma(n),\, \sigma(i)} \right) +$$

$$+ \sum_{i \in J_{0,3}^\sigma} \left(a_{i,\, n,\, \sigma(i),\, \sigma(n)} + a_{n-i,\, n,\, \sigma(n-i),\, \sigma(n)} + a_{n,\, i,\, \sigma(n),\, \sigma(i)} + a_{n,\, n-i,\, \sigma(n),\, \sigma(n-i)} \right) \tag{17}$$

при нечетном n и дополнительных сумм

$$\sum_{i \in J_{0,1}^\sigma} \left(a_{i,\, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,\, \sigma(n-i),\, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} + a_{n-i,\, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,\, \sigma(i),\, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,\, i,\, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right),\, \sigma(n-i)} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,\, n-i,\, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right),\, \sigma(i)} \right) +$$

$$+ \sum_{i \in J_{0,3}^\sigma} \left(a_{i,\, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,\, \sigma(i),\, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} + a_{n-i,\, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,\, \sigma(n-i),\, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,\, i,\, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right),\, \sigma(i)} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,\, n-i,\, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right),\, \sigma(n-i)} \right) \tag{18}$$

при четном n.

Непосредственная проверка показывает, что в разложениях значений $f_A\left(\sigma_\xi\right)$ и $f_A(\sigma)$ функционала квадратичной задачи выбора на подстановках σ_ξ и σ четвертая двойная сумма с индексами суммирования $i, j \in J_{0,3}^\sigma$ и шестая одинарная сумма с индексом суммирования $i \in J_{0,3}^\sigma$ в формуле (17) и вторая сумма с тем же индексом суммирования в формуле (18) совпадают. Следовательно, вычислив разность $f_A\left(\sigma_\xi\right) - f_A(\sigma)$ и проведя аналогичную группировку слагаемых разности, получим аддитивное разложение приращения $\Delta f_A\left(\sigma, \sigma_\xi\right)$ вида

$$\Delta f_A\left(\sigma, \sigma_\xi\right) = \sum_{i \in J_{0,1}^\sigma} \sum_{j \in J_{0,1}^\sigma} \left(a_{i,\, j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(n-j)} + a_{i,\, n-j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(j)} + \right.$$

$$+ a_{n-i,\, j,\, \sigma(i),\, \sigma(n-j)} + a_{n-i,\, n-j,\, \sigma(i),\, \sigma(j)} - a_{i,\, j,\, \sigma(i),\, \sigma(j)} - a_{i,\, n-j,\, \sigma(i),\, \sigma(n-j)} -$$

$$\left. - a_{n-i,\, j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(j)} - a_{n-i,\, n-j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(n-j)} \right) + \sum_{i \in J_{0,1}^\sigma} \sum_{j \in J_{0,3}^\sigma} \left(a_{i,\, j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(j)} + a_{i,\, n-j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(n-j)} + \right.$$

$$+ a_{n-i,\, j,\, \sigma(i),\, \sigma(j)} + a_{n-i,\, n-j,\, \sigma(i),\, \sigma(n-j)} - a_{i,\, j,\, \sigma(i),\, \sigma(j)} - a_{i,\, n-j,\, \sigma(i),\, \sigma(n-j)} -$$

$$\left. - a_{n-i,\, j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(j)} - a_{n-i,\, n-j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(n-j)} \right) + \sum_{j \in J_{0,3}^\sigma} \sum_{i \in J_{0,1}^\sigma} \left(a_{j,\, i,\, \sigma(j),\, \sigma(n-i)} + a_{j,\, n-i,\, \sigma(j),\, \sigma(i)} + \right.$$

$$+ a_{n-j,\, i,\, \sigma(n-j),\, \sigma(n-i)} + a_{n-j,\, n-i,\, \sigma(n-j),\, \sigma(i)} - a_{j,\, i,\, \sigma(j),\, \sigma(i)} - a_{i,\, n-j,\, \sigma(i),\, \sigma(n-j)} -$$

