

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного уни

—А.Д.Король

27 июня 2025 г.

Регистрационный № 3590/б.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине
для специальности:

6-05-0533-12 Кибербезопасность

2025 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-12-2023 и учебного плана БГУ № 6-5.3-60/02 от 15.05.2023.

СОСТАВИТЕЛИ:

А.Ю.Харин, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Н.М.Зуев, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Н.Н.Труш, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Ю.С.Харин, директор Учреждения Белорусского государственного университета «НИИ прикладных проблем математики и информатики», академик НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор;

Е.Е.Жук, профессор кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Б.А.Залесский, заведующий лабораторией обработки и распознавания изображений ГНУ «Объединённый институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси», доктор физико-математических наук

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой математического моделирования и анализа данных БГУ (протокол № 12 от 26.05.2025);

Научно-методическим советом БГУ (протокол № 11 от 26.06.2025)

Заведующий кафедрой



В.И.Малюгин

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» – представить студентам математическую науку, изучающую математические модели стохастических явлений и процессов (вероятностные модели случайности), математические методы их исследования и построения выводов о свойствах этих явлений и процессов на основании результатов множества зафиксированных наблюдений (статистических выводов).

Учебная дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» представляет фундаментальную теоретическую основу для решения повсеместно возникающих прикладных математических задач, и поэтому является одной из важнейших дисциплин специальности 6-05-0533-12 «Кибербезопасность».

Задачи учебной дисциплины:

1. Формирование знаний об аксиоматическом построении теории вероятностей, основных понятиях, вероятностных моделях, их свойствах, а также формирование навыков решения типовых задач, включая переход от реальной прикладной постановки к математической формулировке.

2. Освоение студентами основных понятий и методов математической статистики, приобретение навыков решения задач построения и анализа статистических оценок параметров изученных вероятностных моделей, задач построения статистических тестов и исследования их эффективности.

3. Формирование у студентов знаний о типовых моделях случайных процессов для описания стохастической динамики, о свойствах и методах исследования этих моделей, а также выработка умений решения задач из теории случайных процессов, включая переход от прикладной постановки к математической.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к модулю «Теория вероятностей и математическая статистика» компонента учреждения образования.

Программа составлена с учетом предметных связей с учебными дисциплинами. Основой для изучения являются учебные дисциплины государственного компонента модулей «Математический анализ» и «Геометрия и алгебра». Полученные знания используются при изучении дисциплины государственного компонента «Математическое моделирование в естествознании» модуля «Математическое моделирование», изучении дисциплин профилизации, а также при выполнении студентами курсовых и дипломных работ.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

Специализированные компетенции:

Строить вероятностные модели в прикладных задачах, вычислять вероятности сложных случайных событий и исследовать важнейшие характеристики случайных величин, использовать методы математической статистики для решения задач оценивания параметров и проверки гипотез, применять методы анализа основных моделей случайных процессов.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- аксиоматическое определение вероятности, определения и основные свойства вероятностной меры, случайных событий, случайных величин и их преобразований;
- основные числовые и функциональные характеристики случайных величин, виды сходимости случайных последовательностей, важнейшие предельные теоремы;
- необходимые свойства, принципы и методы построения точечных и интервальных статистических оценок; методы статистической проверки гипотез;
- основные математические модели случайных процессов и методы их вероятностного и статистического исследования;

уметь:

- вычислять вероятности сложных событий; находить распределения вероятностей случайных величин и их функциональных преобразований; вычислять основные числовые характеристики случайных величин; исследовать сходимость случайных последовательностей;
- применять основные методы для построения точечных оценок неизвестных параметров и построения доверительных интервалов, исследовать их свойства;
- формулировать гипотезы о параметрах полученных вероятностных моделей и строить решающие правила для статистической проверки гипотез;
- применять основные семейства случайных процессов для моделирования стохастической динамики реальных явлений, исследовать важнейшие характеристики цепей Маркова;

иметь навык:

- использования методов нахождения вероятностных характеристик распределений;
- использования методов нахождения предельных распределений последовательностей случайных величин;
- использования методов статистического оценивания параметров;
- использования вероятностных моделей случайных процессов.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 4-м и 5-м семестрах. В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» отведено для очной формы получения высшего образования – 324 часа, в том числе 170 аудиторных часов, лекции – 102 часа, лабораторные занятия – 68 часов. **Из них:**

4 семестр:

Лекции – 68 часов, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоёмкость учебной дисциплины составляет 6 зачётных единиц.

