
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 517.925.42

ОБ ИЗОХРОНАХ ГРУБОГО ФОКУСА

А. Е. РУДЕНОК¹⁾, М. Н. ВАСИЛЕВИЧ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Проводится анализ методов исследования изохронности автономных систем на плоскости для различных типов особых точек: центра, негрубого фокуса, грубого фокуса. Объясняется, в чем состоит сложность при определении негрубого изохронного фокуса. Приводятся примеры систем в виде нормальной формы Пуанкаре – Дюлака, которые показывают, что требование быть изохронной накладывает на систему с негрубым фокусом слабые ограничения. Доказывается теорема о виде нормализующей замены сильно изохронного грубого фокуса. Находятся изохроны сильно изохронного грубого фокуса системы с квадратичными нелинейностями. Строятся фазовые портреты полученных изохронных фокусов и их изохрон.

Ключевые слова: центр; негрубый фокус; грубый фокус; изохронность; изохроны; нормальная форма Пуанкаре – Дюлака; система с квадратичными нелинейностями.

Образец цитирования:

Руденок АЕ, Василевич МН. Об изохронах грубого фокуса. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;2:16–29. EDN: JOWYSK

For citation:

Rudenok AE, Vasilevich MN. About isochrons of strong focus. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;2:16–29. Russian. EDN: JOWYSK

Авторы:

Александр Евгеньевич Руденок – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета.

Михаил Николаевич Василевич – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета.

Authors:

Alexander E. Rudenok, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of differential equations and system analysis, faculty of mechanics and mathematics. rudenok@bsu.by

Mikhail N. Vasilevich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of differential equations and system analysis, faculty of mechanics and mathematics. vasilevich.m@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6618-8649>

ABOUT ISOCHRONS OF STRONG FOCUS

A. E. RUDENOK^a, M. N. VASILEVICH^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: A. E. Rudenok (roudenok@bsu.by)

Abstract. The article analyses the methods for studying the isochronism of autonomous systems on a plane for different types of singular points: centre, weak focus and strong focus. The difficulty of determining a weak isochronous focus is explained. Examples of systems in the Poincaré – Dulac normal form, which show that the requirement to be isochronous imposes weak restrictions on a system with a weak focus, are given. A theorem on the form of a normalising change of a strongly isochronous strong focus is proved. Isochrones of a strongly isochronous strong focus of a system with quadratic nonlinearities are found. Phase portraits of the obtained isochronous foci and their isochrones are constructed.

Keywords: centre; weak focus; strong focus; isochronism; isochrones; Poincaré – Dulac normal form; system with quadratic nonlinearities.

Введение

Определение 1. Изохронной [1] называется автономная система на плоскости, особая точка $O(0, 0)$ которой является центром или фокусом и для которой существует гладкая кривая γ , исходящая из особой точки и трансверсальная к векторному полю системы, такая, что в некоторой довольно малой окрестности особой точки $O(0, 0)$ любая точка, движущаяся по траектории системы (изображающая точка), совершает полный оборот (от γ до γ) за одно и то же время T .

Период T равен 2π для систем с линейной частью $(-y + \lambda x, x + \lambda y)$. В работе [2] кривая γ называется t -кривой. В дальнейшем будем использовать следующие определения.

Определение 2. Кривая γ называется изохронным сечением [3].

Определение 3. Если обе полупрямые некоторой прямой, проходящей через начало координат, являются одновременно изохронными сечениями системы, то система называется сильно изохронной относительно этой прямой [1].

Определение 4. Система называется равномерно изохронной, если угловая скорость всех изображающих точек постоянна [1]. Для систем с линейной частью $(-y + \lambda x, x + \lambda y)$ она равна единице.

Статьи, в которых рассматривается проблема изохронности дифференциальных плоских голоморфных систем, можно объединить в три группы.

В публикациях первой, самой большой группы рассматриваются изохронные центры. Задача об изохронности центра берет начало со времен Х. Гюйгенса [4]. С тех пор получили развитие такие методы исследования, как переход к нормальной форме (как правило, это линейная система [5] или система с равномерной изохронностью [2; 6; 7]) и использование коммутирующих систем [8–11].

Работы второй группы посвящены изохронным негрубым фокусам. Статей на эту тему на порядок меньше, что связано с расхождениями в определении изохронного негрубого фокуса.

Определение 5. Негрубый фокус аналитической системы называется изохронным, если существует замена координат вида $v = y + \sum_{i+j=2}^{\infty} B_{ij} x^i y^j$, $u = x + \sum_{i+j=2}^{\infty} A_{ij} x^i y^j$, переводящая систему в систему с равномерной изохронностью [3; 6; 7].

Основное разногласие состоит в том, каким в определении изохронного негрубого фокуса считать преобразование координат – сходящимся [6; 7] или формальным (расходящимся) [3]. Авторы публикации [3] указывают, что если особая точка $O(0, 0)$ есть фокус аналитической системы, то в общем случае нельзя гарантировать наличие сходящегося преобразования. Значит, может существовать аналитическое векторное поле, особая точка $O(0, 0)$ которого является изохронным фокусом, но которое не удовлетворяет определению, приведенному в работе [6].

Заметим, что если считать нормализующее преобразование сходящимся, то, как будет показано ниже, изохронный фокус, имеющий в качестве изохронного сечения полупрямую, имеет в качестве этого и всю прямую. Отсюда следует, что если нормализующее преобразование сходится, то негрубый фокус с полупрямой в качестве изохронного сечения является сильно изохронным относительно прямой. Возможно, данное свойство справедливо и в случае с формальным нормализующим преобразованием, но это

до сих пор не доказано. Ниже будет обосновано, что этим свойством обладают грубые фокусы, а также изохронные центры и негрубые фокусы систем с нечетными нелинейностями в правых частях [12].

Если считать преобразование в нормальную форму формальным, то изохронные сечения системы, как прообраз радиальных прямых (изохронных сечений формальной системы с равномерной изохронностью), не определены. Существуют ли тогда изохронные сечения исходной системы? Иными словами, является ли она на самом деле изохронной?

Отметим, что сильная изохронность центров и негрубых фокусов автономных плоских систем изучалась в работах [12–18].

В статьях третьей группы описывается изохронность грубых фокусов [18; 19]. Известно (см., например, публикацию [11]), что существует аналитическая замена декартовых координат, переводящая систему в окрестности грубого фокуса в линейную систему. Следовательно, в силу определения 5 грубый фокус всегда является изохронным. Однако в практическом смысле знание этого факта не представляется значимым без знания об изохронных сечениях. Поставим вопрос: «Где будет находиться точка, движущаяся по траектории грубого фокуса, через время, равное полупериоду?» Отвечая на него, можно сказать, что точка будет находиться на проходящем через начало координат аналитическом продолжении того изохронного сечения, на котором она находилась в начальный момент.

Нормальная форма Пуанкаре – Дюлака

Авторы работы [3] заметили, что нормальная форма Пуанкаре – Дюлака для критической точки плоского векторного поля может быть использована в целях изучения проблемы центра, изохронного центра и изохронного фокуса. Нормальная форма Пуанкаре – Дюлака определяется следующей теоремой.