$$\left. - a_{n-i,\, j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(j)} - a_{n-i,\, n-j,\, \sigma(n-i),\, \sigma(n-j)} \right) + \sum_{i \in J_{0,1}^\sigma} \left(a_{i,\, n,\, \sigma(n-i),\, \sigma(n)} + a_{n-i,\, n,\, \sigma(i),\, \sigma(n)} + \right.$$

$$+ a_{n,\, i,\, \sigma(n),\, \sigma(n-i)} + a_{n,\, n-i,\, \sigma(n),\, \sigma(i)} - a_{i,\, n,\, \sigma(i),\, \sigma(n)} -$$

$$\left. - a_{n-i,\, n,\, \sigma(n-i),\, \sigma(n)} - a_{n,\, i,\, \sigma(n),\, \sigma(i)} - a_{n,\, n-i,\, \sigma(n),\, \sigma(n-i)} \right) \tag{19}$$

при нечетном n с дополнительной суммой

$$\sum_{i \in J_{0,1}^{\sigma}} \left(a_{i, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma(n-i), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} + a_{n-i, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma(i), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, i, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(n-i)} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n-i, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(i)} - \right.$$

$$\left. - a_{i, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma(i), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} - a_{n-i, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma(n-i), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)} - a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, i, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(i)} - a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n-i, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(n-i)} \right) \quad (20)$$

при четном n, где $\sigma(i)$, $\sigma(n-i)$, $\sigma(j)$, $\sigma(n-j)$ – попарно различные элементы множества $N_{1,n}$, при этом для индексов суммирования $i \in J_{0,1}^{\sigma}$, $j \in J_{0,3}^{\sigma}$ второй и третьей двойных сумм в формуле (19) справедливы неравенства $1 \le \sigma(n-i) < \sigma(i) \le n$, $1 \le \sigma(j) < \sigma(n-j) \le n$ в силу определения подмножеств $J_{0,1}^{\sigma}$, $J_{0,3}^{\sigma}$.

Полученные аддитивные разложения (15), (16) и (19), (20) приращений функционала $f_A(\sigma)$ на парах подстановок σ, σ_ζ и σ, σ_ξ позволяют получить условия их неположительности, что в силу леммы 3 дает возможность сформулировать условия строгой разрешимости квадратичной задачи выбора с оптимальной подстановкой σ_1.

Слагаемые сумм в формулах (15), (16) и (19), (20), стоящие в скобках, далее называются общими членами.

Условия строгой разрешимости квадратичной задачи выбора

Предлагаемые достаточные условия неположительности приращения функционала $f_A(\sigma)$ на парах подстановок σ, σ_ζ и σ, σ_ξ состоят в том, что матрица $A = \left(a_{i,j,k,\ell}\right)$ должна являться решением одной из однородных систем линейных неравенств, описание которых приводится в следующих утверждениях.

Предложение 1. *Если элементы матрицы $A = \left(a_{i,j,k,\ell}\right)$ при любом заданном n удовлетворяют неравенствам*

$$a_{i,j,r,s} + a_{i,n+1-j,r,q} + a_{n+1-i,j,p,s} + a_{n+1-i,n+1-j,p,q} -$$
$$- a_{i,j,p,q} - a_{i,n+1-j,p,s} - a_{n+1-i,j,r,p} - a_{n+1-i,n+1-j,r,s} \le 0, \quad (21)$$

где $1 \le i,\ j \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *и* $p < r$, $q < s$ *– попарно различные элементы множества* $N_{1,n}$,

$$a_{i,j,r,q} + a_{i,n+1-j,r,s} + a_{n+1-i,j,p,q} + a_{n+1-i,n+1-j,p,s} -$$
$$- a_{i,j,p,q} - a_{i,n+1-j,p,s} - a_{n+1-i,j,r,q} - a_{n+1-i,n+1-j,r,s} \le 0, \quad (22)$$

$$a_{j,i,q,r} + a_{j,n+1-i,q,p} + a_{n+1-j,i,s,r} + a_{n+1-j,n+1-i,s,p} -$$
$$- a_{j,n+1-i,q,p} - a_{j,n+1-i,q,r} - a_{n+1-j,i,s,p} - a_{n+1-j,n+1-i,s,r} \le 0, \quad (23)$$