Формы промежуточной аттестации – зачёт, экзамен.

5 семестр:

Лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоёмкость учебной дисциплины составляет 3 зачётных единиц.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Теория вероятностей

Тема 1.1. Случайные события

Случайный эксперимент. События и соотношения между ними. Простейшие вероятностные модели. Аксиоматика А.Н. Колмогорова. Аксиомы непрерывности, свойства вероятностной меры. Условная вероятность. Независимость случайных событий. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема независимых испытаний Бернулли.

Тема 1.2. Случайные величины

Случайная величина, распределение вероятностей. Функция распределения и её свойства. Типы распределений случайных величин. Случайные векторы, их функции распределения и свойства. Условное распределение. Независимость случайных величин. Функциональные преобразования случайных величин. Формула преобразования плотностей.

Тема 1.3. Числовые характеристики случайных величин

Понятие об интеграле Лебега по вероятностной мере. Математическое ожидание простых случайных величин. Математическое ожидание неотрицательных и произвольных случайных величин. Свойства математического ожидания. Неравенства. Вычисление интеграла Лебега по вероятностной мере, связь с интегралом Лебега—Стильеса, Римана—Стильеса, замена переменной. Условное математическое ожидание. Моменты случайных величин. Дисперсия и её свойства. Моменты многомерных случайных величин. Энтропия, количество информации по Шенону.

Тема 1.4. Сходимость случайных последовательностей

Сходимость почти наверное, критерии, лемма Бореля—Кантелли. Сходимость по вероятности, свойства, связь со сходимостью почти наверное. Сходимость в среднем, свойства, соотношение с другими сходимостями. Сходимость по распределению, свойства. Теоремы Хелли. Соотношения между видами сходимости.

Тема 1.5. Законы больших чисел

Достаточные условия выполнения закона больших чисел: критерий, теоремы Маркова, Чебышёва, Бернулли. Усиленный закон больших чисел: неравенство Гаека—Ренни, неравенство Колмогорова, достаточное условие, критерий для независимых одинаково распределённых случайных величин.

Тема 1.6. Центральная предельная теорема

Характеристическая функция и ее свойства: формула обращения, теорема единственности, теорема Боннера, теорема непрерывности, свойство Марцинкевича. Кумулянтная функция и её свойства. Центральная предельная теорема Линдеберга и ее следствия, теорема Феллера.

Раздел 2. Математическая статистика

Тема 2.1. Общая теория статистического оценивания параметров

Основные понятия. Состоятельность, строгая состоятельность, несмешённость, характеристики точности. Выборочная функция распределения, характеристическая функция, моменты; свойства. Асимптотическая нормальность. Информационная матрица Фишера и её свойства. Неравенство информации, неравенство Крамера—Рао. Эффективность статистической оценки, критерий эффективности. Достаточные статистики. Критерий факторизации. Свойства достаточных статистик. Теорема Рао—Блэкуэлла.

Тема 2.2. Методы построения статистических оценок

Метод максимального правдоподобия. Свойства оценок максимального правдоподобия. Метод наименьших квадратов. Свойства оценок метода наименьших квадратов для линейной модели наблюдений. Теорема Гаусса—Маркова. Байесовский метод. Метод моментов. Доверительный интервал. Метод обратной функции. Метод «стьюдентизации». Построение асимптотически наикратчайшего центрального доверительного интервала.

Тема 2.3. Теория статистической проверки гипотез

Основные понятия теории статистической проверки гипотез. Ошибки Йи Прода. Мощность, уровень значимости теста. Решающее правило Неймана—Пирсона. Фундаментальная лемма Неймана—Пирсона. Байесовское решающее правило. Проверка гипотез согласия. Хи-квадрат критерий Пирсона, критерий Колмогорова. Распределения, связанные с нормальным; проверка гипотез о параметрах нормального распределения. Дисперсионный анализ. Последовательный статистический анализ Вальда: выбор порогов, свойство оптимальности. Современные задачи математической и прикладной статистики.

