УДК 517.968.7

РЕШЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА КРИВОЙ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

А. П. ШИЛИН[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Аннотация. Решается новое линейное интегро-дифференциальное уравнение на замкнутой кривой, находящейся на комплексной плоскости. На расположение кривой и коэффициенты уравнения накладываются некоторые ограничения. Уравнение содержит гиперсингулярные и регулярные интегралы. Вначале оно сводится к краевой задаче Римана – Карлемана для аналитических функций, имеющей частный вид и нетрадиционную постановку. Далее решаются два линейных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами в областях комплексной плоскости с дополнительными условиями на решение. Все условия разрешимости исходного уравнения указываются в явном виде. При их выполнении приводится решение исходного уравнения в явном виде.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; гиперсингулярный интеграл; обобщенные формулы Сохоцкого; краевая задача Римана – Карлемана; линейное дифференциальное уравнение.

Образец цитирования:
Шилин АП. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения на кривой, расположенной в угловой области. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;2:6–15.
EDN: OVOHOI

For citation:
Shilin AP. Solution of the hypersingular integro-differential equation on a curve located in the angular domain. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;2:6–15. Russian.
EDN: OVOHOI

Автор:
Андрей Петрович Шилин – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики и математической физики физического факультета.

Author:
Andrei P. Shilin, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics and mathematical physics, faculty of physics.
a.p.shilin@gmail.com

SOLUTION OF THE HYPERSINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION ON A CURVE LOCATED IN THE ANGULAR DOMAIN

A. P. SHILIN[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Abstract. We solve a new linear integro-differential equation on a closed curve on the complex plane. Some restrictions are placed on the curve location and on coefficients of the equation. The equation contains hypersingular and regular integrals. Initially, it is reduced to the Riemann – Carleman boundary value problem for analytic functions, which has a partial form and an unconventional formulation. Next, two linear differential equations with constant coefficients in domains of the complex plane with additional conditions on the solution are solved. All solvability conditions of the original equation are stated explicitly. When they are performed, the solution to the original equation is given explicitly.

Keywords: integro-differential equation; hypersingular integral; generalised Sokhotsky formulas; Riemann – Carleman boundary value problem; linear differential equation.

Введение

Пусть L – простая гладкая замкнутая положительно ориентированная кривая на комплексной плоскости. Обозначим через D_+ внутренность, а через D_- внешность этой кривой. Зададим комплексные числа $a_k,\ b_k,\ k = \overline{0,\ n},\ n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0,\ b_n \neq 0$, а также H-непрерывную (т. е. удовлетворяющую условию Гёльдера) функцию $h(t),\ t \in L$. В дальнейшем искомой будет функция $\varphi(t),\ t \in L$, H-непрерывная вместе со своими производными, входящими в уравнение.

Для предельных значений на кривой L интеграла типа Коши

$$\Phi_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - z},\ z \in D_{\pm},$$

и его производных справедливы полученные в работе [1] обобщенные формулы Сохоцкого

$$\Phi_{\pm}^{(k)}(t) = \pm\frac{1}{2}\varphi^{(k)}(t) + \frac{k!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^{k+1}},\ k = \overline{0,\ n},\ t \in L, \tag{1}$$

частным случаем которых при $k = 0$ являются классические формулы Сохоцкого. Гиперсингулярные интегралы в формулах (1) понимаются в смысле конечной части по Адамару, что согласно работе [1] для их вычисления приводит к формулам

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} = \frac{\pi i \varphi^{(k)}(t)}{k!} + \int_L \frac{\varphi(\tau) - \sum\limits_{j=0}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(t)}{j!}(\tau - t)^j}{(\tau - t)^{k+1}}\,d\tau,$$

в правых частях которых интегралы сходятся в обычном смысле. В работе [2] с использованием формул (1) в явном виде решено уравнение

$$\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\varphi^{(k)}(t) + \frac{b_k k!}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^{k+1}}\right) = h(t),\ t \in L. \tag{2}$$

Уравнение (2) является одним из обобщений классического характеристического сингулярного интегрального уравнения, конструктивное решение которого [3; 4] в 1930–40-х гг. обеспечило создание к настоящему времени богатой и имеющей важные приложения теории сингулярных интегральных уравнений. Дальнейшее изучение уравнений, близких к уравнению (2), может оказаться интересным и найти приложения.

Постановка задачи. Некоторые вспомогательные факты и обозначения

Зададим также число $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Обозначим через

$$\varepsilon_j = e^{\frac{2\pi i}{m} j},\ j \in E = \{0, 1, \dots, m-1\}, \tag{3}$$

комплексные корни степени m из единицы. Произвольным образом выберем и зафиксируем число $s \in E$. Зададим еще H-непрерывные функции $a(t) \neq 0,\ b(t) \neq 0,\ t \in L$. Кривую L возьмем теперь расположенной в угловой области вида $\gamma_0 < \arg z < \gamma_0 + \dfrac{2\pi}{m}$. Будем решать уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} \Bigg[\big(a(t)a_k + b(t)b_k\big)\varphi^{(mk)}(t) + {} + \frac{\big(a(t)a_k - b(t)b_k\big)(mk)!}{\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-s} \int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\left(\tau - \varepsilon_j t\right)^{mk+1}} \Bigg] = h(t),\ t \in L. \tag{4}$$