где $1 \le i \ne j \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *и* $p < r$, $s < q$ *– попарно различные элементы множества* $N_{1,n}$*, а при нечетном n дополнительно удовлетворяют неравенству*

$$a_{i,\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,k,\ell} + a_{n+1-i,\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,j,\ell} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,i,\ell,k} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,n+1-i,\ell,j} -$$
$$- a_{i,\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,j,\ell} - a_{n+1-i,\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,k,\ell} - a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,i,k,j} - a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,n+1-i,\ell,k} \le 0, \quad (24)$$

где $1 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *и* $1 \le j < k$, $\ell \le n$ *– попарно различные элементы множества* $N_{1,n}$*, то для любой подстановки* $\sigma \in S_n$ *выполняется неравенство* $\Delta f_A(\sigma, \sigma_\zeta) \le 0$.

Доказательство. Пусть для определенности n является четным и элементы матрицы $A = \left(a_{i,j,k,\ell}\right)$ удовлетворяют неравенствам (21)–(23). Очевидно, что неравенство $\Delta f_A(\sigma, \sigma_\zeta) \le 0$ выполняется, если все три двойные суммы аддитивного разложения приращения $\Delta f_A(\sigma, \sigma_\zeta)$ (15) неположительны, что гарантируется выполнением следующих неравенств для общих членов указанных сумм:

$$a_{i,j,\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} + a_{i,n+1-j,\sigma(n+1-i),\sigma(j)} + a_{n+1-i,j,\sigma(i),\sigma(n+1-j)} + a_{n+1-i,n+1-j,\sigma(i),\sigma(j)} -$$
$$- a_{i,j,\sigma(i),\sigma(j)} - a_{i,n+1-j,\sigma(i),\sigma(n+1-j)} - a_{n+1-i,j,\sigma(n+1-i),\sigma(j)} - a_{n+1-i,n+1-j,\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} \le 0 \quad (25)$$

для любых $i, j \in J_{1,1}^{\sigma}$,

$$\begin{gathered}a_{i,\,j,\,\sigma(n+1-i),\,\sigma(j)}+a_{i,\,n+1-j,\,\sigma(n+1-i),\,\sigma(n+1-j)}+a_{n+1-i,\,j,\,\sigma(i),\,\sigma(j)}+\\+a_{n+1-i,\,n+1-j,\,\sigma(i),\,\sigma(n+1-j)}-a_{i,\,j,\,\sigma(i),\,\sigma(j)}-a_{i,\,n+1-j,\,\sigma(i),\,\sigma(n+1-j)}-\\-a_{n+1-i,\,j,\,\sigma(n+1-i),\,\sigma(j)}-a_{n+1-i,\,n+1-j,\,\sigma(n+1-i),\,\sigma(n+1-j)}\le 0\end{gathered}\tag{26}$$

для любых $i\in J_{1,1}^{\sigma},\ j\in J_{1,3}^{\sigma}$,

$$\begin{gathered}a_{j,\,i,\,\sigma(j),\,\sigma(n+1-i)}+a_{j,\,n+1-i,\,\sigma(j),\,\sigma(i)}+a_{n+1-j,\,i,\,\sigma(n+1-j),\,\sigma(n+1-i)}+\\+a_{n+1-j,\,n+1-i,\,\sigma(n+1-j),\,\sigma(i)}-a_{j,\,n+1-i,\,\sigma(j),\,\sigma(n+1-i)}-a_{j,\,n+1-i,\,\sigma(j),\,\sigma(n+1-i)}-\\-a_{n+1-j,\,i,\,\sigma(n+1-j),\,\sigma(i)}-a_{n+1-j,\,n+1-i,\,\sigma(n+1-j),\,\sigma(n+1-i)}\le 0\end{gathered}\tag{27}$$

для любых $j\in J_{1,3}^{\sigma},\ i\in J_{1,1}^{\sigma}$.