Раздел 3. Случайные процессы

Тема 3.1. Основные понятия теории случайных процессов

Способы задания случайных процессов. Основные характеристики случайных процессов. Понятия стационарности. Классификация случайных процессов.

Тема 3.2. Процессы с независимыми приращениями

Понятие и свойства случайного процесса с независимыми приращениями. Винеровский случайный процесс и его свойства. Пуассоновский случайный процесс и его свойства.

Тема 3.3. Марковские случайные процессы

Марковский случайный процесс. Марковская случайная последовательность. Дискретные цепи Маркова. Уравнение Колмогорова—

Чепмена для переходных вероятностей. Стационарность, стационарные вероятности. Классификация состояний цепей Маркова. Эргодичность цепи Маркова. Дифференциальные уравнения Колмогорова для марковских случайных процессов. Ветвящиеся процессы.

Тема 3.4. Процессы с конечными моментами второго порядка

Ковариационная функция случайного процесса и ее свойства. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость в среднем квадратичном. Стохастические дифференциальные уравнения. Стохастический интеграл Ито. Свойства и направления обобщений.

Тема 3.5. Стационарные в широком смысле случайные процессы

Спектральные представления для стационарных в широком смысле случайных процессов. Линейные преобразования случайных процессов. Постановка задачи фильтрации и подходы к её решению. Прогнозирование случайных процессов.

Тема 3.6. Основы статистического анализа временных рядов

Статистическое оценивание параметров и характеристик временных рядов. Временные ряды авторегрессии и скользящего среднего, оценивание параметров. Статистический анализ временных рядов с трендом. Статистический анализ однородных цепей Маркова.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования с применение дистанционных образовательных технологий
(ДОТ)

На разделы формы контроля не указываются.

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Формы контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное	
1	2	3	4	5	6	7	8
4-й семестр							
1	Теория вероятностей	44			26		4
1.1	Случайные события	10			8		Устный опрос. Контрольная работа №1. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой.
1.2	Случайные величины	8			6		Устный опрос. Контрольная работа №2. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой.
1.3	Числовые характеристики случайных величин	8			4	2	Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним

							заданиям с их устной защитой.
1.4	Сходимость случайных последовательностей	8		2		2	Устный опрос. Контрольная работа №3.
1.5	Законы больших чисел	4		2			Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой.
1.6	Центральная предельная теорема	6		4			Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой.
2	Математическая статистика	24		4			
2.1	Общая теория статистического оценивания параметров	8		4			Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях. Контрольная работа №4.
2.2	Методы построения статистических оценок	8					
2.3	Теория статистической проверки гипотез	8					

5-й семестр

2	Математическая статистика			14			
2.1	Общая теория статистического оценивания параметров			4			Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой.
2.2	Методы построения статистических оценок			4			Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой.

2.3	Теория статистической проверки гипотез				6			Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой.
3	Случайные процессы	34			16		4	
3.1	Основные понятия теории случайных процессов	4			2			Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях.
3.2	Процессы с независимыми приращениями	8			4		2	Контрольная работа № 6
3.3	Марковские случайные процессы	10			6			Контрольная работа № 7
3.4	Процессы с конечными моментами второго порядка	4			2			Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях.
3.5	Стационарные в широком смысле случайные процессы	4					2	Контрольная работа № 8
3.6	Основы статистического анализа временных рядов	4			2			Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях.