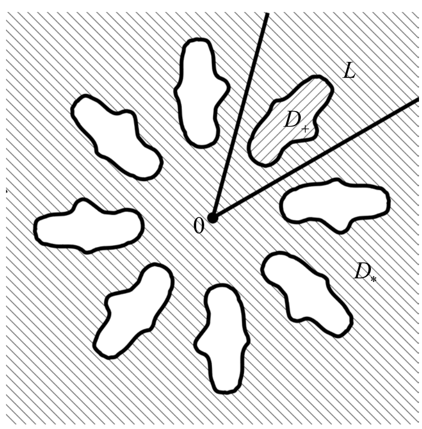
В этом уравнении в отличие от уравнения (2) коэффициенты являются переменными и имеют специальный вид. С частными случаями переменных коэффициентов уравнение (2) изучалось, например, в работах [5; 6]. При $j = 0$ интегралы во внутренней сумме уравнения (4) будут гиперсингулярными, а при $j = \overline{1, m-1}$ – регулярными. Изучение подобных «полных» гиперсингулярных уравнений начато недавно [7; 8]. Так, в работе [8] решено уравнение (4) при $m = 2$, $s = 0$. Введем обозначение

$$D_* = \hat{\mathbb{C}} \setminus \left(L \bigcup D_+ \bigcup_{\beta=1}^{m-1} L_\beta \bigcup_{\beta=1}^{m-1} D_\beta \right),$$

где

$$L_\beta = \{t : t = \varepsilon_\beta \tau,\ \tau \in L\},\ D_\beta = \{z : z = \varepsilon_\beta \zeta,\ \zeta \in D_+\},\ \beta = \overline{1, m-1}.$$

Возможный вид некоторых введенных объектов изображен на рисунке.



Возможный вид кривой L и областей D_+, D_* при $m = 8$
Possible shape of the curve L and domains D_+, D_* in the case $m = 8$

Так как корни степени m из единицы образуют по умножению циклическую группу порядка m (с образующим элементом ε_1), то возникающие в вычислениях числа ε_j, записанные по формуле (3) для $j \in \mathbb{Z} \setminus E$, в дальнейшем можно заменять на равные им числа для соответствующего значения $j \in E$. Введем аналитические функции

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-s} \int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - \varepsilon_j z} = \begin{cases} \Psi_+(z),\ z \in D_+, \\ \Psi_*(z),\ z \in D_*. \end{cases} \tag{5}$$

Из свойств интеграла типа Коши очевидно, что для функции $\Psi_*(z)$ должно выполняться равенство

$$\Psi_*(\infty) = 0. \tag{6}$$

Кроме того, эта функция обладает свойством

$$\Psi_*(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_s \Psi_*(z). \tag{7}$$

В самом деле,

$$\Psi_*(\varepsilon_1 z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_j^{-s}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_{j+1}z} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_{j-1}^{-s}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_j z} = \frac{\varepsilon_s}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_s^{-1}\varepsilon_{j-1}^{-s}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_j z} =$$

$$= \frac{\varepsilon_s}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_1^{-s}\varepsilon_1^{(j-1)(-s)}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_j z} = \frac{\varepsilon_s}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_1^{-js}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_j z} = \frac{\varepsilon_s}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_j^{-s}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\varepsilon_j z} = \varepsilon_s\Psi_*(z).$$

Свойство (7) обобщает свойства четности и нечетности функции, получающиеся при $m = 2$, $s = 0$ и $m = 2$, $s = 1$ соответственно. Функции с подобными свойствами указаны в работе [9]: в сумму таких функций может быть разложена всякая функция, заданная в области с подходящими симметриями (например, в области D_*). Последний факт для дальнейших рассуждений сформулируем более точно. Если $A(z)$ – какая-либо функция комплексного переменного, заданная в области D_*, то ее можно представить в виде

$$A(z) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k(z), \tag{8}$$

где

$$A_k(z) = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_j^{-k} A(\varepsilon_j z), \tag{9}$$

причем

$$A_k(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_k A_k(z),\ k = \overline{0,\ m-1}. \tag{10}$$

Проведенные выше выкладки можно расценивать как обоснование равенства (10) при $k = s$ в случае, если $A(z) = \dfrac{m}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z}$. Представление (8) обобщает известное разложение функции в сумму четной и нечетной функций. Если функция $A(z)$ является аналитической, то и все функции $A_k(z)$ будут аналитическими. Дифференцируя в этом случае равенства (10) r раз, получаем

$$A_k^{(r)}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{k-r} A_k^{(r)}(z),\ r \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, в частности, следует, что равенства (10) переносятся на производные от функций $A_k(z)$ порядков, кратных m. Первообразные вида $B_k(z) = \displaystyle\int_0^z A_k(\zeta)d\zeta$, если они являются однозначными аналитическими функциями в области D_*, будут обладать свойствами

$$B_k(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{k+1} B_k(z),\ k = \overline{0,\ m-1}. \tag{11}$$

Для обоснования свойств (11) в интегралах $\displaystyle\int_0^{\varepsilon_1 z} A_k(\zeta)d\zeta$ следует сделать замену $\zeta = \varepsilon_1 w$.