Покажем, что неравенства (21)–(23) обеспечивают неположительность общих членов в левых частях неравенств (25)–(27). Действительно, в силу $i,j\in J_{1,1}^{\sigma}$ для индексов левой части неравенства (25) имеют место соотношения $1\le i,j\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$, $\sigma(i)<\sigma(n+1-i)$, $\sigma(j)<\sigma(n+1-j)$, где $\sigma(i)$, $\sigma(n+1-i)$, $\sigma(j)$, $\sigma(n+1-j)$ – попарно различные элементы множества $N_{1,n}$. Если положить, что $\sigma(i)=p$, $\sigma(j)=q$, $\sigma(n+1-i)=r$, $\sigma(n+1-j)=s$, то левая часть неравенства (25) записывается в виде

$$\begin{gathered}a_{i,\,j,\,r,\,s}+a_{i,\,n+1-j,\,r,\,q}+a_{n+1-i,\,j,\,p,\,s}+a_{n+1-i,\,n+1-j,\,p,\,q}-\\-a_{i,\,j,\,p,\,q}-a_{i,\,n+1-j,\,p,\,s}-a_{n+1-i,\,j,\,r,\,p}-a_{n+1-i,\,n+1-j,\,r,\,s},\end{gathered}$$

где $1\le i\ne j\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$; $1\le p<r\le n$; $1\le q<s\le n$. Таким образом, неравенство (25) является следствием неравенства (21). В силу $i\in J_{1,1}^{\sigma},\ j\in J_{1,3}^{\sigma}$ имеют место соотношения $1\le i\ne j\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$, $1\le\sigma(i)<\sigma(n+1-i)\le n$, $1\le\sigma(n+1-j)<\sigma(j)\le n$, что с учетом введенных выше обозначений равносильно выполнению неравенств $1\le p<r\le n$, $1\le s<q\le n$. Значит, неравенство (26) является следствием неравенства (22). Аналогичным образом доказывается, что неравенство (23) гарантирует выполнение неравенства (27). Таким образом, доказана неотрицательность двойных сумм в формуле (15) и, соответственно, выполнение неравенства $\Delta f_A(\sigma,\sigma_{\zeta})\le 0$ при любом n.

Пусть n является нечетным. Тогда, если положить, что $\sigma(i)=j$, $\sigma(n+1-i)=k$, $\sigma\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right)=\ell$, в силу $i\in J_{1,1}^{\sigma}$ должны выполняться соотношения $1\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$, $1\le j<k\le n$, $1\le\ell\le n$, а общий член дополнительной суммы (16) можно записать в виде

$$\begin{gathered}a_{i,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,\,k,\,\ell}+a_{n+1-i,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,\,j,\,\ell}+a_{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,\,i,\,\ell,\,k}+a_{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,\,n+1-i,\,\ell,\,j}-\\-a_{i,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,\,j,\,\ell}-a_{n+1-i,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,\,k,\,\ell}-a_{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,\,i,\,\ell,\,j}-a_{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,\,n+1-i,\,\ell,\,k}.\end{gathered}$$

Следовательно, его неотрицательность гарантируется выполнением неравенства (24) для элементов матрицы $A=\left(a_{i,\,j,\,k,\,\ell}\right)$. Таким образом, предложение 1 доказано.

Предложение 2. *Если элементы матрицы* $A=\left(a_{i,\,j,\,k,\,\ell}\right)$ *для любых заданных n удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{gathered}a_{i,\,j,\,p,\,q}+a_{i,\,n-j,\,p,\,s}+a_{n-i,\,j,\,r,\,q}+a_{n-i,\,n-j,\,r,\,s}-\\-a_{i,\,n,\,r,\,s}-a_{n-i,\,n,\,r,\,q}-a_{n-i,\,j,\,p,\,s}-a_{n-i,\,n-j,\,p,\,q}\le 0,\end{gathered}\tag{28}$$