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. *Гнеденко, Б. В.* Курс теории вероятностей: учебник для студ. мат. спец. ун-тов / Б. В. Гнеденко; [предисл. А. Н. Ширяева]; МГУ им. М. В. Ломоносова. - Изд. 13-е. - Москва: URSS, 2022. - 448 с.
2. *Боровков, А. А.* Теория вероятностей: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 010100 "Математика" / А. А. Боровков. - Изд. стер. - Москва: URSS: Либроком, 2023. - 652 с.
3. *Коршунов, Д. А.* Сборник задач и упражнений по теории вероятностей: учебное пособие / Д. А. Коршунов, С. Г. Фосс, И. М. Эйсмонт. - Изд. 3-е, испр. и доп. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2022. - 219 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/187568>.
4. *Коган, Е. А.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для студ. высших учебных заведений/ Е. А. Коган, А. А. Юрченко. - Москва: ИНФРА-М, 2023. - 249с. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1920312>.
5. *Зубков, А. М.* Сборник задач по теории вероятностей : учебное пособие / А. М. Зубков, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков. - Изд. 4-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. - 319 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/184062>.

Дополнительная литература

1. *Харин, Ю. С.* Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика / Ю.С. Харин, Н.М. Зуев, Е.Е. Жук. - Минск: БГУ, 2011. - 463 с.
2. *Харин, Ю. С.* Теория вероятностей, математическая статистика. Задачи, упражнения, тестовые задания / Ю.С. Харин, Е.Е. Жук, В.И. Лобач, Е.Н. Орлова, А.Ю. Харин. - Минск: БГУ, 2010. - 302 с.
3. *Ширяев, А. Н.* Вероятность. В 2-х кн. /А.Н. Ширяев. - Москва: МЦНМО, 2004. - 928 с.
4. *Булинский, А. В.* Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 400 с.
5. *Карлин, С.* Основы теории случайных процессов / С. Карлин. - Москва: Мир, 1988. - 354 с.
6. *Маталыцкий, М. А.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для студ. уво по физико-математическим спец. / М. А. Маталыцкий, Г. А. Хацкевич. - Минск : Вышэйшая школа, 2017. - 591 с.
7. *Розанов, Ю.А.* Случайные процессы / Ю.А. Розанов. - Москва: Наука, 1979. - 184 с.
8. *Чистяков, В.П.* Курс теории вероятностей и математической статистики / В.П. Чистяков. - Москва: Наука, 1987. - 240 с.

9. Григорьев-Голубев, В.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Руководство по решению задач: [учебник для студентов и преподавателей вузов] / В. В. Григорьев-Голубев, Н. В. Васильева, Е. А. Кротов. - 2-е изд. - Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2021. - 304 с. - URL: <https://ibooks.ru/bookshelf/380027/reading>.

Электронные ресурсы

1. Образовательный портал БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://edufpmi.bsu.by/course/view.php?id=144>. – Дата доступа: 30.06.2023.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Для диагностики компетенций в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы:

1. Устная форма: опросы, собеседование, отчеты по домашним заданиям с их устной защитой.

2. Письменная форма: контрольные работы, решение задач.

В качестве рекомендуемых технических средств диагностики используется обучение, организованное на электронной образовательной платформе (<https://edufpmi.bsu.by>).

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» учебным планом предусмотрены в 4-м семестре **зачет и экзамен, в 5-м семестре – зачет**.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

– решение задач на лабораторных занятиях, опросы и отчеты по домашним упражнениям – 50 %;

– собеседования и контрольные работы – 50 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе итоговой отметки текущей аттестации (модульно-рейтинговой системы оценки знаний) 40 % и экзаменационной отметки 60 %.

Примерная тематика лабораторных занятий

4-й семестр

Занятие 1. Случайный эксперимент. События и соотношения между ними. Простейшие вероятностные модели.

Занятия 2-4. Аксиоматика А.Н. Колмогорова. Аксиомы непрерывности, свойства вероятностной меры. Условная вероятность. Независимость случайных событий. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема независимых испытаний Бернулли.

Занятие 5. Случайная величина, распределение вероятностей. Функция распределения и её свойства. Типы распределений случайных величин.

Занятия 6-7. Случайные векторы, их функции распределения и свойства. Условное распределение. Независимость случайных величин. Функциональные преобразования случайных величин. Формула преобразования плотностей.

Занятия 8-9. Понятие об интеграле Лебега по вероятностной мере. Математическое ожидание простых случайных величин. Математическое ожидание неотрицательных и произвольных случайных величин. Свойства математического ожидания. Неравенства. Вычисление интеграла Лебега по вероятностной мере, связь с интегралом Лебега—Стильеса, Римана—Стильеса, замена переменной.