Теорема 1 [20, с. 23; 21, с. 70–72]. *Для системы*

$$\dot{x} = -y + f(x, y), \quad \dot{y} = x + g(x, y) \quad (1)$$

с голоморфными функциями f, g , разложения которых начинаются со степеней ≥ 2 , существует формальная замена переменных

$$u = x + \sum_{i+j=2}^{\infty} A_{ij} x^i y^j, \quad v = y + \sum_{i+j=2}^{\infty} B_{ij} x^i y^j, \quad (2)$$

приводящая эту систему к системе, которая в полярных координатах имеет вид

$$\dot{r} = rF(r^2), \quad \dot{\phi} = 1 - G(r^2), \quad (3)$$

где

$$F(r^2) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i r^{2i}, \quad G(r^2) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i r^{2i} \quad (4)$$

есть формальные ряды.

Система (3) и ее декартов аналог называются нормальной формой Пуанкаре – Дюлака системы (1). Ниже, используя нормальную форму Пуанкаре – Дюлака, будем говорить о проблеме, которая возникает при постановке задачи об изохронности негрубого фокуса.

Коэффициенты a_i в формальных рядах (4) именовются радиальными постоянными (постоянными Ляпунова, фокусными величинами) системы (1), а коэффициенты b_i – угловыми постоянными этой системы. Из выражения (4) вытекает следующее утверждение.

Утверждение. Для того чтобы система (1) имела в особой точке $O(0, 0)$ изохронный центр, необходимо и достаточно, чтобы все ее радиальные и угловые постоянные обращались в нуль.

Из утверждения следует, что для системы (1) с центром в особой точке $O(0, 0)$ угловые постоянные являются инвариантами при преобразованиях вида (2). Можно предположить, что это верно для системы (1) с негрубым фокусом в особой точке $O(0, 0)$, т. е. для того чтобы система (1) имела в особой точке $O(0, 0)$ изохронный фокус в смысле определения 5, необходимо и достаточно, чтобы все ее угловые постоянные обращались в нуль. На самом деле это не так, что показывают следующие примеры.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y \left(1 - n(x^2 + y^2)^2 \right) + kx(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= x \left(1 - n(x^2 + y^2)^2 \right) + ky(x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (5)$$

траектории и изохроны которой представлены на рис. 1. В полярных координатах система (5) есть

$$\dot{r} = kr^3, \quad \dot{\varphi} = 1 - nr^4. \quad (6)$$

Системы (5) и (6) являются нормальной формой Пуанкаре – Дюлака. Из первого уравнения системы (6) следует, что если $k \neq 0$, то особая точка $O(0, 0)$ является фокусом системы (5). Легко показать, что замена $\omega = \varphi + \frac{n}{2k}r^2$ переводит систему (6) в систему $\frac{dr}{dt} = kr^3, \quad \frac{d\omega}{dt} = 1$. Значит, особая точка $O(0, 0)$ является изохронным фокусом системы (5) несмотря на то, что угловая постоянная n системы не равна нулю. В декартовых координатах замена $\omega = \varphi + \frac{n}{2k}r^2$ имеет вид

$$u = x - y \operatorname{tg} \frac{n}{2k}(x^2 + y^2), \quad v = y + x \operatorname{tg} \frac{n}{2k}(x^2 + y^2).$$

Эта аналитическая замена переводит систему (5) в систему с равномерной изохронностью.

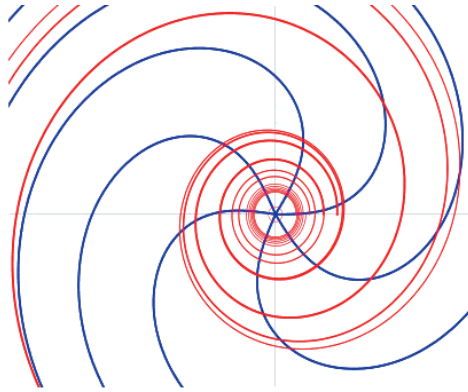


Рис. 1. Траектории и изохроны системы (5)
Fig. 1. Trajectories and isochrons of the system (5)

Пример 2. Рассмотрим систему, нормальная форма Пуанкаре – Дюлака которой в полярных координатах имеет вид

$$\frac{dr}{dt} = kr^3 + mr^5, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1 - Kr^4 - Mr^6. \quad (7)$$

Предположим, что $km \neq 0$. Замена

$$\omega = \varphi + \frac{Mr^2}{2m} + \frac{k(Km - kM) \ln\left(1 + \frac{mr^2}{k}\right)}{2km^2} \quad (8)$$

переводит систему (7) в систему $\frac{dr}{dt} = kr^3 + mr^5, \quad \frac{d\omega}{dt} = 1$. Следовательно, особая точка $O(0, 0)$ является изохронным фокусом как исходной системы, так и ее нормальной формы (7). В декартовых координатах замена (8) имеет вид

$$u = x - y \operatorname{tg} \left(\frac{M(x^2 + y^2)}{2m} + \frac{k(Km - kM) \ln\left(1 + \frac{m}{k}(x^2 + y^2)\right)}{2km^2} \right),$$

$$v = y + x \operatorname{tg} \left(\frac{M(x^2 + y^2)}{2m} + \frac{k(Km - kM) \ln\left(1 + \frac{m}{k}(x^2 + y^2)\right)}{2km^2} \right)$$

и является аналитической в окрестности начала координат.

Пример 3. Рассмотрим систему, нормальная форма Пуанкаре – Дюлака которой в полярных координатах имеет вид (3) и (4). Применим к системе (3) замену

$$\omega = \varphi + \sum_{i=1}^{\infty} c_i r^{2i} \quad (9)$$

такую, что $\frac{d\omega}{dt} = 1$. После преобразований получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} - 1 &= r^4 \left(\sum_{i=0}^{\infty} r^{2i} a_{i+1} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} 2(i+1) r^{2i} c_{i+1} \right) - \sum_{i=1}^{\infty} b_i r^{2i} = \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} r^{2i} a_{i+1} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} 2(i+1) r^{4+2i} c_{i+1} \right) - b_1 r^2 - \sum_{i=0}^{\infty} b_{i+2} r^{4+2i} = \\ &= -b_1 r^2 + \sum_{i=0}^{\infty} (2(i+1) a_{i+1} c_{i+1} - b_{i+2}) r^{4+2i} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} r^{2i-2} a_{i+1} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} 2(i+1) r^{6+2i} c_{i+1} \right) = \\ &= -b_1 r^2 + (-b_2 + 2a_1 c_1) r^4 + \sum_{i=1}^{\infty} (2(i+1) a_{i+1} c_{i+1} - b_{i+2}) r^{4+2i} + \left(\sum_{i=0}^{\infty} r^{2i} a_{i+2} \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2i r^{4+2i} c_i \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Приравняв к нулю коэффициенты при r^{4+2i} , $i \geq 0$, в равенстве (10), определим коэффициенты c_i в предположении, что

$$b_1 = 0, a_1 \neq 0. \quad (11)$$

Коэффициент $c_1 = \frac{b_2}{2a_1}$ выражается из второго слагаемого равенства (10). Предположим, что коэффициенты c_i уже вычислены. Заметим, что коэффициент c_{i+1} , $i \geq 1$, находится в третьем слагаемом равенства (10), а в четвертом слагаемом содержатся уже вычисленные коэффициенты c_i . Отсюда следует, что, учитывая выполнение второго условия (11), можно однозначно найти коэффициент c_{i+1} .