Краевая задача для аналитических функций, связанная с исходным уравнением

Запишем предельные значения на кривой L функций (5) и их производных порядков, кратных m:

$$\Psi_+^{(mk)}(t) = \frac{1}{2}\varphi^{(mk)}(t) + \frac{(mk)!}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_j^{-s}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\varepsilon_j t)^{mk+1}}, \tag{12}$$

$$\Psi_*^{(mk)}(t) = -\frac{1}{2}\varphi^{(mk)}(t) + \frac{(mk)!}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_j^{-s}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-\varepsilon_j t)^{mk+1}},\ k = \overline{0,\ n},\ t \in L. \tag{13}$$

Формулы (12) и (13) получаются после использования обобщенных формул Сохоцкого (1) для интеграла в функциях (5) при $j=0$ и дифференцирования под знаком интеграла при $j=\overline{1,\ m-1}$. Вычитая и складывая формулы (12) и (13), получаем пару равносильных формул

$$\varphi^{(mk)}(t)=\Psi_{+}^{(mk)}(t)-\Psi_{*}^{(mk)}(t), \tag{14}$$

$$\frac{(mk)!}{\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_j^{-s}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\left(\tau-\varepsilon_j t\right)^{mk+1}}=\Psi_{+}^{(mk)}(t)+\Psi_{*}^{(mk)}(t),$$

с помощью которых уравнению (4) можно придать вид краевой задачи для аналитических функций

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\left(a(t)a_k+b(t)b_k\right)\left(\Psi_{+}^{(mk)}(t)-\Psi_{*}^{(mk)}(t)\right)+\left(a(t)a_k-b(t)b_k\right)\left(\Psi_{+}^{(mk)}(t)+\Psi_{*}^{(mk)}(t)\right)\right]=h(t),\ t\in L,$$

или после очевидных упрощений

$$2a(t)\sum_{k=0}^{n}a_k\Psi_{+}^{(mk)}(t)-2b(t)\sum_{k=0}^{n}b_k\Psi_{*}^{(mk)}(t)=h(t),\ t\in L. \tag{15}$$

Первая сумма в левой части равенства (15) является предельным значением на кривой L функции $Y_{+}(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k\Psi_{+}^{(mk)}(z)$, аналитической в области D_{+}. Вторая сумма будет предельным значением на кривой L функции $Y_{*}(z)=\sum_{k=0}^{n}b_k\Psi_{*}^{(mk)}(z)$, аналитической в области D_{*}. Поскольку $\Psi_{*}^{(km)}(\varepsilon_1 z)=\varepsilon_s\Psi_{*}^{(km)}(z)$, то подобным свойством должна обладать и функция $Y_{*}(z)$, т. е. $Y_{*}(\varepsilon_1 z)=\varepsilon_s Y_{*}(z)$. Кроме того, из условия (6) получим $Y_{*}(\infty)=0$. Теперь краевую задачу (15) можно записать в виде

$$Y_{+}(t)=\frac{b(t)}{a(t)}Y_{*}(t)+\frac{h(t)}{2a(t)},\ t\in L. \tag{16}$$

Эта задача относится к смешанным краевым задачам Римана – Карлемана. Она имеет несколько нетрадиционное для смешанных задач краевое условие. Однако именно такое краевое условие, вид которого наиболее употребителен для двухэлементных краевых задач, позволяет распространить на нее классическую схему решения [3] с использованием подходящего аналога обобщенной теоремы Лиувилля и подходящей факторизации коэффициента. В результате получаем следующее общее решение задачи (16):

$$Y_{+}(z)=X_{+}(z)\left(T_{+}(z)+P(z)\right),\ Y_{*}(z)=X_{*}(z)\left(T_{*}(z)+P(z)\right),$$

где

$$X_{+}(z)=e^{\Gamma_{+}(z)},\ X_{*}(z)=\left(z^m-z_0^m\right)^{-\alpha}e^{\Gamma_{*}(z)},\ z_0\in D_{+},\ \alpha=\operatorname{Ind}_L\frac{b(t)}{a(t)},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\int_L\frac{\ln\left[\left(\tau^m-z_0^m\right)^{-\alpha}\dfrac{b(\tau)}{a(\tau)}\right]d\tau}{\tau-\varepsilon_j z}=\begin{cases}\Gamma_{+}(z),\ z\in D_{+},\\ \Gamma_{*}(z),\ z\in D_{*},\end{cases}$$

$$\frac{1}{4\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_j^{-s}\int_L\frac{h(\tau)d\tau}{a(\tau)X_{+}(\tau)\left(\tau-\varepsilon_j z\right)}=\begin{cases}T_{+}(z),\ z\in D_{+},\\ T_{*}(z),\ z\in D_{*},\end{cases}\quad P(z)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{\alpha-1}c_k z^{mk+s},\ c_k\in\mathbb{C},\ \text{если}\ \alpha>0,\\ 0,\ \text{если}\ \alpha\le 0.\end{cases}$$

При $\alpha\ge 0$ задача (16) разрешима безусловно, а при $\alpha<0$ для ее разрешимости необходимыми и достаточными являются условия

$$\int_L\frac{h(\tau)\tau^{mk-s-1}d\tau}{a(\tau)X_{+}(\tau)}=0,\ k=\overline{1,\ -\alpha}. \tag{17}$$

Предположим, что задача (16) разрешима, а ее решение найдено.

Решение дифференциальных уравнений

Теперь следует решать дифференциальные уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \Psi_{+}^{(mk)}(z) = Y_{+}(z),\ z \in D_{+}, \tag{18}$$

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \Psi_{*}^{(mk)}(z) = Y_{*}(z),\ z \in D_{*}, \tag{19}$$

и в случае нахождения их решений воспользоваться формулой (14) при $k = 0$:

$$\varphi(t) = \Psi_{+}(t) - \Psi_{*}(t),\ t \in L. \tag{20}$$

Не составляет проблемы написать общее решение уравнения (18), полученное классическим методом вариации произвольных постоянных:

$$\Psi_{+}(z) = \sum_{j=1}^{mn} u_j(z)\left(C_j^{+} + \int_{z_1}^{z} \frac{U_j(\zeta)d\zeta}{U(\zeta)}\right). \tag{21}$$

В формуле (21) функции $u_j(z)$, явный вид которых известен и здесь не приведен, образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, $C_j^{+} \in \mathbb{C}$, $U(\zeta)$ есть вронскиан функций $u_j(\zeta)$, а $U_j(\zeta)$ – определители, полученные из $U(\zeta)$ заменой элементов j-го столбца на $0, 0, \ldots, 0, \dfrac{Y_{+}(\zeta)}{a_n}$, $j = \overline{1, mn}$, $z_1 \in D_{+}$. Интегрирование проводится по любой кривой, принадлежащей области D_{+} и соединяющей точки z_1 и z, и вследствие конечности и односвязности области D_{+} приводит к однозначным функциям.

Нужное нам решение уравнения (19) содержится в формуле

$$\Psi_{*}(z) = \sum_{\sigma=1}^{mn} v_\sigma(z)\left(C_\sigma^{*} + \int_{0}^{z} \frac{V_\sigma(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)}\right), \tag{22}$$

аналогичной формуле (21). Здесь $v_\sigma(z)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, $C_\sigma^{*} \in \mathbb{C}$, $V(\zeta)$ – вронскиан функций $v_\sigma(\zeta)$, а $V_\sigma(\zeta)$ – определители, полученные из $V(\zeta)$ заменой элементов σ-го столбца на $0, 0, \ldots, 0, \dfrac{Y_{*}(\zeta)}{b_n}$, $\sigma = \overline{1, mn}$. Интегрирование в формуле (22) проводится по кривым, соединяющим точки 0 и z и принадлежащим области D_{*}. Поскольку область D_{*} является m-связной бесконечной областью, то следует наложить требования на интегралы, приводящие к их однозначности. Кроме того, из решений по формуле (22) следует выбрать те решения, для которых выполняется равенство (7). Наконец, от решений следует добиться аналитичности на бесконечности с условием (6). Таким образом, требуется более подробный анализ формулы (22).

Пусть λ_p – корни уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^k = 0,$$

имеющие соответствующие кратности k_p, $p = \overline{1, q}$, $\sum_{p=1}^{q} k_p = n$. Для определенности будем считать, что среди чисел λ_p нет равных нулю. Для каждого $p = \overline{1, q}$ произвольным образом выберем и зафиксируем одно из значений $\sqrt[m]{\lambda_p}$, это значение будем обозначать через μ_p. Тогда корни уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \mu^{mk} = 0,$$

являющегося характеристическим для однородного уравнения (19), можно записать в виде совокупностей чисел

$$\varepsilon_0\mu_p,\ \varepsilon_1\mu_p,\ \ldots,\ \varepsilon_{m-1}\mu_p,$$

причем каждый корень в совокупности имеет соответствующую кратность k_p, $p = \overline{1, q}$. Фундаментальную систему решений однородного уравнения (19) обычно принято записывать в виде

$$z^l e^{\varepsilon_0 \mu_p z},\ z^l e^{\varepsilon_1 \mu_p z}, \ldots, z^l e^{\varepsilon_{m-1} \mu_p z},\ l = \overline{0, k_p - 1},\ p = \overline{1, q}. \tag{23}$$

Далее будем использовать иную фундаментальную систему решений:

$$f_{l0p}(z) = z^l g_{0p}(z),\ f_{l1p}(z) = z^l g_{1p}(z), \ldots, f_{l,\, m-1,\, p}(z) = z^l g_{m-1,\, p}(z),\ l = \overline{0, k_p - 1}, \tag{24}$$

где

$$g_{0p}(z) = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-0} e^{\varepsilon_j \mu_p z},\ g_{1p}(z) = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-1} e^{\varepsilon_j \mu_p z}, \ldots, g_{m-1,\, p}(z) = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-(m-1)} e^{\varepsilon_j \mu_p z},\ p = \overline{1, q}. \tag{25}$$

Фундаментальная система решений (24) получена заменой каждой из функций в совокупностях (23) линейной комбинацией этих же функций в тех же совокупностях.

Функции (25) имеют такую же структуру, как функции (9), поэтому для них справедливы равенства вида (10):

$$g_{0p}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_0 g_{0p}(z),\ g_{1p}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_1 g_{1p}(z), \ldots, g_{m-1,\, p}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{m-1} g_{m-1,\, p}(z).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&f_{l0p}(\varepsilon_1 z) = (\varepsilon_1 z)^l \varepsilon_0 g_{0p}(z) = \varepsilon_l z^l g_{0p}(z) = \varepsilon_l f_{l0p}(z),\\
&f_{l1p}(\varepsilon_1 z) = (\varepsilon_1 z)^l \varepsilon_1 g_{1p}(z) = \varepsilon_{l+1} z^l g_{1p}(z) = \varepsilon_{l+1} f_{l1p}(z),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_{l,\, m-1,\, p}(\varepsilon_1 z) = (\varepsilon_1 z)^l \varepsilon_{m-1} g_{m-1,\, p}(z) = \varepsilon_{l+m-1} z^l g_{m-1,\, p}(z) = \varepsilon_{l+m-1} f_{l,\, m-1,\, p}(z).
\end{aligned}$$

Если индексы $l, l+1, \ldots, l+m-1$ каких-то чисел $\varepsilon_l, \varepsilon_{l+1}, \ldots, \varepsilon_{l+m-1}$ не принадлежат множеству E, то заменим эти индексы на значения из множества E, сравнимые с ними по модулю m. В результате получится, что для каждого фиксированного $l = \overline{0, k_p - 1}$ и каждого фиксированного $p = \overline{1, q}$ в совокупности функций (24) есть ровно одна функция со свойством вида (10) для каждого $k = \overline{0, m-1}$. Проведенные рассуждения позволяют в дальнейшем взять в качестве функций $v_\sigma(z)$ в формуле (22) переобозначенные функции (24) так, чтобы $v_\sigma(z) = v_{mk+j}(z)$, причем

$$v_{km+j}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{j-1} v_{km+j}(z),\ k = \overline{0, n-1},\ j = \overline{1, m}. \tag{26}$$

Две леммы

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$V(\varepsilon_1 z) = V(z). \tag{27}$$

Доказательство. $V(\varepsilon_1 z)$ есть определитель

$$\begin{vmatrix}
v_1(\varepsilon_1 z) & v_2(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_m(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_{nm-m+1}(\varepsilon_1 z) & v_{nm-m+2}(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_{nm}(\varepsilon_1 z)\\
v_1'(\varepsilon_1 z) & v_2'(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_m'(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_{nm-m+1}'(\varepsilon_1 z) & v_{nm-m+2}'(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_{nm}'(\varepsilon_1 z)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
v_1^{(m-1)}(\varepsilon_1 z) & v_2^{(m-1)}(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_m^{(m-1)}(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_{nm-m+1}^{(m-1)}(\varepsilon_1 z) & v_{nm-m+2}^{(m-1)}(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_{nm}^{(m-1)}(\varepsilon_1 z)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
v_1^{(nm-m)}(\varepsilon_1 z) & v_2^{(nm-m)}(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_m^{(nm-m)}(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_{nm-m+1}^{(nm-m)}(\varepsilon_1 z) & v_{nm-m+2}^{(nm-m)}(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_{nm}^{(nm-m)}(\varepsilon_1 z)\\
v_1^{(nm-m+1)}(\varepsilon_1 z) & v_2^{(nm-m+1)}(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_m^{(nm-m+1)}(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_{nm-m+1}^{(nm-m+1)}(\varepsilon_1 z) & v_{nm-m+2}^{(nm-m+1)}(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_{nm}^{(nm-m+1)}(\varepsilon_1 z)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
v_1^{(nm-1)}(\varepsilon_1 z) & v_2^{(nm-1)}(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_m^{(nm-1)}(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_{nm-m+1}^{(nm-1)}(\varepsilon_1 z) & v_{nm-m+2}^{(nm-1)}(\varepsilon_1 z) & \ldots & v_{nm}^{(nm-1)}(\varepsilon_1 z)
\end{vmatrix}.$$

После использования формул (26) этот определитель станет равным

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_0 v_1(z) & \varepsilon_1 v_2(z) & \ldots & \varepsilon_{m-1} v_m(z) & \ldots & \varepsilon_0 v_{nm-m+1}(z) & \varepsilon_1 v_{nm-m+2}(z) & \ldots & \varepsilon_{m-1} v_{nm}(z) \\ \varepsilon_{m-1} v_1'(z) & \varepsilon_0 v_2'(z) & \ldots & \varepsilon_{m-2} v_m'(z) & \ldots & \varepsilon_{m-1} v_{nm-m+1}'(z) & \varepsilon_0 v_{nm-m+2}'(z) & \ldots & \varepsilon_{m-2} v_{nm}'(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_1 v_1^{(m-1)}(z) & \varepsilon_2 v_2^{(m-1)}(z) & \ldots & \varepsilon_0 v_m^{(m-1)}(z) & \ldots & \varepsilon_1 v_{nm-m+1}^{(m-1)}(z) & \varepsilon_2 v_{nm-m+2}^{(m-1)}(z) & \ldots & \varepsilon_0 v_{nm}^{(m-1)}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_0 v_1^{(nm-m)}(z) & \varepsilon_1 v_2^{(nm-m)}(z) & \ldots & \varepsilon_{m-1} v_m^{(nm-m)}(z) & \ldots & \varepsilon_0 v_{nm-m+1}^{(nm-m)}(z) & \varepsilon_1 v_{nm-m+2}^{(nm-m)}(z) & \ldots & \varepsilon_{m-1} v_{nm}^{(nm-m)}(z) \\ \varepsilon_{m-1} v_1^{(nm-m+1)}(z) & \varepsilon_0 v_2^{(nm-m+1)}(z) & \ldots & \varepsilon_{m-2} v_m^{(nm-m+1)}(z) & \ldots & \varepsilon_{m-1} v_{nm-m+1}^{(nm-m+1)}(z) & \varepsilon_0 v_{nm-m+2}^{(nm-m+1)}(z) & \ldots & \varepsilon_{m-2} v_{nm}^{(nm-m+1)}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_1 v_1^{(nm-1)}(z) & \varepsilon_2 v_2^{(nm-1)}(z) & \ldots & \varepsilon_0 v_m^{(nm-1)}(z) & \ldots & \varepsilon_1 v_{nm-m+1}^{(nm-1)}(z) & \varepsilon_2 v_{nm-m+2}^{(nm-1)}(z) & \ldots & \varepsilon_0 v_{nm}^{(nm-1)}(z) \end{vmatrix}. \quad (28)$$

Из всех столбцов с номерами $km + j$, $k = \overline{0,\ n-1}$, вынесем за знак определителя (28) множители ε_{j-1}, $j = \overline{1,\ m}$. Тогда

$$V(\varepsilon_1 z) = \left(\varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{m-1}\right)^n \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \varepsilon_0 v_1(z) & \varepsilon_0 v_2(z) & \ldots & \varepsilon_0 v_m(z) & \ldots & \varepsilon_0 v_{nm-m+1}(z) & \varepsilon_0 v_{nm-m+2}(z) & \ldots & \varepsilon_0 v_{nm}(z) \\ \varepsilon_{m-1} v_1'(z) & \varepsilon_{m-1} v_2'(z) & \ldots & \varepsilon_{m-1} v_m'(z) & \ldots & \varepsilon_{m-1} v_{nm-m+1}'(z) & \varepsilon_{m-1} v_{nm-m+2}'(z) & \ldots & \varepsilon_{m-1} v_{nm}'(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_1 v_1^{(m-1)}(z) & \varepsilon_1 v_2^{(m-1)}(z) & \ldots & \varepsilon_1 v_m^{(m-1)}(z) & \ldots & \varepsilon_1 v_{nm-m+1}^{(m-1)}(z) & \varepsilon_1 v_{nm-m+2}^{(m-1)}(z) & \ldots & \varepsilon_1 v_{nm}^{(m-1)}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_0 v_1^{(nm-m)}(z) & \varepsilon_0 v_2^{(nm-m)}(z) & \ldots & \varepsilon_0 v_m^{(nm-m)}(z) & \ldots & \varepsilon_0 v_{nm-m+1}^{(nm-m)}(z) & \varepsilon_0 v_{nm-m+2}^{(nm-m)}(z) & \ldots & \varepsilon_0 v_{nm}^{(nm-m)}(z) \\ \varepsilon_{m-1} v_1^{(nm-m+1)}(z) & \varepsilon_{m-1} v_2^{(nm-m+1)}(z) & \ldots & \varepsilon_{m-1} v_m^{(nm-m+1)}(z) & \ldots & \varepsilon_{m-1} v_{nm-m+1}^{(nm-m+1)}(z) & \varepsilon_{m-1} v_{nm-m+2}^{(nm-m+1)}(z) & \ldots & \varepsilon_{m-1} v_{nm}^{(nm-m+1)}(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_1 v_1^{(nm-1)}(z) & \varepsilon_1 v_2^{(nm-1)}(z) & \ldots & \varepsilon_1 v_m^{(nm-1)}(z) & \ldots & \varepsilon_1 v_{nm-m+1}^{(nm-1)}(z) & \varepsilon_1 v_{nm-m+2}^{(nm-1)}(z) & \ldots & \varepsilon_1 v_{nm}^{(nm-1)}(z) \end{vmatrix}.$$

После вынесения за знак получившегося определителя общих множителей в каждой строке получим

$$V(\varepsilon_1 z) = \left(\varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{m-1}\right)^{2n} V(z).$$

Доказательство леммы завершается использованием свойства $\left(\varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{m-1}\right)^2 = 1$.

Лемма 2. *Справедливы равенства*

$$V_{km+j}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{s-j} V_{km+j}(z),\ k = \overline{0,\ n-1},\ j = \overline{1,\ m}. \quad (29)$$

Доказательство. Каждый определитель $V_{km+j}(\varepsilon_1 z)$ отличается от определителя $V(\varepsilon_1 z)$ только $(km+j)$-м столбцом, элементы которого имеют вид $0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \dfrac{Y_*(\varepsilon_1 z)}{b_n}$. Используем равенства $Y_*(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_s Y_*(z) = \varepsilon_{s-j} \varepsilon_j Y_*(z)$. Расценивая ε_{s-j} как общий множитель элементов $(km+j)$-го столбца, запишем этот множитель перед определителем:

$$V_{km+j}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{s-j} \tilde{V}_{km+j}(\varepsilon_1 z).$$

Определитель $\tilde{V}_{km+j}(\varepsilon_1 z)$ отличается от определителя $V(\varepsilon_1 z)$ только $(km+j)$-м столбцом, элементы которого можно записать в виде $\varepsilon_{j-1} \cdot 0,\ \varepsilon_{j-2} \cdot 0,\ \ldots,\ \varepsilon_{j-m+1} \cdot 0,\ \dfrac{\varepsilon_j Y_*(z)}{b_n}$. Как и в доказательстве леммы 1, представим элементы остальных столбцов в виде функций от z с теми же множителями. В результате структура множителей всех элементов в определителе $\tilde{V}_{km+j}(\varepsilon_1 z)$ будет точно такой, как в определителе (28), поэтому аналогично получится $\tilde{V}_{km+j}(\varepsilon_1 z) = V_{km+j}(z)$. Лемма доказана.

Справедливыми оказываются также равенства

$$V(\varepsilon_\beta z) = V(z),\ V_{km+j}(\varepsilon_\beta z) = \varepsilon_{(s-j)\beta} V_{km+j}(z),\ \beta = \overline{1,\ m-1},\ k = \overline{0,\ n-1},\ j = \overline{1,\ m}, \quad (30)$$

получаемые при $\beta > 1$ применением равенств (27) и (29) надлежащее число раз. Равенства (27), (29) и (30) справедливы вплоть до границы области D_*, т. е. в том числе и на кривых L, L_β, $\beta = \overline{1,\ m-1}$, поскольку входящие в определители $V(z)$, $V_{km+j}(z)$ функции непрерывно продолжимы на эту границу.

Учет дополнительных условий на решение дифференциального уравнения. Формулировка результата

Придадим формуле (22) вид

$$\Psi_*(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} v_{km+j}(z)\left(C^*_{km+j} + \int_0^z \frac{V_{km+j}(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)}\right).$$

Очевидно, что для однозначности функции $\Psi_*(z)$ должны выполняться необходимые и достаточные условия

$$\int_L \frac{V_{km+j}(t)dt}{V(t)} = 0,\ k = \overline{0,\ n-1},\ j = \overline{1,\ m}, \tag{31}$$

$$\int_{L_\beta} \frac{V_{km+j}(t)dt}{V(t)} = 0,\ \beta = \overline{1,\ m-1}, k = \overline{0,\ n-1},\ j = \overline{1,\ m}. \tag{32}$$

Делая в интегралах из равенств (32) замены $t = \varepsilon_\beta \tau$ и учитывая формулы (30), получаем

$$\int_{L_\beta} \frac{V_{km+j}(t)dt}{V(t)} = \varepsilon_{(s-j+1)\beta}\int_L \frac{V_{km+j}(t)dt}{V(t)},\ \beta = \overline{1,\ m-1},$$

т. е. интегралы в равенствах (32) отличаются от интегралов в равенствах (31) лишь постоянным множителем, поэтому равенства (32) оказываются следствием равенств (31). Предположим, что равенства (31) выполняются.

Для решения однородного уравнения (19) согласно формулам (26) получим

$$\Psi_*(\varepsilon_1 z) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} v_{km+j}(\varepsilon_1 z)C^*_{km+j} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{j-1} v_{km+j}(z)C^*_{km+j}.$$

Равенство (7) будет выполняться лишь в том случае, когда $C^*_{km+j} = 0$ при всех $j \neq s+1$. Для частного решения неоднородного уравнения (19) получим

$$\Psi_*(\varepsilon_1 z) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} v_{km+j}(\varepsilon_1 z)B_{km+j}(\varepsilon_1 z),$$

где $B_{km+j}(z)$ – первообразные вида $\int_0^z \frac{V_{km+j}(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)}$ от функций $\frac{V_{km+j}(z)}{V(z)}$, обладающих свойством $\frac{V_{km+j}(\varepsilon_1 z)}{V(\varepsilon_1 z)} = \varepsilon_{s-j}\frac{V_{km+j}(z)}{V(z)}$. С учетом равенств, аналогичных равенствам (11), имеем

$$\Psi_*(\varepsilon_1 z) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{j-1} v_{km+j}(z)\varepsilon_{s-j+1}\int_0^z \frac{V_{km+j}(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)} =$$

$$= \varepsilon_s \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} v_{km+j}(z)\int_0^z \frac{V_{km+j}(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)} = \varepsilon_s \Psi_*(z).$$

Таким образом, учет условия (7) привел к решению уравнения (19) в виде

$$\Psi_*(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(C^*_{km+s+1}v_{km+s+1}(z) + \sum_{j=1}^{m} v_{km+j}(z)\int_0^z \frac{V_{km+j}(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C^*_{km+s+1}v_{km+s+1}(z) + \sum_{j=1}^{mn} v_j(z)\int_0^z \frac{V_j(\zeta)d\zeta}{V(\zeta)}.$$

Наконец, для учета условия (6) разложим функцию $\Psi_*(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности и приравняем к нулю коэффициенты при неотрицательных степенях z этого разложения. В результате получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которой должны удовлетворять постоянные C^*_{km+s+1}:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{lk} C^*_{km+s+1} = \delta_l, \ l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

где

$$\gamma_{lk} = \int\limits_{|t|=\rho} \frac{v_{km+s+1}(t)\,dt}{t^{ml+s+1}}, \ \delta_l = -\sum_{j=1}^{nm} \int\limits_{|t|=\rho} \frac{v_j(t)\,dt}{t^{ml+s+1}} \int\limits_0^t \frac{V_j(\zeta)\,d\zeta}{V(\zeta)},$$

ρ – достаточно большое положительное число. Теперь, используя формулу (20), сформулируем окончательный результат.

Теорема. *Для разрешимости уравнения (4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (17) при* $\alpha < 0$, *равенства (31) и была совместна система (33). Если эти условия выполняются, то искомая функция находится по формуле*

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{nm} \left[u_j(t) \left(C_j^+ + \int\limits_{z_1}^{t} \frac{U_j(\zeta)\,d\zeta}{U(\zeta)} \right) - v_j(t) \int\limits_0^t \frac{V_j(\zeta)\,d\zeta}{V(\zeta)} \right] - \sum_{k=0}^{n-1} C^*_{km+s+1} v_{km+s+1}(t), \ t \in L,$$

где C_j^+ *– произвольные комплексные постоянные,* $j = \overline{1, nm}$, *а* C^*_{km+s+1} *– комплексные постоянные, являющиеся решением системы (33),* $k = \overline{0, n-1}$.

Заключительные замечания

1. В работе [8] можно найти пример уравнения (4) для $m = 2$, $s = 0$. Этот пример показывает наличие случаев, когда все условия теоремы выполняются.

2. Требование принадлежности кривой L угловой области можно несколько ослабить. Для проведенного исследования можно потребовать лишь, чтобы $\varepsilon_1 t \notin L \ \forall t \in L$. Принадлежность L угловой области – простое и понятное достаточное условие этого требования.

3. Если одно из чисел λ_p равно нулю, то результат исследования не изменится. В данном случае следует лишь отдельно записывать функции в фундаментальной системе решений однородного уравнения (19), соответствующие этому корню.

4. При $\alpha > 0$ условия (31) в развернутом виде будут представлять собой систему линейных алгебраических уравнений для нахождения постоянных c_k, входящих в решение задачи (16). Эта система легко может быть записана и здесь не приведена.

5. H-непрерывность функций $\Psi_+(t)$ и $\Psi_*(t)$ вместе с их производными до порядка nm (а значит, согласно формуле (20) и искомой функции $\varphi(t)$) обосновывается несложно и вполне аналогично [5].

Библиографические ссылки

1. Зверович ЭИ. Обобщение формул Сохоцкого. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2012;2:24–28. EDN: VXDPZR.

2. Зверович ЭИ. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. *Доклады Национальной академии наук Беларуси.* 2010;54(6):5–8. EDN: ZUFFJZ.

3. Гахов ФД. *Краевые задачи.* 3-е издание. Москва: Наука; 1977. 640 с.

4. Мусхелишвили НИ. *Сингулярные интегральные уравнения: граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* 3-е издание. Москва: Наука; 1968. 512 с.

5. Шилин АП. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2022;58(4):358–369. DOI: 10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369.

6. Шилин АП. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с рекуррентными соотношениями в коэффициентах. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;3:6–15. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-3-6-15.

7. Шилин АП. Интегро-дифференциальное уравнение, связанное со смешанной задачей Римана – Гильберта. В: Рогозин СВ, редактор. *Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. Труды 11-го Международного научного семинара; 16–20 сентября 2024 г.; Минск, Беларусь.* Минск: БГУ; 2024. с. 87–93.

8. Шилин АП. Интегро-дифференциальное уравнение, связанное с краевой задачей Римана – Карлемана. *Труды Института математики НАН Беларуси.* 2024;32(2):73–81. EDN: OACFEE.

9. Шилин АП. Краевая задача с рациональными коэффициентами для двух пар функций на границе угловой области. *Труды Института математики НАН Беларуси.* 2001;9:155–160. EDN: VRXKEK.

Получена 03.02.2025 / исправлена 20.06.2025 / принята 20.06.2025.
Received 03.02.2025 / revised 20.06.2025 / accepted 20.06.2025.