Занятие 10. Сходимость почти наверное, критерии, лемма Бореля—Кантелли. Сходимость по вероятности, свойства, связь со сходимостью почти наверное.

Занятие 11. Достаточные условия выполнения закона больших чисел: критерий, теоремы Маркова, Чебышёва, Бернулли. Усиленный закон больших чисел: неравенство Гаека—Рены, Неравенство Колмогорова, достаточное условие, критерий для независимых одинаково распределённых случайных величин.

Занятие 12. Характеристическая функция и ее свойства: формула обращения, теорема единственности, теорема Боннера, теорема непрерывности, свойство Марцинкевича. Кумулянтная функция и её свойства.

Занятие 13. Центральная предельная теорема Линдеберга и ее следствия, теорема Феллера.

Занятия 14-15. Основные понятия. Состоятельность, строгая состоятельность, несмешённость, характеристики точности. Выборочная функция распределения, характеристическая функция, моменты; свойства. Асимптотическая нормальность.

5-й семестр

Занятие 1. Информационная матрица Фишера и её свойства. Неравенство информации, неравенство Крамера—Рао. Эффективность статистической оценки, критерий эффективности. Достаточные статистики. Критерий факторизации. Свойства достаточных статистик. Теорема Рао—Блэквэлла.

Занятие 2. Метод максимального правдоподобия. Свойства оценок максимального правдоподобия. Метод наименьших квадратов. Свойства

оценок метода наименьших квадратов для линейной модели наблюдений. Теорема Гаусса—Маркова.

Занятия 3-4. Байесовский метод. Метод моментов. Доверительный интервал. Метод обратной функции. Метод «стьюдентизации». Построение асимптотически наикратчайшего центрального доверительного интервала.

Занятия 5-6. Основные понятия теории статистической проверки гипотез. Ошибки I и II рода. Мощность, уровень значимости теста. Решающее правило Неймана—Пирсона. Фундаментальная лемма Неймана-Пирсона. Байесовское решающее правило. Проверка гипотез согласия. Хи-квадрат критерий Пирсона, критерий Колмогорова. Распределения, связанные с нормальным; проверка гипотез о параметрах нормального распределения.

Занятие 7. Дисперсионный анализ. Последовательный статистический анализ Вальда: выбор порогов, свойство оптимальности. Современные задачи математической и прикладной статистики.

Занятие 8. Способы задания случайных процессов. Основные характеристики случайных процессов. Понятия стационарности. Классификация случайных процессов.

Занятия 9-10. Понятие и свойства случайного процесса с независимыми приращениями. Винеровский случайный процесс и его свойства. Пуассоновский случайный процесс и его свойства.

Занятие 11-13. Марковский случайный процесс. Марковская случайная последовательность. Дискретные цепи Маркова. Уравнение Колмогорова-Чепмена для переходных вероятностей. Стационарность, стационарные вероятности. Классификация состояний цепей Маркова. Эргодичность цепи Маркова. Дифференциальные уравнения Колмогорова для марковских случайных процессов. Ветвящиеся процессы.

Занятие 14. Ковариационная функция случайного процесса и ее свойства. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость в среднем квадратичном. Стохастические дифференциальные уравнения. Стохастический интеграл Ито. Свойства и направления обобщений.

Занятие 15. Статистическое оценивание параметров и характеристик временных рядов. Временные ряды авторегрессии и скользящего среднего, оценивание параметров. Статистический анализ временных рядов с трендом. Статистический анализ однородных цепей Маркова.

Рекомендуемая тематика контрольных работ:

- 1) Контрольная работа № 1. Простейшие вероятностные модели. Основные формулы вычисления вероятностей событий.
- 2) Контрольная работа № 2. Функция распределения случайных величин.
- 3) Контрольная работа № 3. Функциональные преобразования случайных величин. Формула преобразования плотностей.
- 4) Контрольная работа № 4. Числовые характеристики случайных величин, включая условные.
- 5) Контрольная работа № 5. Законы больших чисел.