где $1\le i,j\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$ *и* $p<r,\ q<s$ *– попарно различные элементы множества* $N_{1,n}$,

$$\begin{gathered}a_{i,\,j,\,p,\,s}+a_{i,\,n-j,\,p,\,q}+a_{n-i,\,j,\,r,\,s}+a_{n-i,\,n-j,\,r,\,q}-\\-a_{i,\,j,\,r,\,s}-a_{i,\,n-j,\,r,\,q}-a_{n-i,\,j,\,p,\,s}-a_{n-i,\,n-j,\,p,\,q}\le 0,\end{gathered}\tag{29}$$

$$a_{i,\,j,\,r,\,q} + a_{i,\,n-j,\,r,\,s} + a_{n-i,\,j,\,p,\,q} + a_{n-i,\,n-j,\,p,\,s} -$$
$$- a_{i,\,j,\,r,\,s} - a_{i,\,n-j,\,r,\,q} - a_{n-i,\,j,\,p,\,s} - a_{n-i,\,n-j,\,p,\,q} \le 0, \tag{30}$$

где $1 \le i \ne j \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ *и* $p < r,\ s < q$ *– попарно различные элементы множества* $N_{1,\,n}$,

$$a_{i,\,n,\,p,\,\ell} + a_{n-i,\,n,\,r,\,\ell} + a_{n,\,i,\,\ell,\,p} + a_{n,\,n-i,\,\ell,\,r} -$$
$$- a_{i,\,n,\,r,\,\ell} - a_{n-i,\,n,\,p,\,\ell} - a_{n,\,i,\,\ell,\,r} - a_{n,\,n-i,\,\ell,\,p} \le 0, \tag{31}$$

где $1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ *и* $p < r,\ \ell$ *– попарно различные элементы множества* $N_{1,\,n}$, *а при четном n дополнительно удовлетворяют неравенству*

$$a_{i,\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil,\,p,\,t} + a_{n-i,\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil,\,r,\,t} + a_{\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil,\,i,\,t,\,p} + a_{\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil,\,n-i,\,t,\,r} -$$
$$- a_{i,\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil,\,r,\,t} - a_{n-i,\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil,\,p,\,t} - a_{\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil,\,i,\,t,\,r} - a_{\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil,\,n-i,\,t,\,p} \le 0, \tag{32}$$

где $1 \le i \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ *и* $p < r,\ t$ *– попарно различные элементы множества* $N_{1,\,n}$, *то для любой подстановки* $\sigma \in S_n$ *выполняется неравенство* $\Delta f_A(\sigma,\, \sigma_\xi) \le 0$.

Доказательство. Очевидно, что приращение $\Delta f_A(\sigma,\, \sigma_\xi)$ неотрицательно, если общие члены сумм в формулах (19), (20) неотрицательны, т. е. справедливы неравенства

$$a_{i,\,j,\,\sigma(n-i),\,\sigma(n-j)} + a_{i,\,n-j,\,\sigma(n-i),\,\sigma(j)} + a_{n-i,\,j,\,\sigma(i),\,\sigma(n-j)} + a_{n-i,\,n-j,\,\sigma(i),\,\sigma(j)} -$$
$$- a_{i,\,j,\,\sigma(i),\,\sigma(j)} - a_{i,\,n-j,\,\sigma(i),\,\sigma(n-j)} - a_{n-i,\,j,\,\sigma(n-i),\,\sigma(j)} - a_{n-i,\,n-j,\,\sigma(n-i),\,\sigma(n-j)} \le 0$$

для любых $i,\, j \in J^{\sigma}_{0,1}$,

$$a_{i,\,j,\,\sigma(n-i),\,\sigma(j)} + a_{i,\,n-j,\,\sigma(n-i),\,\sigma(n-j)} + a_{n-i,\,j,\,\sigma(i),\,\sigma(j)} + a_{n-i,\,n-j,\,\sigma(i),\,\sigma(n-j)} -$$
$$- a_{i,\,j,\,\sigma(n-i),\,\sigma(j)} - a_{i,\,n-j,\,\sigma(n-i),\,\sigma(n-j)} - a_{n-i,\,j,\,\sigma(i),\,\sigma(j)} - a_{n-i,\,n-j,\,\sigma(i),\,\sigma(n-j)} \le 0,$$

$$a_{j,\,i,\,\sigma(j),\,\sigma(n-i)} + a_{j,\,n-i,\,\sigma(j),\,\sigma(i)} + a_{n-j,\,i,\,\sigma(n-j),\,\sigma(n-i)} + a_{n-j,\,n-i,\,\sigma(n-j),\,\sigma(i)} -$$
$$- a_{j,\,i,\,\sigma(j),\,\sigma(i)} - a_{j,\,n-i,\,\sigma(j),\,\sigma(n-i)} - a_{n-j,\,i,\,\sigma(n-j),\,\sigma(i)} - a_{n-j,\,n-i,\,\sigma(n-j),\,\sigma(n-i)} \le 0$$

для любых $i \in J^{\sigma}_{0,1},\ j \in J^{\sigma}_{0,3}$,

$$a_{i,\,n,\,\sigma(n-i),\,\sigma(n)} + a_{n-i,\,n,\,\sigma(i),\,\sigma(n)} + a_{n,\,i,\,\sigma(n),\,\sigma(n-i)} + a_{n,\,n-i,\,\sigma(n),\,\sigma(i)} -$$
$$- a_{i,\,n,\,\sigma(i),\,\sigma(n)} - a_{n-i,\,n,\,\sigma(n-i),\,\sigma(n)} - a_{n,\,i,\,\sigma(n),\,\sigma(i)} - a_{n,\,n-i,\,\sigma(n),\,\sigma(n-i)} \le 0$$

для любых $i \in J^{\sigma}_{0,1}$ при любом n и дополнительно неравенство

$$a_{i,\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil,\,\sigma(n-i),\,\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right)} + a_{n-i,\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil,\,\sigma(i),\,\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right)} + a_{\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil,\,i,\,\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right),\,\sigma(n-i)} + a_{\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil,\,n-i,\,\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right),\,\sigma(i)} -$$
$$- a_{i,\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil,\,\sigma(i),\,\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right)} - a_{n-i,\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil,\,\sigma(n-i),\,\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right)} - a_{\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil,\,i,\,\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right),\,\sigma(i)} - a_{\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil,\,n-i,\,\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right),\,\sigma(n-i)} \le 0$$

для любых $i \in J^{\sigma}_{0,1}$ при четном n.

Полагая, что $p = \sigma(n-i),\ q = \sigma(n-j),\ r = \sigma(i),\ s = \sigma(j),\ t = \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right)$, и используя свойства подмножеств $J^{\sigma}_{0,1},\ J^{\sigma}_{0,3}$, по аналогии можно доказать, что приведенные неравенства являются следствиями неравенств (28)–(32) соответственно.

Из предложений 1 и 2 напрямую вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Если элементы матрицы* $A = \left(a_{i,\,j,\,k,\,\ell}\right)$ *удовлетворяют неравенствам (21)–(23), (28)–(31) и дополнительно неравенству (24) при нечетном n и неравенству (32) при четном n, то функционал* $f_A(\sigma)$ *достигает минимума на подстановке* σ_1.

Теорема 1 является обобщением полученных ранее условий строгой разрешимости задач минимизации квадратичной и билинейной форм на множестве подстановок [8], а также квадратичной задачи назначений [19]. Представленные в данной работе условия строгой разрешимости квадратичной задачи выбора совместно с условиями достижения минимума функционала $f_A(\sigma)$ на подстановке $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \ldots, n, \ldots, 6, 4, 2 \rangle$, приведенными в первой части статьи [5], являются обобщением классического результата, полученного Г. Харди, Дж. Литтлвудом и Г. Полиа, а именно теоремы о перестановке трех систем.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе продолжено исследование строго разрешимых случаев оптимизационных задач на подстановках. В частности, для квадратичной задачи выбора в виде системы неравенств описаны условия, обеспечивающие достижение минимума ее функционала на одной из подстановок, приведенных в теореме о перестановке трех систем.

Библиографические ссылки

1. Koopmans TC, Beckmann M. Assignment problems and the location of economic activities. *Econometrica*. 1957;25(1):53–76. DOI: 10.2307/1907742.
2. Hardy GH, Littlewood JE, Pólya G. The maximum of a certain bilinear form. *Proceedings of the London Mathematical Society.* 1926;25:265–282. DOI: 10.1112/plms/s2-25.1.265.
3. Hardy GH, Littlewood JE, Pólya G. *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press; 1934. XII, 314 p.
4. Харди ГХ, Литлвуд ДжИ, Полиа Г. *Неравенства.* Левин ВИ, переводчик. Москва: Государственное издательство иностранной литературы; 1948. 456 с.
5. Демиденко ВМ. Условия эффективной разрешимости квадратичной задачи выбора. Часть 1. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;1:45–58. EDN: TEYTMM.
6. Бурков ВН, Рубинштейн МИ, Соколов ВБ. Некоторые задачи оптимального размещения информации в памяти большого объема. *Автоматика и телемеханика.* 1969;9:83–91.
7. Тимофеев ББ, Литвинов ВА. К вопросу об организации размещения массивов информации в памяти на магнитных лентах. *Кибернетика.* 1969;4:56–61.
8. Метельский НН. Об экстремальных значениях квадратичной формы на симметрической группе. *Весці Акадэміі навук БССР. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 1972;6:107–110.
9. Pratt VR. An *N* log *N* algorithm to distribute *N* records optimally in a sequential access file. In: Miller RE, Thatcher JW, editors. *Complexity of computer computations. Proceedings of the symposium; 1972 March 20–22; New York, USA.* New York: Plenum Press; 1972. p. 111–118 (The IBM research symposia series).
10. Vickson RG, Lu X. Optimal product and server locations in one-dimensional storage racks. *European Journal of Operational Research.* 1998;105(1):18–28. DOI: 10.1016/S0377-2217(97)00023-4.
11. Burkard RE, Çela E, Rote G, Woeginger GJ. The quadratic assignment problem with a monotone anti-Monge and a symmetric Toeplitz matrix: easy and hard cases. *Mathematical Programming.* 1998;82:125–158. DOI: 10.1007/BF01585868.
12. Woeginger GJ. Computational problems without computation. *Nieuw Archief voor Wiskunde.* 2003;4(2):140–147.
13. Woeginger GJ. Exact algorithms for NP-hard problems: a survey. In: Jünger M, Reinelt G, Rinaldi G, editors. *Combinatorial optimization – eureka, you shrink! Revised papers of the 5th International workshop dedicated to Jack Edmonds; 2001 March 5–9; Aussois, France.* Berlin: Springer; 2003. p. 185–207 (Goos G, Hartmanis J, van Leeuwen J, editors. Lecture notes in computer science; volume 2570). DOI: 10.1007/3-540-36478-1_17.
14. Demidenko VM, Finke G, Gordon VS. Well solvable cases of the quadratic assignment problem with monotone and bimonotone matrices. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms.* 2006;5(2):167–187. DOI: 10.1007/s10852-005-9013-2.
15. Демиденко ВМ. Квадратичная задача о назначениях с аддитивно монотонными матрицами и неполными матрицами анти-Монжа: условия эффективной разрешимости. *Дискретная математика.* 2007;19(1):105–132. EDN: HZFCZF.
16. Demidenko VM, Dolgui A. Efficiently solvable cases of quadratic assignment problem with generalized monotonic and incomplete anti-Monge matrices. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2007;43(1):112–125. DOI: 10.1007/s10559-007-0030-1.
17. Çela E. Assignment problems. In: Pardalos PM, Resende MGC, editors. *Handbook of applied optimization.* Oxford: Oxford University Press; 2002. p. 661–678.
18. Burkard R, Dell'Amico M, Martello S. *Assignment problems.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2009. XX, 382 p.
19. Демиденко ВМ. *Эффективно разрешимые случаи и полиэдральные аспекты оптимизационных задач на подстановках* [диссертация]. Минск: [б. и.]; 2011. 315 с.

Получена 24.06.2025 / исправлена 26.06.2025 / принята 26.06.2025.
Received 24.06.2025 / revised 26.06.2025 / accepted 26.06.2025.