В декартовых координатах замена (9) имеет вид

$$u = x - y \sum_{i=1}^{\infty} c_i (x^2 + y^2)^i, v = y + x \sum_{i=1}^{\infty} c_i (x^2 + y^2)^i.$$

Из определения 5 следует, что при условиях (11) особая точка $O(0, 0)$ является изохронным фокусом как исходной системы, так и ее нормальной формы (3).

С учетом условий (11) можно сделать вывод о том, что определение 5 накладывает на систему с негрубым фокусом слабые ограничения. На наш взгляд, задача при таких ограничениях становится малоинтересной. В то же время задача о построении системы с фокусом и заданным изохронным сечением представляет несомненный интерес.

Замечание 1. Существует определение изохронного фокуса, отличное от определения 5. Например, в работах [12–15; 20] и других публикациях изохронным фокусом называется фокус, имеющий в качестве изохронного сечения полупрямую.

Изохроны грубых фокусов

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + \lambda x + P(x, y), \frac{dy}{dt} = x + \lambda y + Q(x, y), \quad (12)$$

где $\lambda \neq 0$; P, Q – голоморфные в окрестности особой точки $O(0, 0)$ функции, начинающиеся со степеней ≥ 2 . Пусть $\Gamma_k : \gamma_k(x, y) = 0$ – голоморфное в окрестности особой точки $O(0, 0)$ семейство кривых без контакта с полем направлений системы, пересекающихся в особой точке $O(0, 0)$ с разными угловыми коэффициентами $k \in (-\infty, +\infty)$, включая $k = \pm\infty$.

Определение 6. Кривые Γ_k называются изохронами системы (12) в окрестности особой точки $O(0, 0)$, если траектории системы пересекают сектор между двумя любыми кривыми $\Gamma_{k_1}, \Gamma_{k_2}$ за одно и то же время. Обоснованием определения 6 служит теорема Пуанкаре, которая имеет следующий вид.

Теорема 2 [11]. *Существует голоморфная замена*

$$u = x + U(x, y), v = y + V(x, y), \quad (13)$$

переводящая систему (1) в систему

$$\frac{du}{dt} = -v + \lambda u, \quad \frac{dv}{dt} = u + \lambda v. \quad (14)$$

В замене (13) $U(x, y), V(x, y)$ – функции без постоянных и линейных членов.

Система (14) в полярных координатах есть

$$\frac{dr}{dt} = \lambda r, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1. \quad (15)$$

Из системы (15) следует, что система (14) имеет равномерную изохронность, а ее изохронами являются радиальные прямые.

Лемма 1. Система

$$\frac{du}{dt} = -v + \lambda u + A(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = u + \lambda v + B(u, v) \quad (16)$$

является равномерно изохронной, если выполняется условие

$$vA(u, v) - uB(u, v) = 0. \quad (17)$$

Доказательство. В полярных координатах второе уравнение системы (16), для которой выполняется условие (17), принимает вид $\frac{d\varphi}{dt} = 1$, где φ – угловая переменная.

Из теоремы 2 следует, что голоморфная система (12), имеющая грубый фокус в начале координат, является изохронной, а ее изохроны есть прообраз радиальных прямых при осуществлении замены (13), т. е. семейство кривых

$$\Gamma_k : \{y + V(x, y) = k(x + U(x, y)), k \in (-\infty, +\infty)\} \cup \{x + U(x, y) = 0\}. \quad (18)$$

Следствие 1. Два любых изохронных сечения семейства (18) с одним и тем же угловым коэффициентом k в начале координат являются аналитическим продолжением друг друга.

Точка O пересекает изохрону Γ_k на две дуги (два изохронных сечения) – Γ_k^+ и Γ_k^- .

Следствие 2. Если траектория системы (12) пересекает дугу Γ_k^+ при значении $t = t_0$, то она пересекает дугу Γ_k^- при значении $t = t_0 + \pi$.

Лемма 2. Если замена (13) переводит систему (12) в систему с равномерной изохронностью, то замена

$$u = (x + U(x, y))(1 + W(x, y)), \quad v = (y + V(x, y))(1 + W(x, y)), \quad (19)$$

где $W(x, y)$ – голоморфная функция, при этом $W(0, 0) = 0$, также переводит систему (12) в систему с равномерной изохронностью.

Доказательство. Если замена (13) переводит точку $A(x_0, y_0)$ в точку (u_0, ku_0) на прямой $v = ku$, то замена (19) переводит точку A в точку $((1 + W(x_0, y_0))u_0, k(1 + W(x_0, y_0))u_0)$ на той же прямой.

Теорема 3. Для системы (12) среди голоморфных семейств изохрон семейство (18) является единственным.

Доказательство. Предположим, что существует голоморфное семейство изохрон H_k системы (12), отличное от семейства изохрон Γ_k . Тогда в любой малой окрестности Ω начала координат существует точка A пересечения каких-либо двух несовпадающих изохрон (например, Γ_{k_1} и H_{k_2} , $\Gamma_{k_1} \neq H_{k_2}$). Можно считать, что точка A – единственная точка пересечения этих изохрон в окрестности Ω , иначе такие точки будут существовать в любой малой окрестности начала координат, и тогда $\Gamma_{k_1} = H_{k_2}$ по теореме о единственности [21, с. 73–74]. В случае если движение начинается с точки A , траектория системы (12) через период $T = 2\pi$ должна оказаться, не покидая окрестности Ω (в противном случае можно заменить t на $-t$), как на изохроне Γ_{k_1} , так и на изохроне H_{k_2} , что невозможно.

Определение 7. Если среди изохронных сечений системы (12) имеется полуось Ox^+ , то будем говорить, что особая точка $O(0, 0)$ является изохронной относительно данной полуоси. Если она при этом является изохронной и относительно полуоси Ox^- , то будем называть особую точку $O(0, 0)$ сильно изохронной относительно оси Ox .

Теорема 4. Если система (12) является изохронной, то существует замена вида $v = y - f(x)$, которая переводит систему в сильно изохронную относительно оси Ox систему. Здесь f – голоморфная в окрестности $x = 0$ функция, начинающаяся со степени ≥ 2 .

Доказательство. Пусть $\Gamma_0 : y = f(x)$ – кривая из семейства (18), не являющаяся осью Ox . Точка O пересекает кривую Γ_0 на две дуги – Γ_0^+ и Γ_0^- . Из следствия 2 известно, что если траектория системы (12) пересекает дугу Γ_0^+ при значении $t = t_0$, то она пересекает дугу Γ_0^- при значении $t = t_0 + \pi$. Замена $v = y - f(x)$ переводит изохрону Γ_0 в ось Ox , а систему (12) – в сильно изохронную относительно оси Ox систему.

Теорема 5. Для того чтобы особая точка $O(0, 0)$ системы (12) была изохронной относительно полуоси Ox^+ , необходимо и достаточно, чтобы существовала голоморфная замена

$$u = x + U(x, y), v = y, \quad (20)$$

которая переводит систему (12) в систему с равномерной изохронностью. При этом особая точка $O(0, 0)$ является сильно изохронной относительно оси Ox .

Доказательство. Необходимость. Пусть особая точка $O(0, 0)$ системы (12) является изохронной относительно полуоси Ox^+ . Замена (13) переводит изохронное сечение Ox^+ системы (1) в изохронное сечение Ou^+ системы с равномерной изохронностью, обозначенной как NF, так как замена (13) сохраняет угловой коэффициент касательной в особой точке $O(0, 0)$. Следовательно, преобразование путем применения замены (13) имеет вид

$$u = x + U(x, y), v = y(1 + V(x, y)), \quad (21)$$

где $V(x, y)$ – голоморфная функция, при этом $V(0, 0) = 0$. Из преобразования (21) следует, что прообраз изохроны Ou системы NF есть ось Ox , т. е. особая точка $O(0, 0)$ системы (12) является сильно изохронной. Рассмотрим преобразование системы

$$u = \frac{x + U(x, y)}{1 + V(x, y)}, v = y,$$

которое имеет вид (20). В соответствии с леммой 2 оно также переводит систему (12) в систему NF.

Достаточность. Доказательство достаточности очевидно.

Сильная изохронность грубого фокуса системы с квадратичными нелинейностями

Рассмотрим систему с квадратичными нелинейностями и грубым фокусом в особой точке $O(0, 0)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \lambda x + (a + k)x^2 + (b + c - 2m)xy + (d - k)y^2 = -y + \lambda x + p(x, y), \\ \dot{y} &= x + \lambda y - (c + m)x^2 + (a - d - 2k)xy + (b + m)y^2 = x + \lambda y + q(x, y). \end{aligned} \quad (22)$$

Система (22) получена из равносильной системы

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \lambda r + r^2(a \cos \varphi + b \sin \varphi + k \cos 3\varphi - m \sin 3\varphi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= 1 - r(c \cos \varphi + d \sin \varphi + m \cos 3\varphi + k \sin 3\varphi) \end{aligned}$$

переходом от полярных координат к декартовым.

Замечание 2. Ниже исключим из рассмотрения случай равномерной изохронности системы (22):

$$\dot{x} = -y + x\lambda + x(by + ax\lambda), \quad \dot{y} = x + y\lambda + y(by + ax\lambda).$$

Теорема 6. Для того чтобы система (22) была сильно изохронной относительно оси Ox , необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в одном из следующих видов:

- 1) $\dot{x} = -y + x\lambda - 4cx(-2y + x\lambda), \dot{y} = x + y\lambda - 4c(x^2 - 4y^2 + 2xy\lambda);$
- 2) $\dot{x} = -y + x\lambda - c(-2xy + (x^2 - y^2)\lambda), \dot{y} = x + y\lambda - c(x^2 - y^2 + 2xy\lambda);$
- 3) $\dot{x} = -y + \lambda x + 4c\lambda(2(2 + s^2)xy - s^2x^2\lambda + y^2(2s + \lambda)), \dot{y} = x + \lambda y + 4c\lambda(y^2 + 2sy(2x + y\lambda) - s^2(x^2 - 4y^2 + 2xy\lambda));$

$$4) \dot{x} = -y + \lambda x + \frac{4}{15} \left(5sy(4x + y\lambda) + 2\beta(6x^2\lambda - y^2\lambda + xy(2 + 3\lambda^2)) \right), \dot{y} = x + \lambda y + \frac{4}{15} y \left(5sy + \beta(y + 6x\lambda + 3y\lambda^2) \right).$$

Здесь λ, c, β, s – параметры системы. Соответствующие преобразования, полученные путем выполнения замены (20), имеют следующий вид:

$$1) u = x(1 - 4cx), v = y;$$

$$2) u = x - c(x^2 + y^2), v = y;$$

$$3) u = x - 4c(sx - y)^2\lambda, v = y;$$

$$4) u = x - \frac{4y((\beta + 5s)y + 3\beta x\lambda)}{3(5 + 4\beta y\lambda)}, v = y.$$

Доказательство. *Необходимость.* Применим замену (20) к системе (22) и, сохранив в правых частях координаты x, y , получим систему

$$\frac{du}{dt} = (1 + U'_x(x, y))(-y + \lambda x + p(x, y)) + (1 + U'_y(x, y))(x + \lambda y + q(x, y)),$$

$$\frac{dv}{dt} = (x + \lambda y + q(x, y)).$$

С учетом замены (20) выразим из нее функции A и B (см. систему (16)):

$$A = p(x, y) - \lambda U(x, y) + (x + y\lambda + q(x, y))U'_y(x, y) + (-y + x\lambda + p(x, y))U'_x(x, y),$$

$$B = q(x, y) - U(x, y). \quad (23)$$

Потребуем выполнения условия (17). Пусть

$$U = x + \sum_{i=2}^{\infty} V_i(x, y), V_j(x, y) = \sum_{i=0}^j v_{i, j-i} x^i y^{j-i}, \quad (24)$$

где $V_i(x, y)$ – однородные многочлены i -й степени; $v_{i, j-i}$ – постоянные. С учетом функций (23) и (24) запишем левую часть равенства (17) в переменных (x, y) (ограничимся многочленами $V_i(x, y)$ до степени $i = 3$ и опустим переменные (x, y) в правой части) и получим

$$S(x, y) = yp - xq + xV_2 - y\lambda V_2 - qV_2 + V_2^2 + xV_3 - y\lambda V_3 - qV_3 + 2V_2V_3 + V_3^2 + xyV_2^{(0,1)} +$$

$$+ y^2\lambda V_2^{(0,1)} + yqV_2^{(0,1)} + xyV_3^{(0,1)} + y^2\lambda V_3^{(0,1)} + yqV_3^{(0,1)} - y^2V_2^{(1,0)} + xy\lambda V_2^{(1,0)} +$$

$$+ yp(x, y)V_2^{(1,0)} - y^2V_3^{(1,0)} + xy\lambda V_3^{(1,0)} + ypV_3^{(1,0)} + \dots$$

Использував однородность многочленов

$$p(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 p(x, y), q(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 q(x, y), V_i(\alpha x, \alpha y) = \alpha^i V_i(x, y),$$

$$V_i^{(0,1)}(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{i-1} V_i^{(0,1)}(x, y), V_i^{(1,0)}(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{i-1} V_i^{(1,0)}(x, y),$$