6) Контрольная работа № 6. Центральная предельная теорема и её следствия.

7) Контрольная работа № 7. Частные случаи центральной предельной теоремы.

8) Контрольная работа № 8. Основные понятия выборочного статистического оценивания параметров и типовые оценки.

9) Контрольная работа № 9. Основные методы построения статистических оценок и статистической проверки гипотез.

10) Контрольная работа № 10. Случайные процессы с независимыми приращениями.

11) Контрольная работа № 11. Марковские случайные процессы.

12) Контрольная работа № 12. Случайные процессы с конечными моментами 2-го порядка, стационарные в широком смысле случайные процессы, основы статистического анализа временных рядов.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

Тема 1.3. Числовые характеристики случайных величин (2 часа).

1.3.2. Условное математическое ожидание. Моменты случайных величин. Дисперсия и её свойства. Моменты многомерных случайных величин. Энтропия, количество информации по Шеннону.

Форма контроля – устный опрос и контрольная работа.

Тема 1.4. Сходимость случайных последовательностей (2 часа).

1.4.2. Сходимость в среднем, свойства, соотношение с другими сходимостями. Сходимость по распределению, свойства. Теоремы Хелли. Соотношения между видами сходимости.

Форма контроля – устный опрос и контрольная работа.

Тема 3.2. Процессы с независимыми приращениями (2 часа).

3.2.1. Пуассоновский случайный процесс и его свойства

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 3.5. Стационарные в широком смысле случайные процессы (2 часа).

3.5.1. Спектральные представления для стационарных в широком смысле случайных процессов. Линейные преобразования случайных процессов. Постановка задачи фильтрации и подходы к её решению. Прогнозирование случайных процессов.

Форма контроля – контрольная работа.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются:

- **Эвристический метод научно-учебной дискуссии**, который предполагает участие студентов в обмене мнениями по поставленной проблеме, идеями для аргументирования или согласования существующих позиций по определенной проблеме. Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

- **Практико-ориентированный проективный подход**, который предполагает: освоение содержание образования через решения практических задач; приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности; ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры; использованию процедур и способов оценивания профессиональных компетенций.

- **Метод анализа конкретных ситуаций (кейс-метод) на основе прецедентов**, который предполагает: приобретение студентом знаний и умений для решения практических задач; анализ ситуации, используя профессиональные знания, собственный опыт, дополнительную литературу и иные источники.

- **Методы и приемы развития критического мышления**, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

В качестве технических средств организации работы в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать Образовательный портал БГУ (<https://edufpmi.bsu.by>) – инструмент с эффективной функциональностью контроля, тренинга и самостоятельной работы.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине целесообразно использовать современные информационные ресурсы: разместить на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебно-методические материалы или ссылки для теоретического изучения дисциплины, методические указания к лабораторным занятиям, материалы текущего контроля и текущей аттестации, включая вопросы к зачету и экзаменам).

Примерный перечень вопросов к зачету (4 семестр)

1. Пространство элементарных событий, случайные события, соотношения между случайными событиями.
2. Классическая вероятностная модель. Применимость. Аксиоматика.
3. Классическая вероятностная модель. Гипергеометрическое распределение вероятностей.
4. Дискретная вероятностная модель. Модель Пуассона.
5. Геометрическая вероятностная модель.
6. Построение измеримого пространства.
7. Сигма-алгебра, борелевская сигма-алгебра, её свойства.
8. Аксиоматика А.Н. Колмогорова.
9. Аксиомы непрерывности.
10. Свойства вероятностной меры.
11. Условная вероятность. Свойства.
12. Формула полной вероятности, формула Байеса.
13. Независимые случайные события. Свойства.
14. Схема независимых испытаний Бернулли.
15. Случайная величина. Распределение вероятностей.
16. Функция распределения случайной величины, её связь с распределением вероятностей.
17. Необходимое и достаточное условия для функции, являющейся функцией распределения.
18. Дискретные случайные величины, их задание. Примеры.
19. Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей. Свойства.
20. Примеры абсолютно непрерывных распределений вероятностей.
21. Сингулярные распределения вероятностей. Теорема Лебега.
22. Случайный вектор, его распределение вероятностей. Функция распределения.
23. Свойства функции распределения случайного вектора.
24. Свойства плотности распределения вероятностей случайного вектора.
25. Примеры распределений вероятностей случайных векторов.
26. Условное распределение вероятностей. Условная функция распределения.
27. Условная плотность распределения вероятностей. Её свойства.
28. Независимость случайных величин. Свойства независимых случайных величин.
29. Функциональные преобразования случайных величин. Формула преобразования плотностей.
30. Вырожденные преобразования. Формула свёртки.
31. Математическое ожидание простых случайных величин.
32. Свойства интеграла Лебега от простых случайных величин.

