УДК 514.765

О ПОТОКЕ РИЧЧИ НА ТРЕХМЕРНЫХ НЕУНИМОДУЛЯРНЫХ ГРУППАХ ЛИ С ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ ЭКВИАФФИННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Д. С. ГРИГОРЬЕВ[1),]*Д. Н. ОСКОРБИН*[2)], *Е. Д. РОДИОНОВ*[1)]

[1)]*Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, 656049, г. Барнаул, Россия*
[2)]*Московский физико-технический институт, пер. Институтский, 9, 141701, г. Долгопрудный, Россия*

Аннотация. Изучается поток Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с полусимметрической эквиаффинной связностью. Уравнение потока Риччи в системе координат, предложенной Дж. Милнором, приводится к системам алгебраических и дифференциальных уравнений. Находится решение уравнения потока Риччи в классе левоинвариантных метрик Милнора. Обобщаются результаты работ К. Онды, Д. Кнопфа и К. Мак-Леода, касающихся потока Риччи на трехмерных группах Ли в случае связности Леви-Чивиты.

Ключевые слова: поток Риччи; трехмерные неунимодулярные группы Ли; полусимметрические эквиаффинные связности.

Образец цитирования:
Григорьев ДС, Оскорбин ДН, Родионов ЕД. О потоке Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с полусимметрической эквиаффинной связностью. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;2:30–41.
EDN: MYOKEH

For citation:
Grigoryev DS, Oskorbin DN, Rodionov ED. About the Ricci flow on three-dimensional non-unimodular Lie groups with semisymmetric equiaffine connection. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;2:30–41. Russian.
EDN: MYOKEH

Авторы:
Данила Сергеевич Григорьев – магистрант кафедры математического анализа Института математики и информационных технологий. Научный руководитель – Е. Д. Родионов.
Дмитрий Николаевич Оскорбин – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры высшей математики.
Евгений Дмитриевич Родионов – доктор физико-математических наук; профессор кафедры математического анализа Института математики и информационных технологий.

Authors:
Danila S. Grigoryev, master’s degree student at the department of mathematical analysis, Institute of Mathematics and Information Technologies.
danila.grigoryev.2019@mail.ru
https://orcid.org/0009-0006-6875-840X
Dmitrii N. Oskorbin, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of higher mathematics.
oskorbin@yandex.ru
https://orcid.org/0009-0002-6385-3214
Eugene D. Rodionov, doctor of science (physics and mathematics); professor at the department of mathematical analysis, Institute of Mathematics and Information Technologies.
edr2002@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-3624-1749

ABOUT THE RICCI FLOW ON THREE-DIMENSIONAL NON-UNIMODULAR LIE GROUPS WITH SEMISYMMETRIC EQUIAFFINE CONNECTION

D. S. GRIGORYEV [a], ***D. N. OSKORBIN*** [b], ***E. D. RODIONOV*** [a]

[a]*Altai State University, 61 Lenina Avenue, Barnaul 656049, Russia*
[b]*Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskij Lane, Dolgoprudnyj 141701, Russia*
Corresponding author: D. S. Grigoryev (danila.grigoryev.2019@mail.ru)

Abstract. The Ricci flow on three-dimensional non-unimodular Lie groups with semisymmetric equiaffine connection is studied. The Ricci flow equation in the coordinate system proposed by J. Milnor is reduced to systems of algebraic and differential equations. A solution to the Ricci flow equation in the class of left-invariant Milnor metrics is found. The results of works by K. Onda, D. Knopf and K. McLeod concerning the Ricci flow on three-dimensional Lie groups in the case of Levi-Civita connectivity are generalised.

Keywords: Ricci flow; three-dimensional non-unimodular Lie groups; semisymmetric equiaffine connections.

Введение

Р. С. Гамильтон и другие математики исследовали уравнение потока Риччи для связности Леви-Чивиты, которое играет важную роль в римановой геометрии [1]. Класс полусимметрических связностей, содержащий связность Леви-Чивиты, был открыт Э. Картаном [2]. Естественным является изучение потока Риччи на римановых многообразиях с полусимметрической связностью. Известно, что тензор Риччи полусимметрической связности не является симметричным, поэтому необходимо рассматривать полусимметрические эквиаффинные связности, т. е. связности с симметричным тензором Риччи.

В данной работе изучается поток Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с полусимметрической эквиаффинной связностью. Уравнение потока Риччи в системе координат, предложенной Дж. Милнором, приводится к системам алгебраических и дифференциальных уравнений. Посредством решения сначала подсистемы алгебраических уравнений, а затем системы дифференциальных уравнений находится решение уравнения потока Риччи на трехмерной неунимодулярной группе Ли с метрикой Милнора относительно полусимметрической эквиаффинной связности.

В настоящей статье обобщены результаты исследований К. Онды, Д. Кнопфа и К. Мак-Леода, касающихся потока Риччи на трехмерных группах Ли с левоинвариантной метрикой Милнора в случае связности Леви-Чивиты [3; 4], а также отражено продолжение работы в этом направлении. Другие результаты содержатся в публикациях [5–9]. Так, их авторы изучали метрики Эйнштейна и солитоны Риччи на группах Ли с полусимметрической связностью.

Предварительные сведения

Пусть M – риманово многообразие размерности n. Определим на многообразии M полусимметрическую связность ∇ формулой

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X,$$

где X и Y – произвольные векторные поля; ∇^g – связность Леви-Чивиты; $g(X, Y)$ – метрический тензор; V – некоторое фиксированное левоинвариантное векторное поле. Связность ∇ является метрической. Впервые она была описана Э. Картаном в работе [2]. При $V = 0$ связность ∇ совпадает со связностью ∇^g.

Тензор кривизны R и тензор Риччи Ric связности ∇ определяются равенствами

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{tr}\big(Z \to R(X, Z)Y\big)$$

соответственно.

Рассмотрим на полном многообразии M однопараметрическое семейство римановых метрик $g(t)$ и запишем уравнение потока Риччи

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -\mathrm{Ric}\big(g(t)\big). \tag{1}$$

Начало исследованию потока Риччи было положено Р. С. Гамильтоном для связности ∇^g [1]. Известно, что тензор Риччи Ric связности ∇ не является симметричным. По этой причине рассмотрим ситуацию, когда связность ∇ является эквиаффинной, т. е. тензор Риччи Ric симметричен. Согласно источнику [7] в случае групп Ли эквиаффинность эквивалентна равенству

$$V^i g_{ij} c_{kt}^j = 0, \tag{2}$$

где V^i – координаты вектора; g_{ij} – компоненты метрического тензора; c_{kt}^j – структурные константы алгебры Ли, определяемые разложением $[E_k, E_t] = c_{kt}^j E_j$ для некоторого ортобазиса E_i. В инвариантной форме эквиаффинность имеет вид

$$g(V, [X, Y]) = 0.$$

Нетрудно заметить, что наличие нетривиальной эквиаффинной связности ∇ зависит от алгебраического строения группы Ли. Так, в случае с простой группой Ли единственной такой связностью является связность ∇^g, а в случае с коммутативной группой – любая инвариантная связность ∇.

Пусть $M = G$ – группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, g – ее алгебра Ли. Зафиксируем базис $\{E_1, \ldots, E_n\}$ в алгебре g и положим, что

$$[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k, \; g(E_i, E_j) = g_{ij}, \; c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks}.$$

Также зафиксируем некоторое левоинвариантное векторное поле V, с помощью которого определим на группе G связность ∇. Тогда символы Кристоффеля связности ∇ задаются формулами

$$\Gamma_{ij}^k = \left(\Gamma^g\right)_{ij}^k + g_{ij} V^k - g_{sj} V^s \delta_i^k,$$

где $\left(\Gamma^g\right)_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ls}\left(c_{ijl} - c_{jli} + c_{lij}\right)$ – компоненты связности ∇^g; $\left\| g^{ks} \right\|$ – матрица, обратная к матрице $\left\| g_{ks} \right\|$; δ_i^k – символы Кронекера.

Аналогично общему случаю определим тензор кривизны R и тензор Риччи Ric. В базисе $\{E_1, \ldots, E_n\}$ их компоненты есть

$$R_{ijks} = \left(\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p\right) g_{ps},$$

$$\mathrm{Ric}_{ik} = R_{ijks} g^{js}$$

соответственно.

Исследуем поведение потоков Риччи для некоторых классических левоинвариантных римановых метрик на группах Ли малых размерностей.

Полусимметрические эквиаффинные связности на трехмерных неунимодулярных группах Ли

Пусть G – трехмерная неунимодулярная группа Ли. Тогда в алгебре g существует ортобазис $\{E_1, E_2, E_3\}$, называемый базисом Милнора [10], такой, что

$$[E_1, E_2] = \alpha E_1 + \beta E_2, \; [E_1, E_3] = \nu E_2 + (2 - \alpha) E_3.$$

Рассмотрим на группе G однопараметрическое семейство левоинвариантных римановых метрик

$$g(t) = A(t)\left(\theta^1\right)^2 + B(t)\left(\theta^2\right)^2 + C(t)\left(\theta^3\right)^2,$$

где $\{\theta^i\}$ – кобазис к базису Милнора $\{E_i\}$. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма. *Для полусимметрических эквиаффинных связностей на трехмерных неунимодулярных группах Ли имеет место один из следующих возможных случаев.*

1. $V = (0, 0, 0) \; \forall \alpha, \beta, \nu \in \mathbb{R}$.

2. $V = (v_1, 0, 0)$, $v_1 \neq 0$, $\alpha = 0 \; \forall \beta, \nu \in \mathbb{R}$.

3. $V = (0, v_2, 0)$, $v_2 \neq 0$, $\beta = \nu = 0 \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

4. $V = (0, 0, v_3)$, $v_3 \neq 0$, $\alpha = 2 \; \forall \beta, \nu \in \mathbb{R}$.

5. $V = (v_1, v_2, 0)$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $\alpha = \beta = \nu = 0$.

6. $V = (0, v_2, v_3)$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, $\alpha = 2$, $\beta = \nu = 0$.

7. $V=(v_1,\ 0,\ v_3)$, $v_1 \neq 0$, $v_3 \neq 0$ *(в этом случае решений нет).*

8. $V=(v_1,\ v_2,\ v_3)$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, $\alpha = 2$, $\nu = 0$, $A(t) = -\frac{\beta v_2}{2v_1} B(t)$, $\frac{\beta v_2}{2v_1} < 0$.

Доказательство. Учитывая условие эквиаффинности (2), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A(t)\alpha v_1 + B(t)\beta v_2 = 0, \\ B(t)\nu v_2 + C(t)(2-\alpha)v_3 = 0, \\ B(t)\nu v_2 - C(t)(2-\alpha)v_3 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

При $V=(0,\ 0,\ 0)$ система (3) имеет решение для всех $\alpha,\ \beta,\ \nu \in \mathbb{R}$.

При $V=(v_1,\ 0,\ 0)$ система (3) принимает вид $A(t)\alpha v_1 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

При $V=(0,\ v_2,\ 0)$ система (3) сводится к виду

$$\begin{cases} B(t)\beta v_2 = 0, \\ B(t)\nu v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = \nu = 0.$$

При $V=(0,\ 0,\ v_3)$ система (3) имеет вид $C(t)(2-\alpha)v_3 = 0 \Rightarrow \alpha = 2$.

При $V=(v_1,\ v_2,\ 0)$ система (3) принимает вид

$$\begin{cases} A(t)\alpha v_1 + B(t)\beta v_2 = 0, \\ B(t)\nu v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \nu = 0.$$

При $V=(0,\ v_2,\ v_3)$ система (3) сводится к виду

$$\begin{cases} B(t)\beta v_2 = 0, \\ B(t)\nu v_2 + C(t)(2-\alpha)v_3 = 0, \\ B(t)\nu v_2 - C(t)(2-\alpha)v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2,\ \beta = \nu = 0.$$

При $V=(v_1,\ 0,\ v_3)$ система (3) имеет вид

$$\begin{cases} A(t)\alpha v_1 = 0, \\ C(t)(2-\alpha)v_3 = 0. \end{cases}$$

Так как $v_1 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, система относительно α решений не имеет.

При $V=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ система (3) принимает вид

$$\begin{cases} A(t)\alpha v_1 + B(t)\beta v_2 = 0, \\ B(t)\nu v_2 + C(t)(2-\alpha)v_3 = 0, \\ B(t)\nu v_2 - C(t)(2-\alpha)v_3 = 0. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений системы получаем $\alpha = 2$, $\nu = 0$. Подставляя в первое уравнение найденные значения, получаем $A(t) = -\frac{\beta v_2}{2v_1} B(t)$, $\frac{\beta v_2}{2v_1} < 0$.

Решения уравнения потока Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с полусимметрической эквиаффинной связностью

Применяя основную лемму, запишем и решим уравнение потока Риччи для каждого возможного случая.

Теорема. *Пусть G – трехмерная неунимодулярная группа Ли с полусимметрической эквиаффинной связностью. Тогда решения уравнения потока Риччи (1) имеют следующий вид.*

1. В случае если $V = (0,\ 0,\ 0)$ $\forall \beta \in \mathbb{R}$*:*

1.1. При $\alpha = \nu = 0$ *получаем*

$$\begin{cases} A(t) = A_0 - \left(\beta^2 + 4\right)t, \\ B(t) = B_0 \left| \dfrac{\beta^2 + 4}{A_0} t - 1 \right|^{\frac{\beta\left(\beta^2 + 2\right)}{\beta^2 + 4}}, \\ C(t) = C_0 \left| \dfrac{\beta^2 + 4}{A_0} t - 1 \right|^{\frac{2\left(\beta^2 + 2\right)}{\beta^2 + 4}}. \end{cases}$$

1.2. При $\alpha = 2,\ \nu = 0$ *получаем*

$$\begin{cases} A(t) = A_0 - \left(\beta^2 + \dfrac{4A}{B_0}\right)t, \\ B(t) = B_0 - \left(\dfrac{B_0}{A_0}\beta^2 + 4\right)t, \\ C(t) = C_0. \end{cases}$$

2. В случае если $V = (v_1,\ 0,\ 0),\ v_1 \neq 0,\ \alpha = 0$*:*

2.1. При $\nu = 0,\ v_1(\beta + 2) > 0$ *имеем*

$$\begin{cases} A(t) = \left(A_0 + A_1\right)e^{-\lambda t} - A_1, \\ B(t) = B_0 \left| 1 + \dfrac{A_1}{A_0}\left(1 - e^{\lambda t}\right) \right|^{\frac{\beta}{A_1 v_1}} e^{\frac{A_0 + A_1}{\beta + 2} v_1 \left(e^{-\lambda t} - 1\right) - v_1 \beta \left(1 + \frac{4}{\beta + 2}\right)t}, \\ C(t) = C_0 \left| 1 + \dfrac{A_1}{A_0}\left(1 - e^{\lambda t}\right) \right|^{\frac{2}{A_1 v_1}} e^{\frac{A_0 + A_1}{\beta + 2} v_1 \left(e^{-\lambda t} - 1\right) - v_1 \beta \left(3 - \frac{4}{\beta + 2}\right)t}, \end{cases}$$

где $A_1 = \dfrac{\beta^2 + 4}{v_1(\beta + 2)} > 0$*;* $\lambda = v_1(\beta + 2) > 0.$

2.2. При $\nu = 0,\ v_1(\beta + 2) > 0$ *имеем*

$$\begin{cases} A(t) = \pm\left|A_0 - \tilde{A}_1\right| e^{\tilde{\lambda} t} + \tilde{A}_1, \\ B(t) = B_0 \left| \dfrac{\pm\left|A_0 - \tilde{A}_1\right| + \tilde{A}_1 e^{-\tilde{\lambda} t}}{\pm\left|A_0 - \tilde{A}_1\right| + \tilde{A}_1} \right|^{-\frac{\beta}{\tilde{A}_1 v_1}} e^{\pm\left|A_0 - \tilde{A}_1\right| \frac{v_1}{\beta + 2}\left(e^{\tilde{\lambda} t} - 1\right) - v_1 \beta \left(1 + \frac{4}{\beta + 2}\right)t}, \\ C(t) = C_0 \left| \dfrac{\pm\left|A_0 - \tilde{A}_1\right| + \tilde{A}_1 e^{-\tilde{\lambda} t}}{\pm\left|A_0 - \tilde{A}_1\right| + \tilde{A}_1} \right|^{-\frac{2}{\tilde{A}_1 v_1}} e^{\pm\left|A_0 - \tilde{A}_1\right| \frac{v_1}{\beta + 2}\left(e^{\tilde{\lambda} t} - 1\right) - v_1 \beta \left(3 - \frac{4}{\beta + 2}\right)t}, \end{cases}$$

где $\tilde{A}_1 = -\dfrac{\beta^2 + 4}{v_1(\beta + 2)} > 0$*;* $\tilde{\lambda} = -v_1(\beta + 2) > 0.$

3. В случае если $V = (0,\ v_2,\ 0)$, $\beta = \nu = 0$:

3.1. При $\alpha = 0$ *получаем*

$$\begin{cases} A(t) = \left(A_0 + \dfrac{4}{v_2^2 B_0}\right) e^{-v_2^2 B_0 t} - \dfrac{4}{v_2^2 B_0}, \\ B(t) = B_0, \\ C(t) = \dfrac{C_0}{A_0}\left[\left(A_0 + \dfrac{4}{v_2^2 B_0}\right) e^{-v_2^2 B_0 t} - \dfrac{4}{v_2^2 B_0}\right]. \end{cases}$$

3.2. При $\alpha = 2,\ v_2 < 0$ *получаем*

$$\begin{cases} A(t) = A_0 \left| 1 - \dfrac{2}{v_2 B_0} + \dfrac{2}{v_2 B_0} e^{-2 v_2 t} \right| e^{\frac{1}{2}(2 - v_2 B_0)\left(e^{2 v_2 t} - 1\right) + 2 v_2 t}, \\ B(t) = \dfrac{2}{v_2} + \left(B_0 - \dfrac{2}{v_2}\right) e^{2 v_2 t}, \\ C(t) = C_0 e^{\frac{1}{2}(2 - v_2 B_0)\left(e^{2 v_2 t} - 1\right)}. \end{cases}$$

3.3. При $\alpha = 2,\ v_2 > 0$ *получаем*

$$\begin{cases} A(t) = A_0 \left| \dfrac{\dfrac{2}{v_2} e^{-2 v_2 t} \pm \left| B_0 - \dfrac{2}{v_2} \right|}{\dfrac{2}{v_2} \pm \left| B_0 - \dfrac{2}{v_2} \right|} \right| e^{\pm \frac{v_2}{2}\left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right|\left(1 - e^{2 v_2 t}\right) + 2 v_2 t}, \\ B(t) = \dfrac{2}{v_2} \pm \left| B_0 - \dfrac{2}{v_2} \right| e^{2 v_2 t}, \\ C(t) = C_0 e^{\pm \frac{v_2}{2}\left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right|\left(1 - e^{2 v_2 t}\right)}. \end{cases}$$

4. В случае если $V = (0,\ 0,\ v_3)$, $\alpha = 2$, *при* $\nu = 0\ \forall \beta \in \mathbb{R}$ *имеем*

$$\begin{cases} A(t) = \left(A_0 + \dfrac{4A_0 + B_0 \beta^2}{v_3^2 B_0 C_0}\right) e^{-v_3^2 C_0 t} - \dfrac{4A_0 + B_0 \beta^2}{v_3^2 B_0 C_0}, \\ B(t) = \left(B_0 + \dfrac{4A_0 + B_0 \beta^2}{v_3^2 A_0 C_0}\right) e^{-v_3^2 C_0 t} - \dfrac{4A_0 + B_0 \beta^2}{v_3^2 A_0 C_0}, \\ C(t) = C_0. \end{cases}$$

5. В случае если $V = (v_1,\ v_2,\ 0)$, $\alpha = \beta = \nu = 0$, *решений нет.*

6. В случае если $V = (0,\ v_2,\ v_3)$, $\alpha = 2$, $\beta = \nu = 0$, *решений нет.*

7. В случае если $V = (v_1,\ v_2,\ v_3)$, $\alpha = 2$, $\nu = 0$, $A(t) = -\dfrac{\beta v_2}{2 v_1} B(t)$, $\dfrac{\beta v_2}{2 v_1} < 0$, $\beta \neq 0$, *решений нет.*

Доказательство. Докажем теорему для каждого возможного случая.

1. Пусть $V = (0, 0, 0)$. Тогда уравнение потока Риччи имеет вид

$$\begin{cases} \alpha(\alpha - 2) = 0, \\ \alpha\nu = 0, \\ \dfrac{B(t)}{A(t)}\nu(\alpha - 2) = 0, \\ \dfrac{dA}{dt} = -\dfrac{2A(t)C(t)\alpha^2 + B(t)^2\nu^2 + 2B(t)C(t)\alpha^2 - 8B(t)C(t)\alpha + 2B(t)C(t)\beta^2 + 8B(t)C(t)}{2B(t)C(t)}, \\ \dfrac{dB}{dt} = -\dfrac{2A(t)C(t)\alpha^2 - B(t)^2\nu^2 - 2B(t)C(t)\alpha\beta + 2B(t)C(t)\beta^2 + 4B(t)C(t)\beta}{2A(t)C(t)}, \\ \dfrac{dC}{dt} = -\dfrac{B(t)^2\nu^2 + 2C(t)\alpha^2 - 2C(t)\alpha\beta - 8C(t)\alpha + 4C(t)\beta + 8C(t)}{2A(t)}. \end{cases}$$

С учетом системы алгебраических уравнений достаточно рассмотреть следующие случаи.

1.1. Пусть $\alpha = \nu = 0$. Тогда система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -\beta^2 - 4, \\ \dfrac{dB}{dt} = -\dfrac{B(t)\beta(\beta + 2)}{A(t)}, \\ \dfrac{dC}{dt} = -\dfrac{2C(t)(\beta + 2)}{A(t)}. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} A(t) = A_0 - (\beta^2 + 4)t, \\ B(t) = B_0\left|\dfrac{\beta^2 + 4}{A_0}t - 1\right|^{\frac{\beta(\beta^2+2)}{\beta^2+4}}, \\ C(t) = C_0\left|\dfrac{\beta^2 + 4}{A_0}t - 1\right|^{\frac{2(\beta^2+2)}{\beta^2+4}}. \end{cases}$$

1.2. Пусть $\alpha = 2$, $\nu = 0$. Тогда система дифференциальных уравнений сводится к виду

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -\dfrac{4A(t) + B(t)\beta^2}{B(t)}, \\ \dfrac{dB}{dt} = -\dfrac{4A(t) + B(t)\beta^2}{A(t)}, \\ \dfrac{dC}{dt} = 0. \end{cases}$$

Отсюда, разделяя переменные, имеем

$$\begin{cases} A(t) = A_0 - \left(\beta^2 + \dfrac{4A}{B_0}\right)t, \\ B(t) = B_0 - \left(\dfrac{B_0}{A_0}\beta^2 + 4\right)t, \\ C(t) = C_0. \end{cases}$$

2. Пусть $V = (v_1, 0, 0)$, $v_1 \neq 0$, $\alpha = 0$. Тогда уравнение потока Риччи имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{B(t)\left(A(t)v_1 + 4\right)\nu}{2A(t)} = 0, \\ \dfrac{dA}{dt} = -\dfrac{2A(t)C(t)\beta v_1 + 4A(t)C(t)v_1 + B(t)\nu^2 + 2C(t)\beta^2 + 8C(t)}{2C(t)}, \\ \dfrac{dB}{dt} = -B(t)\dfrac{2A(t)^2C(t)v_1^2 + 4A(t)C(t)\beta v_1 + 8A(t)C(t)v_1 - B(t)\nu^2 + 2C(t)\beta^2 + 4C(t)\beta}{2A(t)C(t)}, \\ \dfrac{dC}{dt} = -\dfrac{2A(t)^2C(t)v_1^2 + 4A(t)C(t)\beta v_1 + 8A(t)C(t)v_1 + B(t)\nu^2 + 4C(t)\beta + 8C(t)}{2A(t)}. \end{cases}$$

С учетом системы алгебраических уравнений получаем систему дифференциальных уравнений при $\nu = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -A(t)(\beta + 2)v_1 - \beta^2 - 4, \\ \dfrac{dB}{dt} = -\dfrac{B(t)\left(A(t)v_1 + \beta\right)\left(A(t)v_1 + \beta + 2\right)}{A(t)}, \\ \dfrac{dC}{dt} = -\dfrac{C(t)\left(A(t)v_1 + 2\right)\left(A(t)v_1 + \beta + 2\right)}{A(t)}. \end{cases}$$

Отсюда имеем $\left|A(t) + \dfrac{\beta^2 + 4}{v_1(\beta + 2)}\right| = \left|A_0 + \dfrac{\beta^2 + 4}{v_1(\beta + 2)}\right| e^{-v_1(\beta + 2)t}$.

2.1. Если $v_1(\beta + 2) > 0$, то решение системы дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} A(t) = \left(A_0 + A_1\right)e^{-\lambda t} - A_1, \\ B(t) = B_0\left|1 + \dfrac{A_1}{A_0}\left(1 - e^{\lambda t}\right)\right|^{\frac{\beta}{A_1 v_1}} e^{\frac{A_0 + A_1}{\beta + 2}v_1\left(e^{-\lambda t} - 1\right) - v_1\beta\left(1 + \frac{4}{\beta + 2}\right)t}, \\ C(t) = C_0\left|1 + \dfrac{A_1}{A_0}\left(1 - e^{\lambda t}\right)\right|^{\frac{2}{A_1 v_1}} e^{\frac{A_0 + A_1}{\beta + 2}v_1\left(e^{-\lambda t} - 1\right) - v_1\beta\left(3 - \frac{4}{\beta + 2}\right)t}, \end{cases}$$

где $A_1 = \dfrac{\beta^2 + 4}{v_1(\beta + 2)} > 0$; $\lambda = v_1(\beta + 2) > 0$.

2.2. Если $v_1(\beta + 2) < 0$, то получаем следующее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} A(t) = \pm\left|A_0 - \tilde{A}_1\right| e^{\tilde{\lambda} t} + \tilde{A}_1, \\ B(t) = B_0 \left|\dfrac{\pm\left|A_0 - \tilde{A}_1\right| + \tilde{A}_1 e^{-\tilde{\lambda} t}}{\pm\left|A_0 - \tilde{A}_1\right| + \tilde{A}_1}\right|^{-\frac{\beta}{\tilde{A}_1 v_1}} e^{\pm\left|A_0 - \tilde{A}_1\right| \frac{v_1}{\beta + 2}\left(e^{\tilde{\lambda} t} - 1\right) - v_1 \beta\left(1 + \frac{4}{\beta + 2}\right) t}, \\ C(t) = C_0 \left|\dfrac{\pm\left|A_0 - \tilde{A}_1\right| + \tilde{A}_1 e^{-\tilde{\lambda} t}}{\pm\left|A_0 - \tilde{A}_1\right| + \tilde{A}_1}\right|^{-\frac{2}{\tilde{A}_1 v_1}} e^{\pm\left|A_0 - \tilde{A}_1\right| \frac{v_1}{\beta + 2}\left(e^{\tilde{\lambda} t} - 1\right) - v_1 \beta\left(3 - \frac{4}{\beta + 2}\right) t}, \end{cases}$$

где $\tilde{A}_1 = -\dfrac{\beta^2 + 4}{v_1(\beta + 2)} > 0;\ \tilde{\lambda} = -v_1(\beta + 2) > 0.$

3. Пусть $V = (0,\ v_2,\ 0)$, $v_2 \neq 0$, $\beta = \nu = 0$. Тогда уравнение потока Риччи сводится к виду

$$\begin{cases} \alpha(\alpha - 2) = 0, \\ \dfrac{dA}{dt} = -\dfrac{A(t)B(t)^2 v_2^2 - 2A(t)B(t)\alpha v_2 + A(t)\alpha^2 + B(t)\alpha^2 - 4B(t)\alpha^2 + B(t)}{B(t)}, \\ \dfrac{dB}{dt} = -\alpha\left(B(t)v_2 - \alpha\right), \\ \dfrac{dC}{dt} = -C(t)\dfrac{A(t)B(t)v_2^2 - A(t)\alpha v_2 + \alpha^2 - 4\alpha + 4}{A(t)}. \end{cases}$$

С учетом системы алгебраических уравнений достаточно рассмотреть следующие случаи.

3.1. Пусть $\alpha = 0$. Тогда система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -A(t)B(t)v_2^2 - 4, \\ \dfrac{dB}{dt} = 0, \\ \dfrac{dC}{dt} = -\dfrac{C(t)\left(A(t)B(t)v_2^2 + 4\right)}{A(t)}. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} A(t) = \left(A_0 + \dfrac{4}{v_2^2 B_0}\right) e^{-v_2^2 B_0 t} - \dfrac{4}{v_2^2 B_0}, \\ B(t) = B_0, \\ C(t) = \dfrac{C_0}{A_0}\left[\left(A_0 + \dfrac{4}{v_2^2 B_0}\right) e^{-v_2^2 B_0 t} - \dfrac{4}{v_2^2 B_0}\right]. \end{cases}$$

Пусть $\alpha = 2$. Тогда система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -\dfrac{A(t)\left(B(t)v_2 - 2\right)^2}{B(t)}, \\ \dfrac{dB}{dt} = 2\left(B(t)v_2 - 2\right), \\ \dfrac{dC}{dt} = -v_2 C(t)\left(B(t)v_2 - 2\right). \end{cases}$$

Отсюда имеем $\left|B(t)-\dfrac{2}{v_2}\right|=\left|B_0-\dfrac{2}{v_2}\right|e^{2v_2t}$.

3.2. Если $v_2<0$, то решение системы дифференциальных уравнений сводится к виду

$$\begin{cases} A(t)=A_0\left|1-\dfrac{2}{B_0v_2}+\dfrac{2}{B_0v_2}e^{-2v_2t}\right|e^{\frac{1}{2}(2-v_2B_0)\left(e^{2v_2t}-1\right)+2v_2t}, \\ B(t)=\dfrac{2}{v_2}+\left(B_0-\dfrac{2}{v_2}\right)e^{2v_2t}, \\ C(t)=C_0e^{\frac{1}{2}(2-v_2B_0)\left(e^{2v_2t}-1\right)}. \end{cases}$$

3.3. Если $v_2>0$, то получаем следующее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} A(t)=A_0\left|\dfrac{\dfrac{2}{v_2}e^{-2v_2t}\pm\left|B_0-\dfrac{2}{v_2}\right|}{\dfrac{2}{v_2}\pm\left|B_0-\dfrac{2}{v_2}\right|}\right|e^{\pm\frac{v_2}{2}\left|B_0-\frac{2}{v_2}\right|\left(1-e^{2v_2t}\right)+2v_2t}, \\ B(t)=\dfrac{2}{v_2}\pm\left|B_0-\dfrac{2}{v_2}\right|e^{2v_2t}, \\ C(t)=C_0e^{\pm\frac{v_2}{2}\left|B_0-\frac{2}{v_2}\right|\left(1-e^{2v_2t}\right)}. \end{cases}$$

4. Пусть $V=(0,\,0,\,v_3)$, $v_3\neq 0$, $\alpha=2$, тогда уравнение потока Риччи имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}B(t)\nu v_3=0, \\ 2\nu=0, \\ \dfrac{dA}{dt}=-\dfrac{2A(t)B(t)C(t)^2v_3^2+8A(t)C(t)+B(t)^2\nu^2+2B(t)C(t)\beta^2}{2B(t)C(t)}, \\ \dfrac{dB}{dt}=-\dfrac{2A(t)B(t)C(t)^2v_3^2+8A(t)C(t)-B(t)^2\nu^2+2B(t)C(t)\beta^2}{2A(t)C(t)}, \\ \dfrac{dC}{dt}=-\dfrac{B(t)\nu^2}{2A(t)}. \end{cases}$$

С учетом системы алгебраических уравнений получаем систему дифференциальных уравнений при $\nu=0$

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt}=-\dfrac{A(t)B(t)C(t)v_3^2+4A(t)+B(t)\beta^2}{B(t)}, \\ \dfrac{dB}{dt}=-\dfrac{A(t)B(t)C(t)v_3^2+4A(t)+B(t)\beta^2}{A(t)}, \\ \dfrac{dC}{dt}=0. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} A(t) = \left(A_0 + \dfrac{4A_0 + B_0\beta^2}{v_3^2 B_0 C_0}\right) e^{-v_3^2 c_0 t} - \dfrac{4A_0 + B_0\beta^2}{v_3^2 B_0 C_0}, \\ B(t) = \left(B_0 + \dfrac{4A_0 + B_0\beta^2}{v_3^2 A_0 C_0}\right) e^{-v_3^2 c_0 t} - \dfrac{4A_0 + B_0\beta^2}{v_3^2 A_0 C_0}, \\ C(t) = C_0. \end{cases}$$

5. Пусть $V = (v_1, v_2, 0)$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $\alpha = \beta = \nu = 0$. Тогда уравнение потока Риччи принимает вид

$$\begin{cases} A(t)B(t)v_1 v_2 = 0, \\ \dfrac{dA}{dt} = -A(t)B(t)v_2^2 - 2A(t) - 4, \\ \dfrac{dB}{dt} = -B(t)v_1\big(A(t)v_1 + 2\big), \\ \dfrac{dC}{dt} = -C(t)\dfrac{A(t)^2 v_1^2 + A(t)B(t)v_2^2 + 4A(t)v_2^2 + 4}{B(t)}. \end{cases}$$

Так как $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, система решений не имеет.

6. Пусть $V = (0, v_2, v_3)$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, $\alpha = 2$, $\beta = \nu = 0$. Тогда уравнение потока Риччи сводится к виду

$$\begin{cases} B(t)C(t)v_2 v_3 = 0, \\ \dfrac{dA}{dt} = -\dfrac{A(t)B(t)^2 v_2^2 + B(t)C(t)v_3^2 - 4B(t)v_2 + 4}{B(t)}, \\ \dfrac{dB}{dt} = -B(t)C(t)v_3^2 + 2B(t)v_2 - 4. \end{cases}$$

Так как $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, система решений не имеет.

7. Пусть $V = (v_1, v_2, v_3)$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, $\alpha = 2$, $\nu = 0$, $A(t) = -\dfrac{\beta v_2}{2v_1}B(t)$, $\dfrac{\beta v_2}{2v_1} < 0$. Тогда уравнение потока Риччи принимает вид

$$\begin{cases} B(t)C(t)\beta v_2 v_3 = 0, \\ B(t)C(t)v_2 v_3 = 0, \\ B(t)\beta v_2\big(B(t)v_2 - 1\big) = 0, \\ B(t)\beta v_2\big(B(t)v_2 - 2\big) = 0, \\ \dfrac{dA}{dt} = B(t)^2\dfrac{\beta v_3^3}{v_1} + B(t)C(t)\dfrac{\beta v_2 v_3^2}{v_1} + B(t)\beta^2 v_2 - 4B(t)\dfrac{\beta v_2^2}{v_1} + \beta^2 - \dfrac{4v_2}{v_1}, \\ \dfrac{dB}{dt} = B(t)^2\dfrac{\beta v_1 v_3^2}{v_2} - B(t)C(t)v_3^2 - 2B(t)\beta v_1 + 2B(t)v_2 + \dfrac{\beta v_1}{v_2} - 4, \\ \dfrac{dC}{dt} = C(t)\big(B(t)\beta v_1 v_2 - B(t)v_2^2 - \beta v_1 + v_2\big). \end{cases}$$

С учетом алгебраических и дифференциальных уравнений получаем $\beta = 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$. Отсюда имеем $A(t) = 0$, что является противоречием. Значит, система несовместна.

Заключение

Проведено исследование потока Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с полусимметрической эквиаффинной связностью. Получено явное представление потока Риччи в системе координат, предложенной Дж. Милнором. Найдено точное решение уравнения потока Риччи для трехмерных неунимодулярных групп Ли с полусимметрической эквиаффинной связностью.

Библиографические ссылки

1. Hamilton RS. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry.* 1982;17(2):255–306. DOI: 10.4310/JDG/1214436922.

2. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie). *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure.* 1925;42:17–88.

3. Onda K. Ricci flow on 3-dimensional Lie groups and 4-dimensional Ricci-flat manifolds. arXiv:0906.1035 [Preprint]. 2010 [cited 2010 March 24]: [25 p.]. Available from: https://arxiv.org/abs/0906.1035.

4. Knopf D, McLeod K. Quasi-convergence of model geometries under the Ricci flow. *Communications in Analysis and Geometry.* 2001;9(4):879–919. DOI: 10.4310/CAG.2001.v9.n4.a7.

5. Klepikov PN, Rodionov ED, Khromova OP. Einstein's equation on three-dimensional metric Lie groups with vector torsion. *Journal of Mathematical Sciences.* 2023;276(6):733–745. DOI: 10.1007/s10958-023-06796-1.

6. Павлова АА, Хромова ОП. О симметрических потоках Риччи полусимметрических связностей на трехмерных метрических группах Ли. В: Казанский (Приволжский) федеральный университет. *Материалы международной конференции «Лобачевские чтения»; 30 июня – 4 июля 2022 г.; Казань, Россия.* Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета; 2022. с. 96–97 (Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского; том 62).

7. Клепиков ПН, Родионов ЕД, Хромова ОП. Инвариантные солитоны Риччи на метрических группах Ли с полусимметрической связностью. *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры.* 2023;222: 19–29. DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-19-29.

8. Клепиков ПН, Родионов ЕД, Хромова ОП. Инвариантные солитоны Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью. *Сибирские электронные математические известия.* 2023;20(1):48–61. DOI: 10.33048/semi.2023.20.005.

9. Клепиков ПН, Родионов ЕД, Хромова ОП. Трехмерные неунимодулярные группы Ли с римановой метрикой инвариантного солитона Риччи и полусимметрической метрической связностью. *Известия вузов. Математика.* 2022;5:80–85. DOI: 10.26907/0021-3446-2022-5-80-85.

10. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups. *Advances in Mathematics.* 1976;21:293–329.

Получена 25.03.2025 / исправлена 20.06.2025 / принята 20.06.2025.
Received 25.03.2025 / revised 20.06.2025 / accepted 20.06.2025.