выразим список коэффициентов $S(\alpha x, \alpha y)$ по переменной α (ограничимся степенью 4 по переменным (x, y) и опустим их в выражении функций):

$$yp - xq + xV_2 - y\lambda V_2 + xyV_2^{(0,1)} + y^2\lambda V_2^{(0,1)} - y^2V_2^{(1,0)} + xy\lambda V_2^{(1,0)} = 0,$$

$$-qV_2 + V_2^2 + xV_3 - y\lambda V_3 + yqV_2^{(0,1)} + xyV_3^{(0,1)} + y^2\lambda V_3^{(0,1)} +$$

$$+ ypV_2^{(1,0)} - y^2V_3^{(1,0)} + xy\lambda V_3^{(1,0)} = 0, \dots$$

Подставив выражения p, q из системы (22) и выражение $V_j(x, y)$ из функций (24), получим системы

$$\left\{ \begin{aligned} d - k + \lambda v_{0,2} - v_{1,1} &= 0, c - 3m + 3v_{0,2} + \lambda v_{1,1} - 2v_{2,0} = 0, \\ d + 3k + 2v_{1,1} + \lambda v_{2,0} &= 0, c + m + v_{2,0} = 0 \end{aligned} \right\},$$

$$\left\{ \begin{aligned} &bv_{0,2} + mv_{0,2} + v_{0,2}^2 + 2\lambda v_{0,3} + dv_{1,1} - kv_{1,1} - v_{1,2} = 0, \\ &av_{0,2} - dv_{0,2} - 2kv_{0,2} + 4v_{0,3} + bv_{1,1} + cv_{1,1} - \\ &- 2mv_{1,1} + 2v_{0,2}v_{1,1} + 2\lambda v_{1,2} + 2dv_{2,0} - 2kv_{2,0} - 2v_{2,1}, \\ &- cv_{0,2} - mv_{0,2} + av_{1,1} + kv_{1,1} + v_{1,1}^2 + v_{1,2} + \\ &+ bv_{2,0} + 2cv_{2,0} - 5mv_{2,0} + 2v_{0,2}v_{2,0} + 2\lambda v_{2,1} - 3v_{3,0}, \\ &av_{2,0} + dv_{2,0} + 4kv_{2,0} + 2v_{1,1}v_{2,0} + 2v_{2,1} + 2\lambda v_{3,0} = 0, \\ &cv_{2,0} + mv_{2,0} + v_{2,0}^2 + v_{3,0} = 0 \end{aligned} \right\}, \dots$$

Решив каждую систему относительно $v_{i,j-i}$, $i = \overline{0}, j = \overline{2, 9}$, получим идеал

$$\begin{aligned} J = & \left\{ 9d + 3k - 9c\lambda - m\lambda + d\lambda^2 + 3k\lambda^2 - c\lambda^3 - m\lambda^3, \right. \\ & -48bc + 48c^2 - 6ad - 15d^2 - 18ak - 24dk + 63k^2 + 64m^2 + 54ac\lambda + \\ & + 15bd\lambda + 3cd\lambda + 45bk\lambda - 153ck\lambda + 30am\lambda + 46dm\lambda - 48km\lambda - \\ & - 27bc\lambda^2 + 72c^2\lambda^2 - 9ad\lambda^2 + 10d^2\lambda^2 - 27ak\lambda^2 + 51dk\lambda^2 + 63k^2\lambda^2 - \\ & - 27bm\lambda^2 + 161cm\lambda^2 + 89m^2\lambda^2 + 21ac\lambda^3 - 23cd\lambda^3 - 48ck\lambda^3 + \\ & \left. + 21am\lambda^3 - 23dm\lambda^3 - 48km\lambda^3 + 25c^2\lambda^4 + 50cm\lambda^4 + 25m^2\lambda^4, \dots \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

многообразии которого дает условия на коэффициенты многочленов p, q , при которых система (22) является сильно изохронной относительно оси Ox . Заметим, что в формате A4 этот идеал занимает 50 страниц, поэтому его полное представление невозможно и остальные семь образующих идеала J мы не приводим. Читатель может вычислить их с помощью любой системы компьютерной алгебры (*Mathematica, Maple* и т. д.). В частности, восьмая образующая идеала J состоит из 3142 слагаемых степеней 5, 7, 8, 8, 8, 8, 10 по переменным $b, a, c, d, m, k, \lambda$ соответственно.

Если предположить, что $\lambda > 0$, то следует выполнить замену

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow \sqrt{\lambda}, d \rightarrow d\sqrt{\lambda}, k \rightarrow k\sqrt{\lambda}, a \rightarrow a\sqrt{\lambda}, m \rightarrow 3k + m(\lambda + 9), \\ c &\rightarrow d - m(\lambda + 1), b \rightarrow -(2a - 3d + 9m) + b(\lambda + 4). \end{aligned} \quad (26)$$

Если предположить, что $\lambda < 0$, то необходимо применить замену

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow -\sqrt{\lambda}, d \rightarrow -d\sqrt{\lambda}, k \rightarrow -k\sqrt{\lambda}, a \rightarrow -a\sqrt{\lambda}, m \rightarrow 3k + m(\lambda + 9), \\ c &\rightarrow d - m(\lambda + 1), b \rightarrow -(2a - 3d + 9m) + b(\lambda + 4). \end{aligned} \quad (27)$$

Для новых переменных $Z = (\lambda, b, a, d, m, k)$, находящихся в заменах справа, сохранены старые обозначения. В обеих заменах первый член идеала (25) обращается в нуль и идеал J переводится в идеал

$$\begin{aligned} j = & \left\{ 2ad - 4bd - 2d^2 + 12k^2 - 2am + 4bm + 10dm + 72km + 100m^2 + ad\lambda - bd\lambda + d^2\lambda + \right. \\ & \left. + 3ak\lambda - 3bk\lambda + 7dk\lambda + 12k^2\lambda + 12am\lambda - 14bm\lambda + 23dm\lambda + 81km\lambda + 154m^2\lambda, \dots \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

где, как следует из замен (26) и (27), считаем, что $\lambda > 0$.

Образующие идеала j обладают свойством однородности по переменным $z = (b, a, d, m, k)$, т. е. $j_i(\alpha b, \alpha a, \alpha d, \alpha m, \alpha k) = \alpha^i j_i(b, a, d, m, k)$. При вычислении его базиса Гребнера это свойство дает возможность положить одну из переменных Z равной сначала нулю, затем единице. В качестве такой переменной выберем m .

Если $m = 0$, то базис Гребнера g идеала j , вычисленный системой компьютерной алгебры *Mathematica* в лексикографическом порядке переменных Z , состоит из 91 члена. Полное его представление невозможно по изложенной выше причине. Приведем несколько первых членов базиса Гребнера g :

$$g = \left\{ (d - k)k^4(d + 3k)^2, (d - 5k)(d - k)k^3(d + 3k)^2, (d - k)k^2(d + 3k)^2(d^2 - 5dk + 22k^2), \right.$$

$$(d-k)k(d+3k)^2(d^3-5d^2k+22dk^2-86k^3), k^5(d+3k)(a+d+4k), \\ k^4(d+3k)(ad-3ak-dk-9k^2), \dots\}.$$

Первый член базиса Гребнера g позволяет упростить вычисление многообразия идеала (28) до анализа следующих случаев: $k=0, d=-3k, d=k$. Если $k=0$, то базис Гребнера g_1 идеала j есть

$$g_1 = \left\{ -(a-3b-3d)d^2(a+d), d^4(a+d)(1+\lambda), d^2(a+d)(a+3d)(1+\lambda), \right. \\ \left. -d(2a-4b-2d+a\lambda-b\lambda+d\lambda), d^2(a+d)(1+\lambda)(25+9\lambda) \right\}.$$

Если $d=-3k$, то $g_2 = \left\{ -k(a-2b+k), k(a+k)^2\lambda \right\}$. При $d=k$ базис довольно громоздок. Приведем его первые члены:

$$g_3 = \left\{ k^4(a+5k), (a-5k)k^3(a+5k), bk^4, abk^3, -k^2(a^3-2a^2b+125k^3), \right. \\ \left. -k(47a^4-94a^3b-65a^3k-37500k^4), b^2k^3, -k^2(a^3-4ab^2+125k^3), \dots \right\}.$$

Решив системы $g_1=0, g_2=0, g_3=0$, получим следующие многообразия идеала (28):

- 1) $m=0, d=0, k=0, c=0$;
- 2) $m=0, b=13k, d=k, a=-5k$;
- 3) $m=0, b=-7k, d=-3k, a=-k$;
- 4) $m=0, b=d, k=0, a=-d$.

Заметим, что другие решения систем $g_1=0, g_2=0, g_3=0$ являются подмногообразиями многообразий 1) и 4).

Если исключить случай равномерной изохронности, учесть условие $\lambda > 0$ и перейти к старым переменным с помощью замены (26), получим следующие многообразия идеала (25):

- 1) $d=c\lambda, k=c\lambda, a=-5c\lambda, m=3c, b=13c$;
- 2) $d=c\lambda, k=0, a=-c\lambda, m=0, b=c$;
- 3) $d=c\lambda, k=-\frac{c\lambda}{3}, a=\frac{c\lambda}{3}, m=-c, b=\frac{7c}{3}$.

Многообразия 1) и 2) соответствуют системам 1) и 2) из условия теоремы. Многообразие 3) является подмногообразием одного из многообразий, которое будет получено ниже.

Если $m=1$, то базис Гребнера g идеала j , вычисленный системой компьютерной алгебры *Mathematica* в лексикографическом порядке переменных Z , состоит из 51 члена. Последний член включает 797 слагаемых. Приведем несколько первых членов базиса Гребнера g :

$$g = \left\{ (3+k)^6(4+k)^4(6+k)(12+k)(8+d+3k)^2(8+a+d+4k), \right. \\ \frac{1}{24}(3+k)^5(4+k)^3(8+d+3k)^2(8+a+d+4k)(120+24d+78k+13k^2+k^3), \\ \frac{1}{540}(3+k)^3(4+k)^2(8+d+3k)^2(8+a+d+4k)(192672-20520d+540d^2+309528k- \\ \left. -12960dk+202878k^2-2160dk^2+68145k^3+12133k^4+1067k^5+37k^6), \dots \right\}.$$

Первый член базиса Гребнера g позволяет свести вычисление многообразия идеала (28) к анализу следующих случаев: $k=-3, k=-6, k=-12, k=-4, k=\frac{1}{3}(-8-d), a=-8-d-4k$. Ввиду громоздкости базисов Гребнера, вычисленных при этих условиях, приведем только их первые члены:

- 1) $(-1+d)^5(-4+a+d)$;
- 2) $(-10+d)^2(-4+d)(-16+a+d)$;
- 3) $(-28+d)^3(-40+a+d)$;
- 4) $(9+a-3b-3d)(-4+d)^2(-2+d)(-8+a+d)$;
- 5) $(4+3a-d)(40+3a-d)(10+3a-6b-d)(-7+d)(-4+d)(-1+d)^4$;
- 6) $(-3+b)(3+k)^5(4+k)^3(5+k)(9+2k)(15+2k)(439+50k)$.

Вычисление многообразий идеала можно продолжить аналогичным образом, при этом сильно упрощается вычисление соответствующих базисов Гребнера. Приведем случаи:

- 1) $8 + a + d + 4k = 0, -3 + b = 0;$
- 2) $8 + a + d + 4k = 0, 439 + 50k = 0;$
- 3) $8 + a + d + 4k = 0, 5 + k = 0;$
- 4) $8 + a + d + 4k = 0, 15 + 2k = 0;$
- 5) $8 + a + d + 4k = 0, 9 + 2k = 0;$
- 6) $8 + a + d + 4k = 0, 4 + k = 0;$
- 7) $8 + a + d + 4k = 0, 3 + k = 0.$

Им соответствуют следующие базисы Гребнера:

- 1) $\{32 - 4d - d^2 + 20k - 2dk + 3k^2 + 4\lambda\};$
- 2) $\{(-3 + b)(-246 + 25d), (-3 + b)(-55 + 7b), 679\,301 - 80\,325b + 67\,800d - 5000d^2 + 20\,000\lambda\};$
- 3) $\{(-3 + b)(-17 + 2d), (-3 + b)(-39 + 5b), 293 - 30b + 44d - 4d^2 + 16\lambda\};$
- 4) $\{(-3 + b)(-3 + d)^2, 7 + 6d - d^2 + 4\lambda\};$
- 5) $\{(-3 + b)(1 + 2d), (-9 + b)(-3 + b), -7 + 6b + 20d - 4d^2 + 16\lambda\};$
- 6) $\{(-3 + b)(-17 + 3b + 4d), -18 + 6b + 25d - 3bd - 4d^2 + 16\lambda\};$
- 7) $\{(-3 + b)(-1 + d)^3, (-3 + b)(-1243 + 320b + 286d - 3d^2), -247 + 61b + 302d - 58bd - 55d^2 - 3bd^2 + 256\lambda\}.$

В конечном счете получим многообразия идеала (28):

- 1) $a = \frac{1}{3}(-8b - 3d - 12k), \lambda = -\frac{(4b - 3d + 3k)(8b + 3d + 9k)}{4b^2}, m = \frac{b}{3};$
- 2) $k = \frac{1}{15}(8b - 5d), m = -\frac{b}{5}, a = \frac{1}{3}(8b + d).$

Заметим, что многообразия базисов Гребнера 1)–7) и других возникающих подобного рода базисов являются подмногообразиями многообразий 1) и 2).

В целях упрощения введем в многообразие 1) новый параметр s по формуле $(8b + 3d + 9k) = -(4b - 3d + 3k)s^2$, а в многообразии 2) такой же параметр по формуле $d = s\lambda$, при этом заменим обозначение b на обозначение β (во избежание путаницы в дальнейшем). При переходе к старым обозначениям с помощью замены (26) получим многообразия:

- 1) $d = \frac{k(2s + 3\lambda + s^2\lambda)}{-6s - \lambda + s^2\lambda}, a = -\frac{k(-6s - \lambda + 5s^2\lambda)}{-6s - \lambda + s^2\lambda}, m = \frac{k(-3 + 3s^2 + 2s\lambda)}{-6s - \lambda + s^2\lambda}, c = \frac{k(3 + s^2 - 2s\lambda)}{-6s - \lambda + s^2\lambda},$
 $b = \frac{k(7 + 13s^2 + 6s\lambda)}{-6s + (-1 + s^2)\lambda};$
- 2) $d = s\lambda, k = \frac{1}{15}(8\beta - 5s)\lambda, a = \frac{1}{3}(8\beta + s)\lambda, m = \frac{1}{5}(-\beta - 5s - \beta\lambda^2), c = \frac{1}{5}(\beta + 5s + \beta\lambda^2),$
 $b = \frac{1}{15}(7\beta + 35s + 15\beta\lambda^2).$

В случае с многообразием 1) систему (22) можно упростить заменой координат $x \rightarrow \alpha, y \rightarrow u\alpha$, $\alpha = -6s + (-1 + s^2)\lambda$. Получим системы 3) и 4) из условия теоремы.

Достаточность. Легко проверить, что преобразования 1)–4) из условия теоремы переводят системы 1)–4) в системы с равномерной изохронностью. Так, учитывая обозначения в системе (16) и условии (17), для системы 3) и преобразований 3) имеем

$$A = u'_x \frac{dx}{dt} + u'_y \frac{dy}{dt} + v = -\lambda \left(-x + 4c(-sx + y)^2 \lambda \right) \left(1 - 8csx(-1 + s\lambda) + 8cy(1 + 2s^2 + s\lambda) \right),$$

$$B = v'_x \frac{dx}{dt} + v'_y \frac{dy}{dt} - u = \lambda y \left(1 - 8csx(-1 + s\lambda) + 8cy(1 + 2s^2 + s\lambda) \right), vA - uB = 0.$$

Теорема 7. *Изохроны систем 1)–3) из условия теоремы 6, помимо точки пересечения $O(0, 0)$, имеют точку пересечения O_1 , лежащую на оси Ox , которая, в свою очередь, является сильно изохронным относительно оси Ox грубым фокусом системы. Те изохроны фокуса $O(0, 0)$, которые проходят через точку O_1 , являются также изохронами фокуса O_1 .*

Доказательство. Преобразования 1) определяют уравнения изохрон особой точки $O(0, 0)$ системы 1):

$$\left\{ y = kx(1 - 4cx), k \in (-\infty, +\infty) \right\} \cup \left\{ x = 0 \right\} \cup \left\{ x = \frac{1}{4c} \right\}. \quad (29)$$

Для системы 1) другой особой точкой является точка $O_1\left(\frac{1}{4c}, 0\right)$. Параллельный перенос

$$x \rightarrow x + \frac{1}{4c}, t \rightarrow -t \quad (30)$$

переводит ее в начало координат, а систему 1) в систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + x\lambda - 8cxy + 4cx^2\lambda, \frac{dy}{dt} = x + y\lambda + 4cx^2 - 16cy^2 + 8cxy\lambda. \quad (31)$$

Замена

$$u = x(1 + 4cx), v = y \quad (32)$$

переводит систему (31) в систему с равномерной изохронностью. Следовательно, особая точка $O_1\left(\frac{1}{4c}, 0\right)$ системы 1) является сильно изохронным относительно оси Ox грубым фокусом системы. Также замена (32) задает уравнения изохрон особой точки $O(0, 0)$ системы (31):

$$\left\{ y = kx(1 + 4cx), k \in (-\infty, +\infty) \right\} \cup \left\{ x = 0 \right\} \cup \left\{ x = -\frac{1}{4c} \right\}. \quad (33)$$

Уравнения (33) получаются из уравнений (29) переносом (30). Значит, изохроны фокуса $O(0, 0)$, которые проходят через точку O_1 , являются также изохронами фокуса O_1 . Аналогично проводится доказательство для систем 2)–4).

Теорема 8. *Каждый из двух фокусов систем 1), 3) и 4) из условия теоремы 6, помимо изохроны $y = 0$, имеет изохрону в виде прямой, проходящей через этот фокус. Для системы 1) прямыми являются изохроны $x = 0$ и $x = \frac{1}{4c}$, для системы 3) – изохроны $y = sx$ и $y = \frac{-1 + 4cs^2\lambda x}{4cs\lambda}$, для системы 4) – изохроны $y = -\frac{3\beta\lambda}{\beta + 5s}x$ и $y = -\frac{5}{4\beta\lambda}$.*

Доказательство. Для системы 1) наличие изохрон $x = 0$ и $x = \frac{1}{4c}$ вытекает из уравнений (29).

Уравнения изохрон системы 3) определяются преобразованиями 3):

$$\left\{ y = k \left(x - 4c(sx - y)^2\lambda \right), k \in (-\infty, +\infty) \right\} \cup \left\{ x - 4c(sx - y)^2\lambda = 0 \right\}.$$

При значении $k = s$ отсюда получим прямые $y = sx$, $y = \frac{-1 + 4cs^2\lambda x}{4cs\lambda}$.

Уравнения изохрон системы 4) определяются преобразованиями 4):

$$\left\{ y = kx - \frac{4ky((\beta + 5s)y + 3\beta x\lambda)}{3(5 + 4\beta y\lambda)}, k \in (-\infty, +\infty) \right\} \cup \left\{ 3(5 + 4\beta y\lambda)x - 4y((\beta + 5s)y + 3\beta x\lambda) = 0, (5 + 4\beta y\lambda) \neq 0 \right\} \cup \left\{ (5 + 4\beta y\lambda) = 0 \right\}.$$

При значении $k = -\frac{3\beta\lambda}{\beta + 5s}$ отсюда получим прямые $y = -\frac{3\beta\lambda}{\beta + 5s}x$, $y = -\frac{5}{4\beta\lambda}$.

На рис. 2–5 представлены траектории систем 1)–4) из условия теоремы 6 и их изохроны при выбранных значениях.

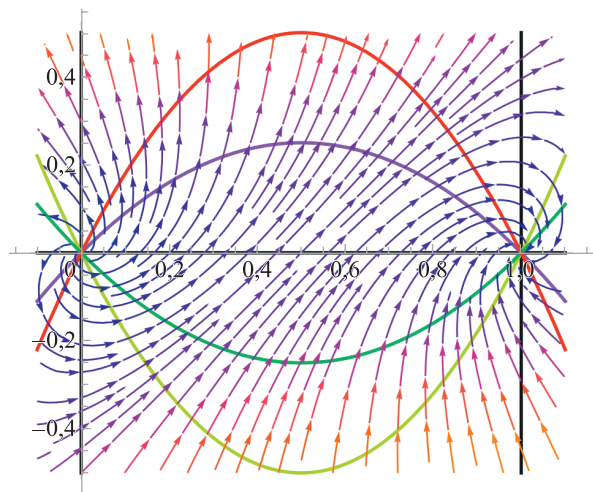


Рис. 2. Траектории и изохроны системы 1)
 при $\lambda = 1$, $c = -\frac{1}{4}$

Fig. 2. Trajectories and isochrons of the system 1)
 at $\lambda = 1$, $c = -\frac{1}{4}$

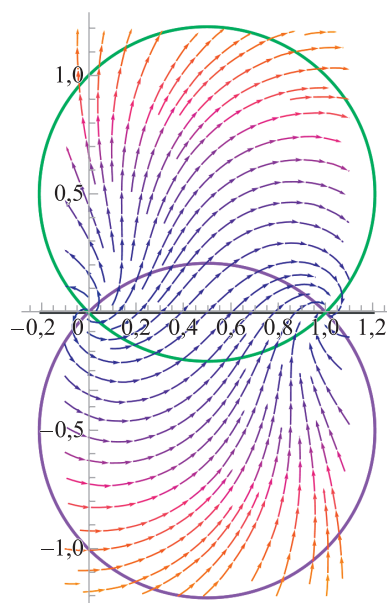


Рис. 3. Траектории и изохроны системы 2)
 при $\lambda = 1$, $c = 1$

Fig. 3. Trajectories and isochrons of the system 2)
 at $\lambda = 1$, $c = 1$

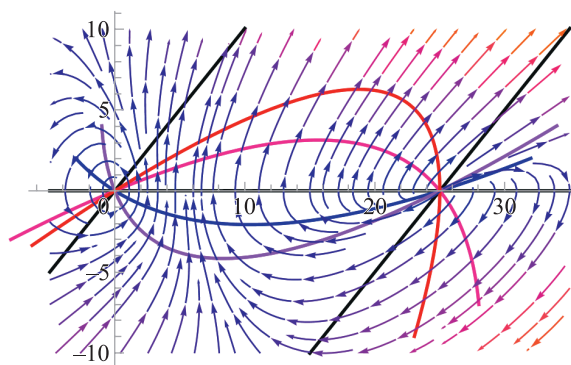


Рис. 4. Траектории и изохроны системы 3)
 при $\lambda = \frac{1}{100}$, $c = 1$, $s = 1$

Fig. 4. Trajectories and isochrons of the system 3)
 at $\lambda = \frac{1}{100}$, $c = 1$, $s = 1$

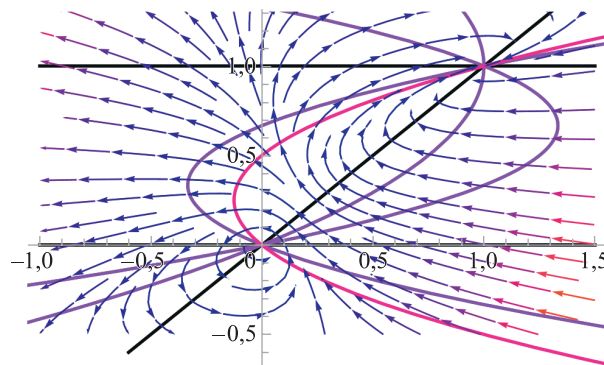


Рис. 5. Траектории и изохроны системы 4)
 при $\lambda = \frac{1}{100}$, $s = \frac{103}{4}$, $\beta = -125$

Fig. 5. Trajectories and isochrons of the system 4)
 at $\lambda = \frac{1}{100}$, $s = \frac{103}{4}$, $\beta = -125$

Заключение

Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях изохронного грубого фокуса системы с квадратичными нелинейностями. Найдены его изохроны и соответствующие нормализующие преобразования.

Библиографические ссылки

1. Куклес ИС, Пискунов НС. Об изохронности колебаний для консервативных и неконсервативных систем. *Доклады Академии наук СССР*. 1937;17(9):467–470.
2. Руденок АЕ. Сильная изохронность центра. О периодах предельных циклов системы Лъенара. *Дифференциальные уравнения*. 1975;11(5):811–819.

3. Algaba A, Reyes M. Characterizing isochronous points and computing isochronous sections. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2009;355(2):564–576. DOI: 10.1016/j.jmaa.2009.02.007.
4. Huygens Ch. *The pendulum clock, or Geometrical demonstrations concerning the motion of pendula as applied to clocks*. Ames: Iowa State University Press; 1986. 182 p.
5. Chen X, Romanovski VG. Linearizability conditions of time-reversible cubic systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2010;362(2):438–449. DOI: 10.1016/j.jmaa.2009.09.013.
6. Giné J. Isochronous foci for analytic differential systems. *International Journal of Bifurcation Chaos*. 2003;13(6):1617–1623. DOI: 10.1142/S0218127403007400.
7. Giné J, Grau M. Characterization of isochronous foci for planar analytic differential systems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A, Mathematics*. 2005;135(5):985–998. DOI: 10.1017/S0308210500004236.
8. Ладис НН. Коммутирующие векторные поля и изохронность. *Вестник Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина. Серия I, Математика. Физика. Механика*. 1976;1:21–24.
9. Villarini M. Regularity properties of the period function near a center of a planar vector field. *Nonlinear Analysis*. 1992;19(8):787–803.
10. Sabatini M. Characterizing isochronous centers by Lie brackets. *Differential Equations and Dynamical Systems*. 1997;5(1):91–99.
11. Sabatini M. Non-periodic isochronous oscillations in plane differential systems. *Annali di matematica pura ed applicata*. 2003;182(4):487–501. DOI: 10.1007/s10231-003-0078-0.
12. Руденок АЕ. Условия изохронности центра и фокуса в полярных координатах. *Дифференциальные уравнения*. 2008;44(10):1360–1372. EDN: JSJZKX.
13. Амелькин ВВ. Об изохронности в случаях центра и негрубого фокуса. *Дифференциальные уравнения*. 1982;18(6):1073–1075.
14. Руденок АЕ. Сильная изохронность центра и фокуса системы с полиномами третьей степени. *Вестні Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2008;2:4–12.
15. Руденок АЕ. Сильная изохронность центра и фокуса систем с однородными нелинейностями. *Дифференциальные уравнения*. 2009;45(2):154–161. EDN: JVTWDZ.
16. Руденок АЕ. Изохронность обратимых систем с однородными нелинейностями 4-й степени. *Вестник БГУ. Серия I, Физика. Математика. Информатика*. 2010;2:147–150. EDN: SJFVCT.
17. Руденок АЕ. Изохронные центры систем с однородными нелинейностями. *Вестник БГУ. Серия I, Физика. Математика. Информатика*. 2013;2:90–96. EDN: SNWINZ.
18. Руденок АЕ. О сильной изохронности грубого фокуса. В: Амелькин ВВ, редактор. *Материалы XXI Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2023); 23–27 мая 2023 г.; Могилёв, Беларусь. Часть I*. Могилёв: Белорусско-Российский университет; 2023. с. 92–94. EDN: MZROYU.
19. Руденок АЕ, Василевич МН. О сильной изохронности грубого фокуса. В: Бусел ТС, составитель. *Материалы XIV Белорусской математической конференции; 28 октября – 1 ноября 2024 г.; Минск, Беларусь. Часть 2*. Минск: Беларуская навука; 2024. с. 70–71.
20. Амелькин ВВ, Лукашевич НА, Садовский АП. *Нелинейные колебания в системах второго порядка*. Минск: БГУ; 1982. 206 с.
21. Ван Д, Ли Ч, Чоу ШН. *Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости*. Ильяшенко ЮС, редактор. Москва: Московский центр непрерывного математического образования; 2005. 416 с.

Получена 03.02.2025 / исправлена 20.06.2025 / принята 20.06.2025.
Received 03.02.2025 / revised 20.06.2025 / accepted 20.06.2025.