- 33. Интеграл Лебега от произвольных случайных величин.
- 34. Простейшие свойства интеграла Лебега от произвольных случайных величин.
- 35. Теорема о монотонной сходимости, Лемма Фату, Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Вычисление математического ожидания от борелевской функции случайной величины.
- 36. Неравенства Чебышёва, Иенсена.
- 37. Неравенства Ляпунова, Гёльдера, Минковского.
- 38. Вычисление интеграла Лебега.
- 39. Условное математическое ожидание.
- 40. Свойства условного математического ожидания.
- 41. Моменты скалярных случайных величин.
- 42. Дисперсия случайных величин. Её свойства.
- 43. Смешанные моменты. Ковариационная матрица. Свойства.
- 44. Коэффициент корреляции. Свойства. Энтропия. Количество информации по Шенону.
- 45. Сходимость почти наверное. Критерий и следствие из него.
- 46. Лемма Бореля—Кантелли. Закон «0» и «1». Достаточное условие сходимости почти наверное.
- 47. Сходимость по вероятности. Свойства.
- 48. Сходимость в среднем. Свойства.
- 49. Сходимость по распределению. Свойства. Теоремы Хелли.
- 50. Соотношения между видами сходимости.
- 51. Закон больших чисел. Достаточные условия.
- 52. Усиленный закон больших чисел. Достаточное условие. Усиленный закон больших чисел для независимых одинаково распределённых случайных величин.
- 53. Характеристическая функция случайных величин. Простейшие свойства.
- 54. Характеристическая функция случайных величин. Формула обращения. Теорема непрерывности.
- 55. Центральная предельная теорема.
- 56. Частные случаи центральной предельной теоремы.
- 57. Задача статистического оценивания параметра. Несмешённость, состоятельность, асимптотическая нормальность статистической оценки.
- 58. Выборочные функции распределения, характеристическая функция, моменты. Свойства.

Примерный перечень вопросов к экзамену (4 семестр)

1. Классическая вероятностная модель. Гипергеометрическое распределение вероятностей.
2. Дискретная вероятностная модель. Модель Пуассона. Геометрическая вероятностная модель.
3. Сигма-алгебра, борелевская сигма-алгебра, её свойства. Аксиоматика А.Н. Колмогорова.
4. Аксиомы непрерывности. Свойства вероятностной меры.
5. Условная вероятность. Свойства. Формула полной вероятности, формула Байеса.
6. Независимые случайные события. Свойства. Схема независимых испытаний Бернулли.
7. Случайная величина. Распределение вероятностей. Функция распределения случайной величины, её связь с распределением вероятностей.
8. Необходимые и достаточные условия для функции распределения.
9. Дискретные случайные величины, их задание. Примеры.
10. Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей. Свойства.
11. Примеры абсолютно непрерывных распределений вероятностей. Сингулярные распределения вероятностей. Теорема Лебега.
12. Случайный вектор, его распределение вероятностей. Функция распределения.
13. Свойства функции распределения случайного вектора.
14. Свойства плотности распределения вероятностей случайного вектора. Примеры распределений вероятностей случайных векторов.
15. Условное распределение вероятностей. Условная функция распределения.
16. Условная плотность распределения вероятностей. Её свойства.
17. Независимость случайных величин. Свойства независимых случайных величин.
18. Функциональные преобразования случайных величин. Формула преобразования плотностей.
19. Вырожденные преобразования случайных величин. Формула свёртки.
20. Математическое ожидание простых случайных величин. Свойства интеграла Лебега от простых случайных величин.
21. Интеграл Лебега от произвольных случайных величин. Простейшие свойства интеграла Лебега.
22. Теорема о монотонной сходимости, лемма Фату, теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Вычисление математического ожидания от борелевской функции случайной величины.
23. Неравенства Чебышёва, Иенсена.

24. Неравенства Ляпунова, Гёльдера, Минковского.
25. Вычисление интеграла Лебега.
26. Условное математическое ожидание, его свойства.
27. Моменты скалярных случайных величин. Дисперсия случайных величин. Её свойства.
28. Смешанные моменты. Ковариационная матрица. Коэффициент корреляции. Свойства. Энтропия. Количество информации по Шеннону.
29. Сходимость почти наверное. Критерий и следствие из него.
30. Лемма Бореля—Кантелли. Закон «0» и «1». Достаточное условие сходимости почти наверное.
31. Сходимость по вероятности. Свойства.
32. Сходимость в среднем. Свойства.
33. Сходимость по распределению. Свойства. Теоремы Хелли.
34. Соотношения между видами сходимости.
35. Закон больших чисел. Достаточные условия.
36. Усиленный закон больших чисел. Достаточное условие. Усиленный закон больших чисел для независимых одинаково распределённых случайных величин.
37. Характеристическая функция случайных величин. Простейшие свойства.
38. Характеристическая функция случайных величин. Формула обращения. Теорема непрерывности.
39. Центральная предельная теорема.
40. Частные случаи центральной предельной теоремы.
41. Задача статистического оценивания параметра. Несмешённость, состоятельность, асимптотическая нормальность статистической оценки.
42. Выборочные функции распределения, характеристическая функция, моменты. Свойства.
43. Связь матрицы вариаций (среднеквадратических ошибок) статистической оценки с ковариационной матрицей.
44. Информационная матрица Фишера и её свойства.
45. Неравенство информации. Эффективность статистической оценки. Критерий эффективности.
46. Неравенство Крамера—Рао.
47. Достаточные статистики. Критерий факторизации.
48. Свойства достаточных статистик.

Примерный перечень вопросов к зачету (5 семестр)

1. Метод максимального правдоподобия. Связь оценок с достаточными статистиками и эффективностью.
2. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия.
3. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса-Маркова.
4. Байесовский метод построения оценок.

5. Метод моментов.
6. Сущность интервального оценивания параметров. Метод обратной функции.
7. Метод Стьюдента. Построение асимптотически наикратчайших центральных доверительных интервалов.
8. Основные понятия теории статистической проверки гипотез. Решающее правило Неймана-Пирсона.
9. Байесовское решающее правило. Последовательный статистический анализ.
10. Способы задания случайных процессов.
11. Основные характеристики случайных процессов. Понятия стационарности.
12. Классификация случайных процессов.
13. Гауссовский случайный процесс.
14. Броуновское движение и его свойства.
15. Понятие и свойства случайного процесса с независимыми приращениями.
16. Винеровский случайный процесс и его свойства.
17. Пуассоновский случайный процесс и его свойства.
18. Марковский случайный процесс. Марковская случайная последовательность. Дискретные цепи Маркова.
19. Уравнение Колмогорова-Чепмена для переходных вероятностей.
20. Стационарность, стационарные вероятности. Классификация состояний цепей Маркова.
21. Эргодичность цепи Маркова.
22. Дифференциальные уравнения Колмогорова для марковских случайных процессов.
23. Ветвящиеся процессы.
24. Ковариационная функция случайного процесса и ее свойства.
25. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость в среднем квадратичном.
26. Стохастические дифференциальные уравнения. Стохастический интеграл Ито. Свойства и направления обобщений.
27. Временные ряды авторегрессии и скользящего среднего, оценивание параметров.
28. Статистический анализ временных рядов с трендом.
- 29. Статистический анализ однородных цепей Маркова.**

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой
математического моделирования и
анализа данных
доктор эконом. наук, профессор


(подпись)

В.И.Малюгин

26.05.2025

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УО
на _____ / _____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № _____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета