



ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

2

2025

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор **ХАРИН Ю. С.** – доктор физико-математических наук, академик НАН Беларуси, профессор; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: kharin@bsu.by

**Заместители
главного редактора** **КРОТОВ В. Г.** – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: krotov@bsu.by

ДУДИН А. Н. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: dudin@bsu.by

**Ответственный
секретарь** **МАТЕЙКО О. М.** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Альтенбах Х. Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.
Антоневич А. Б. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Бауэр С. М. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
Беняш-Кривец В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Берник В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Босяков С. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Бухштаб В. М. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Вабищевич П. Н. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук, Москва, Россия.
Волков В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Гладков А. Л. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Го В. Китайский университет науки и технологий, Хэфэй, провинция Аньхой, Китай.
Гогинава У. Тбилисский государственный университет им. Иванэ Джавахишвили, Тбилиси, Грузия.
Головкин В. А. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.
Гороховик В. В. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Громак В. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Демид Г. Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.
Егоров А. Д. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Еремеев В. А. Гданьский политехнический университет, Гданьск, Польша.
Жоландек Х. Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.
Журавков М. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Залесский П. А. Бразильский университет, Бразилиа, Бразилия.
Зубков А. М. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.
Каплунов Ю. Д. Университет Кииле, Кииле, Великобритания.
Кашин Б. С. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Келлерер Х. Грацский университет им. Карла и Франца, Грац, Австрия.
Кожанов А. И. Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.

- Котов В. М.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Краснопрошин В. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Лауринчикас А. П.** Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва.
- Мадани К.** Университет Париж-Эст Марн-ла-Валле, Марн-ла-Валле, Франция.
- Макаров Е. К.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Матус П. П.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Медведев Д. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Михасев Г. И.** Харбинский политехнический университет, Харбин, Китай.
- Нестеренко Ю. В.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Никонов Ю. Г.** Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, Владикавказ, Россия.
- Освальд П.** Боннский университет, Бонн, Германия.
- Романовский В. Г.** Мариборский университет, Марибор, Словения.
- Рязанов В. В.** Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия.
- Сафонов В. Г.** Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь.
- Скиба А. Н.** Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
- Сотсков Ю. Н.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Трофимов В. А.** Южно-Китайский университет технологий, Гуанчжоу, Китай.
- Тузинов А. В.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Фильцмозер П.** Венский технический университет, Вена, Австрия.
- Черноусов В. И.** Альбертский университет, Эдмонтон, Канада.
- Чижик С. А.** Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Шешок Д.** Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, Вильнюс, Литва.
- Шубэ А. С.** Институт математики и информатики Академии наук Республики Молдова, Кишинев, Молдова.
- Янчевский В. И.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

EDITORIAL BOARD

Editor-in-chief	KHARIN Y. S. , doctor of science (physics and mathematics), academician of the National Academy of Sciences of Belarus, full professor; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: kharin@bsu.by
Deputy editors-in-chief	KROTOV V. G. , doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: krotov@bsu.by
	DUDIN A. N. , doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: dudin@bsu.by
Executive secretary	MATEIKO O. M. , PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: matseika@bsu.by
Ablameyko S. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Altenbach H.	Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.
Antonevich A. B.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bauer S. M.	Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia.
Beniash-Kryvets V. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bernik V. I.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Bosyakov S. M.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Buchstaber V. M.	Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Chernousov V. I.	University of Alberta, Edmonton, Canada.
Chizhik S. A.	National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Dzemyda G.	Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Egorov A. D.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Eremeyev V. A.	Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland.
Filzmoser P.	Vienna University of Technology, Vienna, Austria.
Gladkov A. L.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Goginava U.	Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia.
Golovko V. A.	Brest State Technical University, Brest, Belarus.
Gorokhovik V. V.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Gromak V. I.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Guo W.	University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China.
Kaplunov J. D.	Keele University, Keele, United Kingdom.
Kashin B. S.	Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Kellerer H.	University of Graz, Graz, Austria.
Kotov V. M.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Kozhanov A. I.	Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
Krasnoproshin V. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Laurinchikas A. P.	Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Madani K.	Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, France.
Makarov E. K.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Matus P. P.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Medvedev D. G.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Mikhasev G. I.	Harbin Institute of Technology, Harbin, China.
Nesterenko Y. V.	Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

- Nikonorov Y. G.** Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia.
- Oswald P.** University of Bonn, Bonn, Germany.
- Romanovskij V. G.** University of Maribor, Maribor, Slovenia.
- Ryazanov V. V.** Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Safonov V. G.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Šešok D.** Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania.
- Skiba A. N.** Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
- Sotskov Y. N.** United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Suba A. S.** Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova, Kishinev, Moldova.
- Trofimov V. A.** South China University of Technology, Guangzhou, China.
- Tuzikov A. V.** Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Vabishchevich P. N.** Institute for the Safe Development of Atomic Energy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Volkov V. M.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Yanchevskii V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Zalesskii P. A.** University of Brazilia, Brazilia, Brazil.
- Zhuravkov M. A.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Zoladek H.** Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.
- Zubkov A. M.** Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 517.968.7

РЕШЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА КРИВОЙ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

А. П. ШИЛИН¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Решается новое линейное интегро-дифференциальное уравнение на замкнутой кривой, находящейся на комплексной плоскости. На расположение кривой и коэффициенты уравнения накладываются некоторые ограничения. Уравнение содержит гиперсингулярные и регулярные интегралы. Вначале оно сводится к краевой задаче Римана – Карлемана для аналитических функций, имеющей частный вид и нетрадиционную постановку. Далее решаются два линейных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами в областях комплексной плоскости с дополнительными условиями на решение. Все условия разрешимости исходного уравнения указываются в явном виде. При их выполнении приводится решение исходного уравнения в явном виде.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; гиперсингулярный интеграл; обобщенные формулы Сохоцкого; краевая задача Римана – Карлемана; линейное дифференциальное уравнение.

Образец цитирования:

Шилин А.П. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения на кривой, расположенной в угловой области. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;2:6–15.
EDN: OVOHOI

For citation:

Shilin AP. Solution of the hypersingular integro-differential equation on a curve located in the angular domain. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;2:6–15. Russian.
EDN: OVOHOI

Автор:

Андрей Петрович Шилин – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики и математической физики физического факультета.

Author:

Andrei P. Shilin, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics and mathematical physics, faculty of physics.
a.p.shilin@gmail.com

SOLUTION OF THE HYPERSINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION ON A CURVE LOCATED IN THE ANGULAR DOMAIN

A. P. SHILIN^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Abstract. We solve a new linear integro-differential equation on a closed curve on the complex plane. Some restrictions are placed on the curve location and on coefficients of the equation. The equation contains hypersingular and regular integrals. Initially, it is reduced to the Riemann – Carleman boundary value problem for analytic functions, which has a partial form and an unconventional formulation. Next, two linear differential equations with constant coefficients in domains of the complex plane with additional conditions on the solution are solved. All solvability conditions of the original equation are stated explicitly. When they are performed, the solution to the original equation is given explicitly.

Keywords: integro-differential equation; hypersingular integral; generalised Sokhotsky formulas; Riemann – Carleman boundary value problem; linear differential equation.

Введение

Пусть L – простая гладкая замкнутая положительно ориентированная кривая на комплексной плоскости. Обозначим через D_+ внутренность, а через D_- внешность этой кривой. Зададим комплексные числа $a_k, b_k, k = 0, n, n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0, b_n \neq 0$, а также H -непрерывную (т. е. удовлетворяющую условию Гёльдера) функцию $h(t), t \in L$. В дальнейшем искомой будет функция $\varphi(t), t \in L$, H -непрерывная вместе со своими производными, входящими в уравнение.

Для предельных значений на кривой L интеграла типа Коши

$$\Phi_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_{\pm},$$

и его производных справедливы полученные в работе [1] обобщенные формулы Сохоцкого

$$\Phi_{\pm}^{(k)}(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi^{(k)}(t) + \frac{k!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}}, \quad k = \overline{0, n}, t \in L, \quad (1)$$

частным случаем которых при $k = 0$ являются классические формулы Сохоцкого. Гиперсингулярные интегралы в формулах (1) понимаются в смысле конечной части по Адамару, что согласно работе [1] для их вычисления приводит к формулам

$$\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} = \frac{\pi i \varphi^{(k)}(t)}{k!} + \int_L \frac{\varphi(\tau) - \sum_{j=0}^k \frac{\varphi^{(j)}(t)}{j!} (\tau - t)^j}{(\tau - t)^{k+1}} d\tau,$$

в правых частях которых интегралы сходятся в обычном смысле. В работе [2] с использованием формул (1) в явном виде решено уравнение

$$\sum_{k=0}^n \left(a_k \varphi^{(k)}(t) + \frac{b_k k!}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} \right) = h(t), \quad t \in L. \quad (2)$$

Уравнение (2) является одним из обобщений классического характеристического сингулярного интегрального уравнения, конструктивное решение которого [3; 4] в 1930–40-х гг. обеспечило создание к настоящему времени богатой и имеющей важные приложения теории сингулярных интегральных уравнений. Дальнейшее изучение уравнений, близких к уравнению (2), может оказаться интересным и найти приложения.

Постановка задачи. Некоторые вспомогательные факты и обозначения

Зададим также число $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Обозначим через

$$\varepsilon_j = e^{\frac{2\pi i}{m}j}, \quad j \in E = \{0, 1, \dots, m-1\}, \quad (3)$$

комплексные корни степени m из единицы. Произвольным образом выберем и зафиксируем число $s \in E$. Зададим еще H -непрерывные функции $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$, $t \in L$. Кривую L возьмем теперь расположенной в угловой области вида $\gamma_0 < \arg z < \gamma_0 + \frac{2\pi}{m}$. Будем решать уравнение

$$\sum_{k=0}^n \left[(a(t)a_k + b(t)b_k) \varphi^{(mk)}(t) + \frac{(a(t)a_k - b(t)b_k)(mk)!}{\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-s} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - \varepsilon_j t)^{mk+1}} \right] = h(t), \quad t \in L. \quad (4)$$

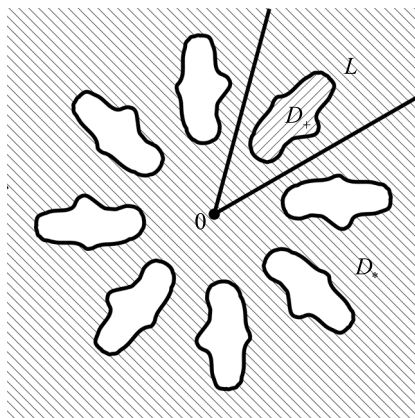
В этом уравнении в отличие от уравнения (2) коэффициенты являются переменными и имеют специальный вид. С частными случаями переменных коэффициентов уравнение (2) изучалось, например, в работах [5; 6]. При $j = 0$ интегралы во внутренней сумме уравнения (4) будут гиперсингулярными, а при $j = 1, \overline{m-1}$ – регулярными. Изучение подобных «полных» гиперсингулярных уравнений начато недавно [7; 8]. Так, в работе [8] решено уравнение (4) при $m = 2$, $s = 0$. Введем обозначение

$$D_* = \hat{\mathbb{C}} \setminus \left(L \cup D_+ \bigcup_{\beta=1}^{m-1} L_\beta \bigcup_{\beta=1}^{m-1} D_\beta \right),$$

где

$$L_\beta = \{t : t = \varepsilon_\beta \tau, \tau \in L\}, \quad D_\beta = \{z : z = \varepsilon_\beta \zeta, \zeta \in D_+\}, \quad \beta = \overline{1, m-1}.$$

Возможный вид некоторых введенных объектов изображен на рисунке.



Возможный вид кривой L и областей D_+ , D_* при $m = 8$
Possible shape of the curve L and domains D_+ , D_* in the case $m = 8$

Так как корни степени m из единицы образуют по умножению циклическую группу порядка m (с образующим элементом ε_1), то возникающие в вычислениях числа ε_j , записанные по формуле (3) для $j \in \mathbb{Z} \setminus E$, в дальнейшем можно заменять на равные им числа для соответствующего значения $j \in E$. Введем аналитические функции

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-s} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - \varepsilon_j z} = \begin{cases} \Psi_+(z), & z \in D_+, \\ \Psi_*(z), & z \in D_*. \end{cases} \quad (5)$$

Из свойств интеграла типа Коши очевидно, что для функции $\Psi_*(z)$ должно выполняться равенство

$$\Psi_*(\infty) = 0. \quad (6)$$

Кроме того, эта функция обладает свойством

$$\Psi_*(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_s \Psi_*(z). \quad (7)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \Psi_*(\varepsilon_1 z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-s} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - \varepsilon_{j+1} z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_{j-1}^{-s} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - \varepsilon_j z} = \frac{\varepsilon_s}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_s^{-1} \varepsilon_{j-1}^{-s} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - \varepsilon_j z} = \\ &= \frac{\varepsilon_s}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_1^{-s} \varepsilon_1^{(j-1)(-s)} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - \varepsilon_j z} = \frac{\varepsilon_s}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_1^{-js} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - \varepsilon_j z} = \frac{\varepsilon_s}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-s} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - \varepsilon_j z} = \varepsilon_s \Psi_*(z). \end{aligned}$$

Свойство (7) обобщает свойства четности и нечетности функции, получающиеся при $m = 2, s = 0$ и $m = 2, s = 1$ соответственно. Функции с подобными свойствами указаны в работе [9]: в сумму таких функций может быть разложена всякая функция, заданная в области с подходящими симметриями (например, в области D_*). Последний факт для дальнейших рассуждений сформулируем более точно. Если $A(z)$ – какая-либо функция комплексного переменного, заданная в области D_* , то ее можно представить в виде

$$A(z) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k(z), \quad (8)$$

где

$$A_k(z) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-k} A(\varepsilon_j z), \quad (9)$$

причем

$$A_k(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_k A_k(z), \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (10)$$

Проведенные выше выкладки можно расценивать как обоснование равенства (10) при $k = s$ в случае, если $A(z) = \frac{m}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}$. Представление (8) обобщает известное разложение функции в сумму четной и нечетной функций. Если функция $A(z)$ является аналитической, то и все функции $A_k(z)$ будут аналитическими. Дифференцируя в этом случае равенства (10) r раз, получаем

$$A_k^{(r)}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{k-r} A_k^{(r)}(z), \quad r \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, в частности, следует, что равенства (10) переносятся на производные от функций $A_k(z)$ порядков, кратных m . Первообразные вида $B_k(z) = \int_0^z A_k(\zeta) d\zeta$, если они являются однозначными аналитическими функциями в области D_* , будут обладать свойствами

$$B_k(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{k+1} B_k(z), \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (11)$$

Для обоснования свойств (11) в интегралах $\int_0^{\varepsilon_1 z} A_k(\zeta) d\zeta$ следует сделать замену $\zeta = \varepsilon_1 w$.

Краевая задача для аналитических функций, связанная с исходным уравнением

Запишем предельные значения на кривой L функций (5) и их производных порядков, кратных m :

$$\Psi_+^{(mk)}(t) = \frac{1}{2} \varphi^{(mk)}(t) + \frac{(mk)!}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-s} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - \varepsilon_j t)^{mk+1}}, \quad (12)$$

$$\Psi_*^{(mk)}(t) = -\frac{1}{2} \varphi^{(mk)}(t) + \frac{(mk)!}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-s} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - \varepsilon_j t)^{mk+1}}, \quad k = \overline{0, n}, t \in L. \quad (13)$$

Формулы (12) и (13) получаются после использования обобщенных формул Сохоцкого (1) для интеграла в функциях (5) при $j = 0$ и дифференцирования под знаком интеграла при $j = 1, m - 1$. Вычитая и складывая формулы (12) и (13), получаем пару равносильных формул

$$\varphi^{(mk)}(t) = \Psi_+^{(mk)}(t) - \Psi_*^{(mk)}(t), \quad (14)$$

$$\frac{(mk)!}{\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-s} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - \varepsilon_j t)^{mk+1}} = \Psi_+^{(mk)}(t) + \Psi_*^{(mk)}(t),$$

с помощью которых уравнению (4) можно придать вид краевой задачи для аналитических функций

$$\sum_{k=0}^n \left[(a(t)a_k + b(t)b_k) (\Psi_+^{(mk)}(t) - \Psi_*^{(mk)}(t)) + (a(t)a_k - b(t)b_k) (\Psi_+^{(mk)}(t) + \Psi_*^{(mk)}(t)) \right] = h(t), \quad t \in L,$$

или после очевидных упрощений

$$2a(t) \sum_{k=0}^n a_k \Psi_+^{(mk)}(t) - 2b(t) \sum_{k=0}^n b_k \Psi_*^{(mk)}(t) = h(t), \quad t \in L. \quad (15)$$

Первая сумма в левой части равенства (15) является предельным значением на кривой L функции $Y_+(z) = \sum_{k=0}^n a_k \Psi_+^{(mk)}(z)$, аналитической в области D_+ . Вторая сумма будет предельным значением на кривой L функции $Y_*(z) = \sum_{k=0}^n b_k \Psi_*^{(mk)}(z)$, аналитической в области D_* . Поскольку $\Psi_*^{(km)}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_s \Psi_*^{(km)}(z)$, то подобным свойством должна обладать и функция $Y_*(z)$, т. е. $Y_*(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_s Y_*(z)$. Кроме того, из условия (6) получим $Y_*(\infty) = 0$. Теперь краевую задачу (15) можно записать в виде

$$Y_+(t) = \frac{b(t)}{a(t)} Y_*(t) + \frac{h(t)}{2a(t)}, \quad t \in L. \quad (16)$$

Эта задача относится к смешанным краевым задачам Римана – Карлемана. Она имеет несколько нетрадиционное для смешанных задач краевое условие. Однако именно такое краевое условие, вид которого наиболее употребителен для двухэлементных краевых задач, позволяет распространить на нее классическую схему решения [3] с использованием подходящего аналога обобщенной теоремы Лиувилля и подходящей факторизации коэффициента. В результате получаем следующее общее решение задачи (16):

$$Y_+(z) = X_+(z)(T_+(z) + P(z)), \quad Y_*(z) = X_*(z)(T_*(z) + P(z)),$$

где

$$X_+(z) = e^{\Gamma_+(z)}, \quad X_*(z) = (z^m - z_0^m)^{-\alpha} e^{\Gamma_*(z)}, \quad z_0 \in D_+, \quad \alpha = \text{Ind}_L \frac{b(t)}{a(t)},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \int_L \frac{\ln \left[(\tau^m - z_0^m)^{-\alpha} \frac{b(\tau)}{a(\tau)} \right] d\tau}{\tau - \varepsilon_j z} = \begin{cases} \Gamma_+(z), & z \in D_+, \\ \Gamma_*(z), & z \in D_*, \end{cases}$$

$$\frac{1}{4\pi i} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-s} \int_L \frac{h(\tau) d\tau}{a(\tau) X_+(\tau) (\tau - \varepsilon_j z)} = \begin{cases} T_+(z), & z \in D_+, \\ T_*(z), & z \in D_*, \end{cases} \quad P(z) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\alpha-1} c_k z^{mk+s}, & c_k \in \mathbb{C}, \text{ если } \alpha > 0, \\ 0, & \text{если } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

При $\alpha \geq 0$ задача (16) разрешима безусловно, а при $\alpha < 0$ для ее разрешимости необходимыми и достаточными являются условия

$$\int_L \frac{h(\tau) \tau^{mk-s-1} d\tau}{a(\tau) X_+(\tau)} = 0, \quad k = \overline{1, -\alpha}. \quad (17)$$

Предположим, что задача (16) разрешима, а ее решение найдено.

Решение дифференциальных уравнений

Теперь следует решать дифференциальные уравнения

$$\sum_{k=0}^n a_k \Psi_+^{(mk)}(z) = Y_+(z), \quad z \in D_+, \quad (18)$$

$$\sum_{k=0}^n b_k \Psi_*^{(mk)}(z) = Y_*(z), \quad z \in D_*, \quad (19)$$

и в случае нахождения их решений воспользоваться формулой (14) при $k = 0$:

$$\varphi(t) = \Psi_+(t) - \Psi_*(t), \quad t \in L. \quad (20)$$

Не составляет проблемы написать общее решение уравнения (18), полученное классическим методом вариации произвольных постоянных:

$$\Psi_+(z) = \sum_{j=1}^{mn} u_j(z) \left(C_j^+ + \int_{z_1}^z \frac{U_j(\zeta) d\zeta}{U(\zeta)} \right). \quad (21)$$

В формуле (21) функции $u_j(z)$, явный вид которых известен и здесь не приведен, образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, $C_j^+ \in \mathbb{C}$, $U(\zeta)$ есть вронскиан функций $u_j(\zeta)$, а $U_j(\zeta)$ – определители, полученные из $U(\zeta)$ заменой элементов j -го столбца на $0, 0, \dots, 0, \frac{Y_+(\zeta)}{a_n}$, $j = \overline{1, mn}$, $z_1 \in D_+$. Интегрирование проводится по любой кривой, принадлежащей области D_+ и соединяющей точки z_1 и z , и вследствие конечности и односвязности области D_+ приводит к однозначным функциям.

Нужное нам решение уравнения (19) содержится в формуле

$$\Psi_*(z) = \sum_{\sigma=1}^{mn} v_\sigma(z) \left(C_\sigma^* + \int_0^z \frac{V_\sigma(\zeta) d\zeta}{V(\zeta)} \right), \quad (22)$$

аналогичной формуле (21). Здесь $v_\sigma(z)$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, $C_\sigma^* \in \mathbb{C}$, $V(\zeta)$ – вронскиан функций $v_\sigma(\zeta)$, а $V_\sigma(\zeta)$ – определители, полученные из $V(\zeta)$ заменой элементов σ -го столбца на $0, 0, \dots, 0, \frac{Y_*(\zeta)}{b_n}$, $\sigma = \overline{1, mn}$. Интегрирование в формуле (22) проводится по кривым, соединяющим точки 0 и z и принадлежащим области D_* . Поскольку область D_* является m -связной бесконечной областью, то следует наложить требования на интегралы, приводящие к их однозначности. Кроме того, из решений по формуле (22) следует выбрать те решения, для которых выполняется равенство (7). Наконец, от решений следует добиться аналитичности на бесконечности с условием (6). Таким образом, требуется более подробный анализ формулы (22).

Пусть λ_p – корни уравнения

$$\sum_{k=0}^n b_k \lambda^k = 0,$$

имеющие соответствующие кратности k_p , $p = \overline{1, q}$, $\sum_{p=1}^q k_p = n$. Для определенности будем считать, что среди чисел λ_p нет равных нулю. Для каждого $p = \overline{1, q}$ произвольным образом выберем и зафиксируем одно из значений $\sqrt[m]{\lambda_p}$, это значение будем обозначать через μ_p . Тогда корни уравнения

$$\sum_{k=0}^n b_k \mu^{mk} = 0,$$

являющегося характеристическим для однородного уравнения (19), можно записать в виде совокупностей чисел

$$\varepsilon_0 \mu_p, \varepsilon_1 \mu_p, \dots, \varepsilon_{m-1} \mu_p,$$

причем каждый корень в совокупности имеет соответствующую кратность k_p , $p = \overline{1, q}$. Фундаментальную систему решений однородного уравнения (19) обычно принято записывать в виде

$$z^l e^{\varepsilon_0 \mu_p z}, z^l e^{\varepsilon_1 \mu_p z}, \dots, z^l e^{\varepsilon_{m-1} \mu_p z}, l = \overline{0, k_p - 1}, p = \overline{1, q}. \quad (23)$$

Далее будем использовать иную фундаментальную систему решений:

$$f_{l0p}(z) = z^l g_{0p}(z), f_{l1p}(z) = z^l g_{1p}(z), \dots, f_{l,m-1,p}(z) = z^l g_{m-1,p}(z), l = \overline{0, k_p - 1}, \quad (24)$$

где

$$g_{0p}(z) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-0} e^{\varepsilon_j \mu_p z}, \quad g_{1p}(z) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-1} e^{\varepsilon_j \mu_p z}, \quad \dots, \quad g_{m-1,p}(z) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^{-(m-1)} e^{\varepsilon_j \mu_p z}, \quad p = \overline{1, q}. \quad (25)$$

Фундаментальная система решений (24) получена заменой каждой из функций в совокупностях (23) линейной комбинацией этих же функций в тех же совокупностях.

Функции (25) имеют такую же структуру, как функции (9), поэтому для них справедливы равенства вида (10):

$$g_{0p}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_0 g_{0p}(z), g_{1p}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_1 g_{1p}(z), \dots, g_{m-1,p}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{m-1} g_{m-1,p}(z).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f_{l0_p}(\varepsilon_1 z) &= (\varepsilon_1 z)^l \varepsilon_0 g_{0_p}(z) = \varepsilon_l z^l g_{0_p}(z) = \varepsilon_l f_{l0_p}(z), \\ f_{l1_p}(\varepsilon_1 z) &= (\varepsilon_1 z)^l \varepsilon_1 g_{1_p}(z) = \varepsilon_{l+1} z^l g_{1_p}(z) = \varepsilon_{l+1} f_{l1_p}(z), \\ &\dots\dots\dots \\ f_{l,m-1,p}(\varepsilon_1 z) &= (\varepsilon_1 z)^l \varepsilon_{m-1} g_{m-1,p}(z) = \varepsilon_{l+m-1} z^l g_{m-1,p}(z) = \varepsilon_{l+m-1} f_{l,m-1,p}(z). \end{aligned}$$

Если индексы $l, l+1, \dots, l+m-1$ каких-то чисел $\varepsilon_l, \varepsilon_{l+1}, \dots, \varepsilon_{l+m-1}$ не принадлежат множеству E , то заменим эти индексы на значения из множества E , сравнимые с ними по модулю m . В результате получится, что для каждого фиксированного $l = \overline{0, k_p - 1}$ и каждого фиксированного $p = \overline{1, q}$ в совокупности функций (24) есть ровно одна функция со свойством вида (10) для каждого $k = \overline{0, m-1}$. Проведенные рассуждения позволяют в дальнейшем взять в качестве функций $v_\sigma(z)$ в формуле (22) переобозначенные функции (24) так, чтобы $v_\sigma(z) = v_{mk+j}(z)$, причем

$$v_{km+i}(\varepsilon_i z) = \varepsilon_{i-1} v_{km+i}(z), \quad k = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (26)$$

Две леммы

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$V(\varepsilon_1 z) = V(z). \quad (27)$$

Доказательство. $V(\varepsilon_1 z)$ есть определитель

$v_1(\varepsilon_1 z)$	$v_2(\varepsilon_1 z)$...	$v_m(\varepsilon_1 z)$...	$v_{nm-m+1}(\varepsilon_1 z)$	$v_{nm-m+2}(\varepsilon_1 z)$...	$v_{nm}(\varepsilon_1 z)$
$v_1'(\varepsilon_1 z)$	$v_2'(\varepsilon_1 z)$...	$v_m'(\varepsilon_1 z)$...	$v_{nm-m+1}'(\varepsilon_1 z)$	$v_{nm-m+2}'(\varepsilon_1 z)$...	$v_{nm}'(\varepsilon_1 z)$
...
$v_1^{(m-1)}(\varepsilon_1 z)$	$v_2^{(m-1)}(\varepsilon_1 z)$...	$v_m^{(m-1)}(\varepsilon_1 z)$...	$v_{nm-m+1}^{(m-1)}(\varepsilon_1 z)$	$v_{nm-m+2}^{(m-1)}(\varepsilon_1 z)$...	$v_{nm}^{(m-1)}(\varepsilon_1 z)$
...
$v_1^{(nm-m)}(\varepsilon_1 z)$	$v_2^{(nm-m)}(\varepsilon_1 z)$...	$v_m^{(nm-m)}(\varepsilon_1 z)$...	$v_{nm-m+1}^{(nm-m)}(\varepsilon_1 z)$	$v_{nm-m+2}^{(nm-m)}(\varepsilon_1 z)$...	$v_{nm}^{(nm-m)}(\varepsilon_1 z)$
$v_1^{(nm-m+1)}(\varepsilon_1 z)$	$v_2^{(nm-m+1)}(\varepsilon_1 z)$...	$v_m^{(nm-m+1)}(\varepsilon_1 z)$...	$v_{nm-m+1}^{(nm-m+1)}(\varepsilon_1 z)$	$v_{nm-m+2}^{(nm-m+1)}(\varepsilon_1 z)$...	$v_{nm}^{(nm-m+1)}(\varepsilon_1 z)$
...
$v_1^{(nm-1)}(\varepsilon_1 z)$	$v_2^{(nm-1)}(\varepsilon_1 z)$...	$v_m^{(nm-1)}(\varepsilon_1 z)$...	$v_{nm-m+1}^{(nm-1)}(\varepsilon_1 z)$	$v_{nm-m+2}^{(nm-1)}(\varepsilon_1 z)$...	$v_{nm}^{(nm-1)}(\varepsilon_1 z)$

После использования формул (26) этот определитель станет равным

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_0 v_1(z) & \varepsilon_1 v_2(z) & \dots & \varepsilon_{m-1} v_m(z) & \dots & \varepsilon_0 v_{nm-m+1}(z) & \varepsilon_1 v_{nm-m+2}(z) & \dots & \varepsilon_{m-1} v_{nm}(z) \\ \varepsilon_{m-1} v'_1(z) & \varepsilon_0 v'_2(z) & \dots & \varepsilon_{m-2} v'_m(z) & \dots & \varepsilon_{m-1} v'_{nm-m+1}(z) & \varepsilon_0 v'_{nm-m+2}(z) & \dots & \varepsilon_{m-2} v'_{nm}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_1 v_1^{(m-1)}(z) & \varepsilon_2 v_2^{(m-1)}(z) & \dots & \varepsilon_0 v_m^{(m-1)}(z) & \dots & \varepsilon_1 v_{nm-m+1}^{(m-1)}(z) & \varepsilon_2 v_{nm-m+2}^{(m-1)}(z) & \dots & \varepsilon_0 v_{nm}^{(m-1)}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_0 v_1^{(nm-m)}(z) & \varepsilon_1 v_2^{(nm-m)}(z) & \dots & \varepsilon_{m-1} v_m^{(nm-m)}(z) & \dots & \varepsilon_0 v_{nm-m+1}^{(nm-m)}(z) & \varepsilon_1 v_{nm-m+2}^{(nm-m)}(z) & \dots & \varepsilon_{m-1} v_{nm}^{(nm-m)}(z) \\ \varepsilon_{m-1} v_1^{(nm-m+1)}(z) & \varepsilon_0 v_2^{(nm-m+1)}(z) & \dots & \varepsilon_{m-2} v_m^{(nm-m+1)}(z) & \dots & \varepsilon_{m-1} v_{nm-m+1}^{(nm-m+1)}(z) & \varepsilon_0 v_{nm-m+2}^{(nm-m+1)}(z) & \dots & \varepsilon_{m-2} v_{nm}^{(nm-m+1)}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_1 v_1^{(nm-1)}(z) & \varepsilon_2 v_2^{(nm-1)}(z) & \dots & \varepsilon_0 v_m^{(nm-1)}(z) & \dots & \varepsilon_1 v_{nm-m+1}^{(nm-1)}(z) & \varepsilon_2 v_{nm-m+2}^{(nm-1)}(z) & \dots & \varepsilon_0 v_{nm}^{(nm-1)}(z) \end{vmatrix}. \quad (28)$$

Из всех столбцов с номерами $km + j$, $k = \overline{0, n-1}$, вынесем за знак определителя (28) множители ε_{j-1} , $j = \overline{1, m}$. Тогда

$$V(\varepsilon_1 z) = (\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{m-1})^n \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \varepsilon_0 v_1(z) & \varepsilon_0 v_2(z) & \dots & \varepsilon_0 v_m(z) & \dots & \varepsilon_0 v_{nm-m+1}(z) & \varepsilon_0 v_{nm-m+2}(z) & \dots & \varepsilon_0 v_{nm}(z) \\ \varepsilon_{m-1} v'_1(z) & \varepsilon_{m-1} v'_2(z) & \dots & \varepsilon_{m-1} v'_m(z) & \dots & \varepsilon_{m-1} v'_{nm-m+1}(z) & \varepsilon_{m-1} v'_{nm-m+2}(z) & \dots & \varepsilon_{m-1} v'_{nm}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_1 v_1^{(m-1)}(z) & \varepsilon_1 v_2^{(m-1)}(z) & \dots & \varepsilon_1 v_m^{(m-1)}(z) & \dots & \varepsilon_1 v_{nm-m+1}^{(m-1)}(z) & \varepsilon_1 v_{nm-m+2}^{(m-1)}(z) & \dots & \varepsilon_1 v_{nm}^{(m-1)}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_0 v_1^{(nm-m)}(z) & \varepsilon_0 v_2^{(nm-m)}(z) & \dots & \varepsilon_0 v_m^{(nm-m)}(z) & \dots & \varepsilon_0 v_{nm-m+1}^{(nm-m)}(z) & \varepsilon_0 v_{nm-m+2}^{(nm-m)}(z) & \dots & \varepsilon_0 v_{nm}^{(nm-m)}(z) \\ \varepsilon_{m-1} v_1^{(nm-m+1)}(z) & \varepsilon_{m-1} v_2^{(nm-m+1)}(z) & \dots & \varepsilon_{m-1} v_m^{(nm-m+1)}(z) & \dots & \varepsilon_{m-1} v_{nm-m+1}^{(nm-m+1)}(z) & \varepsilon_{m-1} v_{nm-m+2}^{(nm-m+1)}(z) & \dots & \varepsilon_{m-1} v_{nm}^{(nm-m+1)}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_1 v_1^{(nm-1)}(z) & \varepsilon_1 v_2^{(nm-1)}(z) & \dots & \varepsilon_1 v_m^{(nm-1)}(z) & \dots & \varepsilon_1 v_{nm-m+1}^{(nm-1)}(z) & \varepsilon_1 v_{nm-m+2}^{(nm-1)}(z) & \dots & \varepsilon_1 v_{nm}^{(nm-1)}(z) \end{vmatrix}.$$

После вынесения за знак получившегося определителя общих множителей в каждой строке получим

$$V(\varepsilon_1 z) = (\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{m-1})^{2n} V(z).$$

Доказательство леммы завершается использованием свойства $(\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{m-1})^2 = 1$.

Лемма 2. Справедливы равенства

$$V_{km+j}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{s-j} V_{km+j}(z), \quad k = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (29)$$

Доказательство. Каждый определитель $V_{km+j}(\varepsilon_1 z)$ отличается от определителя $V(\varepsilon_1 z)$ только $(km + j)$ -м столбцом, элементы которого имеют вид $0, 0, \dots, 0, \frac{Y_*(\varepsilon_1 z)}{b_n}$. Используем равенства $Y_*(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_s Y_*(z) = \varepsilon_{s-j} \varepsilon_j Y_*(z)$. Расценивая ε_{s-j} как общий множитель элементов $(km + j)$ -го столбца, запишем этот множитель перед определителем:

$$V_{km+j}(\varepsilon_1 z) = \varepsilon_{s-j} \tilde{V}_{km+j}(\varepsilon_1 z).$$

Определитель $\tilde{V}_{km+j}(\varepsilon_1 z)$ отличается от определителя $V(\varepsilon_1 z)$ только $(km + j)$ -м столбцом, элементы которого можно записать в виде $\varepsilon_{j-1} \cdot 0, \varepsilon_{j-2} \cdot 0, \dots, \varepsilon_{j-m+1} \cdot 0, \frac{\varepsilon_j Y_*(z)}{b_n}$. Как и в доказательстве леммы 1, представим элементы остальных столбцов в виде функций от z с теми же множителями. В результате структура множителей всех элементов в определителе $\tilde{V}_{km+j}(\varepsilon_1 z)$ будет точно такой, как в определителе (28), поэтому аналогично получится $\tilde{V}_{km+j}(\varepsilon_1 z) = V_{km+j}(z)$. Лемма доказана.

Справедливыми оказываются также равенства

$$V(\varepsilon_\beta z) = V(z), \quad V_{km+j}(\varepsilon_\beta z) = \varepsilon_{(s-j)\beta} V_{km+j}(z), \quad \beta = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (30)$$

получаемые при $\beta > 1$ применением равенств (27) и (29) надлежащее число раз. Равенства (27), (29) и (30) справедливы вплоть до границы области D_* , т. е. в том числе и на кривых L , L_β , $\beta = \overline{1, m-1}$, поскольку входящие в определители $V(z)$, $V_{km+j}(z)$ функции непрерывно продолжимы на эту границу.

Учет дополнительных условий на решение дифференциального уравнения. Формулировка результата

Придадим формуле (22) вид

$$\Psi_*(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m v_{km+j}(z) \left(C_{km+j}^* + \int_0^z \frac{V_{km+j}(\zeta) d\zeta}{V(\zeta)} \right).$$

Очевидно, что для однозначности функции $\Psi_*(z)$ должны выполняться необходимые и достаточные условия

$$\int_L \frac{V_{km+j}(t) dt}{V(t)} = 0, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (31)$$

$$\int_{L_\beta} \frac{V_{km+j}(t) dt}{V(t)} = 0, \quad \beta = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (32)$$

Делая в интегралах из равенств (32) замены $t = \varepsilon_\beta \tau$ и учитывая формулы (30), получаем

$$\int_{L_\beta} \frac{V_{km+j}(t) dt}{V(t)} = \varepsilon_{(s-j+1)\beta} \int_L \frac{V_{km+j}(t) dt}{V(t)}, \quad \beta = \overline{1, m-1},$$

т. е. интегралы в равенствах (32) отличаются от интегралов в равенствах (31) лишь постоянным множителем, поэтому равенства (32) оказываются следствием равенств (31). Предположим, что равенства (31) выполняются.

Для решения однородного уравнения (19) согласно формулам (26) получим

$$\Psi_*(\varepsilon_1 z) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m v_{km+j}(\varepsilon_1 z) C_{km+j}^* = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \varepsilon_{j-1} v_{km+j}(z) C_{km+j}^*.$$

Равенство (7) будет выполняться лишь в том случае, когда $C_{km+j}^* = 0$ при всех $j \neq s+1$. Для частного решения неоднородного уравнения (19) получим

$$\Psi_*(\varepsilon_1 z) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m v_{km+j}(\varepsilon_1 z) B_{km+j}(\varepsilon_1 z),$$

где $B_{km+j}(z)$ – первообразные вида $\int_0^z \frac{V_{km+j}(\zeta) d\zeta}{V(\zeta)}$ от функций $\frac{V_{km+j}(z)}{V(z)}$, обладающих свойством $\frac{V_{km+j}(\varepsilon_1 z)}{V(\varepsilon_1 z)} = \varepsilon_{s-j} \frac{V_{km+j}(z)}{V(z)}$. С учетом равенств, аналогичных равенствам (11), имеем

$$\begin{aligned} \Psi_*(\varepsilon_1 z) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \varepsilon_{j-1} v_{km+j}(z) \varepsilon_{s-j+1} \int_0^z \frac{V_{km+j}(\zeta) d\zeta}{V(\zeta)} = \\ &= \varepsilon_s \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m v_{km+j}(z) \int_0^z \frac{V_{km+j}(\zeta) d\zeta}{V(\zeta)} = \varepsilon_s \Psi_*(z). \end{aligned}$$

Таким образом, учет условия (7) привел к решению уравнения (19) в виде

$$\begin{aligned} \Psi_*(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(C_{km+s+1}^* v_{km+s+1}(z) + \sum_{j=1}^m v_{km+j}(z) \int_0^z \frac{V_{km+j}(\zeta) d\zeta}{V(\zeta)} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{km+s+1}^* v_{km+s+1}(z) + \sum_{j=1}^{mn} v_j(z) \int_0^z \frac{V_j(\zeta) d\zeta}{V(\zeta)}. \end{aligned}$$

Наконец, для учета условия (6) разложим функцию $\Psi_*(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности и приравняем к нулю коэффициенты при неотрицательных степенях z этого разложения. В результате получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которой должны удовлетворять постоянные C_{km+s+1}^* :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{lk} C_{km+s+1}^* = \delta_l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (33)$$

где

$$\gamma_{lk} = \int_{|t|=\rho} \frac{v_{km+s+1}(t) dt}{t^{ml+s+1}}, \quad \delta_l = - \sum_{j=1}^{nm} \int_{|t|=\rho} \frac{v_j(t) dt}{t^{ml+s+1}} \int_0^t \frac{V_j(\zeta) d\zeta}{V(\zeta)},$$

ρ – достаточно большое положительное число. Теперь, используя формулу (20), сформулируем окончательный результат.

Теорема. Для разрешимости уравнения (4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (17) при $\alpha < 0$, равенства (31) и была совместна система (33). Если эти условия выполняются, то искомая функция находится по формуле

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{nm} \left[u_j(t) \left(C_j^+ + \int_{z_1}^t \frac{U_j(\zeta) d\zeta}{U(\zeta)} \right) - v_j(t) \int_0^t \frac{V_j(\zeta) d\zeta}{V(\zeta)} \right] - \sum_{k=0}^{n-1} C_{km+s+1}^* v_{km+s+1}(t), \quad t \in L,$$

где C_j^+ – произвольные комплексные постоянные, $j = \overline{1, nm}$, а C_{km+s+1}^* – комплексные постоянные, являющиеся решением системы (33), $k = 0, n-1$.

Заключительные замечания

1. В работе [8] можно найти пример уравнения (4) для $m = 2, s = 0$. Этот пример показывает наличие случаев, когда все условия теоремы выполняются.
2. Требование принадлежности кривой L угловой области можно несколько ослабить. Для проведенного исследования можно потребовать лишь, чтобы $\varepsilon, t \notin L \quad \forall t \in L$. Принадлежность L угловой области – простое и понятное достаточное условие этого требования.
3. Если одно из чисел λ_p равно нулю, то результат исследования не изменится. В данном случае следует лишь отдельно записывать функции в фундаментальной системе решений однородного уравнения (19), соответствующие этому корню.
4. При $\alpha > 0$ условия (31) в развернутом виде будут представлять собой систему линейных алгебраических уравнений для нахождения постоянных c_k , входящих в решение задачи (16). Эта система легко может быть записана и здесь не приведена.
5. H -непрерывность функций $\Psi_+(t)$ и $\Psi_*(t)$ вместе с их производными до порядка nm (а значит, согласно формуле (20) и искомой функции $\varphi(t)$) обосновывается несложно и вполне аналогично [5].

Библиографические ссылки

1. Зверович ЭИ. Обобщение формул Сохоцкого. *Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2012;2:24–28. EDN: VXDPRZ.
2. Зверович ЭИ. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. *Доклады Национальной академии наук Беларуси.* 2010;54(6):5–8. EDN: ZUFFJZ.
3. Гахов ФД. *Краевые задачи.* 3-е издание. Москва: Наука; 1977. 640 с.
4. Мусхелишвили НИ. *Сингулярные интегральные уравнения: граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* 3-е издание. Москва: Наука; 1968. 512 с.
5. Шилин АП. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах. *Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2022;58(4):358–369. DOI: 10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369.
6. Шилин АП. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с рекуррентными соотношениями в коэффициентах. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;3:6–15. DOI: 10.33581/2520-6508-2022-3-6-15.
7. Шилин АП. Интегро-дифференциальное уравнение, связанное со смешанной задачей Римана – Гильберта. В: Рогозин СВ, редактор. *Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. Труды 11-го Международного научного семинара; 16–20 сентября 2024 г.; Минск, Беларусь.* Минск: БГУ; 2024. с. 87–93.
8. Шилин АП. Интегро-дифференциальное уравнение, связанное с краевой задачей Римана – Карлемана. *Труды Института математики НАН Беларуси.* 2024;32(2):73–81. EDN: OACFEE.
9. Шилин АП. Краевая задача с рациональными коэффициентами для двух пар функций на границе угловой области. *Труды Института математики НАН Беларуси.* 2001;9:155–160. EDN: VRXKEK.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 517.925.42

ОБ ИЗОХРОНАХ ГРУБОГО ФОКУСА

А. Е. РУДЕНОК¹⁾, М. Н. ВАСИЛЕВИЧ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Проводится анализ методов исследования изохронности автономных систем на плоскости для различных типов особых точек: центра, негрубого фокуса, грубого фокуса. Объясняется, в чем состоит сложность при определении негрубого изохронного фокуса. Приводятся примеры систем в виде нормальной формы Пуанкаре – Дюлака, которые показывают, что требование быть изохронной накладывает на систему с негрубым фокусом слабые ограничения. Доказывается теорема о виде нормализующей замены сильно изохронного грубого фокуса. Находятся изохроны сильно изохронного грубого фокуса системы с квадратичными нелинейностями. Строятся фазовые портреты полученных изохронных фокусов и их изохрон.

Ключевые слова: центр; негрубый фокус; грубый фокус; изохронность; изохроны; нормальная форма Пуанкаре – Дюлака; система с квадратичными нелинейностями.

Образец цитирования:

Руденок АЕ, Василевич МН. Об изохронах грубого фокуса. Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2025;2:16–29.
EDN: JOWYSK

For citation:

Rudenok AE, Vasilevich MN. About isochrons of strong focus. Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2025;2:16–29. Russian.
EDN: JOWYSK

Авторы:

Александр Евгеньевич Руденок – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета.

Михаил Николаевич Василевич – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета.

Authors:

Alexander E. Rudenok, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of differential equations and system analysis, faculty of mechanics and mathematics.
roudenok@bsu.by

Mikhail N. Vasilevich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of differential equations and system analysis, faculty of mechanics and mathematics.
vasilevich.m@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6618-8649>

ABOUT ISOCHRONS OF STRONG FOCUS

A. E. RUDENOK^a, M. N. VASILEVICH^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: A. E. Rudenok (roudenok@bsu.by)

Abstract. The article analyses the methods for studying the isochronism of autonomous systems on a plane for different types of singular points: centre, weak focus and strong focus. The difficulty of determining a weak isochronous focus is explained. Examples of systems in the Poincaré – Dulac normal form, which show that the requirement to be isochronous imposes weak restrictions on a system with a weak focus, are given. A theorem on the form of a normalising change of a strongly isochronous strong focus is proved. Isochrones of a strongly isochronous strong focus of a system with quadratic nonlinearities are found. Phase portraits of the obtained isochronous foci and their isochrones are constructed.

Keywords: centre; weak focus; strong focus; isochronism; isochrones; Poincaré – Dulac normal form; system with quadratic nonlinearities.

Введение

Определение 1. Изохронной [1] называется автономная система на плоскости, особая точка $O(0, 0)$ которой является центром или фокусом и для которой существует гладкая кривая γ , исходящая из особой точки и трансверсальная к векторному полю системы, такая, что в некоторой довольно малой окрестности особой точки $O(0, 0)$ любая точка, движущаяся по траектории системы (изображающая точка), совершает полный оборот (от γ до γ) за одно и то же время T .

Период T равен 2π для систем с линейной частью $(-y + \lambda x, x + \lambda y)$. В работе [2] кривая γ называется t -кривой. В дальнейшем будем использовать следующие определения.

Определение 2. Кривая γ называется изохронным сечением [3].

Определение 3. Если обе полупрямые некоторой прямой, проходящей через начало координат, являются одновременно изохронными сечениями системы, то система называется сильно изохронной относительно этой прямой [1].

Определение 4. Система называется равномерно изохронной, если угловая скорость всех изображающих точек постоянна [1]. Для систем с линейной частью $(-y + \lambda x, x + \lambda y)$ она равна единице.

Статьи, в которых рассматривается проблема изохронности дифференциальных плоских голоморфных систем, можно объединить в три группы.

В публикациях первой, самой большой группы рассматриваются изохронные центры. Задача об изохронности центра берет начало со времен Х. Гюйгенса [4]. С тех пор получили развитие такие методы исследования, как переход к нормальной форме (как правило, это линейная система [5] или система с равномерной изохронностью [2; 6; 7]) и использование коммутирующих систем [8–11].

Работы второй группы посвящены изохронным негрубым фокусам. Статей на эту тему на порядок меньше, что связано с расхождениями в определении изохронного негрубого фокуса.

Определение 5. Негрубый фокус аналитической системы называется изохронным, если существует замена координат вида $v = y + \sum_{i+j=2}^{\infty} B_{ij} x^i y^j$, $u = x + \sum_{i+j=2}^{\infty} A_{ij} x^i y^j$, переводящая систему в систему с равномерной изохронностью [3; 6; 7].

Основное разногласие состоит в том, каким в определении изохронного негрубого фокуса считать преобразование координат – сходящимся [6; 7] или формальным (расходящимся) [3]. Авторы публикации [3] указывают, что если особая точка $O(0, 0)$ есть фокус аналитической системы, то в общем случае нельзя гарантировать наличие сходящегося преобразования. Значит, может существовать аналитическое векторное поле, особая точка $O(0, 0)$ которого является изохронным фокусом, но которое не удовлетворяет определению, приведенному в работе [6].

Заметим, что если считать нормализующее преобразование сходящимся, то, как будет показано ниже, изохронный фокус, имеющий в качестве изохронного сечения полупрямую, имеет в качестве этого и всю прямую. Отсюда следует, что если нормализующее преобразование сходится, то негрубый фокус с полупрямой в качестве изохронного сечения является сильно изохронным относительно прямой. Возможно, данное свойство справедливо и в случае с формальным нормализующим преобразованием, но это

до сих пор не доказано. Ниже будет обосновано, что этим свойством обладают грубые фокусы, а также изохронные центры и негрубые фокусы систем с нечетными нелинейностями в правых частях [12].

Если считать преобразование в нормальную форму формальным, то изохронные сечения системы, как прообраз радиальных прямых (изохронных сечений формальной системы с равномерной изохронностью), не определены. Существуют ли тогда изохронные сечения исходной системы? Иными словами, является ли она на самом деле изохронной?

Отметим, что сильная изохронность центров и негрубых фокусов автономных плоских систем изучалась в работах [12–18].

В статьях третьей группы описывается изохронность грубых фокусов [18; 19]. Известно (см., например, публикацию [11]), что существует аналитическая замена декартовых координат, переводящая систему в окрестности грубого фокуса в линейную систему. Следовательно, в силу определения 5 грубый фокус всегда является изохронным. Однако в практическом смысле знание этого факта не представляется значимым без знания об изохронных сечениях. Поставим вопрос: «Где будет находиться точка, движущаяся по траектории грубого фокуса, через время, равное полупериоду?» Отвечая на него, можно сказать, что точка будет находиться на проходящем через начало координат аналитическом продолжении того изохронного сечения, на котором она находилась в начальный момент.

Нормальная форма Пуанкаре – Дюлака

Авторы работы [3] заметили, что нормальная форма Пуанкаре – Дюлака для критической точки плоского векторного поля может быть использована в целях изучения проблемы центра, изохронного центра и изохронного фокуса. Нормальная форма Пуанкаре – Дюлака определяется следующей теоремой.

Теорема 1 [20, с. 23; 21, с. 70–72]. *Для системы*

$$\dot{x} = -y + f(x, y), \quad \dot{y} = x + g(x, y) \quad (1)$$

с голоморфными функциями f, g , разложения которых начинаются со степеней ≥ 2 , существует формальная замена переменных

$$u = x + \sum_{i+j=2}^{\infty} A_{ij} x^i y^j, \quad v = y + \sum_{i+j=2}^{\infty} B_{ij} x^i y^j, \quad (2)$$

приводящая эту систему к системе, которая в полярных координатах имеет вид

$$\dot{r} = rF(r^2), \quad \dot{\phi} = 1 - G(r^2), \quad (3)$$

где

$$F(r^2) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i r^{2i}, \quad G(r^2) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i r^{2i} \quad (4)$$

есть формальные ряды.

Система (3) и ее декартов аналог называются нормальной формой Пуанкаре – Дюлака системы (1). Ниже, используя нормальную форму Пуанкаре – Дюлака, будем говорить о проблеме, которая возникает при постановке задачи об изохронности негрубого фокуса.

Коэффициенты a_i в формальных рядах (4) именуются радиальными постоянными (постоянными Ляпунова, фокусными величинами) системы (1), а коэффициенты b_i – угловыми постоянными этой системы. Из выражения (4) вытекает следующее утверждение.

Утверждение. Для того чтобы система (1) имела в особой точке $O(0, 0)$ изохронный центр, необходимо и достаточно, чтобы все ее радиальные и угловые постоянные обращались в нуль.

Из утверждения следует, что для системы (1) с центром в особой точке $O(0, 0)$ угловые постоянные являются инвариантами при преобразованиях вида (2). Можно предположить, что это верно для системы (1) с негрубым фокусом в особой точке $O(0, 0)$, т. е. для того чтобы система (1) имела в особой точке $O(0, 0)$ изохронный фокус в смысле определения 5, необходимо и достаточно, чтобы все ее угловые постоянные обращались в нуль. На самом деле это не так, что показывают следующие примеры.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y \left(1 - n(x^2 + y^2)^2 \right) + kx(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= x \left(1 - n(x^2 + y^2)^2 \right) + ky(x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (5)$$

траектории и изохроны которой представлены на рис. 1. В полярных координатах система (5) есть

$$\dot{r} = kr^3, \quad \dot{\varphi} = 1 - nr^4. \quad (6)$$

Системы (5) и (6) являются нормальной формой Пуанкаре – Дюлака. Из первого уравнения системы (6) следует, что если $k \neq 0$, то особая точка $O(0, 0)$ является фокусом системы (5). Легко показать, что замена $\omega = \varphi + \frac{n}{2k}r^2$ переводит систему (6) в систему $\frac{dr}{dt} = kr^3, \quad \frac{d\omega}{dt} = 1$. Значит, особая точка $O(0, 0)$ является изохронным фокусом системы (5) несмотря на то, что угловая постоянная n системы не равна нулю. В декартовых координатах замена $\omega = \varphi + \frac{n}{2k}r^2$ имеет вид

$$u = x - y \operatorname{tg} \frac{n}{2k}(x^2 + y^2), \quad v = y + x \operatorname{tg} \frac{n}{2k}(x^2 + y^2).$$

Эта аналитическая замена переводит систему (5) в систему с равномерной изохронностью.

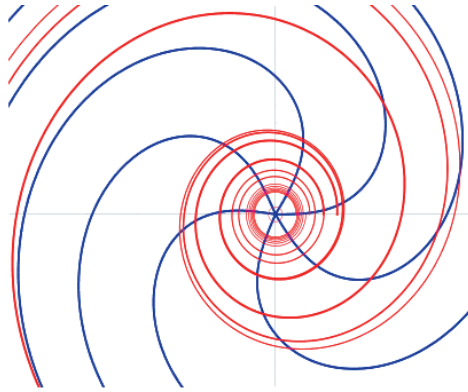


Рис. 1. Траектории и изохроны системы (5)
Fig. 1. Trajectories and isochrons of the system (5)

Пример 2. Рассмотрим систему, нормальная форма Пуанкаре – Дюлака которой в полярных координатах имеет вид

$$\frac{dr}{dt} = kr^3 + mr^5, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1 - Kr^4 - Mr^6. \quad (7)$$

Предположим, что $km \neq 0$. Замена

$$\omega = \varphi + \frac{Mr^2}{2m} + \frac{k(Km - kM) \ln \left(1 + \frac{mr^2}{k} \right)}{2km^2} \quad (8)$$

переводит систему (7) в систему $\frac{dr}{dt} = kr^3 + mr^5, \quad \frac{d\omega}{dt} = 1$. Следовательно, особая точка $O(0, 0)$ является изохронным фокусом как исходной системы, так и ее нормальной формы (7). В декартовых координатах замена (8) имеет вид

$$u = x - y \operatorname{tg} \left(\frac{M(x^2 + y^2)}{2m} + \frac{k(Km - kM) \ln \left(1 + \frac{m}{k}(x^2 + y^2) \right)}{2km^2} \right),$$

$$v = y + x \operatorname{tg} \left(\frac{M(x^2 + y^2)}{2m} + \frac{k(Km - kM) \ln \left(1 + \frac{m}{k}(x^2 + y^2) \right)}{2km^2} \right)$$

и является аналитической в окрестности начала координат.

Пример 3. Рассмотрим систему, нормальная форма Пуанкаре – Дюлака которой в полярных координатах имеет вид (3) и (4). Применим к системе (3) замену

$$\omega = \varphi + \sum_{i=1}^{\infty} c_i r^{2i} \quad (9)$$

такую, что $\frac{d\omega}{dt} = 1$. После преобразований получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} - 1 &= r^4 \left(\sum_{i=0}^{\infty} r^{2i} a_{i+1} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} 2(i+1) r^{2i} c_{i+1} \right) - \sum_{i=1}^{\infty} b_i r^{2i} = \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} r^{2i} a_{i+1} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} 2(i+1) r^{4+2i} c_{i+1} \right) - b_1 r^2 - \sum_{i=0}^{\infty} b_{i+2} r^{4+2i} = \\ &= -b_1 r^2 + \sum_{i=0}^{\infty} (2(i+1) a_{i+1} c_{i+1} - b_{i+2}) r^{4+2i} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} r^{2i-2} a_{i+1} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} 2(i+1) r^{6+2i} c_{i+1} \right) = \\ &= -b_1 r^2 + (-b_2 + 2a_1 c_1) r^4 + \sum_{i=1}^{\infty} (2(i+1) a_{i+1} c_{i+1} - b_{i+2}) r^{4+2i} + \left(\sum_{i=0}^{\infty} r^{2i} a_{i+2} \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2i r^{4+2i} c_i \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Приравняв к нулю коэффициенты при r^{4+2i} , $i \geq 0$, в равенстве (10), определим коэффициенты c_i в предположении, что

$$b_1 = 0, a_1 \neq 0. \quad (11)$$

Коэффициент $c_1 = \frac{b_2}{2a_1}$ выражается из второго слагаемого равенства (10). Предположим, что коэффициенты c_i уже вычислены. Заметим, что коэффициент c_{i+1} , $i \geq 1$, находится в третьем слагаемом равенства (10), а в четвертом слагаемом содержатся уже вычисленные коэффициенты c_i . Отсюда следует, что, учитывая выполнение второго условия (11), можно однозначно найти коэффициент c_{i+1} .

В декартовых координатах замена (9) имеет вид

$$u = x - y \sum_{i=1}^{\infty} c_i (x^2 + y^2)^i, v = y + x \sum_{i=1}^{\infty} c_i (x^2 + y^2)^i.$$

Из определения 5 следует, что при условиях (11) особая точка $O(0, 0)$ является изохронным фокусом как исходной системы, так и ее нормальной формы (3).

С учетом условий (11) можно сделать вывод о том, что определение 5 накладывает на систему с негрубым фокусом слабые ограничения. На наш взгляд, задача при таких ограничениях становится малоинтересной. В то же время задача о построении системы с фокусом и заданным изохронным сечением представляет несомненный интерес.

Замечание 1. Существует определение изохронного фокуса, отличное от определения 5. Например, в работах [12–15; 20] и других публикациях изохронным фокусом называется фокус, имеющий в качестве изохронного сечения полупрямую.

Изохроны грубых фокусов

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + \lambda x + P(x, y), \frac{dy}{dt} = x + \lambda y + Q(x, y), \quad (12)$$

где $\lambda \neq 0$; P, Q – голоморфные в окрестности особой точки $O(0, 0)$ функции, начинающиеся со степеней ≥ 2 . Пусть $\Gamma_k: \gamma_k(x, y) = 0$ – голоморфное в окрестности особой точки $O(0, 0)$ семейство кривых без контакта с полем направлений системы, пересекающихся в особой точке $O(0, 0)$ с разными угловыми коэффициентами $k \in (-\infty, +\infty)$, включая $k = \pm\infty$.

Определение 6. Кривые Γ_k называются изохронами системы (12) в окрестности особой точки $O(0, 0)$, если траектории системы пересекают сектор между двумя любыми кривыми $\Gamma_{k_1}, \Gamma_{k_2}$ за одно и то же время. Обоснованием определения 6 служит теорема Пуанкаре, которая имеет следующий вид.

Теорема 2 [11]. *Существует голоморфная замена*

$$u = x + U(x, y), v = y + V(x, y), \quad (13)$$

переводящая систему (1) в систему

$$\frac{du}{dt} = -v + \lambda u, \quad \frac{dv}{dt} = u + \lambda v. \quad (14)$$

В замене (13) $U(x, y), V(x, y)$ – функции без постоянных и линейных членов.

Система (14) в полярных координатах есть

$$\frac{dr}{dt} = \lambda r, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1. \quad (15)$$

Из системы (15) следует, что система (14) имеет равномерную изохронность, а ее изохронами являются радиальные прямые.

Лемма 1. Система

$$\frac{du}{dt} = -v + \lambda u + A(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = u + \lambda v + B(u, v) \quad (16)$$

является равномерно изохронной, если выполняется условие

$$vA(u, v) - uB(u, v) = 0. \quad (17)$$

Доказательство. В полярных координатах второе уравнение системы (16), для которой выполняется условие (17), принимает вид $\frac{d\varphi}{dt} = 1$, где φ – угловая переменная.

Из теоремы 2 следует, что голоморфная система (12), имеющая грубый фокус в начале координат, является изохронной, а ее изохроны есть прообраз радиальных прямых при осуществлении замены (13), т. е. семейство кривых

$$\Gamma_k : \{y + V(x, y) = k(x + U(x, y)), k \in (-\infty, +\infty)\} \cup \{x + U(x, y) = 0\}. \quad (18)$$

Следствие 1. Два любых изохронных сечения семейства (18) с одним и тем же угловым коэффициентом k в начале координат являются аналитическим продолжением друг друга.

Точка O пересекает изохрону Γ_k на две дуги (два изохронных сечения) – Γ_k^+ и Γ_k^- .

Следствие 2. Если траектория системы (12) пересекает дугу Γ_k^+ при значении $t = t_0$, то она пересекает дугу Γ_k^- при значении $t = t_0 + \pi$.

Лемма 2. Если замена (13) переводит систему (12) в систему с равномерной изохронностью, то замена

$$u = (x + U(x, y))(1 + W(x, y)), \quad v = (y + V(x, y))(1 + W(x, y)), \quad (19)$$

где $W(x, y)$ – голоморфная функция, при этом $W(0, 0) = 0$, также переводит систему (12) в систему с равномерной изохронностью.

Доказательство. Если замена (13) переводит точку $A(x_0, y_0)$ в точку (u_0, ku_0) на прямой $v = ku$, то замена (19) переводит точку A в точку $((1 + W(x_0, y_0))u_0, k(1 + W(x_0, y_0))u_0)$ на той же прямой.

Теорема 3. Для системы (12) среди голоморфных семейств изохрон семейство (18) является единственным.

Доказательство. Предположим, что существует голоморфное семейство изохрон H_k системы (12), отличное от семейства изохрон Γ_k . Тогда в любой малой окрестности Ω начала координат существует точка A пересечения каких-либо двух несовпадающих изохрон (например, Γ_{k_1} и H_{k_2} , $\Gamma_{k_1} \neq H_{k_2}$). Можно считать, что точка A – единственная точка пересечения этих изохрон в окрестности Ω , иначе такие точки будут существовать в любой малой окрестности начала координат, и тогда $\Gamma_{k_1} = H_{k_2}$ по теореме о единственности [21, с. 73–74]. В случае если движение начинается с точки A , траектория системы (12) через период $T = 2\pi$ должна оказаться, не покидая окрестности Ω (в противном случае можно заменить t на $-t$), как на изохроне Γ_{k_1} , так и на изохроне H_{k_2} , что невозможно.

Определение 7. Если среди изохронных сечений системы (12) имеется полуось Ox^+ , то будем говорить, что особая точка $O(0, 0)$ является изохронной относительно данной полуоси. Если она при этом является изохронной и относительно полуоси Ox^- , то будем называть особую точку $O(0, 0)$ сильно изохронной относительно оси Ox .

Теорема 4. Если система (12) является изохронной, то существует замена вида $v = y - f(x)$, которая переводит систему в сильно изохронную относительно оси Ox систему. Здесь f – голоморфная в окрестности $x = 0$ функция, начинающаяся со степени ≥ 2 .

Доказательство. Пусть $\Gamma_0 : y = f(x)$ – кривая из семейства (18), не являющаяся осью Ox . Точка O пересекает кривую Γ_0 на две дуги – Γ_0^+ и Γ_0^- . Из следствия 2 известно, что если траектория системы (12) пересекает дугу Γ_0^+ при значении $t = t_0$, то она пересекает дугу Γ_0^- при значении $t = t_0 + \pi$. Замена $v = y - f(x)$ переводит изохрону Γ_0 в ось Ox , а систему (12) – в сильно изохронную относительно оси Ox систему.

Теорема 5. Для того чтобы особая точка $O(0, 0)$ системы (12) была изохронной относительно полуоси Ox^+ , необходимо и достаточно, чтобы существовала голоморфная замена

$$u = x + U(x, y), \quad v = y, \quad (20)$$

которая переводит систему (12) в систему с равномерной изохронностью. При этом особая точка $O(0, 0)$ является сильно изохронной относительно оси Ox .

Доказательство. Необходимость. Пусть особая точка $O(0, 0)$ системы (12) является изохронной относительно полуоси Ox^+ . Замена (13) переводит изохронное сечение Ox^+ системы (1) в изохронное сечение Ou^+ системы с равномерной изохронностью, обозначенной как NF, так как замена (13) сохраняет угловой коэффициент касательной в особой точке $O(0, 0)$. Следовательно, преобразование путем применения замены (13) имеет вид

$$u = x + U(x, y), \quad v = y(1 + V(x, y)), \quad (21)$$

где $V(x, y)$ – голоморфная функция, при этом $V(0, 0) = 0$. Из преобразования (21) следует, что прообраз изохроны Ou системы NF есть ось Ox , т. е. особая точка $O(0, 0)$ системы (12) является сильно изохронной. Рассмотрим преобразование системы

$$u = \frac{x + U(x, y)}{1 + V(x, y)}, \quad v = y,$$

которое имеет вид (20). В соответствии с леммой 2 оно также переводит систему (12) в систему NF.

Достаточность. Доказательство достаточности очевидно.

Сильная изохронность грубого фокуса системы с квадратичными нелинейностями

Рассмотрим систему с квадратичными нелинейностями и грубым фокусом в особой точке $O(0, 0)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \lambda x + (a + k)x^2 + (b + c - 2m)xy + (d - k)y^2 = -y + \lambda x + p(x, y), \\ \dot{y} &= x + \lambda y - (c + m)x^2 + (a - d - 2k)xy + (b + m)y^2 = x + \lambda y + q(x, y). \end{aligned} \quad (22)$$

Система (22) получена из равносильной системы

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \lambda r + r^2(a \cos \varphi + b \sin \varphi + k \cos 3\varphi - m \sin 3\varphi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= 1 - r(c \cos \varphi + d \sin \varphi + m \cos 3\varphi + k \sin 3\varphi) \end{aligned}$$

переходом от полярных координат к декартовым.

Замечание 2. Ниже исключим из рассмотрения случай равномерной изохронности системы (22):

$$\dot{x} = -y + x\lambda + x(by + ax\lambda), \quad \dot{y} = x + y\lambda + y(by + ax\lambda).$$

Теорема 6. Для того чтобы система (22) была сильно изохронной относительно оси Ox , необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в одном из следующих видов:

- 1) $\dot{x} = -y + x\lambda - 4cx(-2y + x\lambda), \quad \dot{y} = x + y\lambda - 4c(x^2 - 4y^2 + 2xy\lambda);$
- 2) $\dot{x} = -y + x\lambda - c(-2xy + (x^2 - y^2)\lambda), \quad \dot{y} = x + y\lambda - c(x^2 - y^2 + 2xy\lambda);$
- 3) $\dot{x} = -y + \lambda x + 4c\lambda(2(2 + s^2)xy - s^2x^2\lambda + y^2(2s + \lambda)), \quad \dot{y} = x + \lambda y + 4c\lambda(y^2 + 2sy(2x + y\lambda) - s^2(x^2 - 4y^2 + 2xy\lambda));$

$$4) \dot{x} = -y + \lambda x + \frac{4}{15} \left(5sy(4x + y\lambda) + 2\beta(6x^2\lambda - y^2\lambda + xy(2 + 3\lambda^2)) \right), \dot{y} = x + \lambda y + \frac{4}{15} y(5sy + \beta(y + 6x\lambda + 3y\lambda^2)).$$

Здесь λ, c, β, s – параметры системы. Соответствующие преобразования, полученные путем выполнения замены (20), имеют следующий вид:

$$1) u = x(1 - 4cx), v = y;$$

$$2) u = x - c(x^2 + y^2), v = y;$$

$$3) u = x - 4c(sx - y)^2\lambda, v = y;$$

$$4) u = x - \frac{4y((\beta + 5s)y + 3\beta x\lambda)}{3(5 + 4\beta y\lambda)}, v = y.$$

Доказательство. *Необходимость.* Применим замену (20) к системе (22) и, сохранив в правых частях координаты x, y , получим систему

$$\frac{du}{dt} = (1 + U'_x(x, y))(-y + \lambda x + p(x, y)) + (1 + U'_y(x, y))(x + \lambda y + q(x, y)),$$

$$\frac{dv}{dt} = (x + \lambda y + q(x, y)).$$

С учетом замены (20) выразим из нее функции A и B (см. систему (16)):

$$A = p(x, y) - \lambda U(x, y) + (x + y\lambda + q(x, y))U'_y(x, y) + (-y + x\lambda + p(x, y))U'_x(x, y),$$

$$B = q(x, y) - U(x, y). \quad (23)$$

Потребуем выполнения условия (17). Пусть

$$U = x + \sum_{i=2}^{\infty} V_i(x, y), \quad V_j(x, y) = \sum_{i=0}^j v_{i, j-i} x^i y^{j-i}, \quad (24)$$

где $V_i(x, y)$ – однородные многочлены i -й степени; $v_{i, j-i}$ – постоянные. С учетом функций (23) и (24) запишем левую часть равенства (17) в переменных (x, y) (ограничимся многочленами $V_i(x, y)$ до степени $i = 3$ и опустим переменные (x, y) в правой части) и получим

$$S(x, y) = yp - xq + xV_2 - y\lambda V_2 - qV_2 + V_2^2 + xV_3 - y\lambda V_3 - qV_3 + 2V_2V_3 + V_3^2 + xyV_2^{(0,1)} +$$

$$+ y^2\lambda V_2^{(0,1)} + yqV_2^{(0,1)} + xyV_3^{(0,1)} + y^2\lambda V_3^{(0,1)} + yqV_3^{(0,1)} - y^2V_2^{(1,0)} + xy\lambda V_2^{(1,0)} +$$

$$+ yp(x, y)V_2^{(1,0)} - y^2V_3^{(1,0)} + xy\lambda V_3^{(1,0)} + ypV_3^{(1,0)} + \dots$$

Использував однородность многочленов

$$p(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 p(x, y), q(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 q(x, y), V_i(\alpha x, \alpha y) = \alpha^i V_i(x, y),$$

$$V_i^{(0,1)}(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{i-1} V_i^{(0,1)}(x, y), V_i^{(1,0)}(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{i-1} V_i^{(1,0)}(x, y),$$

выразим список коэффициентов $S(\alpha x, \alpha y)$ по переменной α (ограничимся степенью 4 по переменным (x, y) и опустим их в выражении функций):

$$yp - xq + xV_2 - y\lambda V_2 + xyV_2^{(0,1)} + y^2\lambda V_2^{(0,1)} - y^2V_2^{(1,0)} + xy\lambda V_2^{(1,0)} = 0,$$

$$-qV_2 + V_2^2 + xV_3 - y\lambda V_3 + yqV_2^{(0,1)} + xyV_3^{(0,1)} + y^2\lambda V_3^{(0,1)} +$$

$$+ ypV_2^{(1,0)} - y^2V_3^{(1,0)} + xy\lambda V_3^{(1,0)} = 0, \dots$$

Подставив выражения p, q из системы (22) и выражение $V_j(x, y)$ из функций (24), получим системы

$$\begin{cases} d - k + \lambda v_{0,2} - v_{1,1} = 0, c - 3m + 3v_{0,2} + \lambda v_{1,1} - 2v_{2,0} = 0, \\ d + 3k + 2v_{1,1} + \lambda v_{2,0} = 0, c + m + v_{2,0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \{bv_{0,2} + mv_{0,2} + v_{0,2}^2 + 2\lambda v_{0,3} + dv_{1,1} - kv_{1,1} - v_{1,2} = 0, \\ & av_{0,2} - dv_{0,2} - 2kv_{0,2} + 4v_{0,3} + bv_{1,1} + cv_{1,1} - \\ & - 2mv_{1,1} + 2v_{0,2}v_{1,1} + 2\lambda v_{1,2} + 2dv_{2,0} - 2kv_{2,0} - 2v_{2,1}, \\ & - cv_{0,2} - mv_{0,2} + av_{1,1} + kv_{1,1} + v_{1,1}^2 + v_{1,2} + \\ & + bv_{2,0} + 2cv_{2,0} - 5mv_{2,0} + 2v_{0,2}v_{2,0} + 2\lambda v_{2,1} - 3v_{3,0}, \\ & av_{2,0} + dv_{2,0} + 4kv_{2,0} + 2v_{1,1}v_{2,0} + 2v_{2,1} + 2\lambda v_{3,0} = 0, \\ & cv_{2,0} + mv_{2,0} + v_{2,0}^2 + v_{3,0} = 0\}, \dots \end{aligned}$$

Решив каждую систему относительно $v_{i,j-i}$, $i = \overline{0}, j = \overline{2, 9}$, получим идеал

$$\begin{aligned} J = \{ & 9d + 3k - 9c\lambda - m\lambda + d\lambda^2 + 3k\lambda^2 - c\lambda^3 - m\lambda^3, \\ & -48bc + 48c^2 - 6ad - 15d^2 - 18ak - 24dk + 63k^2 + 64m^2 + 54ac\lambda + \\ & + 15bd\lambda + 3cd\lambda + 45bk\lambda - 153ck\lambda + 30am\lambda + 46dm\lambda - 48km\lambda - \\ & - 27bc\lambda^2 + 72c^2\lambda^2 - 9ad\lambda^2 + 10d^2\lambda^2 - 27ak\lambda^2 + 51dk\lambda^2 + 63k^2\lambda^2 - \\ & - 27bm\lambda^2 + 161cm\lambda^2 + 89m^2\lambda^2 + 21ac\lambda^3 - 23cd\lambda^3 - 48ck\lambda^3 + \\ & + 21am\lambda^3 - 23dm\lambda^3 - 48km\lambda^3 + 25c^2\lambda^4 + 50cm\lambda^4 + 25m^2\lambda^4, \dots \}, \end{aligned} \quad (25)$$

многообразие которого дает условия на коэффициенты многочленов p, q , при которых система (22) является сильно изохронной относительно оси Ox . Заметим, что в формате A4 этот идеал занимает 50 страниц, поэтому его полное представление невозможно и остальные семь образующих идеала J мы не приводим. Читатель может вычислить их с помощью любой системы компьютерной алгебры (*Mathematica*, *Maple* и т. д.). В частности, восьмая образующая идеала J состоит из 3142 слагаемых степеней 5, 7, 8, 8, 8, 8, 10 по переменным $b, a, c, d, m, k, \lambda$ соответственно.

Если предположить, что $\lambda > 0$, то следует выполнить замену

$$\begin{aligned} \lambda & \rightarrow \sqrt{\lambda}, d \rightarrow d\sqrt{\lambda}, k \rightarrow k\sqrt{\lambda}, a \rightarrow a\sqrt{\lambda}, m \rightarrow 3k + m(\lambda + 9), \\ c & \rightarrow d - m(\lambda + 1), b \rightarrow -(2a - 3d + 9m) + b(\lambda + 4). \end{aligned} \quad (26)$$

Если предположить, что $\lambda < 0$, то необходимо применить замену

$$\begin{aligned} \lambda & \rightarrow -\sqrt{\lambda}, d \rightarrow -d\sqrt{\lambda}, k \rightarrow -k\sqrt{\lambda}, a \rightarrow -a\sqrt{\lambda}, m \rightarrow 3k + m(\lambda + 9), \\ c & \rightarrow d - m(\lambda + 1), b \rightarrow -(2a - 3d + 9m) + b(\lambda + 4). \end{aligned} \quad (27)$$

Для новых переменных $Z = (\lambda, b, a, d, m, k)$, находящихся в заменах справа, сохранены старые обозначения. В обеих заменах первый член идеала (25) обращается в нуль и идеал J переводится в идеал

$$\begin{aligned} j = \{ & 2ad - 4bd - 2d^2 + 12k^2 - 2am + 4bm + 10dm + 72km + 100m^2 + ad\lambda - bd\lambda + d^2\lambda + \\ & + 3ak\lambda - 3bk\lambda + 7dk\lambda + 12k^2\lambda + 12am\lambda - 14bm\lambda + 23dm\lambda + 81km\lambda + 154m^2\lambda, \dots \}, \end{aligned} \quad (28)$$

где, как следует из замен (26) и (27), считаем, что $\lambda > 0$.

Образующие идеала j обладают свойством однородности по переменным $z = (b, a, d, m, k)$, т. е. $j_i(\alpha b, \alpha a, \alpha d, \alpha m, \alpha k) = \alpha^i j_i(b, a, d, m, k)$. При вычислении его базиса Гребнера это свойство дает возможность положить одну из переменных Z равной сначала нулю, затем единице. В качестве такой переменной выберем m .

Если $m = 0$, то базис Гребнера g идеала j , вычисленный системой компьютерной алгебры *Mathematica* в лексикографическом порядке переменных Z , состоит из 91 члена. Полное его представление невозможно по изложенной выше причине. Приведем несколько первых членов базиса Гребнера g :

$$g = \{(d - k)k^4(d + 3k)^2, (d - 5k)(d - k)k^3(d + 3k)^2, (d - k)k^2(d + 3k)^2(d^2 - 5dk + 22k^2),$$

$$(d-k)k(d+3k)^2(d^3-5d^2k+22dk^2-86k^3), k^5(d+3k)(a+d+4k), \\ k^4(d+3k)(ad-3ak-dk-9k^2), \dots\}.$$

Первый член базиса Гребнера g позволяет упростить вычисление многообразия идеала (28) до анализа следующих случаев: $k=0$, $d=-3k$, $d=k$. Если $k=0$, то базис Гребнера g_1 идеала j есть

$$g_1 = \{-(a-3b-3d)d^2(a+d), d^4(a+d)(1+\lambda), d^2(a+d)(a+3d)(1+\lambda), \\ -d(2a-4b-2d+a\lambda-b\lambda+d\lambda), d^2(a+d)(1+\lambda)(25+9\lambda)\}.$$

Если $d=-3k$, то $g_2 = \{-k(a-2b+k), k(a+k)^2\lambda\}$. При $d=k$ базис довольно громоздок. Приведем его первые члены:

$$g_3 = \{k^4(a+5k), (a-5k)k^3(a+5k), bk^4, abk^3, -k^2(a^3-2a^2b+125k^3), \\ -k(47a^4-94a^3b-65a^3k-37500k^4), b^2k^3, -k^2(a^3-4ab^2+125k^3), \dots\}.$$

Решив системы $g_1=0$, $g_2=0$, $g_3=0$, получим следующие многообразия идеала (28):

- 1) $m=0$, $d=0$, $k=0$, $c=0$;
- 2) $m=0$, $b=13k$, $d=k$, $a=-5k$;
- 3) $m=0$, $b=-7k$, $d=-3k$, $a=-k$;
- 4) $m=0$, $b=d$, $k=0$, $a=-d$.

Заметим, что другие решения систем $g_1=0$, $g_2=0$, $g_3=0$ являются подмногообразиями многообразий 1) и 4).

Если исключить случай равномерной изохронности, учесть условие $\lambda > 0$ и перейти к старым переменным с помощью замены (26), получим следующие многообразия идеала (25):

- 1) $d=c\lambda$, $k=c\lambda$, $a=-5c\lambda$, $m=3c$, $b=13c$;
- 2) $d=c\lambda$, $k=0$, $a=-c\lambda$, $m=0$, $b=c$;
- 3) $d=c\lambda$, $k=-\frac{c\lambda}{3}$, $a=\frac{c\lambda}{3}$, $m=-c$, $b=\frac{7c}{3}$.

Многообразия 1) и 2) соответствуют системам 1) и 2) из условия теоремы. Многообразие 3) является подмногообразием одного из многообразий, которое будет получено ниже.

Если $m=1$, то базис Гребнера g идеала j , вычисленный системой компьютерной алгебры *Mathematica* в лексикографическом порядке переменных Z , состоит из 51 члена. Последний член включает 797 слагаемых. Приведем несколько первых членов базиса Гребнера g :

$$g = \{(3+k)^6(4+k)^4(6+k)(12+k)(8+d+3k)^2(8+a+d+4k), \\ \frac{1}{24}(3+k)^5(4+k)^3(8+d+3k)^2(8+a+d+4k)(120+24d+78k+13k^2+k^3), \\ \frac{1}{540}(3+k)^3(4+k)^2(8+d+3k)^2(8+a+d+4k)(192672-20520d+540d^2+309528k- \\ -12960dk+202878k^2-2160dk^2+68145k^3+12133k^4+1067k^5+37k^6), \dots\}.$$

Первый член базиса Гребнера g позволяет свести вычисление многообразия идеала (28) к анализу следующих случаев: $k=-3$, $k=-6$, $k=-12$, $k=-4$, $k=\frac{1}{3}(-8-d)$, $a=-8-d-4k$. Ввиду громоздкости базисов Гребнера, вычисленных при этих условиях, приведем только их первые члены:

- 1) $(-1+d)^5(-4+a+d)$;
- 2) $(-10+d)^2(-4+d)(-16+a+d)$;
- 3) $(-28+d)^3(-40+a+d)$;
- 4) $(9+a-3b-3d)(-4+d)^2(-2+d)(-8+a+d)$;
- 5) $(4+3a-d)(40+3a-d)(10+3a-6b-d)(-7+d)(-4+d)(-1+d)^4$;
- 6) $(-3+b)(3+k)^5(4+k)^3(5+k)(9+2k)(15+2k)(439+50k)$.

Вычисление многообразий идеала можно продолжить аналогичным образом, при этом сильно упрощается вычисление соответствующих базисов Гребнера. Приведем случаи:

- 1) $8 + a + d + 4k = 0, -3 + b = 0;$
- 2) $8 + a + d + 4k = 0, 439 + 50k = 0;$
- 3) $8 + a + d + 4k = 0, 5 + k = 0;$
- 4) $8 + a + d + 4k = 0, 15 + 2k = 0;$
- 5) $8 + a + d + 4k = 0, 9 + 2k = 0;$
- 6) $8 + a + d + 4k = 0, 4 + k = 0;$
- 7) $8 + a + d + 4k = 0, 3 + k = 0.$

Им соответствуют следующие базисы Гребнера:

- 1) $\{32 - 4d - d^2 + 20k - 2dk + 3k^2 + 4\lambda\};$
- 2) $\{(-3 + b)(-246 + 25d), (-3 + b)(-55 + 7b), 679\,301 - 80\,325b + 67\,800d - 5000d^2 + 20\,000\lambda\};$
- 3) $\{(-3 + b)(-17 + 2d), (-3 + b)(-39 + 5b), 293 - 30b + 44d - 4d^2 + 16\lambda\};$
- 4) $\{(-3 + b)(-3 + d)^2, 7 + 6d - d^2 + 4\lambda\};$
- 5) $\{(-3 + b)(1 + 2d), (-9 + b)(-3 + b), -7 + 6b + 20d - 4d^2 + 16\lambda\};$
- 6) $\{(-3 + b)(-17 + 3b + 4d), -18 + 6b + 25d - 3bd - 4d^2 + 16\lambda\};$
- 7) $\{(-3 + b)(-1 + d)^3, (-3 + b)(-1243 + 320b + 286d - 3d^2), -247 + 61b + 302d - 58bd - 55d^2 - 3bd^2 + 256\lambda\}.$

В конечном счете получим многообразия идеала (28):

- 1) $a = \frac{1}{3}(-8b - 3d - 12k), \lambda = -\frac{(4b - 3d + 3k)(8b + 3d + 9k)}{4b^2}, m = \frac{b}{3};$
- 2) $k = \frac{1}{15}(8b - 5d), m = -\frac{b}{5}, a = \frac{1}{3}(8b + d).$

Заметим, что многообразия базисов Гребнера 1)–7) и других возникающих подобного рода базисов являются подмногообразиями многообразий 1) и 2).

В целях упрощения введем в многообразие 1) новый параметр s по формуле $(8b + 3d + 9k) = -(4b - 3d + 3k)s^2$, а в многообразие 2) такой же параметр по формуле $d = s\lambda$, при этом заменим обозначение b на обозначение β (во избежание путаницы в дальнейшем). При переходе к старым обозначениям с помощью замены (26) получим многообразия:

$$1) d = \frac{k(2s + 3\lambda + s^2\lambda)}{-6s - \lambda + s^2\lambda}, a = -\frac{k(-6s - \lambda + 5s^2\lambda)}{-6s - \lambda + s^2\lambda}, m = \frac{k(-3 + 3s^2 + 2s\lambda)}{-6s - \lambda + s^2\lambda}, c = \frac{k(3 + s^2 - 2s\lambda)}{-6s - \lambda + s^2\lambda},$$

$$b = \frac{k(7 + 13s^2 + 6s\lambda)}{-6s + (-1 + s^2)\lambda};$$

$$2) d = s\lambda, k = \frac{1}{15}(8\beta - 5s)\lambda, a = \frac{1}{3}(8\beta + s)\lambda, m = \frac{1}{5}(-\beta - 5s - \beta\lambda^2), c = \frac{1}{5}(\beta + 5s + \beta\lambda^2),$$

$$b = \frac{1}{15}(7\beta + 35s + 15\beta\lambda^2).$$

В случае с многообразием 1) систему (22) можно упростить заменой координат $x \rightarrow x\alpha, y \rightarrow y\alpha, \alpha = -6s + (-1 + s^2)\lambda$. Получим системы 3) и 4) из условия теоремы.

Достаточность. Легко проверить, что преобразования 1)–4) из условия теоремы переводят системы 1)–4) в системы с равномерной изохронностью. Так, учитывая обозначения в системе (16) и условии (17), для системы 3) и преобразований 3) имеем

$$A = u'_x \frac{dx}{dt} + u'_y \frac{dy}{dt} + v = -\lambda(-x + 4c(-sx + y)^2\lambda)\left(1 - 8csx(-1 + s\lambda) + 8cy(1 + 2s^2 + s\lambda)\right),$$

$$B = v'_x \frac{dx}{dt} + v'_y \frac{dy}{dt} - u = \lambda y \left(1 - 8csx(-1 + s\lambda) + 8cy(1 + 2s^2 + s\lambda) \right), \quad vA - uB = 0.$$

Теорема 7. *Изохроны систем 1)–3) из условия теоремы 6, помимо точки пересечения $O(0, 0)$, имеют точку пересечения O_1 , лежащую на оси Ox , которая, в свою очередь, является сильно изохронным относительно оси Ox грубым фокусом системы. Те изохроны фокуса $O(0, 0)$, которые проходят через точку O_1 , являются также изохронами фокуса O_1 .*

Доказательство. Преобразования 1) определяют уравнения изохрон особой точки $O(0, 0)$ системы 1):

$$\left\{ y = kx(1 - 4cx), k \in (-\infty, +\infty) \right\} \cup \left\{ x = 0 \right\} \cup \left\{ x = \frac{1}{4c} \right\}. \quad (29)$$

Для системы 1) другой особой точкой является точка $O_1\left(\frac{1}{4c}, 0\right)$. Параллельный перенос

$$x \rightarrow x + \frac{1}{4c}, \quad t \rightarrow -t \quad (30)$$

переводит ее в начало координат, а систему 1) в систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + x\lambda - 8cxy + 4cx^2\lambda, \quad \frac{dy}{dt} = x + y\lambda + 4cy^2 - 16cy^2 + 8cxy\lambda. \quad (31)$$

Замена

$$u = x(1 + 4cx), \quad v = y \quad (32)$$

переводит систему (31) в систему с равномерной изохронностью. Следовательно, особая точка $O_1\left(\frac{1}{4c}, 0\right)$

системы 1) является сильно изохронным относительно оси Ox грубым фокусом системы. Также замена (32) задает уравнения изохрон особой точки $O(0, 0)$ системы (31):

$$\left\{ y = kx(1 + 4cx), k \in (-\infty, +\infty) \right\} \cup \left\{ x = 0 \right\} \cup \left\{ x = -\frac{1}{4c} \right\}. \quad (33)$$

Уравнения (33) получаются из уравнений (29) переносом (30). Значит, изохроны фокуса $O(0, 0)$, которые проходят через точку O_1 , являются также изохронами фокуса O_1 . Аналогично проводится доказательство для систем 2)–4).

Теорема 8. *Каждый из двух фокусов систем 1), 3) и 4) из условия теоремы 6, помимо изохроны $y = 0$, имеет изохрону в виде прямой, проходящей через этот фокус. Для системы 1) прямыми являются изо-*

хроны $x = 0$ и $x = \frac{1}{4c}$, для системы 3) – изохроны $y = sx$ и $y = \frac{-1 + 4cs^2\lambda x}{4cs\lambda}$, для системы 4) – изохроны

$$y = -\frac{3\beta\lambda}{\beta + 5s}x \text{ и } y = -\frac{5}{4\beta\lambda}.$$

Доказательство. Для системы 1) наличие изохрон $x = 0$ и $x = \frac{1}{4c}$ вытекает из уравнений (29).

Уравнения изохрон системы 3) определяются преобразованиями 3):

$$\left\{ y = k \left(x - 4c(sx - y)^2\lambda \right), k \in (-\infty, +\infty) \right\} \cup \left\{ x - 4c(sx - y)^2\lambda = 0 \right\}.$$

При значении $k = s$ отсюда получим прямые $y = sx$, $y = \frac{-1 + 4cs^2\lambda x}{4cs\lambda}$.

Уравнения изохрон системы 4) определяются преобразованиями 4):

$$\left\{ y = kx - \frac{4ky((\beta + 5s)y + 3\beta x\lambda)}{3(5 + 4\beta y\lambda)}, k \in (-\infty, +\infty) \right\} \cup \left\{ 3(5 + 4\beta y\lambda)x - \right. \\ \left. - 4y((\beta + 5s)y + 3\beta x\lambda) = 0, (5 + 4\beta y\lambda) \neq 0 \right\} \cup \left\{ (5 + 4\beta y\lambda) = 0 \right\}.$$

При значении $k = -\frac{3\beta\lambda}{\beta + 5s}$ отсюда получим прямые $y = -\frac{3\beta\lambda}{\beta + 5s}x$, $y = -\frac{5}{4\beta\lambda}$.

На рис. 2–5 представлены траектории систем 1)–4) из условия теоремы 6 и их изохроны при выбранных значениях.

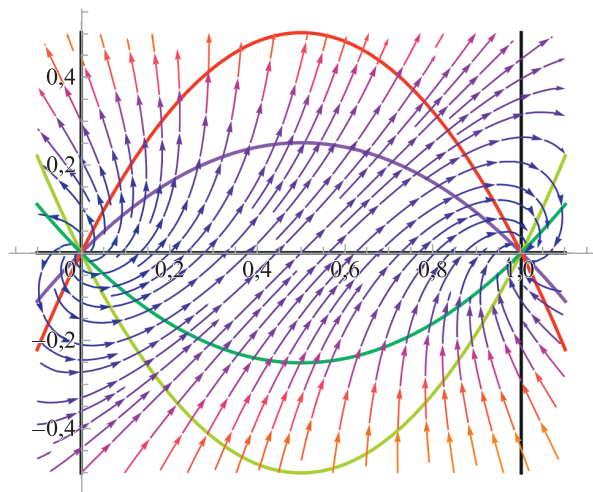


Рис. 2. Траектории и изохроны системы 1)
при $\lambda = 1$, $c = -\frac{1}{4}$

Fig. 2. Trajectories and isochrons of the system 1)
at $\lambda = 1$, $c = -\frac{1}{4}$

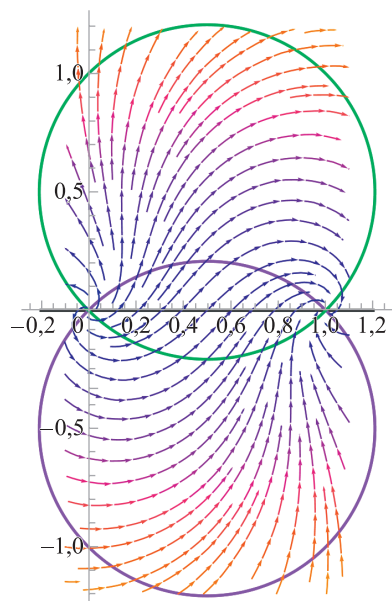


Рис. 3. Траектории и изохроны системы 2)
при $\lambda = 1$, $c = 1$

Fig. 3. Trajectories and isochrons of the system 2)
at $\lambda = 1$, $c = 1$

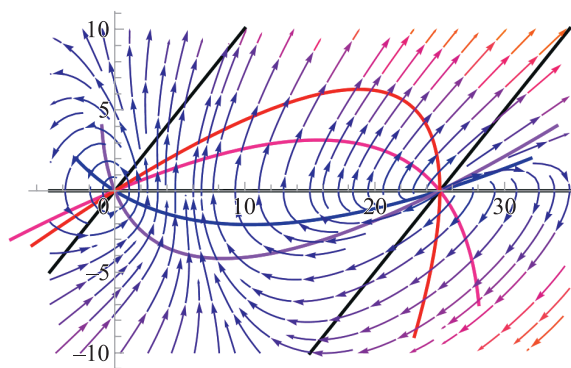


Рис. 4. Траектории и изохроны системы 3)
при $\lambda = \frac{1}{100}$, $c = 1$, $s = 1$

Fig. 4. Trajectories and isochrons of the system 3)
at $\lambda = \frac{1}{100}$, $c = 1$, $s = 1$

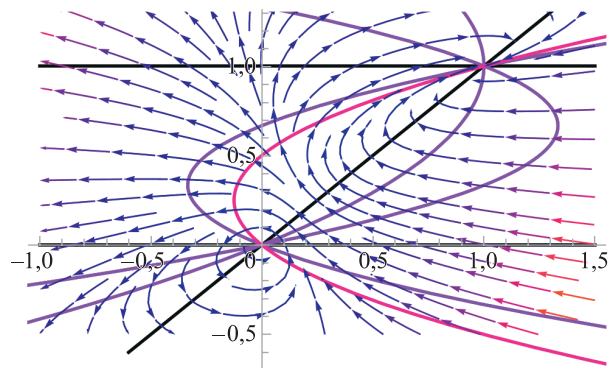


Рис. 5. Траектории и изохроны системы 4)
при $\lambda = \frac{1}{100}$, $s = \frac{103}{4}$, $\beta = -125$

Fig. 5. Trajectories and isochrons of the system 4)
at $\lambda = \frac{1}{100}$, $s = \frac{103}{4}$, $\beta = -125$

Заключение

Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях изохронного грубого фокуса системы с квадратичными нелинейностями. Найдены его изохроны и соответствующие нормализующие преобразования.

Библиографические ссылки

1. Куклес ИС, Пискунов НС. Об изохронности колебаний для консервативных и неконсервативных систем. *Доклады Академии наук СССР*. 1937;17(9):467–470.
2. Руденок АЕ. Сильная изохронность центра. О периодах предельных циклов системы Льюнара. *Дифференциальные уравнения*. 1975;11(5):811–819.

3. Algaba A, Reyes M. Characterizing isochronous points and computing isochronous sections. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2009;355(2):564–576. DOI: 10.1016/j.jmaa.2009.02.007.
4. Huygens Ch. *The pendulum clock, or Geometrical demonstrations concerning the motion of pendula as applied to clocks*. Ames: Iowa State University Press; 1986. 182 p.
5. Chen X, Romanovski VG. Linearizability conditions of time-reversible cubic systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2010;362(2):438–449. DOI: 10.1016/j.jmaa.2009.09.013.
6. Giné J. Isochronous foci for analytic differential systems. *International Journal of Bifurcation Chaos*. 2003;13(6):1617–1623. DOI: 10.1142/S0218127403007400.
7. Giné J, Grau M. Characterization of isochronous foci for planar analytic differential systems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A, Mathematics*. 2005;135(5):985–998. DOI: 10.1017/S0308210500004236.
8. Ладис НН. Коммутирующие векторные поля и изохронность. *Вестник Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина. Серия I, Математика. Физика. Механика*. 1976;1:21–24.
9. Villarini M. Regularity properties of the period function near a center of a planar vector field. *Nonlinear Analysis*. 1992;19(8):787–803.
10. Sabatini M. Characterizing isochronous centers by Lie brackets. *Differential Equations and Dynamical Systems*. 1997;5(1):91–99.
11. Sabatini M. Non-periodic isochronous oscillations in plane differential systems. *Annali di matematica pura ed applicata*. 2003;182(4):487–501. DOI: 10.1007/s10231-003-0078-0.
12. Руденок АЕ. Условия изохронности центра и фокуса в полярных координатах. *Дифференциальные уравнения*. 2008;44(10):1360–1372. EDN: JSJZKX.
13. Амелькин ВВ. Об изохронности в случаях центра и негрубого фокуса. *Дифференциальные уравнения*. 1982;18(6):1073–1075.
14. Руденок АЕ. Сильная изохронность центра и фокуса системы с полиномами третьей степени. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2008;2:4–12.
15. Руденок АЕ. Сильная изохронность центра и фокуса систем с однородными нелинейностями. *Дифференциальные уравнения*. 2009;45(2):154–161. EDN: JVTWDZ.
16. Руденок АЕ. Изохронность обратимых систем с однородными нелинейностями 4-й степени. *Вестник БГУ. Серия I, Физика. Математика. Информатика*. 2010;2:147–150. EDN: SJFVCT.
17. Руденок АЕ. Изохронные центры систем с однородными нелинейностями. *Вестник БГУ. Серия I, Физика. Математика. Информатика*. 2013;2:90–96. EDN: SNWINZ.
18. Руденок АЕ. О сильной изохронности грубого фокуса. В: Амелькин ВВ, редактор. *Материалы XXI Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2023); 23–27 мая 2023 г.; Могилёв, Беларусь. Часть I*. Могилёв: Белорусско-Российский университет; 2023. с. 92–94. EDN: MZROYU.
19. Руденок АЕ, Василевич МН. О сильной изохронности грубого фокуса. В: Бусел ТС, составитель. *Материалы XIV Белорусской математической конференции; 28 октября – 1 ноября 2024 г.; Минск, Беларусь. Часть 2*. Минск: Беларуская навука; 2024. с. 70–71.
20. Амелькин ВВ, Лукашевич НА, Садовский АП. *Нелинейные колебания в системах второго порядка*. Минск: БГУ; 1982. 206 с.
21. Ван Д, Ли Ч, Чоу ШН. *Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости*. Ильяшенко ЮС, редактор. Москва: Московский центр непрерывного математического образования; 2005. 416 с.

Получена 03.02.2025 / исправлена 20.06.2025 / принята 20.06.2025.
Received 03.02.2025 / revised 20.06.2025 / accepted 20.06.2025.

УДК 514.765

О ПОТОКЕ РИЧЧИ НА ТРЕХМЕРНЫХ НЕУНИМОДУЛЯРНЫХ ГРУППАХ ЛИ С ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ ЭКВИАФФИННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Д. С. ГРИГОРЬЕВ¹⁾, Д. Н. ОСКОРБИН²⁾, Е. Д. РОДИОНОВ¹⁾

¹⁾Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, 656049, г. Барнаул, Россия

²⁾Московский физико-технический институт, пер. Институтский, 9, 141701, г. Долгопрудный, Россия

Аннотация. Изучается поток Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с полусимметрической эквиваффинной связностью. Уравнение потока Риччи в системе координат, предложенной Дж. Милнором, приводится к системам алгебраических и дифференциальных уравнений. Находится решение уравнения потока Риччи в классе левоинвариантных метрик Милнора. Обобщаются результаты работ К. Онды, Д. Кнопфа и К. Мак-Леода, касающихся потока Риччи на трехмерных группах Ли в случае связности Леви-Чивиты.

Ключевые слова: поток Риччи; трехмерные неунимодулярные группы Ли; полусимметрические эквиваффинные связности.

Образец цитирования:

Григорьев ДС, Оскорбин ДН, Родионов ЕД. О потоке Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с полусимметрической эквиваффинной связностью. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2025;2:30–41.
EDN: MYOKEN

For citation:

Grigoryev DS, Oskorbin DN, Rodionov ED. About the Ricci flow on three-dimensional non-unimodular Lie groups with semisymmetric equiaffine connection. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2025;2:30–41. Russian.
EDN: MYOKEN

Авторы:

Данила Сергеевич Григорьев – магистрант кафедры математического анализа Института математики и информационных технологий. Научный руководитель – Е. Д. Родионов.
Дмитрий Николаевич Оскорбин – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры высшей математики.
Евгений Дмитриевич Родионов – доктор физико-математических наук; профессор кафедры математического анализа Института математики и информационных технологий.

Authors:

Danila S. Grigoryev, master's degree student at the department of mathematical analysis, Institute of Mathematics and Information Technologies.
danila.grigoryev.2019@mail.ru
<https://orcid.org/0009-0006-6875-840X>
Dmitrii N. Oskorbin, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of higher mathematics.
oskorbin@yandex.ru
<https://orcid.org/0009-0002-6385-3214>
Eugene D. Rodionov, doctor of science (physics and mathematics); professor at the department of mathematical analysis, Institute of Mathematics and Information Technologies.
edr2002@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0003-3624-1749>

ABOUT THE RICCI FLOW ON THREE-DIMENSIONAL NON-UNIMODULAR LIE GROUPS WITH SEMISYMMETRIC EQUIAFFINE CONNECTION

D. S. GRIGORYEV^a, D. N. OSKORBIN^b, E. D. RODIONOV^a

^aAltai State University, 61 Lenina Avenue, Barnaul 656049, Russia

^bMoscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskij Lane, Dolgoprudnyj 141701, Russia

Corresponding author: D. S. Grigoryev (danila.grigoryev.2019@mail.ru)

Abstract. The Ricci flow on three-dimensional non-unimodular Lie groups with semisymmetric equiaffine connection is studied. The Ricci flow equation in the coordinate system proposed by J. Milnor is reduced to systems of algebraic and differential equations. A solution to the Ricci flow equation in the class of left-invariant Milnor metrics is found. The results of works by K. Onda, D. Knopf and K. McLeod concerning the Ricci flow on three-dimensional Lie groups in the case of Levi-Civita connectivity are generalised.

Keywords: Ricci flow; three-dimensional non-unimodular Lie groups; semisymmetric equiaffine connections.

Введение

Р. С. Гамильтон и другие математики исследовали уравнение потока Риччи для связности Леви-Чивиты, которое играет важную роль в римановой геометрии [1]. Класс полусимметрических связностей, содержащий связность Леви-Чивиты, был открыт Э. Картаном [2]. Естественным является изучение потока Риччи на римановых многообразиях с полусимметрической связностью. Известно, что тензор Риччи полусимметрической связности не является симметричным, поэтому необходимо рассматривать полусимметрические эквивалентные связности, т. е. связности с симметричным тензором Риччи.

В данной работе изучается поток Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с полусимметрической эквивалентной связностью. Уравнение потока Риччи в системе координат, предложенной Дж. Милнором, приводится к системам алгебраических и дифференциальных уравнений. Посредством решения сначала подсистемы алгебраических уравнений, а затем системы дифференциальных уравнений находится решение уравнения потока Риччи на трехмерной неунимодулярной группе Ли с метрикой Милнора относительно полусимметрической эквивалентной связности.

В настоящей статье обобщены результаты исследований К. Онды, Д. Кнофа и К. Мак-Леода, касающихся потока Риччи на трехмерных группах Ли с левоинвариантной метрикой Милнора в случае связности Леви-Чивиты [3; 4], а также отражено продолжение работы в этом направлении. Другие результаты содержатся в публикациях [5–9]. Так, их авторы изучали метрики Эйнштейна и солитоны Риччи на группах Ли с полусимметрической связностью.

Предварительные сведения

Пусть M – риманово многообразие размерности n . Определим на многообразии M полусимметрическую связность ∇ формулой

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X,$$

где X и Y – произвольные векторные поля; ∇^g – связность Леви-Чивиты; $g(X, Y)$ – метрический тензор; V – некоторое фиксированное левоинвариантное векторное поле. Связность ∇ является метрической. Впервые она была описана Э. Картаном в работе [2]. При $V = 0$ связность ∇ совпадает со связностью ∇^g .

Тензор кривизны R и тензор Риччи Ric связности ∇ определяются равенствами

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{tr}(Z \rightarrow R(X, Z)Y)$$

соответственно.

Рассмотрим на полном многообразии M однопараметрическое семейство римановых метрик $g(t)$ и запишем уравнение потока Риччи

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -\text{Ric}(g(t)). \quad (1)$$

Начало исследованию потока Риччи было положено Р. С. Гамильтоном для связности ∇^g [1]. Известно, что тензор Риччи Ric связности ∇ не является симметричным. По этой причине рассмотрим ситуацию, когда связность ∇ является эквивариантной, т. е. тензор Риччи Ric симметричен. Согласно источнику [7] в случае групп Ли эквивариантность эквивалентна равенству

$$V^i g_{ij} c_{kt}^j = 0, \quad (2)$$

где V^i – координаты вектора; g_{ij} – компоненты метрического тензора; c_{kt}^j – структурные константы алгебры Ли, определяемые разложением $[E_k, E_t] = c_{kt}^j E_j$ для некоторого ортобазиса E_i . В инвариантной форме эквивариантность имеет вид

$$g(V, [X, Y]) = 0.$$

Нетрудно заметить, что наличие нетривиальной эквивариантной связности ∇ зависит от алгебраического строения группы Ли. Так, в случае с простой группой Ли единственной такой связностью является связность ∇^g , а в случае с коммутативной группой – любая инвариантная связность ∇ .

Пусть $M = G$ – группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, g – ее алгебра Ли. Зафиксируем базис $\{E_1, \dots, E_n\}$ в алгебре g и положим, что

$$[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k, \quad g(E_i, E_j) = g_{ij}, \quad c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks}.$$

Также зафиксируем некоторое левоинвариантное векторное поле V , с помощью которого определим на группе G связность ∇ . Тогда символы Кристоффеля связности ∇ задаются формулами

$$\Gamma_{ij}^k = (\Gamma^g)_{ij}^k + g_{ij} V^k - g_{sj} V^s \delta_i^k,$$

где $(\Gamma^g)_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ls} (c_{ijl} - c_{jli} + c_{lij})$ – компоненты связности ∇^g ; $\|g^{ks}\|$ – матрица, обратная к матрице $\|g_{ks}\|$; δ_i^k – символы Кронекера.

Аналогично общему случаю определим тензор кривизны R и тензор Риччи Ric. В базисе $\{E_1, \dots, E_n\}$ их компоненты есть

$$R_{ijks} = (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p) g_{ps},$$

$$\text{Ric}_{ik} = R_{ijks} g^{js}$$

соответственно.

Исследуем поведение потоков Риччи для некоторых классических левоинвариантных римановых метрик на группах Ли малых размерностей.

Полусимметрические эквивариантные связности на трехмерных неунимодулярных группах Ли

Пусть G – трехмерная неунимодулярная группа Ли. Тогда в алгебре g существует ортобазис $\{E_1, E_2, E_3\}$, называемый базисом Милнора [10], такой, что

$$[E_1, E_2] = \alpha E_1 + \beta E_2, \quad [E_1, E_3] = \nu E_2 + (2 - \alpha) E_3.$$

Рассмотрим на группе G однопараметрическое семейство левоинвариантных римановых метрик

$$g(t) = A(t)(\theta^1)^2 + B(t)(\theta^2)^2 + C(t)(\theta^3)^2,$$

где $\{\theta^i\}$ – кобазис к базису Милнора $\{E_i\}$. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма. Для полусимметрических эквивариантных связностей на трехмерных неунимодулярных группах Ли имеет место один из следующих возможных случаев.

1. $V = (0, 0, 0) \quad \forall \alpha, \beta, \nu \in \mathbb{R}$.
2. $V = (v_1, 0, 0), \quad v_1 \neq 0, \quad \alpha = 0 \quad \forall \beta, \nu \in \mathbb{R}$.
3. $V = (0, v_2, 0), \quad v_2 \neq 0, \quad \beta = \nu = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
4. $V = (0, 0, v_3), \quad v_3 \neq 0, \quad \alpha = 2 \quad \forall \beta, \nu \in \mathbb{R}$.
5. $V = (v_1, v_2, 0), \quad v_1 \neq 0, \quad v_2 \neq 0, \quad \alpha = \beta = \nu = 0$.
6. $V = (0, v_2, v_3), \quad v_2 \neq 0, \quad v_3 \neq 0, \quad \alpha = 2, \quad \beta = \nu = 0$.

7. $V = (v_1, 0, v_3)$, $v_1 \neq 0$, $v_3 \neq 0$ (в этом случае решений нет).

8. $V = (v_1, v_2, v_3)$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, $\alpha = 2$, $v = 0$, $A(t) = -\frac{\beta v_2}{2v_1} B(t)$, $\frac{\beta v_2}{2v_1} < 0$.

Доказательство. Учитывая условие эквивалентности (2), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A(t)\alpha v_1 + B(t)\beta v_2 = 0, \\ B(t)v v_2 + C(t)(2 - \alpha)v_3 = 0, \\ B(t)v v_2 - C(t)(2 - \alpha)v_3 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

При $V = (0, 0, 0)$ система (3) имеет решение для всех $\alpha, \beta, v \in \mathbb{R}$.

При $V = (v_1, 0, 0)$ система (3) принимает вид $A(t)\alpha v_1 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

При $V = (0, v_2, 0)$ система (3) сводится к виду

$$\begin{cases} B(t)\beta v_2 = 0, \\ B(t)v v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = v = 0.$$

При $V = (0, 0, v_3)$ система (3) имеет вид $C(t)(2 - \alpha)v_3 = 0 \Rightarrow \alpha = 2$.

При $V = (v_1, v_2, 0)$ система (3) принимает вид

$$\begin{cases} A(t)\alpha v_1 + B(t)\beta v_2 = 0, \\ B(t)v v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = v = 0.$$

При $V = (0, v_2, v_3)$ система (3) сводится к виду

$$\begin{cases} B(t)\beta v_2 = 0, \\ B(t)v v_2 + C(t)(2 - \alpha)v_3 = 0, \\ B(t)v v_2 - C(t)(2 - \alpha)v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2, \beta = v = 0.$$

При $V = (v_1, 0, v_3)$ система (3) имеет вид

$$\begin{cases} A(t)\alpha v_1 = 0, \\ C(t)(2 - \alpha)v_3 = 0. \end{cases}$$

Так как $v_1 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, система относительно α решений не имеет.

При $V = (v_1, v_2, v_3)$ система (3) принимает вид

$$\begin{cases} A(t)\alpha v_1 + B(t)\beta v_2 = 0, \\ B(t)v v_2 + C(t)(2 - \alpha)v_3 = 0, \\ B(t)v v_2 - C(t)(2 - \alpha)v_3 = 0. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений системы получаем $\alpha = 2$, $v = 0$. Подставляя в первое уравнение найденные значения, получаем $A(t) = -\frac{\beta v_2}{2v_1} B(t)$, $\frac{\beta v_2}{2v_1} < 0$.

Решения уравнения потока Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с полусимметрической эквивалентной связностью

Применяя основную лемму, запишем и решим уравнение потока Риччи для каждого возможного случая.

Теорема. Пусть G – трехмерная неунимодулярная группа Ли с полусимметрической эквивалентной связностью. Тогда решения уравнения потока Риччи (1) имеют следующий вид.

1. В случае если $V = (0, 0, 0) \forall \beta \in \mathbb{R}$:

1.1. При $\alpha = \nu = 0$ получаем

$$\begin{cases} A(t) = A_0 - (\beta^2 + 4)t, \\ B(t) = B_0 \left| \frac{\beta^2 + 4}{A_0} t - 1 \right|^{\frac{\beta(\beta^2 + 2)}{\beta^2 + 4}}, \\ C(t) = C_0 \left| \frac{\beta^2 + 4}{A_0} t - 1 \right|^{\frac{2(\beta^2 + 2)}{\beta^2 + 4}}. \end{cases}$$

1.2. При $\alpha = 2, \nu = 0$ получаем

$$\begin{cases} A(t) = A_0 - \left(\beta^2 + \frac{4A}{B_0} \right) t, \\ B(t) = B_0 - \left(\frac{B_0}{A_0} \beta^2 + 4 \right) t, \\ C(t) = C_0. \end{cases}$$

2. В случае если $V = (\nu_1, 0, 0), \nu_1 \neq 0, \alpha = 0$:

2.1. При $\nu = 0, \nu_1(\beta + 2) > 0$ имеем

$$\begin{cases} A(t) = (A_0 + A_1)e^{-\lambda t} - A_1, \\ B(t) = B_0 \left| 1 + \frac{A_1}{A_0}(1 - e^{\lambda t}) \right|^{\frac{\beta}{A_1 \nu_1} e^{\frac{A_0 + A_1}{\beta + 2} \nu_1 (e^{-\lambda t} - 1) - \nu_1 \beta \left(1 + \frac{4}{\beta + 2} \right) t}}, \\ C(t) = C_0 \left| 1 + \frac{A_1}{A_0}(1 - e^{\lambda t}) \right|^{\frac{2}{A_1 \nu_1} e^{\frac{A_0 + A_1}{\beta + 2} \nu_1 (e^{-\lambda t} - 1) - \nu_1 \beta \left(3 - \frac{4}{\beta + 2} \right) t}}, \end{cases}$$

где $A_1 = \frac{\beta^2 + 4}{\nu_1(\beta + 2)} > 0; \lambda = \nu_1(\beta + 2) > 0$.

2.2. При $\nu = 0, \nu_1(\beta + 2) > 0$ имеем

$$\begin{cases} A(t) = \pm |A_0 - \tilde{A}_1| e^{\tilde{\lambda} t} + \tilde{A}_1, \\ B(t) = B_0 \left| \frac{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| + \tilde{A}_1 e^{-\tilde{\lambda} t}}{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| + \tilde{A}_1} \right|^{\frac{\beta}{\tilde{A}_1 \nu_1} e^{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| \frac{\nu_1}{\beta + 2} (e^{\tilde{\lambda} t} - 1) - \nu_1 \beta \left(1 + \frac{4}{\beta + 2} \right) t}}, \\ C(t) = C_0 \left| \frac{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| + \tilde{A}_1 e^{-\tilde{\lambda} t}}{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| + \tilde{A}_1} \right|^{\frac{2}{\tilde{A}_1 \nu_1} e^{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| \frac{\nu_1}{\beta + 2} (e^{\tilde{\lambda} t} - 1) - \nu_1 \beta \left(3 - \frac{4}{\beta + 2} \right) t}}, \end{cases}$$

где $\tilde{A}_1 = -\frac{\beta^2 + 4}{\nu_1(\beta + 2)} > 0; \tilde{\lambda} = -\nu_1(\beta + 2) > 0$.

3. В случае если $V = (0, v_2, 0)$, $\beta = v = 0$:

3.1. При $\alpha = 0$ получаем

$$\begin{cases} A(t) = \left(A_0 + \frac{4}{v_2^2 B_0} \right) e^{-v_2^2 B_0 t} - \frac{4}{v_2^2 B_0}, \\ B(t) = B_0, \\ C(t) = \frac{C_0}{A_0} \left[\left(A_0 + \frac{4}{v_2^2 B_0} \right) e^{-v_2^2 B_0 t} - \frac{4}{v_2^2 B_0} \right]. \end{cases}$$

3.2. При $\alpha = 2$, $v_2 < 0$ получаем

$$\begin{cases} A(t) = A_0 \left| 1 - \frac{2}{v_2 B_0} + \frac{2}{v_2 B_0} e^{-2v_2 t} \right| e^{\frac{1}{2}(2 - v_2 B_0)(e^{2v_2 t} - 1) + 2v_2 t}, \\ B(t) = \frac{2}{v_2} + \left(B_0 - \frac{2}{v_2} \right) e^{2v_2 t}, \\ C(t) = C_0 e^{\frac{1}{2}(2 - v_2 B_0)(e^{2v_2 t} - 1)}. \end{cases}$$

3.3. При $\alpha = 2$, $v_2 > 0$ получаем

$$\begin{cases} A(t) = A_0 \left| \frac{\frac{2}{v_2} e^{-2v_2 t} \pm \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right|}{\frac{2}{v_2} \pm \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right|} \right| e^{\pm \frac{v_2}{2} \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right| (1 - e^{2v_2 t}) + 2v_2 t}, \\ B(t) = \frac{2}{v_2} \pm \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right| e^{2v_2 t}, \\ C(t) = C_0 e^{\pm \frac{v_2}{2} \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right| (1 - e^{2v_2 t})}. \end{cases}$$

4. В случае если $V = (0, 0, v_3)$, $\alpha = 2$, при $v = 0 \forall \beta \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{cases} A(t) = \left(A_0 + \frac{4A_0 + B_0 \beta^2}{v_3^2 B_0 C_0} \right) e^{-v_3^2 C_0 t} - \frac{4A_0 + B_0 \beta^2}{v_3^2 B_0 C_0}, \\ B(t) = \left(B_0 + \frac{4A_0 + B_0 \beta^2}{v_3^2 A_0 C_0} \right) e^{-v_3^2 C_0 t} - \frac{4A_0 + B_0 \beta^2}{v_3^2 A_0 C_0}, \\ C(t) = C_0. \end{cases}$$

5. В случае если $V = (v_1, v_2, 0)$, $\alpha = \beta = v = 0$, решений нет.

6. В случае если $V = (0, v_2, v_3)$, $\alpha = 2$, $\beta = v = 0$, решений нет.

7. В случае если $V = (v_1, v_2, v_3)$, $\alpha = 2$, $v = 0$, $A(t) = -\frac{\beta v_2}{2v_1} B(t)$, $\frac{\beta v_2}{2v_1} < 0$, $\beta \neq 0$, решений нет.

Доказательство. Докажем теорему для каждого возможного случая.

1. Пусть $V = (0, 0, 0)$. Тогда уравнение потока Риччи имеет вид

$$\begin{cases} \alpha(\alpha - 2) = 0, \\ \alpha v = 0, \\ \frac{B(t)}{A(t)} v(\alpha - 2) = 0, \\ \frac{dA}{dt} = -\frac{2A(t)C(t)\alpha^2 + B(t)^2 v^2 + 2B(t)C(t)\alpha^2 - 8B(t)C(t)\alpha + 2B(t)C(t)\beta^2 + 8B(t)C(t)}{2B(t)C(t)}, \\ \frac{dB}{dt} = -\frac{2A(t)C(t)\alpha^2 - B(t)^2 v^2 - 2B(t)C(t)\alpha\beta + 2B(t)C(t)\beta^2 + 4B(t)C(t)\beta}{2A(t)C(t)}, \\ \frac{dC}{dt} = -\frac{B(t)^2 v^2 + 2C(t)\alpha^2 - 2C(t)\alpha\beta - 8C(t)\alpha + 4C(t)\beta + 8C(t)}{2A(t)}. \end{cases}$$

С учетом системы алгебраических уравнений достаточно рассмотреть следующие случаи.

1.1. Пусть $\alpha = v = 0$. Тогда система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\beta^2 - 4, \\ \frac{dB}{dt} = -\frac{B(t)\beta(\beta + 2)}{A(t)}, \\ \frac{dC}{dt} = -\frac{2C(t)(\beta + 2)}{A(t)}. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} A(t) = A_0 - (\beta^2 + 4)t, \\ B(t) = B_0 \left| \frac{\beta^2 + 4}{A_0} t - 1 \right|^{\frac{\beta(\beta^2 + 2)}{\beta^2 + 4}}, \\ C(t) = C_0 \left| \frac{\beta^2 + 4}{A_0} t - 1 \right|^{\frac{2(\beta^2 + 2)}{\beta^2 + 4}}. \end{cases}$$

1.2. Пусть $\alpha = 2, v = 0$. Тогда система дифференциальных уравнений сводится к виду

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\frac{4A(t) + B(t)\beta^2}{B(t)}, \\ \frac{dB}{dt} = -\frac{4A(t) + B(t)\beta^2}{A(t)}, \\ \frac{dC}{dt} = 0. \end{cases}$$

Отсюда, разделяя переменные, имеем

$$\begin{cases} A(t) = A_0 - \left(\beta^2 + \frac{4A}{B_0} \right) t, \\ B(t) = B_0 - \left(\frac{B_0}{A_0} \beta^2 + 4 \right) t, \\ C(t) = C_0. \end{cases}$$

2. Пусть $V = (v_1, 0, 0)$, $v_1 \neq 0$, $\alpha = 0$. Тогда уравнение потока Риччи имеет вид

$$\begin{cases} \frac{B(t)(A(t)v_1 + 4)v}{2A(t)} = 0, \\ \frac{dA}{dt} = -\frac{2A(t)C(t)\beta v_1 + 4A(t)C(t)v_1 + B(t)v^2 + 2C(t)\beta^2 + 8C(t)}{2C(t)}, \\ \frac{dB}{dt} = -B(t) \frac{2A(t)^2 C(t)v_1^2 + 4A(t)C(t)\beta v_1 + 8A(t)C(t)v_1 - B(t)v^2 + 2C(t)\beta^2 + 4C(t)\beta}{2A(t)C(t)}, \\ \frac{dC}{dt} = -\frac{2A(t)^2 C(t)v_1^2 + 4A(t)C(t)\beta v_1 + 8A(t)C(t)v_1 + B(t)v^2 + 4C(t)\beta + 8C(t)}{2A(t)}. \end{cases}$$

С учетом системы алгебраических уравнений получаем систему дифференциальных уравнений при $v = 0$

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -A(t)(\beta + 2)v_1 - \beta^2 - 4, \\ \frac{dB}{dt} = -\frac{B(t)(A(t)v_1 + \beta)(A(t)v_1 + \beta + 2)}{A(t)}, \\ \frac{dC}{dt} = -\frac{C(t)(A(t)v_1 + 2)(A(t)v_1 + \beta + 2)}{A(t)}. \end{cases}$$

Отсюда имеем $\left| A(t) + \frac{\beta^2 + 4}{v_1(\beta + 2)} \right| = \left| A_0 + \frac{\beta^2 + 4}{v_1(\beta + 2)} \right| e^{-v_1(\beta + 2)t}$.

2.1. Если $v_1(\beta + 2) > 0$, то решение системы дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} A(t) = (A_0 + A_1)e^{-\lambda t} - A_1, \\ B(t) = B_0 \left| 1 + \frac{A_1}{A_0} (1 - e^{\lambda t}) \right|^{\frac{\beta}{A_1 v_1}} e^{\frac{A_0 + A_1}{\beta + 2} v_1 (e^{-\lambda t} - 1) - v_1 \beta \left(1 + \frac{4}{\beta + 2} \right) t}, \\ C(t) = C_0 \left| 1 + \frac{A_1}{A_0} (1 - e^{\lambda t}) \right|^{\frac{2}{A_1 v_1}} e^{\frac{A_0 + A_1}{\beta + 2} v_1 (e^{-\lambda t} - 1) - v_1 \beta \left(3 - \frac{4}{\beta + 2} \right) t}, \end{cases}$$

где $A_1 = \frac{\beta^2 + 4}{v_1(\beta + 2)} > 0$; $\lambda = v_1(\beta + 2) > 0$.

2.2. Если $v_1(\beta + 2) < 0$, то получаем следующее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} A(t) = \pm |A_0 - \tilde{A}_1| e^{\tilde{\lambda}t} + \tilde{A}_1, \\ B(t) = B_0 \left| \frac{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| + \tilde{A}_1 e^{-\tilde{\lambda}t}}{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| + \tilde{A}_1} \right|^{\frac{\beta}{\tilde{A}_1 v_1}} e^{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| \frac{v_1}{\beta + 2} (e^{\tilde{\lambda}t} - 1) - v_1 \beta \left(1 + \frac{4}{\beta + 2}\right)t}, \\ C(t) = C_0 \left| \frac{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| + \tilde{A}_1 e^{-\tilde{\lambda}t}}{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| + \tilde{A}_1} \right|^{\frac{2}{\tilde{A}_1 v_1}} e^{\pm |A_0 - \tilde{A}_1| \frac{v_1}{\beta + 2} (e^{\tilde{\lambda}t} - 1) - v_1 \beta \left(3 - \frac{4}{\beta + 2}\right)t}, \end{cases}$$

где $\tilde{A}_1 = -\frac{\beta^2 + 4}{v_1(\beta + 2)} > 0$; $\tilde{\lambda} = -v_1(\beta + 2) > 0$.

3. Пусть $V = (0, v_2, 0)$, $v_2 \neq 0$, $\beta = v = 0$. Тогда уравнение потока Риччи сводится к виду

$$\begin{cases} \alpha(\alpha - 2) = 0, \\ \frac{dA}{dt} = -\frac{A(t)B(t)^2 v_2^2 - 2A(t)B(t)\alpha v_2 + A(t)\alpha^2 + B(t)\alpha^2 - 4B(t)\alpha^2 + B(t)}{B(t)}, \\ \frac{dB}{dt} = -\alpha(B(t)v_2 - \alpha), \\ \frac{dC}{dt} = -C(t) \frac{A(t)B(t)v_2^2 - A(t)\alpha v_2 + \alpha^2 - 4\alpha + 4}{A(t)}. \end{cases}$$

С учетом системы алгебраических уравнений достаточно рассмотреть следующие случаи.

3.1. Пусть $\alpha = 0$. Тогда система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -A(t)B(t)v_2^2 - 4, \\ \frac{dB}{dt} = 0, \\ \frac{dC}{dt} = -\frac{C(t)(A(t)B(t)v_2^2 + 4)}{A(t)}. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} A(t) = \left(A_0 + \frac{4}{v_2^2 B_0} \right) e^{-v_2^2 B_0 t} - \frac{4}{v_2^2 B_0}, \\ B(t) = B_0, \\ C(t) = \frac{C_0}{A_0} \left[\left(A_0 + \frac{4}{v_2^2 B_0} \right) e^{-v_2^2 B_0 t} - \frac{4}{v_2^2 B_0} \right]. \end{cases}$$

Пусть $\alpha = 2$. Тогда система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\frac{A(t)(B(t)v_2 - 2)^2}{B(t)}, \\ \frac{dB}{dt} = 2(B(t)v_2 - 2), \\ \frac{dC}{dt} = -v_2 C(t)(B(t)v_2 - 2). \end{cases}$$

Отсюда имеем $\left| B(t) - \frac{2}{v_2} \right| = \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right| e^{2v_2 t}$.

3.2. Если $v_2 < 0$, то решение системы дифференциальных уравнений сводится к виду

$$\begin{cases} A(t) = A_0 \left| 1 - \frac{2}{B_0 v_2} + \frac{2}{B_0 v_2} e^{-2v_2 t} \right| e^{\frac{1}{2}(2 - v_2 B_0)(e^{2v_2 t} - 1) + 2v_2 t}, \\ B(t) = \frac{2}{v_2} + \left(B_0 - \frac{2}{v_2} \right) e^{2v_2 t}, \\ C(t) = C_0 e^{\frac{1}{2}(2 - v_2 B_0)(e^{2v_2 t} - 1)}. \end{cases}$$

3.3. Если $v_2 > 0$, то получаем следующее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} A(t) = A_0 \left| \frac{\frac{2}{v_2} e^{-2v_2 t} \pm \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right|}{\frac{2}{v_2} \pm \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right|} \right| e^{\pm \frac{v_2}{2} \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right| (1 - e^{2v_2 t}) + 2v_2 t}, \\ B(t) = \frac{2}{v_2} \pm \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right| e^{2v_2 t}, \\ C(t) = C_0 e^{\pm \frac{v_2}{2} \left| B_0 - \frac{2}{v_2} \right| (1 - e^{2v_2 t})}. \end{cases}$$

4. Пусть $V = (0, 0, v_3)$, $v_3 \neq 0$, $\alpha = 2$, тогда уравнение потока Риччи имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2} B(t) v v_3 = 0, \\ 2v = 0, \\ \frac{dA}{dt} = - \frac{2A(t)B(t)C(t)^2 v_3^2 + 8A(t)C(t) + B(t)^2 v^2 + 2B(t)C(t)\beta^2}{2B(t)C(t)}, \\ \frac{dB}{dt} = - \frac{2A(t)B(t)C(t)^2 v_3^2 + 8A(t)C(t) - B(t)^2 v^2 + 2B(t)C(t)\beta^2}{2A(t)C(t)}, \\ \frac{dC}{dt} = - \frac{B(t)v^2}{2A(t)}. \end{cases}$$

С учетом системы алгебраических уравнений получаем систему дифференциальных уравнений при $v = 0$

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = - \frac{A(t)B(t)C(t)v_3^2 + 4A(t) + B(t)\beta^2}{B(t)}, \\ \frac{dB}{dt} = - \frac{A(t)B(t)C(t)v_3^2 + 4A(t) + B(t)\beta^2}{A(t)}, \\ \frac{dC}{dt} = 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} A(t) = \left(A_0 + \frac{4A_0 + B_0\beta^2}{v_3^2 B_0 C_0} \right) e^{-v_3^2 c_0 t} - \frac{4A_0 + B_0\beta^2}{v_3^2 B_0 C_0}, \\ B(t) = \left(B_0 + \frac{4A_0 + B_0\beta^2}{v_3^2 A_0 C_0} \right) e^{-v_3^2 c_0 t} - \frac{4A_0 + B_0\beta^2}{v_3^2 A_0 C_0}, \\ C(t) = C_0. \end{cases}$$

5. Пусть $V = (v_1, v_2, 0)$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $\alpha = \beta = v = 0$. Тогда уравнение потока Риччи принимает вид

$$\begin{cases} A(t)B(t)v_1v_2 = 0, \\ \frac{dA}{dt} = -A(t)B(t)v_2^2 - 2A(t) - 4, \\ \frac{dB}{dt} = -B(t)v_1(A(t)v_1 + 2), \\ \frac{dC}{dt} = -C(t) \frac{A(t)^2v_1^2 + A(t)B(t)v_2^2 + 4A(t)v_2^2 + 4}{B(t)}. \end{cases}$$

Так как $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, система решений не имеет.

6. Пусть $V = (0, v_2, v_3)$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, $\alpha = 2$, $\beta = v = 0$. Тогда уравнение потока Риччи сводится к виду

$$\begin{cases} B(t)C(t)v_2v_3 = 0, \\ \frac{dA}{dt} = - \frac{A(t)B(t)^2v_2^2 + B(t)C(t)v_3^2 - 4B(t)v_2 + 4}{B(t)}, \\ \frac{dB}{dt} = -B(t)C(t)v_3^2 + 2B(t)v_2 - 4. \end{cases}$$

Так как $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, система решений не имеет.

7. Пусть $V = (v_1, v_2, v_3)$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, $\alpha = 2$, $v = 0$, $A(t) = -\frac{\beta v_2}{2v_1} B(t)$, $\frac{\beta v_2}{2v_1} < 0$. Тогда уравнение потока Риччи принимает вид

$$\begin{cases} B(t)C(t)\beta v_2v_3 = 0, \\ B(t)C(t)v_2v_3 = 0, \\ B(t)\beta v_2(B(t)v_2 - 1) = 0, \\ B(t)\beta v_2(B(t)v_2 - 2) = 0, \\ \frac{dA}{dt} = B(t)^2 \frac{\beta v_3^3}{v_1} + B(t)C(t) \frac{\beta v_2v_3^2}{v_1} + B(t)\beta^2v_2 - 4B(t) \frac{\beta v_2^2}{v_1} + \beta^2 - \frac{4v_2}{v_1}, \\ \frac{dB}{dt} = B(t)^2 \frac{\beta v_1v_3^2}{v_2} - B(t)C(t)v_3^2 - 2B(t)\beta v_1 + 2B(t)v_2 + \frac{\beta v_1}{v_2} - 4, \\ \frac{dC}{dt} = C(t)(B(t)\beta v_1v_2 - B(t)v_2^2 - \beta v_1 + v_2). \end{cases}$$

С учетом алгебраических и дифференциальных уравнений получаем $\beta = 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$. Отсюда имеем $A(t) = 0$, что является противоречием. Значит, система несовместна.

Заключение

Проведено исследование потока Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с полусимметрической эквивариантной связностью. Получено явное представление потока Риччи в системе координат, предложенной Дж. Милнором. Найдено точное решение уравнения потока Риччи для трехмерных неунимодулярных групп Ли с полусимметрической эквивариантной связностью.

Библиографические ссылки

1. Hamilton RS. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*. 1982;17(2):255–306. DOI: 10.4310/JDG/1214436922.
2. Cartan E. Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie). *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*. 1925;42:17–88.
3. Onda K. Ricci flow on 3-dimensional Lie groups and 4-dimensional Ricci-flat manifolds. arXiv:0906.1035 [Preprint]. 2010 [cited 2010 March 24]: [25 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/0906.1035>.
4. Knopf D, McLeod K. Quasi-convergence of model geometries under the Ricci flow. *Communications in Analysis and Geometry*. 2001;9(4):879–919. DOI: 10.4310/CAG.2001.v9.n4.a7.
5. Klepikov PN, Rodionov ED, Khromova OP. Einstein's equation on three-dimensional metric Lie groups with vector torsion. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023;276(6):733–745. DOI: 10.1007/s10958-023-06796-1.
6. Павлова АА, Хромова ОП. О симметрических потоках Риччи полусимметрических связностей на трехмерных метрических группах Ли. В: Казанский (Приволжский) федеральный университет. *Материалы международной конференции «Лобачевские чтения»; 30 июня – 4 июля 2022 г.; Казань, Россия*. Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета; 2022. с. 96–97 (Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского; том 62).
7. Клепиков ПН, Родионов ЕД, Хромова ОП. Инвариантные солитоны Риччи на метрических группах Ли с полусимметрической связностью. *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*. 2023;222: 19–29. DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-19-29.
8. Клепиков ПН, Родионов ЕД, Хромова ОП. Инвариантные солитоны Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и полусимметрической связностью. *Сибирские электронные математические известия*. 2023;20(1):48–61. DOI: 10.33048/semi.2023.20.005.
9. Клепиков ПН, Родионов ЕД, Хромова ОП. Трехмерные неунимодулярные группы Ли с римановой метрикой инвариантного солитона Риччи и полусимметрической метрической связностью. *Известия вузов. Математика*. 2022;5:80–85. DOI: 10.26907/0021-3446-2022-5-80-85.
10. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups. *Advances in Mathematics*. 1976;21:293–329.

Получена 25.03.2025 / исправлена 20.06.2025 / принята 20.06.2025.
Received 25.03.2025 / revised 20.06.2025 / accepted 20.06.2025.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

УДК 514.112.3 + 511.46

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА – ЛЕМУСА И ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ЕЕ ПАРАМЕТРОВ

М. М. ВАСЬКОВСКИЙ¹⁾, М. А. ФИРСОВ¹⁾, П. Д. БАБАЕВА¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Внутренняя n -линия треугольника является отрезком, проходящим через вершину треугольника и делящим его противоположную сторону в отношении n -х степеней прилежащих сторон. Рассматривается аналог теоремы Штейнера – Лемуса для внутренних n -линий треугольника. Находятся все значения $n \in \mathbb{R}$, для которых аналог данной теоремы выполняется. Кроме того, определяются все значения $n \in \mathbb{R}$, для которых существует неравносторонний треугольник с тремя равными внутренними n -линиями. Доказывается трансцендентность положительных критических значений n обобщенной теоремы Штейнера – Лемуса.

Ключевые слова: внутренняя n -линия треугольника; трансцендентное число; алгебраическое числовое поле; поверхность.

Образец цитирования:

Васьковский ММ, Фирсов МА, Бабаева ПД. Обобщение теоремы Штейнера – Лемуса и трансцендентность критических значений ее параметров. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2025;2:42–61 (на англ.).
EDN: FBALLQ

For citation:

Vaskouski MM, Firsau MA, Babayeva PD. A generalisation of the Steiner – Lehmus theorem and critical values transcendence of its parameters. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2025;2:42–61.
EDN: FBALLQ

Авторы:

Максим Михайлович Васьковский – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой фундаментальной математики и интеллектуальных систем факультета прикладной математики и информатики.

Максим Алексеевич Фирсов – ассистент кафедры фундаментальной математики и интеллектуальных систем факультета прикладной математики и информатики.

Полина Дмитриевна Бабаева – студентка факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – М. М. Васьковский.

Authors:

Maksim M. Vaskouski, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of fundamental mathematics and intelligence systems, faculty of applied mathematics and computer science.

vaskovskii@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0001-5769-3678>

Maksim A. Firsau, assistant at the department of fundamental mathematics and intelligence systems, faculty of applied mathematics and computer science.

firsov23@gmail.com

Palina D. Babayeva, student at the faculty of applied mathematics and computer science.

palinababayeva@gmail.com

A GENERALISATION OF THE STEINER – LEHMUS THEOREM AND CRITICAL VALUES TRANSCENDENCE OF ITS PARAMETERS

M. M. VASKOUSKI^a, M. A. FIRSAU^a, P. D. BABAYEVA^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: M. M. Vaskouski (vaskovskii@bsu.by)

Abstract. The internal n -line of a triangle is a segment from the vertex to the opposite side dividing this side into segments proportionally to the n^{th} powers of the adjacent sides. An analogue of the Steiner – Lehmus theorem for the internal n -lines of a triangle is considered. All values $n \in \mathbb{R}$ for which the mentioned analogue of the Steiner – Lehmus theorem holds are found. Also all values $n \in \mathbb{R}$ for which there exists a non-equilateral triangle with three equal internal n -lines are determined. The transcendence of positive critical values of n of the generalised Steiner – Lehmus theorem is proved.

Keywords: internal n -line of a triangle; transcendental number; algebraic number field; surface.

Introduction

The Steiner – Lehmus theorem mentioned for the first time in 1840 states: «Any triangle that has two angle bisectors... is isosceles» [1, p. 14]. This theorem allows a trivial algebraic negative proof. Existence of a direct proof in the frame of classical and intuitionistic logic was shown in 2018 [2], and the first such proof was found in 2022 [3]. Also there are known analogues of the Steiner – Lehmus theorem in other geometries different from the Euclidean geometry [4]. In the present paper, we consider the generalisation of the Steiner – Lehmus theorem, which is studied by methods of differential geometry. Let n be a real number. We examine a triangle ABC on the Euclidean plane \mathbb{R}^2 with sides $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Let AA_1 , BB_1 , CC_1 be the internal n -lines (shortly n -lines) through sides a , b , c respectively [5], i. e. each n -line divides the corresponding side of the triangle into segments with lengths proportional to the n^{th} powers of the adjacent sides. For example, $BA_1 : A_1C = (AB : AC)^n$. Particularly, AA_1 is the median for $n = 0$, AA_1 is the bisector for $n = 1$, AA_1 is the symmedian for $n = 2$. Denote the lengths of the corresponding n -lines by $l_{a,n}$, $l_{b,n}$, $l_{c,n}$.

If we assume that points A_1 , B_1 , C_1 divide externally the corresponding sides of a triangle into segments proportionally to the n^{th} powers of adjacent sides, we have definition of the external n -lines. Their lengths will be denoted by $l_{a,n}^{\text{ext}}$, $l_{b,n}^{\text{ext}}$, $l_{c,n}^{\text{ext}}$.

It is well-known that any triangle having two equal medians, two equal bisectors or two equal symmedians is isosceles. In the article [5], an analogous statement was proved for n -lines, where $n \in [-0.5, 2]$, and there also was shown that for all sufficiently large real n there exists a non-isosceles triangle with two equal n -lines. In the present paper, we give a complete answer to the question: «For which real n can one find a non-isosceles triangle with two equal n -lines?» We shall say that for a given $n \in \mathbb{R}$ an analogue of the Steiner – Lehmus theorem for two n -lines holds if any triangle with two equal n -lines is isosceles. Similarly, we say that for a given $n \in \mathbb{R}$ an analogue of the Steiner – Lehmus theorem for three n -lines holds if any triangle with three equal n -lines is equilateral. The main results of the paper are the following two theorems.

Theorem 1. An analogue of the Steiner – Lehmus theorem for two n -lines holds if and only if $n \in [-1, N_1]$.

An analogue of the Steiner – Lehmus theorem for three n -lines holds if and only if $n \in [-2, N_0]$. Here

$$N_1 = \frac{4(\beta_1 + 1)(2\beta_1 + 1)}{3\beta_1 + 1 - \sqrt{\beta_1^2 + 6\beta_1 + 1} - 16\beta_1^3} = 24.50613\dots,$$

$$N_0 = 2 \min_{x \in (0,1)} \frac{\log x}{\log(8x + 4) - \log(x^2 + 6x + 5)} = 29.143359\dots$$

and β_1 is a unique positive solution to equation

$$\frac{3\beta + 1 - \sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1} - 16\beta^3}{2(\beta + 1)(2\beta + 1)} + \frac{\log(\beta - 1 + \sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1} - 16\beta^3) - \log(2\beta^2 + 2\beta)}{\log \beta} = 0.$$

Theorem 2. The numbers N_0 and N_1 defined in theorem 1 are transcendental.

We will consider the following three properties directly related to the mentioned above generalisations of the Steiner – Lehmus theorem. Let $n \in \mathbb{R}$.

Property 1. There exists a non-isosceles triangle ABC ($a \neq c$) such that $l_{a,n} = l_{c,n}$.

Property 2. There exists an isosceles triangle ABC ($a \neq c$) such that $l_{a,n} = l_{c,n}$.

Property 3. There exists a non-equilateral triangle ABC such that $l_{a,n} = l_{b,n} = l_{c,n}$.

Using elementary computations, we deduce the formula for length of a n -line:

$$l_{a,n} = \sqrt{\frac{b^2 c^n + c^2 b^n}{b^n + c^n} - \frac{a^2 b^n c^n}{(b^n + c^n)^2}}.$$

Without loss of generality we may assume that $b = 1$ and $a \geq c$. Since the case of $n = 0$ is trivial, we will assume further that $n \neq 0$.

Let us rewrite the equality of two n -lines in terms of barycentric coordinates. We denote $\delta = a^n$, $\beta = c^n$, $k = \frac{2}{n}$. Then the equality $l_{a,n} = l_{c,n}$ is equivalent to $g(\delta, \beta, k) = 0$, where

$$g(\delta, \beta, k) = \delta^k \left(\beta(\delta + 1)^2 + (\beta + 1)^2(\delta + 1) \right) - \\ - \beta^k \left(\delta(\beta + 1)^2 + (\beta + 1)(\delta + 1)^2 \right) + (\beta + 1)(\delta + 1)(\delta - \beta).$$

Proof of theorem 1: case $n > 0$

We assume that $n > 0$.

Proposition 1. If there holds either property 1 or 2, then $\delta\beta \leq 1$ and $k \in (0, 1)$.

Proof. We suppose that either property 1 or 2 holds. Then there exists a triangle ABC such that $\delta > \beta$ and $g(\delta, \beta, k) = 0$.

Let us show that $k \in (0, 1)$. Assume the contrary, $k \geq 1$. As it was shown in theorem 2.2 presented in the paper [5], the assumption of $g'_\delta(\delta, \beta, k) \leq 0$ for $\delta \geq \beta > 0$, $k \geq 1$ implies the inequalities $\beta \geq 1$ and

$$k\beta(\delta + 1) + k(\beta + 1)^2 \leq 2\delta.$$

From this relation we obtain $2 > k\beta$ and $\delta \geq \frac{k(\beta^2 + 3\beta + 1)}{2 - k\beta}$, so $(2 - k)\delta \geq 5k$. The last inequality implies that $k \in [1, 2)$. Since $k \in [1, 2)$ and $\beta \geq 1$, we get $2 - k\beta \leq 1$. Hence $\delta \geq \beta^2 + 3\beta + 1$. Moreover, $\delta < \left(\beta^{\frac{k}{2}} + 1 \right)^{\frac{2}{k}} \leq \left(\beta^{\frac{k}{2}} + 1 \right)^2 = \beta^k + 2\beta^{\frac{k}{2}} + 1$. Therefore, $\beta^k + 2\beta^{\frac{k}{2}} + 1 > \beta^2 + 3\beta + 1$, which is impossible for $\beta \geq 1$ and $k \in [1, 2)$.

Consequently, we obtain that $g'_\delta(\delta, \beta, k) > 0$ for $\delta^{\frac{k}{2}} < \beta^{\frac{k}{2}} + 1$, $\delta \geq \beta \geq 1$, $k \in [1, 2)$, and $g'_\delta(\delta, \beta, k) > 0$ for $\delta \geq \beta > 0$, $k \geq 2$ and for $0 < \beta < 1$, $\delta \geq \beta$, $k \in [1, 2)$. Because of $g(\beta, \beta, k) = 0$, we get a contradiction to $g(\delta, \beta, k) = 0$ in the domain coloured in red (fig. 1). Hence $k \in (0, 1)$.

Now we need to show that $\delta\beta \leq 1$. Let us assume that $\delta\beta > 1$. If we assume that $\delta > 1 \geq \beta$, then we obtain $g(\delta, \beta, k) \geq g(\delta, \beta, k)0 = (\delta - \beta)(\delta\beta - 1) > 0$. Hence $\delta > \beta > 1$. Taking into account $\delta > \beta > 1$, $k \in (0, 1)$, we have

$$g(\delta, \beta, k) = (\delta^k - \beta^k) \left(\beta(\delta + 1)^2 + \delta(\beta + 1)^2 \right) + \delta^k(\beta + 1)^2 - \beta^k(\delta + 1)^2 + (\delta + 1)(\beta + 1)(\delta - \beta) > \\ > \delta^k(\beta + 1)^2 - \beta^k(\delta + 1)^2 + (\beta\delta + \beta + \delta + 1)(\delta - \beta) > \delta^k(\beta + 1)^2 - \beta^k(\delta + 1)^2 + (\beta\delta + \beta^k + \delta^k + 1)(\delta - \beta) = \\ = \delta^k(\beta^2 + 1 + \beta + \delta) - \beta^k(\delta^2 + 1 + \delta + \beta) + (\beta\delta + 1)(\delta - \beta) > \delta^k\beta^2 - \beta^k\delta^2 + (\beta\delta + 1)(\delta - \beta).$$

Let us show that

$$\delta^k\beta^2 - \beta^k\delta^2 + (\beta\delta + 1)(\delta - \beta) > 0,$$

which is equivalent to the inequality

$$\left(\delta^{\frac{k}{2}} \beta - \beta^{\frac{k}{2}} \delta \right) \left(\delta^{\frac{k}{2}} \beta + \beta^{\frac{k}{2}} \delta \right) > \beta \delta (\beta - \delta) \frac{\beta \delta + 1}{\beta \delta}.$$

Since the function $x^{\frac{k}{2}-1} + x$ is strictly increasing at $x \geq 1$ for $k \in (0, 1)$, we get $\delta^{\frac{k}{2}-1} + \delta > \beta^{\frac{k}{2}-1} + \beta$. Hence $\delta^{\frac{k}{2}} \beta - \beta^{\frac{k}{2}} \delta > \beta \delta (\beta - \delta)$. It remains to prove that $\delta^{\frac{k}{2}} \beta + \beta^{\frac{k}{2}} \delta > \frac{\beta \delta + 1}{\beta \delta}$. Indeed $\delta^{\frac{k}{2}+1} \beta^2 > \beta \delta$, $\beta^{\frac{k}{2}+1} \delta^2 > 1$. Therefore, $\delta \beta \leq 1$.

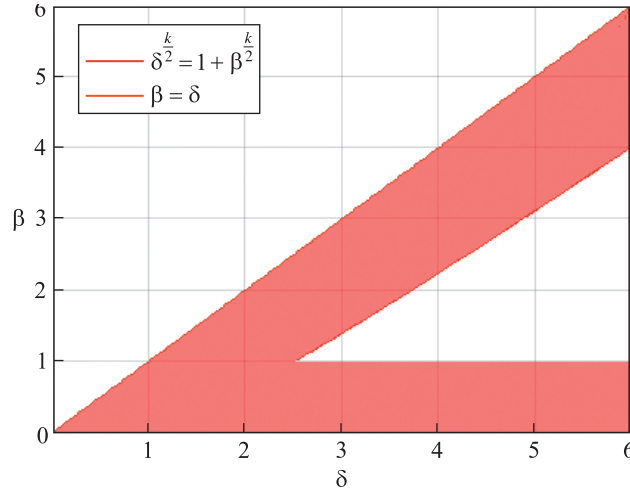


Fig. 1. Illustration to the proof of proposition 1 ($k = 1.5$)

Proposition 2. *If there holds property 2, then $a = b = 1 > c$.*

Proof. It follows from proposition 1 that property 2 is not compatible with the case $ac > 1$, hence $ac \leq 1$. If we assume that $b = c = 1$, then $a > c$, and we get $ac > 1$. So $a = b = 1$. But then $c < 1$, as it is required.

Proposition 3. *Property 2 holds if and only if $n \geq N_0$, where*

$$N_0 = 2 \min_{x \in (0,1)} \frac{\log x}{\log(8x+4) - \log(x^2+6x+5)} = 29.143\,359\dots$$

Proof. It follows from proposition 2 that $a = b = 1$, $c < 1$. Thus, we need to determine all possible values $k \in (0, 1)$ such that there exists $\beta \in (0, 1)$ such that $g(1, \beta, k) = 0$.

It is easy to see that the equation $g(1, \beta, k) = 0$ is equivalent to the equivalent

$$\beta^k = \frac{8\beta + 4}{\beta^2 + 6\beta + 5}.$$

Let us consider the function

$$k(\beta) = \frac{\log(8\beta + 4) - \log(\beta^2 + 6\beta + 5)}{\log \beta}, \quad \beta \in (0, 1).$$

Critical points of this functions are the solutions of the equation

$$\frac{2\beta(\beta + 2)(1 - \beta)}{(2\beta + 1)(\beta + 5)(\beta + 1)} = \frac{\log(8\beta + 4) - \log(\beta + 1) - \log(\beta + 5)}{\log \beta},$$

which has a unique solution $\beta_0 \in (0, 1)$, $\beta_0 = 0.139\,697\,7\dots$. This can be verified with the help of the results of the paper [6].

Since $k(+0) = k(1-0) = 0$, we deduce that the value set of the function $k(\beta)$ is the segment $(0, k_0]$, where $k_0 = k(\beta_0) = 0.068\,626\,2\dots$. Therefore, property 2 holds if and only if $k \leq k_0$, which is equivalent to $n \geq N_0$.

Proposition 4. *For any $n > N_0 = 29.143\,359\dots$ there exists a triangle with sides a, b, c such that $a > 1 = b > c$ and $l_{a,n} = l_{c,n}$.*

Proof. By proposition 3, there exists a triangle with sides $a_0 = b_0 = 1 > c_0$ such that $g(\delta_0, \beta_0, k_0) = 0, k_0 = \frac{2}{N_0}$. It is clear that $g(\delta_0, \beta_0, k) < 0$ for any $k \in (0, k_0)$. Also for any $\varepsilon > 0$ we have $g(\delta_1, \beta_1, k) > g(\delta_1, \beta_1, 0) = 0$, where $\delta_1 = \delta_0 + \varepsilon; \beta_1 = \frac{1}{\delta_1}$. By the intermediate values theorem, for any $k \in (0, k_0)$ one can find the point (δ_k, β_k) , which belongs to the segment with endpoints at $(\delta_0, \beta_0), (\delta_1, \beta_1)$ such that $g(\delta_k, \beta_k, k) = 0$. It remains to check that there exists a triangle with sides $a_k = \delta_k^{\frac{k}{2}}, b_k = 1, c_k = \beta_k^{\frac{k}{2}}$. Taking $\varepsilon \in (0, 1)$, we obtain the needed triangle inequality

$$a_k = \delta_k^{\frac{k}{2}} < \delta_1^{\frac{k}{2}} = (1 + \varepsilon)^{\frac{k}{2}} < (1 + \varepsilon)^{\frac{k_0}{2}} < 2^{\frac{k_0}{2}} < 1 + \beta_0^{\frac{k_0}{2}} < 1 + \beta_0^{\frac{k}{2}} < 1 + \beta_k^{\frac{k}{2}} = b_k + c_k.$$

Remark 1. It follows from proposition 4 that we may assume that $n \leq N_0$ while investigating property 1. Let us consider the function

$$L(\delta, \beta, k) = \frac{g(\delta, \beta, k)}{\delta - \beta}$$

in the domain $1 > \delta > \beta > 0, k \in (0, 1)$. It is easy to see that

$$L(\delta, \beta, k) = \frac{\delta^k - \beta^k}{\delta - \beta} \left(\beta(\delta + 1)^2 + (\beta + 1)^2(\delta + 1) \right) - \beta^k(\delta + \beta + 2) + (\beta + 1)(\delta + 1).$$

We shall examine the function $L(\delta, \beta, k)$ in the domain $(0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$, assuming that the function is defined by continuity at the line $\delta = \beta$.

We are going to find all values of k such that the curve $L(\delta, \beta, k) = 0$ has common points with the line $\delta = \beta$. Let us consider the function $H(\beta, k) = L(\beta, \beta, k)$. We get

$$H(\beta, k) = k\beta^{k-1}(\beta + 1)^2(2\beta + 1) - (2\beta + 2)\beta^k + (\beta + 1)^2 = (\beta + 1)H_1(\beta, k).$$

It is sufficient to find all k such that the following equation has a solution $\beta \in (0, 1)$:

$$H_1(\beta, k) = k\beta^{k-1}(2\beta^2 + 3\beta + 1) - 2\beta^k + \beta + 1 = 0.$$

Multiplying by $\beta > 0$, we obtain

$$\hat{H}(\beta, k) = \beta^k(2k\beta^2 + (3k - 2)\beta + k) + \beta(\beta + 1) = 0.$$

We consider the implicit function $k = k(\beta)$ defined by the last equation. It is sufficient to check the critical points of this function, the boundary points and the points in which the implicit function theorem fails. Critical points can be found by solving the equation

$$\hat{H}'_{\beta} = 2k(k + 2)\beta^{k+1} + (3k - 2)(k + 1)\beta^k + k^2\beta^{k-1} + 2(\beta + 1) = 0.$$

Multiplying by β and subtracting the equation $\hat{H}(\beta, k) = 0$, we obtain

$$\beta^k \left((2k^2 + 2k)\beta^2 + (3k^2 - 2k)\beta + k^2 - k \right) + \beta^2 = 0.$$

So we get

$$\frac{\beta + 1}{2k\beta^2 + (3k - 2)\beta + k} = \frac{\beta}{(2k^2 + 2k)\beta^2 + (3k^2 - 2k)\beta + k^2 - k}.$$

Solving this equation with respect to k , we obtain

$$k = \frac{3\beta + 1 \pm \sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1 - 16\beta^3}}{2(\beta + 1)(2\beta + 1)}.$$

It is clear that the largest root does not work, since

$$k \geq \frac{3\beta + 1}{2(\beta + 1)(2\beta + 1)} > \frac{1}{3},$$

and the equality $H_1(\beta, k) = 0$ fails in this case because of

$$0 = H_1(\beta, k) > \frac{1}{3}(2\beta^2 + 3\beta + 1) - 2\beta^k + \beta + 1$$

and $\beta^{\frac{1}{3}} > \beta^k > \frac{1}{3}\beta^2 + \beta + \frac{2}{3}$. Then $\beta > \frac{8}{27} \Rightarrow \beta > 0.97$, and we get $\frac{1}{3}\beta^2 + \beta + \frac{2}{3} > 1$. Hence

$$k = \frac{3\beta + 1 - \sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1 - 16\beta^3}}{2(\beta + 1)(2\beta + 1)}.$$

Let us obtain an equation on β for finding the critical point. We have

$$\beta^k = -\frac{\beta(\beta + 1)}{k(\beta + 1)(2\beta + 1) - 2\beta},$$

then

$$\beta^{-k} = \frac{2}{\beta + 1} - \frac{k(2\beta + 1)}{\beta}.$$

Substituting the found value k , we obtain

$$\beta^{-k} = \frac{\beta - 1 + \sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1 - 16\beta^3}}{2\beta(\beta + 1)}.$$

Finally, we get

$$\frac{3\beta + 1 - \sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1 - 16\beta^3}}{2(\beta + 1)(2\beta + 1)} + \frac{\log(\beta - 1 + \sqrt{\beta^2 + 6\beta + 1 - 16\beta^3}) - \log(2\beta^2 + 2\beta)}{\log \beta} = 0.$$

Applying an algorithm from the work [7], one can show that this equation has a unique root $\beta_1 = 0.304\,55\dots$. The corresponding value of k is $k_1 = 0.081\,612\dots$.

Let us investigate the existence of points in which the explicit function theorem fails:

$$H'_k(\beta, k) = 0.$$

By routine computations, we find

$$k = \frac{2\beta}{(\beta + 1)(2\beta + 1)} - \frac{1}{\log \beta}.$$

Taking into account

$$\beta^{-k} = \frac{2}{\beta + 1} - \frac{k(2\beta + 1)}{\beta},$$

we obtain the equation

$$\beta^{-k} = \frac{2\beta + 1}{\beta \log \beta},$$

which does not have solutions $\beta \in (0, 1)$, since $\log \beta < 0$.

So the equation $L(\beta, \beta, k) = 0$ has a solution $\beta \in (0, 1)$ if and only if $k \in (0, k_1]$ with $k_1 = 0.081\,612\dots$. We set $N_1 = \frac{2}{k_1} = 24.506\,13\dots$

Proposition 5. For any $n \in [0, N_1]$ property 1 does not hold.

Proof. By proposition 1, we may assume that $n > 2$, which means $k \in [k_1, 1)$, where $k_1 = 0.081\,612\dots$. For any fixed $k \in [k_1, 1)$ let us consider the function $g(\delta, \beta, k)$ on the compact set $1 \geq \delta \geq \beta \geq 0$. We are going to prove that $g(\delta, \beta, k) > 0$ at all points of this compact set except the line $\beta = \delta$. Let us show that $g'_\delta(\delta, \beta, k) > 0$ for $1 > \delta > \beta > 0$:

$$\begin{aligned} g'_\delta(\delta, \beta, k) &= k\delta^{k-1}(\beta(\delta + 1)^2 + (\delta + 1)(\beta + 1)^2) + \delta^k(2\beta(\delta + 1) + (\beta + 1)^2) - \\ &\quad - \beta^k((\beta + 1)^2 + 2(\delta + 1)(\beta + 1)) + (\beta + 1)(2\delta - \beta + 1) > \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> k\delta^{k-1} \left(\beta(\delta+1)^2 + (\delta+1)(\beta+1)^2 \right) - 2\beta^k(\delta+1) + (\beta+1)(2\delta-\beta+1) > \\
 &> k\beta^{k-1}(\beta+1)^2(2\beta+1) - 2\beta^k(\delta+1) + (\beta+1)(2\delta-\beta+1) = \\
 &= k\beta^{k-1}(\beta+1)^2(2\beta+1) - (\beta+1)^2 + 2(\delta+1)(\beta+1-\beta^k) > \\
 &> (\beta+1) \left(k\beta^{k-1}(\beta+1)(2\beta+1) - (\beta+1) + 2(\beta+1-\beta^k) \right) = \\
 &= (\beta+1)\beta^{k-1} \left(k(\beta+1)(2\beta+1) - 2\beta + \beta(\beta+1)\beta^{-k} \right) \geq (\beta+1)\beta^{k-1}h(\beta),
 \end{aligned}$$

where $h(\beta) = k_1(\beta+1)(2\beta+1) - 2\beta + \beta(\beta+1)\beta^{-k_1}$. Since $h(\beta) = \beta^{-k_1}\hat{H}(\beta, k_1)$, it follows from the arguments of above proposition 5 that the equality $h(\beta) = 0$, $\beta \in (0, 1)$, holds only if $\beta = \beta_1$. Because of $h(0) = k_1 > 0$ and $h(1) = 6k_1 > 0$, we get the inequality $h(\beta) \geq 0$ for all $\beta \in [0, 1]$.

Proposition 6. Let $N_1 < n \leq N_0$. For any $\varepsilon > 0$ one can find δ, β such that $1 > \delta > \beta > \beta_1$, $0 < \delta - \beta \leq \varepsilon$ and $L(\delta, \beta, k) = 0$, where $\beta_1 = 0.30455\dots$; $k = \frac{2}{n}$.

Proof. Let us show that for any fixed $n \in (N_1, N_0]$ one can find a solution $\beta_2 \in (\beta_1, 1)$ of the equation $L(\beta, \beta, k) = 0$. It is sufficient to prove that functions $L(\beta_1, \beta_1, k)$ and $L(1, 1, k)$ have different signs. Clearly, $L(1, 1, k) = 12k > 0$. To prove that $L(\beta_1, \beta_1, k) < 0$ it is enough to check that the function $H_1(\beta_1, k)$ defined before proposition 5 is increasing as a function of k , since $H_1(\beta_1, k_1) = 0$. We consider the derivative

$$\frac{\partial H_1(\beta_1, k)}{\partial k} = \beta_1^k \log \beta_1 (2k\beta_1^2 + (3k-2)\beta_1 + k) + \beta_1^k (2\beta_1^2 + 3\beta_1 + 1) = \beta_1^k (ka + b),$$

where $a = -2.49\dots$; $b = 2.82\dots$. It is easy to see that $\frac{\partial H_1(\beta_1, k)}{\partial k} > 0$ for all $k \in (0, 1)$. Hence $L(\beta_1, \beta_1, k) < 0$.

We are going to prove that $L'_\beta(\beta, \beta, k) > 0$ for any $\beta \in (\beta_1, 1)$, $k \in \left[\frac{2}{N_0}, \frac{2}{N_1} \right]$. So we have

$$L'_\beta(\beta, \beta, k) = (k^2 + 2k)\beta^{k+1} + \left(\frac{5}{2}k^2 + \frac{3}{2}k - 1 \right)\beta^k + (2k^2 - k)\beta^{k-1} + \frac{k^2 - k}{2}\beta^{k-2} + \beta + 1.$$

Let us find the minimum of the function $R(\beta, k) = L'_\beta(\beta, \beta, k)$ within the closed rectangle $[\beta_1, 1] \times \left[\frac{2}{N_0}, \frac{2}{N_1} \right]$.

We will prove that the function $R(\beta, k)$ has no critical points within the open rectangle $(\beta_1, 1) \times \left(\frac{2}{N_0}, \frac{2}{N_1} \right)$. Let us consider the derivative

$$\begin{aligned}
 R'_\beta(\beta, k) &= (k^2 + 2k)(k+1)\beta^k + k \left(\frac{5}{2}k^2 + \frac{3}{2}k - 1 \right) \beta^{k-1} + \\
 &+ (k-1)(2k^2 - 2)\beta^{k-2} + (k-2)\frac{k^2 - k}{2}\beta^{k-3} + 1.
 \end{aligned}$$

It is clear that $R'_\beta(\beta, k) > -k\beta^{k-1} + 1 > 0$ in the mentioned domain. Hence, the minimum of the function $R(\beta, k)$,

$(\beta, k) \in [\beta_1, 1] \times \left[\frac{2}{N_0}, \frac{2}{N_1} \right]$, is achieved on the boundary of the rectangle. Let us prove that $R\left(\beta_1, \frac{2}{N_1}\right) = 0$

and $R\left(\beta_1, \frac{2}{N_1}\right) > 0$ on the boundary of the rectangle except the point $\beta = \beta_1$, $k = \frac{2}{N_1}$. To prove the equality

$R\left(\beta_1, \frac{2}{N_1}\right) = 0$ let us recall properties of functions $H(\beta, k)$, $\hat{H}(\beta, k)$ defined before proposition 5. Since $H'_\beta(\beta, k) = L'_\delta(\beta, \beta, k) + L'_\beta(\beta, \beta, k) = 2R(\beta, k)$, it is sufficient to show that $H'_\beta\left(\beta_1, \frac{2}{N_1}\right) = 0$. Taking into account

$H(\beta, k) = \beta(\beta + 1)\hat{H}(\beta, k)$, we get $H'_\beta = (2\beta + 1)\hat{H} + (\beta^2 + \beta)\hat{H}'_\beta$. Since $\hat{H}\left(\beta_1, \frac{2}{N_1}\right) = 0$, $\hat{H}'_\beta\left(\beta_1, \frac{2}{N_1}\right) = 0$ by definition of β_1 and N_1 , we obtain the required $H'_\beta\left(\beta_1, \frac{2}{N_1}\right) = 0$.

Let us examine the boundary $\beta = 1$, $k \in \left[\frac{2}{N_0}, \frac{2}{N_1}\right]$. We have $R(1, k) = 6k^2 + 2k + 2 > 0$. Let us start with the boundary $k = \frac{2}{N_0}$, $\beta \in [\beta_1, 1]$. Since $R'_\beta(\beta, k) > 0$, it is enough to show that $R\left(\beta_1, \frac{2}{N_0}\right) > 0$. The latter can be verified straightforwardly using decimal approximations of β_1 and N_1 . Now we consider the boundary $k = \frac{2}{N_1}$, $\beta \in [\beta_1, 1]$. Since $R'_\beta(\beta, k) > 0$, we obtain $R\left(\beta, \frac{2}{N_1}\right) > R\left(\beta_1, \frac{2}{N_1}\right) = 0$. So it remains to examine the boundary $\beta = \beta_1$, $k \in \left[\frac{2}{N_0}, \frac{2}{N_1}\right]$. We consider the derivative

$$\begin{aligned} R'_k(\beta_1, k) = & (2k + 2)\beta_1^{k+1} + \left(5k + \frac{3}{2}\right)\beta_1^k + (4k - 1)\beta_1^{k-1} + \left(k - \frac{1}{2}\right)\beta_1^{k-2} + \\ & + \left((k^2 + 2k)\beta_1^{k+1} + \left(\frac{5}{2}k^2 + \frac{3}{2}k - 1\right)\beta_1^k + (2k^2 - k)\beta_1^{k-1} + \frac{k^2 - k}{2}\beta_1^{k-2}\right) \log \beta_1. \end{aligned}$$

We will show that $R'_k(\beta_1, k) < 0$. Indeed,

$$R'_k(\beta_1, k) < 2.2 \cdot 0.3 + 2 - 0.6 \cdot 3.1 - 0.4 \cdot 10.3 + 1.2(1 + 0.1 \cdot 3.2 + 0.05 \cdot 10.4) < -1.1.$$

Here we get the needed $R(\beta_1, k) > R\left(\beta_1, \frac{2}{N_1}\right) = 0$.

Since $L'_\delta(\beta_2, \beta_2, k) > 0$, $L'_\beta(\beta_2, \beta_2, k) > 0$, there exists a neighbourhood of the point (β_2, β_2) such that these derivatives have a constant sign. By the Lagrange theorem, for any $m \geq m_0(\beta_2, k)$ there hold $L\left(\beta_2 + \frac{1}{m}, \beta_2, k\right) > 0$, $L\left(\beta_2, \beta_2 - \frac{1}{m}, k\right) < 0$. Hence, the intermediate values theorem implies the existence of $\theta_m \in (0, 1)$ such that $L\left(\beta_2 + \frac{\theta_m}{m}, \beta_2 - \frac{\theta_m}{m}, k\right) = 0$. The relative position of the functions $L(\delta, \beta, k) = 0$ for particular values of the parameter k is illustrated in fig. 2.

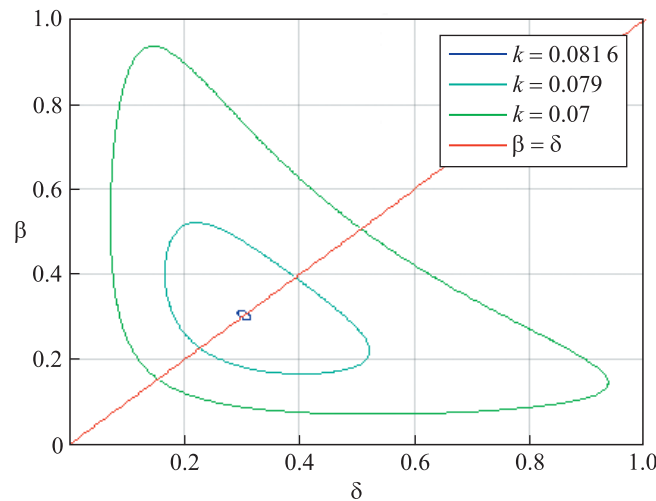


Fig. 2. Illustration to the proof of proposition 6

Corollary 1. For any $n > N_1$ property 1 holds.

Proof. If $n > N_0$, the required statement follows from proposition 4. If $n \in (N_1, N_0]$, by proposition 6 one can find δ, β such that $\delta > \beta > \beta_1$ and $L(\delta, \beta, k) = 0$. Additionally,

$$a + c = \delta^{\frac{k}{2}} + \beta^{\frac{k}{2}} > 2\beta_1^{\frac{k_1}{2}} > 1,$$

so a triangle with sides a, b, c exists.

Proposition 7. Property 2 is equivalent to property 3.

Proof. We suppose that property 2 holds for some fixed n , i. e. there exists a triangle such that $a = 1 = b > c$ and $l_{a,n} = l_{c,n}$. It follows from the equality $a = b$ that $l_{a,n} = l_{b,n}$. Hence, property 3 is valid as well. Now we suppose that property 3 holds, but property 2 fails. Since property 2 is not valid, by proposition 3 we get $n < N_0 = 29.143\,359\dots$. Thus, in a triangle, which satisfies property 3, all sides must have different length. Without loss of generality we may assume that the shortest side c has length with value of 1. Then $a > 1, b > 1$. It follows from the equality $l_{a,n} = l_{b,n}$ and proposition 1 that $ab \leq 1$, which is impossible. So property 2 must hold.

Remark 2. Validity of theorem 1 for $n > 0$ follows from propositions 3–5 and corollary 1.

Proof of theorem 1: case $n < 0$

We assume that $n < 0, b = 1, a \leq c$. Then $\delta = a^n \geq c^n = \beta$.

Proposition 8. If there holds either property 1 or 2, then $\delta\beta \geq 1$.

Proof. We assume that there holds property 1 or 2, but $\delta\beta < 1$. Without loss of generality $\delta > \beta$. Since $\delta^k - \beta^k < 0$, we get

$$\begin{aligned} g(\delta, \beta, k) &= (\delta^k - \beta^k) \left(\beta(\delta + 1)^2 + \delta(\beta + 1)^2 \right) + \delta^k(\beta + 1)^2 - \beta^k(\delta + 1)^2 + (\delta + 1)(\beta + 1)(\delta - \beta) < \\ &< \delta^k(\beta + 1)^2 - \beta^k(\delta + 1)^2 + (\delta + 1)(\beta + 1)(\delta - \beta) := z(\delta, \beta, k). \end{aligned}$$

If $\beta \leq 1 \leq \delta$, then

$$z(\delta, \beta, k) \leq (\beta + 1)^2 - (\delta + 1)^2 + (\delta + 1)(\beta + 1)(\delta - \beta) = (\delta - \beta)(\beta\delta - 1) < 0.$$

Thus, $0 < \beta < \delta < 1$. We have

$$\begin{aligned} z(\delta, \beta, k) &= \delta^k(\beta + 1)^2 - \beta^k(\delta + 1)^2 + (\delta + 1)(\beta + 1)(\delta - \beta) < \\ &< \delta^k(\beta^2 + 2\beta) - \beta^k(\delta^2 + 2\delta) + (\beta\delta + \beta + \delta + 1)(\delta - \beta) = \\ &= (2\delta^k\beta - 2\beta^k\delta + (\beta + 1)(\delta - \beta)) + (\delta^k\beta^2 - \beta^k\delta^2 + (\delta\beta + \delta)(\delta - \beta)) := z_1(\delta, \beta, k) + z_2(\delta, \beta, k). \end{aligned}$$

Let us prove that $z_1(\delta, \beta, k) < 0$ and $z_2(\delta, \beta, k) < 0$. We obtain

$$z_1(\delta, \beta, k) = \beta(2\delta^k - \beta - 1) - \delta(2\beta^k - \beta - 1).$$

Since $2\delta^k - \beta - 1 < 2\beta^k - \beta - 1$ and $0 < \beta < \delta < 1$, we have $z_1(\delta, \beta, k) < 0$. The inequality $z_2(\delta, \beta, k) < 0$ is equivalent to the inequality

$$\delta^k\beta^2 - \beta^k\delta^2 < (\beta\delta + \delta)(\beta - \delta),$$

which is equivalent to the inequality

$$\delta^{k-2} - \beta^{k-2} < \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\beta}\right).$$

We rewrite it in the form

$$\frac{1}{\delta} \left(\delta^{k-1} - 1 - \frac{1}{\beta} \right) < \frac{1}{\beta} \left(\beta^{k-1} - 1 - \frac{1}{\beta} \right).$$

The last inequality holds, since $\frac{1}{\delta} < \frac{1}{\beta}$ and $\delta^{k-1} < \beta^{k-1}$. Therefore, $z_2(\delta, \beta, k) < 0$ and $g(\delta, \beta, k) < 0$. The proposition is proved.

We set $k = -\frac{2}{n}$, $a = \delta^{-\frac{k}{2}}$, $c = \beta^{-\frac{k}{2}}$, $b = 1, \delta \geq \beta > 0$. Then

$$g(\delta, \beta, -k) = \delta^{-k} \left(\beta(\delta+1)^2 + (\beta+1)^2(\delta+1) \right) - \\ - \beta^{-k} \left(\delta(\beta+1)^2 + (\beta+1)(\delta+1)^2 \right) + (\beta+1)(\delta+1)(\delta-\beta).$$

Proposition 9. *If there holds either property 1 or 2, then $k \in (0, 2)$.*

Proof. We suppose that there holds property 1 or 2, but $k \geq 2$. We examine the derivative

$$g'_\beta(\delta, \beta, -k) = \delta^{-k} \left((\delta+1)^2 + 2(\beta+1)(\delta+1) \right) + k\beta^{-k-1} \left(\delta(\beta+1)^2 + (\beta+1)(\delta+1)^2 \right) - \\ - \beta^{-k} \left(2\delta(\beta+1) + (\delta+1)^2 \right) + (\delta+1)^2 - 2(\beta+1)(\delta+1).$$

Let us prove that $g'_\beta(\delta, \beta, -k) > 0$ for all $\delta \geq \beta > 0$ such that corresponding a, b, c satisfy the triangle inequality. As it was shown in the proof of theorem 2.2 presented in the article [5], the needed inequality is obtained for $k \geq 4$. So it remains to prove this inequality for $k \in [2, 4)$.

Let us consider the case $\beta \geq 1$. By the triangle inequality, $\delta^{-\frac{k}{2}} + \beta^{-\frac{k}{2}} > 1$. Hence $\delta^{-k} > \beta^{-k} - 2\beta^{-\frac{k}{2}} + 1$. Taking into account this inequality, we obtain

$$g'_\beta(\delta, \beta, -k) > 2(\delta+1)^2 + \beta^{-k} \left(\frac{k}{\beta} \delta(\beta+1)^2 + \frac{k}{\beta} (\beta+1)(\delta+1)^2 + 2(\beta+1) \right) - \\ - 2\beta^{-\frac{k}{2}} \left((\delta+1)^2 + 2(\beta+1)(\delta+1) \right) := \omega(\delta, \beta, k).$$

Since $\delta \geq \beta$, we have $\beta^{-\frac{k}{2}} > \frac{1}{2}$, which implies $\beta^{-k} > \frac{1}{4}$. Moreover, $\beta^{-\frac{k}{2}} \leq 1$. It follows from the inequality $\beta^{-\frac{k}{2}} > \frac{1}{2}$ that $\beta < 2^{\frac{2}{k}} \leq 2$. So $\beta \in [1, 2]$.

We prove that $\omega(\delta, \beta, k) > 0$ for $k \in [2, 4]$, $\beta \in [1, 2]$, $\delta \geq \beta$. It is enough to show that $\omega'_\delta(\delta, \beta, k) > 0$ and $\omega(\beta, \beta, k) > 0$.

Firstly, we prove that $\omega'_\delta(\delta, \beta, k) > 0$:

$$\omega'_\delta(\delta, \beta, k) = 4(\delta+1) + \beta^{-k}(\beta+1) \left(\frac{k}{\beta}(\beta+1) + 2\frac{k}{\beta}(\delta+1) \right) - 4\beta^{-\frac{k}{2}}((\delta+1) + (\beta+1)) \geq \\ \geq \beta^{-k}(\beta+1) \left(\frac{k}{\beta}(\beta+1) + 2\frac{k}{\beta}(\delta+1) - 4\beta^{\frac{k}{2}} \right) \geq \beta^{-k}(\beta+1) \left(3k \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) - 4\beta^{\frac{k}{2}} \right) \geq \\ \geq \beta^{-k}(\beta+1)t(k),$$

where $t(k) = 4.5k - 4 \cdot 2^{\frac{k}{2}}$. Thus, it remains to prove that $t(k) > 0$:

$$t'(k_0) = 4.5 - 2 \cdot 2^{\frac{k_0}{2}} \log(2) = 0 \Rightarrow k_0 = 2 \frac{(\log(2.25) - \log(\log(2)))}{\log(2)} = 3.39738\dots$$

Since $t(k_0) = 2.3\dots > 0$, $t(2) = 1 > 0$ and $t(4) = 2 > 0$, we get $t(k) > 0$.

Secondly, we will show that $\omega(\beta, \beta, k) > 0$:

$$\omega(\beta, \beta, k) = 2(\beta+1)^2 + \beta^{-k} \left(k(\beta+1)^2 + \frac{k}{\beta}(\beta+1)^3 + 2(\beta+1) \right) - 6\beta^{-\frac{k}{2}}(\beta+1)^2 = \\ = \beta^{-k}(\beta+1) \left((\beta+1) \left(2\beta^k - 6\beta^{\frac{k}{2}} + \frac{k}{\beta} + 2k \right) + 2 \right) \geq \beta^{-k}(\beta+1)((\beta+1)\varphi(\beta, k) + 2),$$

where $\varphi(\beta, k) = 2\beta^k - 6\beta^{\frac{k}{2}} + 5$. Let $\beta^{\frac{k}{2}} = x$. Then the equality $\varphi(\beta, k) = 0$ implies $2x^2 - 6x + 5 = 0$. Since $\varphi(1, k) > 0$, we can deduce that for any $k \in [2, 4]$, $\beta \in [1, 2]$ the function $\varphi(\beta, k)$ takes only positive values.

So $g'_\beta(\delta, \beta, -k) > 0$ for $\delta^{\frac{k}{2}} + \beta^{\frac{k}{2}} > 1$, $\delta \geq \beta \geq 1$.

Let us consider the case $\beta < 1$. We have

$$g'_\beta(\delta, \beta, -k) > \beta^{-k} \left(\frac{k}{\beta} \delta(\beta+1)^2 + \frac{k}{\beta} (\beta+1)(\delta+1)^2 - 2\delta(\beta+1) - (\delta+1)^2 \right) + (\delta+1)^2 - 2(\beta+1)(\delta+1).$$

Since $\beta^{-k} > 1$ and a multiplier for β^{-k} is non-negative for $\beta < 1$, $k \in [2, 4)$, we obtain

$$\begin{aligned} g'_\beta(\delta, \beta, -k) &> \frac{k}{\beta} \delta(\beta+1)^2 + \frac{k}{\beta} (\beta+1)(\delta+1)^2 - 2\delta(\beta+1) - (\delta+1)^2 + (\delta+1)^2 - 2(\beta+1)(\delta+1) \geq \\ &\geq 2\delta(\beta+1)^2 + 4(\delta+1)^2 - 2\delta(\beta+1) - 2(\beta+1)(\delta+1) > 0. \end{aligned}$$

Define new variables $\tilde{\delta} = \frac{1}{\delta}$, $\tilde{\beta} = \frac{1}{\beta}$ and function $\tilde{g}(\tilde{\delta}, \tilde{\beta}, k) := g(\delta, \beta, -k)$. Then

$$\tilde{g}(\tilde{\delta}, \tilde{\beta}, k) = \frac{\tilde{\delta}^k \left(\tilde{\beta}(\tilde{\delta}+1)^2 + (\tilde{\beta}+1)(\tilde{\delta}+1)\tilde{\delta} \right) - \tilde{\beta}^k \left(\tilde{\delta}(\tilde{\beta}+1)^2 + (\tilde{\beta}+1)(\tilde{\delta}+1)^2 \tilde{\beta} \right)}{\tilde{\delta}^2 \tilde{\beta}^2} + \frac{(\tilde{\beta}+1)(\tilde{\delta}+1)(\tilde{\beta}-\tilde{\delta})}{\tilde{\delta}^2 \tilde{\beta}^2}.$$

We will prove that for any $k \geq 2$ there holds $\tilde{g}(\tilde{\delta}, f(\tilde{\delta}, k), k) < 0$, where $f(\tilde{\delta}, k) = \left(1 - \tilde{\delta}^{\frac{k}{2}} \right)^{\frac{2}{k}}$, $\tilde{\delta} \in \left(0, \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{k}} \right)$. It is

clear that the last statement is equivalent to inequality $h(\tilde{\delta}, k) < 0$, where $h(\tilde{\delta}, k) = \tilde{g}(\tilde{\delta}, f(\tilde{\delta}, k), k) \tilde{\delta}^2 f(\tilde{\delta}, k)^2$.

Taking into account the inequality $f(\tilde{\delta}, k) > \tilde{\delta}$ valid for $\tilde{\delta} \in \left(0, \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{k}} \right)$, we obtain

$$\begin{aligned} h(\tilde{\delta}, k) &= \tilde{\delta}^k (\tilde{\delta} - f(\tilde{\delta}, k)) (\tilde{\delta} + f(\tilde{\delta}, k) + 2f(\tilde{\delta}, k)\tilde{\delta}) + \\ &+ 2\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}} \left((1 + f(\tilde{\delta}, k))^2 \tilde{\delta} + (1 + f(\tilde{\delta}, k))(1 + \tilde{\delta})^2 f(\tilde{\delta}, k) \right) - \tilde{\delta} (1 + f(\tilde{\delta}, k))^2 (2 + \tilde{\delta}) < \\ &< (1 + f(\tilde{\delta}, k)) \left(2\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}} \left((1 + f(\tilde{\delta}, k)) \tilde{\delta} + (1 + \tilde{\delta})^2 f(\tilde{\delta}, k) \right) - \tilde{\delta} (1 + f(\tilde{\delta}, k)) (2 + \tilde{\delta}) \right) = \\ &= \tilde{\delta} (1 + f(\tilde{\delta}, k)) \left(f(\tilde{\delta}, k) \left(2\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-1} (1 + 3\tilde{\delta}) - 2 + \tilde{\delta} \left(2\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-1} - 1 \right) \right) + 2\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}} - 2 - \tilde{\delta} \right) < \tilde{\delta} (1 + f(\tilde{\delta}, k)) \tilde{h}(\tilde{\delta}, k), \end{aligned}$$

where $\tilde{h}(\tilde{\delta}, k) = 2f(\tilde{\delta}, k) \left(\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-1} (1 + 3\tilde{\delta}) - 1 \right) + 2\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}} - 2 - \tilde{\delta}$. It is sufficient to prove that $\tilde{h}(\tilde{\delta}, k) < 0$.

The required statement is true for $m = p \in \mathbb{N}$ if for any $k \in [2p, 2p+2]$ and $\tilde{\delta} \in \left(0, \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{k}} \right)$ there holds the inequality $\tilde{h}(\tilde{\delta}, k) < 0$. We will prove that by induction on $m \in \mathbb{N}$.

Let $m = 1$. Then $k \in [2, 4]$ and $\tilde{\delta} \in \left(0, \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{k}} \right)$.

We prove that for any fixed $k \geq 2$ there holds $f(\tilde{\delta}, k) \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{k}} - \tilde{\delta}$. Indeed, since $f''_{\tilde{\delta}}(\tilde{\delta}, k) = \left(1 - \frac{k}{2}\right)\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-2} \times \left(1 - \tilde{\delta}^{\frac{k}{2}}\right)^{\frac{2}{k}-2} \leq 0$, we see that $f(\tilde{\delta}, k)$ is a concave function, and the line $\tilde{\beta} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{k}} - \tilde{\delta}$ is a tangent line to the function $f(\tilde{\delta}, k)$ at the point $\tilde{\delta} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{k}}$.

Let us consider the case $\tilde{\delta} \in \left[\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{k}}\right]$, $k \in (2, 4]$. Since $\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-1}(1 + 3\tilde{\delta}) - 1 \geq \tilde{\delta} + 3\tilde{\delta}^2 - 1 \geq \frac{1}{4} > 0$, we obtain the estimate

$$\tilde{h}(\tilde{\delta}, k) \leq 2\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{k}} - \tilde{\delta}\right)\left(\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-1}(1 + 3\tilde{\delta}) - 1\right) + 2\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}} - 2 - \tilde{\delta}.$$

Let us denote the right-hand side of this inequality by $s(\tilde{\delta}, k)$. Then we obtain

$$s(\tilde{\delta}, k) = -6\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}+1} + 12\alpha(k)\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}} + 4\alpha(k)\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-1} + \tilde{\delta} - 2(1 + 2\alpha(k)),$$

where $\alpha(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{k}}$. We note that $s(\alpha(k), k) = 0$. So it is sufficient to show that $s'_{\tilde{\delta}}(\tilde{\delta}, k) > 0$ for $\tilde{\delta} \in (0, \alpha(k))$, $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} s'_{\tilde{\delta}}(\tilde{\delta}, k) &= -3(k+2)\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}} + 6\alpha(k)k\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-1} + 2\alpha(k)(k-2)\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-2} + 1 > \\ &> -3(k+2)\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}} + 6\tilde{\delta}k\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-1} + 2\alpha(k)(k-2)\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-2} + 1 = \\ &= 3(k-2)\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}} + 2\alpha(k)(k-2)\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-2} + 1 > 0. \end{aligned}$$

Let us consider the case $\tilde{\delta} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $k \in [2, 4]$. We will prove the required inequality for $k = 2$. In this case, the function $\tilde{h}(\tilde{\delta}, 2)$ is a parabola with vertex at the point $\tilde{\delta}_0 = \frac{7}{12}$ and branches directed below. Then

$$\tilde{h}(\tilde{\delta}, 2) = -6\tilde{\delta}^2 + 7\tilde{\delta} - 2 < -6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 0.$$

Let $k \in (2, 4]$. We fix an arbitrary $\tilde{\delta} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. There are two alternatives:

1) $\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-1}(1 + 3\tilde{\delta}) - 1 \geq 0$. As it was shown before, we have

$$\tilde{h}(\tilde{\delta}, k) \leq s(\tilde{\delta}, k) < 0;$$

2) $\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-1}(1 + 3\tilde{\delta}) - 1 < 0$. Then

$$\tilde{h}(\tilde{\delta}, k) \leq 2(1 - \tilde{\delta})\left(\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-1}(1 + 3\tilde{\delta}) - 1\right) + 2\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}} - 2 - \tilde{\delta} \leq \tilde{h}(\tilde{\delta}, 2) < 0.$$

We suppose that the required statement is valid for $m = p - 1 \in \mathbb{N}$, which means $\tilde{h}(\tilde{\delta}, k) < 0$ for any $k \in [2p - 2, 2p]$ and $\tilde{\delta} \in \left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{k}}\right)$. Let us show that the statement is valid for $m = p$.

We examine the case $\tilde{\delta} \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{k}}\right]$, $k \in (2p, 2p + 2]$. Let us prove that $\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-1}(1 + 3\tilde{\delta}) - 1 > 0$:

$$\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-1}(1+3\tilde{\delta})-1 \geq \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \left(1+3\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)-1 = \frac{1}{2} \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}-1\right) > [2 < 3^p] > 0.$$

Then we obtain

$$\tilde{h}(\tilde{\delta}, k) \leq s(\tilde{\delta}, k) < 0.$$

Let us examine the case $\tilde{\delta} \in \left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$, $k \in [2p, 2p+2]$. We fix an arbitrary $\tilde{\delta} \in \left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$. As it was shown for $k \in (2, 4]$, there are two possible alternatives. In the first alternative the needed inequality is obvious, so we consider the second alternative, i. e. $\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-1}(1+3\tilde{\delta})-1 < 0$. Then

$$\tilde{h}(\tilde{\delta}, k) \leq 2(1-\tilde{\delta}^p)^{\frac{1}{p}} \left(\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}-1}(1+3\tilde{\delta})-1\right) + 2\tilde{\delta}^{\frac{k}{2}} - 2 - \tilde{\delta} \leq \tilde{h}(\tilde{\delta}, 2p) < 0.$$

On the plain $O\tilde{\delta}\tilde{\beta}$, we consider a domain bounded by the lines $\tilde{\delta}=0$, $\tilde{\beta}=\tilde{\delta}$ and the curve $\tilde{\beta}=f(\tilde{\delta}, k)$ (fig. 3). As it was already shown, we have $g'_\beta(\tilde{\delta}, \tilde{\beta}, -k) > 0$ in this domain, which means $\tilde{g}'_\beta(\tilde{\delta}, \tilde{\beta}, k) < 0$. Also it was shown that $\tilde{g}(\tilde{\delta}, f(\tilde{\delta}, k), k) < 0$ for $\tilde{\delta} \in \left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{k}}\right)$. Since $\tilde{g}(\tilde{\delta}, \tilde{\delta}, k) = 0$, we obtain $\tilde{g}(\tilde{\delta}, \tilde{\beta}, k) < 0$ in the mentioned domain (coloured in red in fig. 3) that contradicts properties 1 and 2.

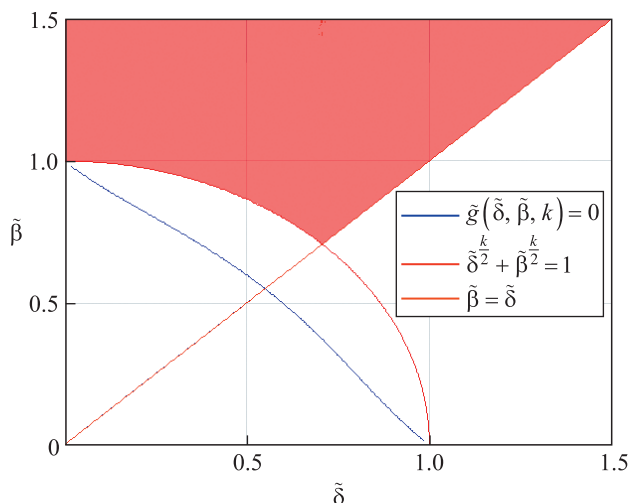


Fig. 3. Illustration to the proof of proposition 9 ($k=4$)

Proposition 10. *If property 2 holds, then $c = b = 1 > a$.*

Proof. The needed statement follows from proposition 8.

Proposition 11. *Property 2 holds if and only if $n < -2$.*

Proof. By proposition 10, we have $c = b = 1$, $a < 1$. Let $k = \frac{2}{n}$. Similarly to the proof of proposition 3, we deduce that property 2 is valid for some $n < 0$ if and only if the equation

$$\delta^k = \frac{8\delta + 4}{\delta^2 + 6\delta + 5}$$

is solvable for $\delta \in (1, \infty)$.

Let us consider the function

$$k(\delta) = \frac{\log(8\delta + 4) - \log(\delta^2 + 6\delta + 5)}{\log \delta}, \quad \delta \in (1, \infty).$$

We have $k(1+0) = 0$, $k(\infty) = -1$. Since $1 < \frac{\delta^2 + 6\delta + 5}{8\delta + 4} < \delta$, the value set of the continuous function $k(\delta)$, $\delta \in (1, \infty)$, is the interval $(-1, 0)$.

Proposition 12. *For any $n < -2$ there exists a triangle with sides a, b, c such that $c > 1 = b > a$ and $l_{a,n} = l_{c,n}$.*

Proof. Let us fix an arbitrary $n_1 < -2$, we set $k_1 = \frac{2}{n_1}$. Take $n_0 \in (n_1, -2)$. By proposition 11, there exists a triangle with sides a, b, c such that $c_0 = b_0 = 1 > a_0$ and $g(\delta_0, \beta_0, k_0) = 0$, $k_0 = \frac{2}{n_0}$. We have $g(\delta_0, \beta_0, k_1) > 0$ since the function $k \rightarrow g(\delta_0, \beta_0, k)$ is increasing. Also for any sufficiently small $\varepsilon > 0$ we get $g(\delta_1, \beta_1, k_1) < g(\delta_1, \beta_1, 0) = 0$, where $\beta_1 = \beta_0 - \varepsilon$; $\delta_1 = \frac{1}{\beta_1}$. By the intermediate values theorem, one can find the point (δ_2, β_2) , which belongs to the segment with endpoints $(\delta_0, \beta_0), (\delta_1, \beta_1)$ such that $g(\delta_2, \beta_2, k_1) = 0$. It remains to check that the numbers $a_1 = \delta_2^{\frac{k_1}{2}}$, $b_1 = 1$, $c_1 = \beta_2^{\frac{k_1}{2}}$ define a triangle. Taking a sufficiently small $\varepsilon \in (0, 1)$, we obtain

$$\begin{aligned} c_1 = \beta_2^{\frac{k_1}{2}} &< \beta_1^{\frac{k_1}{2}} = (1 - \varepsilon)^{\frac{k_1}{2}} < (1 - \varepsilon)^{\frac{k_0}{2}} < 1 + \delta_0^{\frac{k_0}{2}} < \\ &< 1 + \delta_0^{\frac{k_1}{2}} < 1 + \delta_2^{\frac{k_1}{2}} = b_1 + a_1, \end{aligned}$$

as it is required.

Remark 3. By propositions 9 and 12, without loss of generality we may assume that $n \in [-2, -1)$ while investigating property 1.

Proposition 13. *For any $n \in [-2, -1)$ property 1 holds.*

Proof. Let us consider an equation $L(\delta, \beta, k) = 0$ with the function L defined after proposition 4. We introduce new variables $\tilde{\delta} = \frac{1}{\delta}$, $\tilde{\beta} = \frac{1}{\beta}$, $\tilde{k} = -k$. Then the equation $L(\delta, \beta, k) = 0$ is equivalent to the equation $G(\tilde{\delta}, \tilde{\beta}, \tilde{k}) = 0$, where

$$G(\delta, \beta, k) = \frac{\delta^k - \beta^k}{\beta - \delta} \left(\beta(\delta + 1)^2 + (\beta + 1)^2 \delta(\delta + 1) \right) - \beta^k (\delta + \beta + 2\delta\beta) + (\beta + 1)(\delta + 1).$$

It follows from proposition 8 that $\tilde{\delta}\tilde{\beta} \leq 1$. Moreover, $\tilde{k} \in [1, 2)$.

Let us prove that for any $\tilde{k} \in [1, 2)$ the equation $G(\tilde{\delta}, \tilde{\beta}, \tilde{k}) = 0$ has a solution in the domain $0 < \tilde{\delta} < \tilde{\beta} < 1$ such that there exists a triangle with sides $a = \delta^{\frac{k}{2}} = \tilde{\delta}^{\frac{\tilde{k}}{2}}$, $b = 1$, $c = \beta^{\frac{k}{2}} = \tilde{\beta}^{\frac{\tilde{k}}{2}}$. Clearly, the existence of such triangle is defined by the inequality $\tilde{\delta}^{\frac{\tilde{k}}{2}} + \tilde{\beta}^{\frac{\tilde{k}}{2}} > 1$ (fig. 4).

We fix an arbitrary $\tilde{k} \in [1, 2)$. Let us consider the function $\beta = f(\delta) = \left(1 - \delta^{\frac{\tilde{k}}{2}} \right)^{\frac{2}{\tilde{k}}}$ and the implicit function

$\beta = F(\delta, \tilde{k})$ defined by the equation $G(\delta, \beta, \tilde{k}) = 0$ in a neighbourhood of the point $\delta = 0$, $\beta = 1$. Indeed, such implicit function exists in some one-sided neighbourhood of the point $\delta = 0$, $\beta = 1$, since $G(0, 1, \tilde{k}) = 0$ and $G'_\beta(0, 1, \tilde{k}) \neq 0$. As $f(0) = F(0, \tilde{k}) = 1$, it is enough to show that $f'(0) < F'_\delta(0, \tilde{k})$.

By straightforward computations, we obtain $f'(0) = -\infty$, $F'_\delta(0, \tilde{k}) = -\frac{4}{\tilde{k}}$ for $\tilde{k} \in (1, 2)$ and $F'_\delta(0, \tilde{k}) = -3.5$ for $\tilde{k} = 1$.

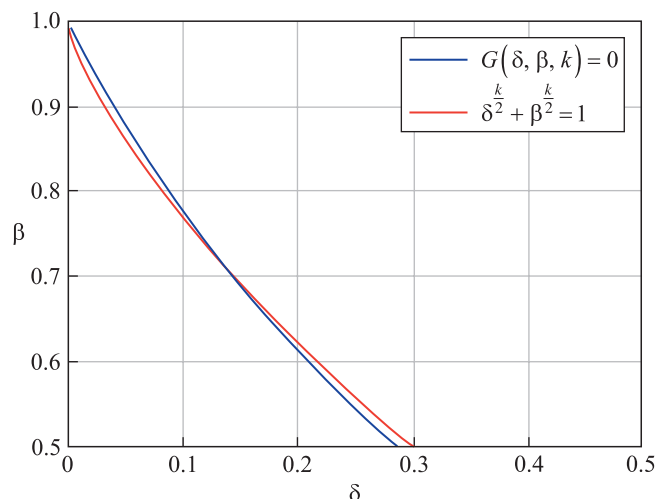


Fig. 4. Illustration to the proof of proposition 13 ($k = 1.5$)

Remark 4. Applying the same arguments as were used in proposition 7, one can obtain that properties 2 and 3 are equivalent for $n < 0$. Hence, the validity of theorem 1 for $n < 0$ follows from propositions 9, 11–13.

Proof of theorem 2

We consider number-theoretic properties of the so called critical triangle, i. e. a unique (up to homothety) non-equilateral triangle with three equal n -lines $l_{a,n} = l_{b,n} = l_{c,n}$ for minimal possible $n \geq 0$. As it was shown in proposition 3, such triangle is isosceles and has sides $a = b = 1$ and $c = \beta_0^{k_0}$, where $\beta_0 = 0.139\,697\,7\dots$ and $k_0 = 0.068\,626\,2\dots$, i. e. $c = 0.934\,692\,6\dots$

Proposition 14. *The critical triangle can not be straightedge-and-compass constructed.*

Proof. It is sufficient to prove that the number $c = \beta_0^{k_0}$ is transcendental. We assume the contrary, i. e. that $\beta_0^{k_0}$ is an algebraic number. Since

$$\beta_0^{k_0} = \frac{8\beta_0 + 4}{\beta_0^2 + 6\beta_0 + 5},$$

the right-hand side is an algebraic number as well. Hence, β_0 is also an algebraic number. As it was shown in proposition 3, the number β_0 is a solution of the equation

$$\frac{2\beta(2+\beta)(1-\beta)}{(2\beta+1)(\beta+1)(\beta+5)} \log \beta = \log \frac{8\beta+4}{(\beta+1)(\beta+5)}.$$

The numbers $\beta = \beta_0$, $\gamma = \frac{8\beta_0+4}{(\beta_0+1)(\beta_0+5)}$, $\eta = \frac{2\beta_0(2+\beta_0)(1-\beta_0)}{(2\beta_0+1)(\beta_0+1)(\beta_0+5)}$ are algebraic. Moreover, $\log \gamma = \eta \log \beta$.

Hence $\gamma = \beta^\eta$. By Gelfond – Schneider theorem [8], the number β^η can not be algebraic if η is an irrational algebraic number. So the number η is rational. Hence, the degree of the number β does not exceed 3.

We consider the case in which β is a rational number. Clearly, the number

$$\gamma\beta = \beta^{\eta+1} = \beta^{\frac{11\beta^2+20\beta+5}{(2\beta+1)(\beta+1)(\beta+5)}}$$

is also rational. Let $\beta = \frac{m}{n}$, where $(m, n) = 1$, then

$$\frac{11\beta^2+20\beta+5}{(2\beta+1)(\beta+1)(\beta+5)} = \frac{11m^2n+20mn^2+5n^3}{2m^3+13m^2n+16mn^2+5n^3}.$$

We estimate the GCD:

$$\begin{aligned} d &= (11m^2n+20mn^2+5n^3, 2m^3+13m^2n+16mn^2+5n^3) = \\ &= (2m(m^2+mn-2n^2), n(11m^2+20mn+5n^2)) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 10(m^2 + mn - 2n^2, 11m^2 + 20mn + 5n^2) = \\ &= 10(m^2 + mn - 2n^2, 9mn + 27n^2) \leq 90(m^2 + mn - 2n^2, m + 3n) = \\ &= 90(m + 3n, -2mn - 2n^2) \leq 180(m + 3n, m + n) = 180(2n, m + n) \leq 360. \end{aligned}$$

Let $\beta^{\frac{11\beta^2 + 20\beta + 5}{(2\beta + 1)(\beta + 1)(\beta + 5)}} = \frac{m_1}{n_1}$, where $(m_1, n_1) = 1$. Then

$$\frac{m}{n} = \frac{11m^2n + 20mn^2 + 5n^3}{d} \cdot \frac{2m^3 + 13m^2n + 16mn^2 + 5n^3}{n_1 d} = n \cdot \frac{11m^2n + 20mn^2 + 5n^3}{d} \cdot \frac{2m^3 + 13m^2n + 16mn^2 + 5n^3}{m_1 d}.$$

Since m, n and m_1, n_1 are coprime, the numbers m, m_1 have the same prime divisors. The same holds for n and n_1 . Consequently, there exist positive integer numbers q, r such that

$$m = q \cdot \frac{2m^3 + 13m^2n + 16mn^2 + 5n^3}{d}, \quad n = r \cdot \frac{2m^3 + 13m^2n + 16mn^2 + 5n^3}{d}.$$

Since $d \leq 360$, we get $n^{360} \geq n^d \geq r^{5n^3}$. Clearly, $n > 1$, then $r > 1$. This implies $n^{72} \geq 2^{n^3}$. Clearly, $n \leq 5$, which is impossible since $\beta < 0.14$. Thus, the case $\deg(\beta) = 1$ is impossible.

We consider the case $\deg(\beta) = 3$. Let $\frac{m}{n} = \eta + 1$. Then the polynomial

$$f(x) = x^3 + \frac{13m - 11n}{2m}x^2 + \frac{8m - 10n}{m}x + \frac{5m - 5n}{2m}$$

is a minimal polynomial of the number β , and $Nm_K(\beta) = \frac{5m - 5n}{2m}$, where $K = \mathbb{Q}(\beta)$ is a cubic field. Since $\gamma\beta \in \mathbb{Q}(\beta)$, we have $\gamma_1 := \beta^{\eta+1} \in \mathbb{Q}(\beta)$. Since $\beta^m = \gamma_1^n$, we get $(Nm_K(\beta))^m = (Nm_K(\gamma_1))^n$. So $(Nm_K(\beta))^{\eta+1} \in \mathbb{Q}$.

Therefore, there exist $r, s \in \mathbb{N}$, $(r, s) = 1$, such that $\left(\frac{5m - 5n}{2m}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{r}{s}$. Then $(5m - 5n)^m s^n = r^n (2m)^m$. Let $d = (5m - 5n, 2m)$. This implies $\frac{5m - 5n}{d} = q^n$ for some $q \in \mathbb{N}$. Since $5m > \frac{5m - 5n}{d} = q^n$, we obtain $q = 1$.

Since $d \leq 10$, we get $m - n \leq dq^n \leq 10$, which is impossible for $n > 100$. For $n \leq 100$ we use brute force and can make sure that there are no admissible n, m .

It remains to consider the case of $\deg(\beta_1) = 2$. Let $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ be a minimal polynomial for β . Then the polynomial $h(x)$ divides the annihilating polynomial $f(x)$ defined above. This means the polynomial $f(x)$ has a rational root. Denote this root by $\frac{r}{s}$, where $r \in \mathbb{Z}$ and $s \in \mathbb{N}$, $(r, s) = 1$. We have

$$2mr^3 + (13m - 11n)r^2s + (16m - 20n)rs^2 + (5m - 5n)s^3 = 0.$$

Clearly, $s \mid 2m$. Let $K = \mathbb{Q}(\beta)$ be a quadratic field. According to Vieta's formulas, we have $Nm_K(\beta) = \frac{(5m - 5n)s}{2m|r|}$.

Similarly to the previous case, $\gamma_1 := \beta^{\eta+1} \in K$. Then there exist numbers $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, such that $((5m - 5n)s)^m q^n = p^n (2m|r|)^m$. Let $d = ((5m - 5n)s, 2m|r|)$, then one can find $t \in \mathbb{N}$ such that $\frac{(5m - 5n)s}{d} = t^n$.

Taking into account $2m \geq s$ and $n > \frac{m}{2}$, we obtain $10m^2 \geq t^n > t^{\frac{m}{2}}$, i. e. $100m^4 > t^m$. If $t \geq 2$, then $m \leq 30$ (applying the brute force over m, n , we make sure that the considered case is impossible). Hence $t = 1$ and $d = (5m - 5n)s$.

Similarly, we prove that there exists $t_1 \in \mathbb{N}$ such that $\frac{2m|r|}{d} = t_1^n$. Since $r \mid 5m - 5n$, we have $|r| \leq 5m$. Thus, $10m^2 > t_1^n$. Analogously to previous arguments, we obtain $t_1 = 1$. We have just proved that $d = (5m - 5n)s = 2m|r|$. Applying Vieta's formulas one more time for the roots x_i, x_j of the polynomial $f(x)$, we see that

$|x_i x_j| = 1$. Searching numerically for the roots of the polynomial $f(x)$ with enough accuracy, we see that the condition $|x_i x_j| = 1$ can not hold. The obtained contradiction finishes the proof of this proposition.

Corollary 2. *The number $N_0 = 29.143\,359\dots$ is transcendental.*

Proof. We suppose the opposite is true, i. e. N_0 is an algebraic number. Then $k_0 = \frac{2}{N_0}$ is also an algebraic number. Since $k_0 = \frac{2\beta_0(2 + \beta_0)(1 - \beta_0)}{(2\beta_0 + 1)(\beta_0 + 1)(\beta_0 + 5)}$, we obtain that β_0 is algebraic number. Hence $\beta_0^{k_0} = \frac{8\beta_0 + 4}{(\beta_0 + 1)(\beta_0 + 5)}$ is also algebraic number, which contradicts proposition 14.

Proposition 15. *The number $\beta_1 = 0.304\,55\dots$ is irrational.*

Proof. We suppose that the number β_1 is rational. Then the number

$$k_1 = \frac{3\beta_1 + 1 - \sqrt{\beta_1^2 + 6\beta_1 + 1 - 16\beta_1^3}}{2(\beta_1 + 1)(2\beta_1 + 1)}$$

is algebraic. Since the number

$$\beta_1^{-k_1} = \frac{\beta_1 - 1 + \sqrt{\beta_1^2 + 6\beta_1 + 1 - 16\beta_1^3}}{2\beta_1(\beta_1 + 1)}$$

is algebraic as well, by Hilbert's seventh problem, we obtain that the number k_1 should be rational. Let $\beta_1 = \frac{m}{n}$, where $(m, n) = 1$, and $k_1 = \frac{p}{q}$, where $(p, q) = 1$. Then the equation

$$\beta_1^{-k_1} = \frac{2}{\beta_1 + 1} - \frac{k_1(2\beta_1 + 1)}{\beta_1}$$

can be written as

$$\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{2mnq - p(2m + n)(m + n)}{qm(m + n)}.$$

We obtain

$$n^p(qm(m + n))^q = m^p(2mnq - p(2m + n)(m + n))^q.$$

Since $(m, n) = 1$, $(p, q) = 1$, we get $n = r^q$ for some $r \in \mathbb{N}$. Then we have $m = s^q$ for some $s \in \mathbb{N}$. Substituting $n = r^q$, $m = s^q$ into the equation and extracting the root of the degree q from both parts, we get $r^p(qs^q(s^q + r^q)) = s^p(2r^q s^q q - p(2s^q + r^q)(s^q + r^q))$. Since $(r, s) = 1$ and $q > p$, we have $r^p \mid p(2s^q + r^q) \times (s^q + r^q)$. Then we obtain $r^p \mid 2p$. Hence $2p \geq r^p$. We conclude that $r = 1$ or $(r, p) \in \{(2, 1), (2, 2)\}$. If $r = 1$, then $\beta_1 \in \mathbb{N}$, which is impossible. If $r = 2$, then $s = 1$, but the inequality $0.29 < 0.5^q < 0.31$ does not have solutions in positive integers. The obtained contradiction proves that $\beta_1 \notin \mathbb{Q}$.

Proposition 16. *The number $N_1 = 24.506\,13\dots$ is transcendental.*

Proof. We suppose the opposite, i. e. N_1 is algebraic. Then $k_1 = \frac{2}{N_1}$ is also algebraic number. As well we suppose that k_1 is irrational number. The number β_1 is also algebraic. Then, by the seventh Hilbert problem, the number $\beta_1^{k_1}$ is transcendental, that is impossible since

$$\beta_1^{-k_1} = \frac{\beta_1 - 1 + \sqrt{\beta_1^2 + 6\beta_1 + 1 - 16\beta_1^3}}{2\beta_1(\beta_1 + 1)},$$

and the right-hand side is an algebraic number. Hence, k_1 is rational number. Let $k_1 = \frac{m}{n}$, where $(m, n) = 1$. It follows from the relation

$$k_1 = \frac{3\beta_1 + 1 - \sqrt{\beta_1^2 + 6\beta_1 + 1 - 16\beta_1^3}}{2(\beta_1 + 1)(2\beta_1 + 1)}$$

that

$$\left((3\beta_1 + 1)n - 2m(\beta_1 + 1)(2\beta_1 + 1)\right)^2 = (\beta_1^2 + 6\beta_1 + 1 - 16\beta_1^3)n^2.$$

Then

$$(8\beta_1^2 + 16\beta_1^3)n^2 - 4mn(\beta_1 + 1)(2\beta_1 + 1)(3\beta_1 + 1) + 4m^2(\beta_1 + 1)^2(2\beta_1 + 1)^2 = 0.$$

Dividing by $4(1 + 2\beta_1)$, we obtain

$$2n^2\beta_1^2 - mn(\beta_1 + 1)(3\beta_1 + 1) + m^2(\beta_1 + 1)^2(2\beta_1 + 1) = 0.$$

Finally,

$$2m^2\beta_1^3 + (5m^2 - 3mn + 2n^2)\beta_1^2 + (4m^2 - 4mn)\beta_1 + m^2 - mn = 0.$$

So $\deg(\beta_1) \leq 3$. By proposition 15, the case of $\deg(\beta_1) = 1$ is not possible.

Let us consider the case $\deg(\beta_1) = 3$. Then the polynomial

$$f(x) = x^3 + \frac{5m^2 - 3mn + 2n^2}{2m^2}x^2 + \frac{2m - 2n}{m}x + \frac{m - n}{2m}$$

is a minimal polynomial of the number β_1 , and $Nm_K(\beta_1) = \frac{n - m}{2m}$, where $K = \mathbb{Q}(\beta_1)$ is a cubic field. Since

$$\beta_1^{-k_1} = \frac{2}{\beta_1 + 1} - \frac{k(2\beta_1 + 1)}{\beta_1} \in \mathbb{Q}(\beta_1),$$

we get $\gamma_1 := \beta_1^{k_1} \in \mathbb{Q}(\beta_1)$. Since $\beta_1^m = \gamma_1^n$, we have $(Nm_K(\beta_1))^m = (Nm_K(\gamma_1))^n$. Hence $(Nm_K(\beta_1))^{k_1} \in \mathbb{Q}$. Thus, there exist $r, s \in \mathbb{N}$, $(r, s) = 1$, such that

$$\left(\frac{n - m}{2m}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{r}{s}.$$

Then $(n - m)^m s^n = r^n (2m)^m$. Let $d = (n - m, 2m)$. We obtain that $\frac{n - m}{d} = q^n$ for some $q \in \mathbb{N}$. Since $n > \frac{n - m}{d} = q^n$, there holds $q = 1$. Since $d \leq 2$, we obtain that $n - m \leq dq^n \leq 2$, which is impossible for positive integer n, m since $k_1 < 0.1$.

It remains to consider the case $\deg(\beta_1) = 2$. Let $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ be a minimal polynomial for β_1 . Then the polynomial $h(x)$ divides the annihilating polynomial $f(x)$ defined above. That means the polynomial $f(x)$ has a rational root. Denote this root by $\frac{r}{s}$, where $r \in \mathbb{Z}$ and $s \in \mathbb{N}$, $(r, s) = 1$. We have

$$2m^2 r^3 + (5m^2 - 3mn + 2n^2)r^2 s + (4m^2 - 4mn)rs^2 + (m^2 - mn)s^3 = 0.$$

Clearly, $s \mid 2m^2$. Let $K = \mathbb{Q}(\beta_1)$ be a quadratic field. According to Vieta's formulas, $Nm_K(\beta_1) = \frac{(n - m)s}{2m|r|}$. Similarly

to the previous case, $\gamma_1 := \beta_1^{k_1} \in K$. Then there exist $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, such that $((n - m)s)^m q^n = p^n (2m|r|)^m$.

Let $d = ((n - m)s, 2m|r|)$, then one can find $t \in \mathbb{N}$ such that $\frac{(n - m)s}{d} = t^n$. Taking into account $2n^2 > 2m^2 \geq s$, we get $2n^3 > t^n$. If $t \geq 2$, then $n \leq 11$ (checking by brute force all remaining m, n , we see that this case is not possible). Hence $t = 1$ and $d = (n - m)s$. Analogously, there exists $t_1 \in \mathbb{N}$ such that $\frac{2m|r|}{d} = t_1^n$. Since $r \mid m^2 - mn$, we get $|r| \leq n^2$. So $2n^3 > t_1^n$. That is why $t_1 = 1$. We have proved that $d = (n - m)s = 2m|r|$. Applying Vieta's formulas, we see that for some roots x_i, x_j of the polynomial $f(x)$ there exists $|x_i x_j| = 1$. Finding numerically the roots of the polynomial $f(x)$ with sufficient accuracy, we can see that the condition $|x_i x_j| = 1$ can not hold. The obtained contradiction finishes the proof.

Corollary 3. *The number $\beta_1 = 0.304\,55\dots$ is transcendental.*

Proof. Indeed, if the number β_1 is algebraic, then the number k_1 is also algebraic, which contradicts to proposition 16.

Remark 5. Validity of theorem 2 follows from propositions 14 and 16.

Conclusions

As it is shown in the paper [5], the equality of external n -lines $l_{a,n}^{ext} = l_{c,n}^{ext}$ in terms of variables δ, β, k can be written as $\tilde{g}(\delta, \beta, k) = 0$, where

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\delta, \beta, k) = & \delta^k \left(-\beta(\delta-1)^2 + (\beta-1)^2(\delta-1) \right) - \\ & - \beta^k \left(-\delta(\beta-1)^2 + (\beta-1)(\delta-1)^2 \right) + (\beta-1)(\delta-1)(\delta-\beta).\end{aligned}$$

Despite apparent similarity of equations of surfaces $z = g(\delta, \beta, k)$ and $z = \tilde{g}(\delta, \beta, k)$, these surfaces have fundamentally different geometry. As it is shown in the work [5], for any $k \neq 0$ in any sufficiently small neighbourhood of the point $(\delta_0, \beta_0) = (1, 1)$ there exist points (δ, β) such that $\delta \neq \beta$ and $\tilde{g}(\delta, \beta, k) = 0$, that is why for any $n \neq 0$ there exist non-isosceles triangles with two equal external n -lines. These different behaviour of internal and external n -lines can be explained in the following way. In case of external n -lines the saddle point

$(\delta_0, \beta_0) = (1, 1)$ of the family of surfaces $\tilde{L}(\delta, \beta, k) = \frac{\tilde{g}(\delta, \beta, k)}{\delta - \beta}$ becomes invariant when the parameter $k \neq 0$

changes. For the family of surfaces $z = L(\delta, \beta, k)$, which describes the equality of internal n -lines the saddle point $(\delta_0, \beta_0) = (1, 1)$ moves toward the limit point $(\beta_1, \beta_1) = (0.304\,55\dots, 0.304\,55\dots)$ when $k > 0$ increases

up to the critical value $k = \frac{2}{N_1}$; as soon as k achieves this critical value, the function $L(\delta, \beta, k) = \frac{g(\delta, \beta, k)}{\delta - \beta}$

becomes strictly positive in the domain $\delta > 0, \beta > 0$. For negative values of k situation is different: for any $k < 0$ in a neighbourhood of the point $\beta = 1, \delta = \infty$ there exist solutions of the equation $L(\delta, \beta, k) = 0$, but for

$k \in [-2, 0)$ these solutions do not define a triangle, since the needed triangle inequality $\beta^{\frac{k}{2}} + \delta^{\frac{k}{2}} > 1$ fails.

Partially, for $n = 1$ we get a new proof of the Steiner – Lehmus theorem, as well as the known counter-example of Bottema that the Steiner – Lehmus theorem fails for external bisectors (Bottema's triangle has angles $12^\circ, 36^\circ, 132^\circ$ and two equal external bisectors [5]).

In the article [5], it is proved that for any real n the equalities $l_{a,n} = l_{c,n}, l_{a,-n} = l_{c,-n}$ imply that a triangle is isosceles ($a = c$), the same property holds for pairs of external n - and $(-n)$ -lines. Results of this paper show that both the equalities $l_{a,n} = l_{c,n}, l_{a,-n} = l_{c,-n}$ are substantial for a triangle to be isosceles in case of internal n -lines. Indeed, one can find a non-isosceles triangle, which has two equal antisymmedians $l_{a,-2} = l_{c,-2}$. Clearly, such triangle can not have two equal symmedians $l_{a,2}, l_{c,2}$, otherwise it would be isosceles. In other words, the equality of symmedians $l_{a,2} = l_{c,2}$ implies that $a = c$ and, consequently, it implies the equality of antisymmedians $l_{a,-2} = l_{c,-2}$. The opposite is not true: the equality of two antisymmedians does not imply the equality of two symmedians. Nevertheless, the equality of two antibisectors $l_{a,-1} = l_{c,-1}$ implies the equality of two bisectors $l_{a,1} = l_{c,1}$. But the equality of three antisymmedians $l_{a,-2} = l_{b,-2} = l_{c,-2}$ implies that a triangle is equilateral.

Also it is interesting to consider the same generalisation of the Steiner – Lehmus theorem in other geometries, such as a weak geometry that does not depend on the fifth Euclid's postulate.

References

1. Coxeter HSM, Greitzer SL. *Geometry revisited*. Washington: Mathematical Association of America; 1967. The Steiner – Lehmus theorem; p. 14–16 (New mathematical library; volume 19).
2. Pambuccian V. Negation-free and contradiction-free proof of the Steiner – Lehmus theorem. *Notre Dame Journal of Formal Logic*. 2018;59(1):75–90. DOI: 10.1215/00294527-2017-0019.
3. Kellison A. A machine-checked direct proof of the Steiner – Lehmus theorem. In: Association for Computing Machinery. *CPP2022. Proceedings of the 11th ACM SIGPLAN International conference on certified programs and proofs*; 2022 January 17–18; Philadelphia, USA. New York: Association for Computing Machinery; 2022. p. 265–273. DOI: 10.1145/3497775.3503682.

4. Pambuccian V, Struve H, Struve R. The Steiner – Lehmus theorem and «triangles with congruent medians are isosceles» hold in weak geometries. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*. 2016;57:483–497. DOI: 10.1007/s13366-015-0278-y.
5. Vaskouski M, Kastsevich K. New signs of isosceles triangles. *International Journal of Geometry*. 2013;2(2):56–67.
6. Strzeboński A. Real root isolation for exp-log-arctan functions. *Journal of Symbolic Computation*. 2012;47(3):282–314. DOI: 10.1016/j.jsc.2011.11.004.
7. Frank WL. Finding zeros of arbitrary functions. *Journal of the ACM*. 1958;5(2):154–160. DOI: 10.1145/320924.320928.
8. Gelfond A. Sur le septième problème de Hilbert. *Bulletin de l'Académie des sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et naturelles. Série 7*. 1934;4:623–634.

Received 20.01.2025 / revised 29.06.2025 / accepted 29.06.2025.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

УДК 519.237.4

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ЭНТРОПИИ ШЕННОНА ДВОИЧНЫХ s -ГРАММ

В. Ю. ПАЛУХА^{1), 2)}, Ю. С. ХАРИН^{1), 2)}

¹⁾Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики БГУ,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Найдены асимптотическое распределение вероятностей статистической оценки энтропии Шеннона s -грамм $\hat{H}(s)$ и асимптотическое совместное распределение вероятностей статистических оценок энтропии Шеннона s - и $(s+1)$ -грамм $\hat{H}(s)$, $\hat{H}(s+1)$ для равномерно распределенной случайной двоичной последовательности при ее растущей длине. Доказано, что с ростом значения s коэффициент корреляции статистических оценок энтропии Шеннона s - и $(s+1)$ -грамм $\hat{H}(s)$, $\hat{H}(s+1)$ стремится к нулю. Теоретические результаты проиллюстрированы компьютерными экспериментами.

Образец цитирования:

Палуха ВЮ, Харин ЮС. Асимптотический анализ статистических оценок энтропии Шеннона двоичных s -грамм. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2025;2:62–74.
EDN: FEJGGY

For citation:

Palukha UYu, Kharin YuS. Asymptotic analysis of the statistical estimators of Shannon entropy of binary s -tuples. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2025;2:62–74. Russian.
EDN: FEJGGY

Авторы:

Владимир Юрьевич Палуха – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий научно-исследовательской лабораторией математических методов защиты информации, ученый секретарь¹⁾, доцент кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики²⁾.

Юрий Семенович Харин – доктор физико-математических наук, академик НАН Беларуси, профессор; директор¹⁾, профессор кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики²⁾.

Authors:

Uladzimir Yu. Palukha, PhD (physics and mathematics), docent; head of the research laboratory of mathematical methods of information security, scientific secretary^a and associate professor at the department of mathematical modelling and data analysis, faculty of applied mathematics and computer science^b.

palukha@bsu.by

<https://orcid.org/0009-0007-8474-1146>

Yuriy S. Kharin, doctor of science (physics and mathematics), academician of the National Academy of Sciences of Belarus, full professor; director^a and professor at the department of mathematical modelling and data analysis, faculty of applied mathematics and computer science^b.

kharin@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0003-4226-2546>

Ключевые слова: энтропия Шеннона; двоичная последовательность; статистическая оценка; ковариация; коэффициент корреляции.

Благодарность. Авторы выражают признательность Н. С. Тегаке за помощь в проведении компьютерных экспериментов.

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE STATISTICAL ESTIMATORS OF SHANNON ENTROPY OF BINARY s -TUPLES

U. Yu. PALUKHA^{a, b}, Yu. S. KHARIN^{a, b}

^aResearch Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University,
4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: U. Yu. Palukha (palukha@bsu.by)

Abstract. The asymptotic probability distribution of the statistical estimate of Shannon entropy of s -tuples $\hat{H}(s)$ and the asymptotic joint probability distribution of the statistical estimates of Shannon entropy of s - and $(s+1)$ -tuples $\hat{H}(s)$, $\hat{H}(s+1)$ for a uniformly distributed random binary sequence with increasing length are found. It is proved that as the value of s increase, the correlation coefficient of the statistical estimates of Shannon entropy of s - and $(s+1)$ -tuples $\hat{H}(s)$, $\hat{H}(s+1)$ tends to zero. The theoretical results are illustrated by computer experiments.

Keywords: Shannon entropy; binary sequence; statistical estimator; covariance; correlation coefficient.

Acknowledgements. The authors are grateful to M. S. Tegaka for assistance in performing computer experiments.

Введение

Генераторы случайных и псевдослучайных последовательностей являются неотъемлемой частью систем защиты информации. Необходимым условием для данных генераторов выступает соответствие последовательностей, порождаемых ими, модели равномерно распределенной случайной последовательности¹. Одним из методов оценки качества генераторов является энтропийный анализ их выходных последовательностей [1]. Наблюдаемая двоичная последовательность разбивается на непересекающиеся фрагменты длины s (s -граммы), по ним вычисляется статистическая оценка энтропии Шеннона $\hat{H}(s)$. В работе находятся асимптотическое (при увеличении длины двоичной последовательности) распределение вероятностей $\hat{H}(s)$ и асимптотическое совместное распределение вероятностей $\hat{H}(s)$, $\hat{H}(s+1)$. Доказывается, что с ростом значения s коэффициент корреляции статистических оценок энтропии Шеннона стремится к нулю. Теоретические результаты иллюстрируются компьютерными экспериментами.

Материалы и методы исследования

Пусть имеется двоичная последовательность длины $T = Ms(s+1)$. Тогда ее можно разбить на $M(s+1)$ непересекающихся s -грамм и M непересекающихся $(s+1)$ -грамм. Частотные оценки вероятностей s -грамм $\langle X_j \rangle$ и $(s+1)$ -грамм $\langle X'_l \rangle$ определяются соотношениями

$$\hat{p}_i(s) = \frac{1}{M(s+1)} \sum_{j=1}^{M(s+1)} I\{\langle X_j \rangle = i\} = \frac{v_i}{M(s+1)}, \quad i = 0, \dots, 2^s - 1, \quad (1)$$

$$\hat{p}_k(s+1) = \frac{1}{Ms} \sum_{l=1}^{Ms} I\{\langle X'_l \rangle = k\} = \frac{v_k}{Ms}, \quad k = 0, \dots, 2^{s+1} - 1.$$

¹Криптология : учебник / Ю. С. Харин [и др.]. Минск : БГУ, 2013. 511 с. (Классическое университетское издание).

Статистические оценки s - и $(s+1)$ -мерной энтропии Шеннона на основе частотных оценок вероятностей (1) имеют вид

$$\hat{H}(s) = - \sum_{i=0}^{2^s-1} \hat{p}_i(s) \ln \hat{p}_i(s) \in [0, s \ln 2],$$

$$\hat{H}(s+1) = - \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} \hat{p}_k(s+1) \ln \hat{p}_k(s+1) \in [0, (s+1) \ln 2].$$

Чтобы вычислить ковариацию статистических оценок энтропии Шеннона (2) $\text{cov}_0\{\hat{H}(s), \hat{H}(s+1)\}$ при истинной гипотезе H_0 о том, что наблюдаемая последовательность является равномерно распределенной случайной последовательностью, необходимо сначала найти 2^{2s+1} ковариаций частотных оценок вероятностей $\text{cov}_0\{\hat{p}_i(s), \hat{p}_k(s+1)\}$ для всех пар s - и $(s+1)$ -грамм (i, k) , $i = 0, \dots, 2^s - 1$, $k = 0, \dots, 2^{s+1} - 1$. Введем обозначения

$$a_{ik} = E_0\{\hat{p}_i(s), \hat{p}_k(s+1)\}, \quad b_{ik} = E_0\{\hat{p}_i(s)\} E_0\{\hat{p}_k(s+1)\}.$$

Тогда для искоемых ковариаций частотных оценок вероятностей справедливо выражение

$$d_{ik} = \text{cov}_0\{\hat{p}_i(s), \hat{p}_k(s+1)\} = a_{ik} - b_{ik}.$$

Поскольку $E_0\{\hat{p}_i(s)\} = 2^{-s}$, $i = 0, \dots, 2^s - 1$, $E_0\{\hat{p}_k(s+1)\} = 2^{-s-1}$, $k = 0, \dots, 2^{s+1} - 1$, имеем $b_{ik} = 2^{-2s-1}$, $i = 0, \dots, 2^s - 1$, $k = 0, \dots, 2^{s+1} - 1$. Для a_{ik} справедливо выражение

$$\begin{aligned} a_{ik} &= \frac{1}{M(s+1)} \frac{1}{Ms} \sum_{j=1}^{M(s+1)} \sum_{l=1}^{Ms} E_0\{I\{\langle X_j \rangle = i, \langle X'_l \rangle = k\}\} = \\ &= \frac{1}{M(s+1)} \frac{1}{Ms} \sum_{j=1}^{M(s+1)} \sum_{l=1}^{Ms} P_0\{\langle X_j \rangle = i, \langle X'_l \rangle = k\}. \end{aligned}$$

Значение величины

$$c_{ijkl} = P_0\{\langle X_j \rangle = i, \langle X'_l \rangle = k\},$$

входящей в выражение для a_{ik} , зависит от взаимного расположения s -граммы $\langle X_j \rangle$ и $(s+1)$ -граммы $\langle X'_l \rangle$. Если s -грамма $\langle X_j \rangle$ и $(s+1)$ -грамма $\langle X'_l \rangle$ не пересекаются, т. е. не содержат общих элементов ряда $\{x_1, \dots, x_T\}$, то в силу их независимости при истинной гипотезе H_0 имеем

$$c_{ijkl} = P_0\{\langle X_j \rangle = i\} P_0\{\langle X'_l \rangle = k\} = 2^{-s} \cdot 2^{-s-1} = 2^{-2s-1}, \quad i = 0, \dots, 2^s - 1, \quad k = 0, \dots, 2^{s+1} - 1. \quad (4)$$

Зафиксируем $(s+1)$ -грамму $\langle X'_l \rangle$. Она может пересекаться только с двумя s -граммами. Пусть j'_l и $j'_l + 1$ — их номера. Тогда a_{ik} представимо в виде

$$a_{ik} = \frac{1}{M(s+1)} \frac{1}{Ms} \sum_{l=1}^{Ms} \sum_{j \neq j'_l, j'_l+1} c_{ijkl} + \frac{1}{M(s+1)} \frac{1}{Ms} \sum_{l=1}^{Ms} (c_{ij'_l k l} + c_{i(j'_l+1) k l}). \quad (5)$$

Из выражения (4) для первого слагаемого в выражении (5) следует, что

$$\frac{1}{M(s+1)} \frac{1}{Ms} \sum_{l=1}^{Ms} \sum_{j \neq j'_l, j'_l+1} c_{ijkl} = \frac{1}{M(s+1)} \frac{1}{Ms} \sum_{l=1}^{Ms} \sum_{j \neq j'_l, j'_l+1} \frac{1}{2^{2s+1}} = \frac{M(s+1) - 2}{2^{2s+1} M(s+1)}. \quad (6)$$

Перед рассмотрением пересечений s - и $(s+1)$ -грамм введем обозначение

$$l' = \begin{cases} l \bmod s, & \text{если } l \bmod s > 0, \\ s, & \text{если } l \bmod s = 0, \end{cases} \quad l' \in \{1, 2, \dots, s\}. \quad (7)$$

Пусть длина пересечения $(s+1)$ -граммы $\langle X'_l \rangle$ и s -граммы $\langle X_{j'_l+1} \rangle$ равна m_l , а длина пересечения $(s+1)$ -граммы $\langle X'_l \rangle$ и s -граммы $\langle X_{j'_l} \rangle$ равна $s+1-m_l$.

Лемма 1. Справедливо соотношение $m_l = l'$.

Доказательство. Взаимное расположение s - и $(s+1)$ -грамм повторяется через каждые s $(s+1)$ -грамм. В связи с этим рассмотрим сначала первые s $(s+1)$ -грамм $\langle X'_l \rangle$ ($l = 1, \dots, s$).

С первой $(s+1)$ -граммой $\langle X'_1 \rangle$ пересекаются s -граммы $\langle X_1 \rangle$ и $\langle X_2 \rangle$. Отметим, что s -грамма $\langle X_1 \rangle$ покрывается $(s+1)$ -граммой $\langle X'_1 \rangle$ полностью, т. е. $s+1-m_1=s$, а длина пересечения s -граммы $\langle X_2 \rangle$ и $(s+1)$ -граммы $\langle X'_1 \rangle$ равна $m_1=1$, т. е. при $l=1$ имеем $m_l=l$. Поскольку для $l=2, \dots, s$ s -граммы $\langle X_{j_l} \rangle$ и $\langle X_{j_{l-1}+1} \rangle$ совпадают, длины пересечений $(s+1)$ -граммы $\langle X'_{l-1} \rangle$ с s -граммой $\langle X_{j_{l-1}+1} \rangle$ и $(s+1)$ -граммы $\langle X'_l \rangle$ с s -граммой $\langle X_{j_l} \rangle = \langle X_{j_{l-1}+1} \rangle$ в сумме дают s , т. е. $m_{l-1} + s+1 - m_l = s$, откуда $m_l = m_{l-1} + 1$. Таким образом, имеем рекуррентное соотношение с начальным значением $m_1=1$. Следовательно, для $l=1, \dots, s$ справедливо $m_l=l$, что при указанных значениях l равносильно $m_l=l'$.

В отношении $(s+1)$ -грамм $\langle X'_l \rangle$, $l=s+1, 2s+1, \dots, ts+1, \dots$, справедливы те же рассуждения, что и в отношении $(s+1)$ -грамм $\langle X'_l \rangle$. Отличие состоит лишь в том, что $m_l=1=l'$. Дальнейшие рассуждения о сумме длин пересечений $(s+1)$ -граммы $\langle X'_{l-1} \rangle$ с s -граммой $\langle X_{j_{l-1}+1} \rangle$ и $(s+1)$ -граммы $\langle X'_l \rangle$ с s -граммой $\langle X_{j_l} \rangle = \langle X_{j_{l-1}+1} \rangle$ также справедливы, т. е. для $l=ts+2, \dots, (t+1)s$, $t \in \mathbb{N}$, $m_l = m_{l-1} + 1$. Следовательно, $m_l=l'$ для любого l . Лемма доказана.

На рис. 1 продемонстрированы возможные типы пересечений при $s=3$.

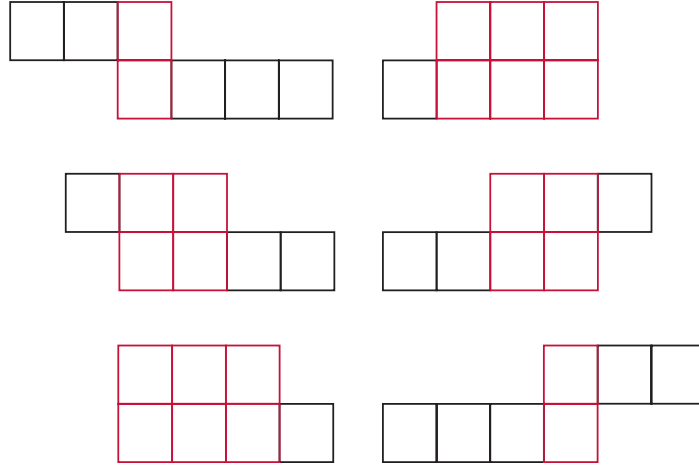


Рис. 1. Возможные типы пересечений 3- и 4-грамм

Fig. 1. Possible types of 3- and 4-tuples intersections

Полученный при пересечении $(s+1)$ -граммы $\langle X'_l \rangle$ и s -граммы $\langle X_{j_l} \rangle$ вектор имеет длину $s+1+s-(s+1-m_l)=s+l'$. Соответствующий пересечению индекс i обозначим мультииндексом I_l^s , а индекс k – мультииндексом $K_1^{s+1-l'}$. Полученный при пересечении $(s+1)$ -граммы $\langle X'_l \rangle$ и s -граммы $\langle X_{j_l+1} \rangle$ вектор имеет длину $s+1+s-m_l=2s+1-l'$. Соответствующий пересечению индекс i обозначим мультииндексом I_1'' , а индекс k – мультииндексом $K_{s+2-l'}^{s+1}$.

Теорема 1. При истинной гипотезе H_0 для ковариаций (3) справедливо следующее выражение:

$$d_{ik} = \frac{1}{M(s+1)} \frac{1}{2^s} \left(\frac{1}{s} \sum_{l=1}^s \left(\frac{1}{2^l} I \{ I_l^s = K_1^{s+1-l'} \} + \frac{1}{2^{s+1-l'}} I \{ I_1'' = K_{s+2-l'}^{s+1} \} \right) - \frac{1}{2^s} \right). \quad (8)$$

Доказательство. При расчете $c_{ij'kl}$ и $c_{i(j'+1)kl}$ необходимо учесть как длину двоичных векторов, полученных при пересечении, так и совпадение соответствующих пересечению элементов i и k . Тогда

$$c_{ij'kl} = P_0 \{ \langle X_{j'} \rangle = i, \langle X'_l \rangle = k \} = \frac{1}{2^{s+l'}} I \{ I_l^s = K_1^{s+1-l'} \}, \quad (9)$$

$$c_{i(j'+1)kl} = P_0 \{ \langle X_{j'+1} \rangle = i, \langle X'_l \rangle = k \} = \frac{1}{2^{2s+1-l'}} I \{ I_1'' = K_{s+2-l'}^{s+1} \}.$$

Заметим, что индикаторы в выражениях (9) представимы в виде

$$I\{I_1^s = K_1^{s+1-l'}\} = \prod_{j=1}^{s+1-l'} (i_{j'+j-1} \oplus k_j \oplus 1), \quad I\{I_1^{l'} = K_{s+2-l'}^{s+1}\} = \prod_{j=1}^{l'} (i_j \oplus k_{j+s+1-l'} \oplus 1).$$

Подставим выражения (6) и (9) в выражение (5) и получим

$$a_{ik} = \frac{M(s+1)-2}{2^{2s+1}M(s+1)} + \frac{1}{M(s+1)} \frac{1}{Ms} \sum_{l=1}^{Ms} \left(\frac{1}{2^{s+l}} I\{I_1^s = K_1^{s+1-l'}\} + \frac{1}{2^{2s+1-l'}} I\{I_1^{l'} = K_{s+2-l'}^{s+1}\} \right),$$

где зависимость l' от l определяется формулой (7). Тогда

$$\begin{aligned} d_{ik} &= \frac{M(s+1)-2}{2^{2s+1}M(s+1)} + \frac{1}{M(s+1)} \frac{1}{Ms} \sum_{l=1}^{Ms} \left(\frac{1}{2^{s+l}} I\{I_1^s = K_1^{s+1-l'}\} + \frac{1}{2^{2s+1-l'}} I\{I_1^{l'} = K_{s+2-l'}^{s+1}\} \right) - \\ &- \frac{1}{2^{2s+1}} = \frac{1}{M(s+1)} \frac{1}{Ms} \sum_{l=1}^{Ms} \left(\frac{1}{2^{s+l}} I\{I_1^s = K_1^{s+1-l'}\} + \frac{1}{2^{2s+1-l'}} I\{I_1^{l'} = K_{s+2-l'}^{s+1}\} \right) - \frac{1}{2^{2s}M(s+1)} = \\ &= \frac{1}{M(s+1)} \frac{1}{2^s} \left(\frac{1}{Ms} \sum_{l=1}^{Ms} \left(\frac{1}{2^{l'}} I\{I_1^s = K_1^{s+1-l'}\} + \frac{1}{2^{s+1-l'}} I\{I_1^{l'} = K_{s+2-l'}^{s+1}\} \right) - \frac{1}{2^s} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку через каждые $s(s+1)$ -грамм слагаемые в сумме повторяются, из выражения (10) вытекает выражение (8). Теорема доказана.

Следствие 1. Справедлива следующая точная двусторонняя оценка ковариаций (3):

$$-\frac{1}{2^{2s}M(s+1)} \leq \text{cov}_0\{\hat{p}_i(s), \hat{p}_k(s+1)\} \leq \frac{1}{2^{s-1}s(s+1)M} \left(1 - \frac{s+2}{2^{s+1}} \right). \quad (11)$$

Доказательство. В случае если индекс i состоит из одних нулей, а индекс k – из одних единиц, и наоборот, все индикаторы в выражениях (9) будут равны нулю. Тогда

$$a_{ik} = \frac{M(s+1)-2}{2^{2s+1}M(s+1)}, \quad d_{ik} = a_{ik} - b_{ik} = \frac{1}{2^{2s+1}} - \frac{1}{2^{2s}M(s+1)} - \frac{1}{2^{2s+1}} = -\frac{1}{2^{2s}M(s+1)}.$$

В случае если индексы i и k состоят из одних нулей или единиц, все индикаторы в выражениях (9) будут равны единице. Тогда

$$a_{ik} = \frac{M(s+1)-2}{2^{2s+1}M(s+1)} + \frac{1}{M(s+1)} \frac{1}{s} \sum_{l=1}^s \left(\frac{1}{2^{s+l}} + \frac{1}{2^{2s+1-l}} \right).$$

Поскольку $s+1-l$, как и l , пробегает все возможные значения от 1 до s , по формуле суммы геометрической прогрессии имеем

$$\sum_{l=1}^s \left(\frac{1}{2^{s+l}} + \frac{1}{2^{2s+1-l}} \right) = \frac{2}{2^s} \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^s} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{s-1}} \left(1 - \frac{1}{2^s} \right).$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} a_{ik} &= \frac{M(s+1)-2}{2^{2s+1}M(s+1)} + \frac{1}{M(s+1)} \frac{1}{s} \frac{1}{2^{s-1}} \left(1 - \frac{1}{2^s} \right) = \frac{M(s+1)-2}{2^{2s+1}M(s+1)} + \frac{1}{2^{s-1}sM(s+1)} \left(1 - \frac{1}{2^s} \right), \\ d_{ik} &= a_{ik} - b_{ik} = \frac{1}{2^{2s+1}} - \frac{1}{2^{2s}M(s+1)} + \frac{1}{2^{s-1}sM(s+1)} \left(1 - \frac{1}{2^s} \right) - \frac{1}{2^{2s+1}} = \\ &= \frac{1}{2^{s-1}sM(s+1)} \left(1 - \frac{1}{2^s} \right) - \frac{1}{2^{2s}M(s+1)} = \frac{1}{2^{s-1}s(s+1)M} - \frac{1}{2^{2s}M(s+1)} \left(1 + \frac{2}{s} \right) = \\ &= \frac{1}{2^{s-1}s(s+1)M} \left(1 - \frac{s+2}{2^{s+1}} \right). \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Следствие 2. Коэффициент корреляции частотных оценок вероятностей

$$\text{corr}_0\{\hat{p}_i(s), \hat{p}_k(s+1)\} = \frac{\text{cov}_0\{\hat{p}_i(s), \hat{p}_k(s+1)\}}{\sqrt{D_0\{\hat{p}_i(s)\} D_0\{\hat{p}_k(s+1)\}}} \quad (12)$$

удовлетворяет двустороннему неравенству

$$-2 \sqrt{\frac{s}{(s+1)(2^s-1)(2^{s+1}-1)}} \leq \text{corr}_0\{\hat{p}_i(s), \hat{p}_k(s+1)\} \leq \frac{2^{s+2} - 2s - 4}{\sqrt{s(s+1)(2^s-1)(2^{s+1}-1)}}. \quad (13)$$

Доказательство. Для дисперсии частотных оценок вероятностей справедливо

$$\begin{aligned} D_0\{\hat{p}_i(s)\} &= D_0\left\{\frac{1}{M(s+1)} \sum_{j=1}^{M(s+1)} I\{\langle X_j \rangle = i\}\right\} = \frac{1}{M^2(s+1)^2} \sum_{j=1}^{M(s+1)} D_0\{I\{\langle X_j \rangle = i\}\} = \\ &= \frac{1}{M^2(s+1)^2} \sum_{j=1}^{M(s+1)} \frac{1}{2^s} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) = \frac{1}{2^s M(s+1)} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right), \quad i = 0, \dots, 2^s - 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогично

$$D_0\{\hat{p}_k(s+1)\} = \frac{1}{2^{s+1} M s} \left(1 - \frac{1}{2^{s+1}}\right), \quad k = 0, \dots, 2^{s+1} - 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} D_0\{\hat{p}_i(s)\} D_0\{\hat{p}_k(s+1)\} &= \frac{1}{2^s M(s+1)} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \frac{1}{2^{s+1} M s} \left(1 - \frac{1}{2^{s+1}}\right) = \frac{(2^s - 1)(2^{s+1} - 1)}{2^{2s} \cdot 2^{2s+2} M^2 s(s+1)}, \\ \sqrt{D_0\{\hat{p}_i(s)\} D_0\{\hat{p}_k(s+1)\}} &= \frac{\sqrt{(2^s - 1)(2^{s+1} - 1)}}{2^{2s+1} M \sqrt{s(s+1)}}. \end{aligned}$$

Подставим данное выражение в формулу (12) и получим

$$\text{corr}_0\{\hat{p}_i(s), \hat{p}_k(s+1)\} = \frac{2^{2s+1} M \sqrt{s(s+1)} \text{cov}_0\{\hat{p}_i(s), \hat{p}_k(s+1)\}}{\sqrt{(2^s - 1)(2^{s+1} - 1)}}.$$

Тогда на основе двусторонней оценки (11) получим двустороннюю оценку (13). Следствие доказано.

Введем обозначения

$$f_{ik} = \sum_{l=1}^s \left(\frac{1}{2^l} I\{I_l^s = K_1^{s+1-l}\} + \frac{1}{2^{s+1-l}} I\{I_l^l = K_{s+2-l}^{s+1}\} \right), \quad g_{ik} = \frac{f_{ik}}{s} - \frac{1}{2^s}. \quad (15)$$

Тогда из выражения (8) следует, что

$$d_{ik} = \frac{g_{ik}}{2^s M(s+1)}. \quad (16)$$

Лемма 2. Справедливо выражение

$$\sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} f_{ik} = 2^{s+1} s.$$

Доказательство. Изменим порядок суммирования:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} f_{ik} &= \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} \sum_{l=1}^s \left(\frac{1}{2^l} I\{I_l^s = K_1^{s+1-l}\} + \frac{1}{2^{s+1-l}} I\{I_l^l = K_{s+2-l}^{s+1}\} \right) = \\ &= \sum_{l=1}^s \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} \left(\frac{1}{2^l} I\{I_l^s = K_1^{s+1-l}\} + \frac{1}{2^{s+1-l}} I\{I_l^l = K_{s+2-l}^{s+1}\} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Стоящие внутри сумм индикаторные функции, как следует из выражений (9), соответствуют пересечениям s - и $(s+1)$ -грамм, при этом пересечению длины l соответствует множитель 2^{l-s-1} (поскольку из суммы длин s - и $(s+1)$ -грамм была вычтена длина пересечения, а также был вынесен за скобки множитель 2^{-s} в определении d_{ik}). При суммировании по всем возможным s - и $(s+1)$ -граммам индикаторная функция будет равна единице ровно 2^{2s+1-l} раз, что соответствует числу возможных вариантов значений бит, оказавшихся вне пересечения длины l . Если рассуждать аналогично (либо переобозначить l), то 2^{-l} будет умножаться на индикаторную функцию, которая соответствует пересечению длины $s+1-l$. При суммировании по всем возможным s - и $(s+1)$ -граммам индикаторная функция будет равна единице ровно 2^{s+l} раз. Тогда в выражении (17) получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} f_{ik} &= \sum_{l=1}^s \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} \left(\frac{1}{2^l} I\{I_l^s = K_1^{s+1-l}\} + \frac{1}{2^{s+1-l}} I\{I_l^l = K_{s+2-l}^{s+1}\} \right) = \\ &= \sum_{l=1}^s \left(\frac{2^{s+l}}{2^l} + \frac{2^{2s+1-l}}{2^{s+1-l}} \right) = \sum_{l=1}^s (2^s + 2^s) = 2^{s+1}s. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Справедливо выражение

$$\sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} f_{ik}^2 = 2^{s+1} + 2s^2 - s - 2. \quad (18)$$

Доказательство. Перепишем f_{ik} в следующем виде:

$$f_{ik} = \sum_{l=1}^s \frac{1}{2^l} (x_{ik}^{(l)} + y_{ik}^{(l)}), \quad x_{ik}^{(l)} = I\{I_l^s = K_1^{s+1-l}\}, \quad y_{ik}^{(l)} = I\{I_l^{s+1-l} = K_{l+1}^{s+1}\}.$$

Тогда для f_{ik}^2 справедливо выражение

$$f_{ik}^2 = \left(\sum_{l=1}^s \frac{1}{2^l} (x_{ik}^{(l)} + y_{ik}^{(l)}) \right)^2 = \sum_{l=1}^s \frac{1}{2^{2l}} (x_{ik}^{(l)} + y_{ik}^{(l)})^2 + 2 \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{t=l+1}^s \frac{1}{2^{l+t}} (x_{ik}^{(l)} + y_{ik}^{(l)}) (x_{ik}^{(t)} + y_{ik}^{(t)}).$$

Изменим порядок суммирования:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} f_{ik}^2 &= \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} \left(\sum_{l=1}^s \frac{1}{2^{2l}} (x_{ik}^{(l)} + y_{ik}^{(l)})^2 + 2 \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{t=l+1}^s \frac{1}{2^{l+t}} (x_{ik}^{(l)} + y_{ik}^{(l)}) (x_{ik}^{(t)} + y_{ik}^{(t)}) \right) = \\ &= \sum_{l=1}^s \frac{1}{2^{2l}} \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} (x_{ik}^{(l)} + y_{ik}^{(l)})^2 + 2 \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{t=l+1}^s \frac{1}{2^{l+t}} \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} (x_{ik}^{(l)} + y_{ik}^{(l)}) (x_{ik}^{(t)} + y_{ik}^{(t)}). \end{aligned} \quad (19)$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{2l}} \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} (x_{ik}^{(l)} + y_{ik}^{(l)})^2 &= 2^l + 1, \quad l = 1, \dots, s, \\ \frac{1}{2^{l+t}} \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} (x_{ik}^{(l)} + y_{ik}^{(l)}) (x_{ik}^{(t)} + y_{ik}^{(t)}) &= 2, \quad l = 1, \dots, s-1, \quad t = l+1, \dots, s. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставим выражения (20) в выражение (19) и получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} f_{ik}^2 &= \sum_{l=1}^s (2^l + 1) + 2 \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{t=l+1}^s 2 = \sum_{l=1}^s 2^l + s + 2(s^2 - s) = \frac{2(2^s - 1)}{2 - 1} + 2s^2 - s = \\ &= 2^{s+1} - 2 + 2s^2 - s. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие 3. Справедливо выражение

$$\sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} g_{ik}^2 = \frac{2^{s+1} - s - 2}{s^2}. \quad (21)$$

Доказательство. Из выражений (15), (18) и (21) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} g_{ik}^2 &= \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} \left(\frac{f_{ik}}{s} - \frac{1}{2^s} \right)^2 = \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} \left(\frac{f_{ik}^2}{s^2} - \frac{2f_{ik}}{2^s s} + \frac{1}{2^{2s}} \right) = \frac{1}{s^2} \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} f_{ik}^2 - \\ &- \frac{1}{2^{s-1}s} \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} f_{ik} + \frac{2^{2s+1}}{2^{2s}} = \frac{2^{s+1} + 2s^2 - s - 2}{s^2} - \frac{2^{s+1}s}{2^{s-1}s} + 2 = \frac{2^{s+1} - s - 2}{s^2}. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Вернемся к статистическим оценкам (2).

Теорема 2. Пусть $0 < \hat{p}_i \leq 2^{1-s}$, $i = 0, \dots, 2^s - 1$, $0 < \hat{p}_k \leq 2^{-s}$, $k = 0, \dots, 2^{s+1} - 1$. Тогда при истинной гипотезе H_0 для ковариации и коэффициента корреляции статистических оценок энтропии Шеннона s - и $(s+1)$ -грамм $\hat{H}(s)$, $\hat{H}(s+1)$ справедливы следующие выражения:

$$\begin{aligned} \text{cov}_0 \{ \hat{H}(s), \hat{H}(s+1) \} &= \frac{2^{s+1} - s - 2}{M^2 s^2 (s+1)^2} + o\left(\frac{1}{M^2}\right), \\ \text{corr}_0 \{ \hat{H}(s), \hat{H}(s+1) \} &= \frac{2(2^{s+1} - s - 2)}{s(s+1)\sqrt{(2^s - 1)(2^{s+1} - 1)}} + o(1). \end{aligned} \quad (22)$$

Доказательство. Обозначим случайную величину $\xi_i = \hat{p}_i(s) - p_i$, $i = 0, \dots, 2^s - 1$. Тогда $\hat{H}(s) = -\sum_{i=0}^{2^s-1} (p_i + \xi_i) \ln(p_i + \xi_i)$. Воспользуемся представлением логарифма рядом Тейлора²:

$$\ln(p_i + \xi_i) = \ln\left(p_i \left(1 + \frac{\xi_i}{p_i}\right)\right) = \ln p_i + \frac{\xi_i}{p_i} - \frac{1}{2} \frac{\xi_i^2}{p_i^2} + O(|\xi_i|^3).$$

Для сходимости ряда Тейлора необходимо потребовать, чтобы $\frac{\xi_i}{p_i} \in (-1; 1]$, что при истинной гипотезе H_0 равносильно условию $\xi_i \in \left(-\frac{1}{2^s}; \frac{1}{2^s}\right]$. Проверим выполнение условия $\frac{\xi_i}{p_i} = \frac{\hat{p}_i - p_i}{p_i} = \frac{\hat{p}_i}{p_i} - 1 = 2^s \hat{p}_i - 1 \in (-1; 1]$:

$$2^s \hat{p}_i - 1 > -1 \Leftrightarrow 2^s \hat{p}_i > 0 \Leftrightarrow \hat{p}_i > 0, \quad 2^s \hat{p}_i - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 2^s \hat{p}_i \leq 2 \Leftrightarrow \hat{p}_i \leq \frac{2}{2^s}. \quad (23)$$

Условие (23) выполнено согласно формулировке теоремы. Тогда для статистической оценки энтропии Шеннона получим

$$\begin{aligned} \hat{H}(s) &= -\sum_{i=0}^{2^s-1} (p_i + \xi_i) \left(\ln p_i + \frac{1}{p_i} \xi_i - \frac{1}{2p_i^2} \xi_i^2 + O(|\xi_i|^3) \right) = -\sum_{i=0}^{2^s-1} p_i \ln p_i - \\ &- \sum_{i=0}^{2^s-1} \left(p_i \frac{1}{p_i} \xi_i + \xi_i \ln p_i \right) - \sum_{i=0}^{2^s-1} \left(\frac{1}{p_i} \xi_i^2 - p_i \frac{1}{2p_i^2} \xi_i^2 \right) + O\left(\max_i |\xi_i|^3\right) = \\ &= H(s) - \sum_{i=0}^{2^s-1} (1 + \ln p_i) \xi_i - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2^s-1} \frac{1}{p_i} \xi_i^2 + O\left(\max_i |\xi_i|^3\right). \end{aligned}$$

При истинной гипотезе H_0 $p_i = p = \frac{1}{2^s}$, $i = 0, \dots, 2^s - 1$. Кроме того, $\sum_{i=0}^{2^s-1} \xi_i = \sum_{i=0}^{2^s-1} \hat{p}_i - \sum_{i=0}^{2^s-1} p_i = 1 - 1 = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{H}(s) &= H(s) - (1 + \ln p) \sum_{i=0}^{2^s-1} \xi_i - \frac{1}{2p} \sum_{i=0}^{2^s-1} \xi_i^2 + O\left(\max_i |\xi_i|^3\right) = \\ &= H(s) - 2^{s-1} \sum_{i=0}^{2^s-1} \xi_i^2 + O\left(\max_i |\xi_i|^3\right). \end{aligned}$$

²Воднев В. Т., Наумович А. Ф., Наумович Н. Ф. Основные математические формулы : справочник / под ред. Ю. С. Богданова. 2-е изд., перераб. и доп. Минск : Выш. шк., 1988. 272 с.

Обозначим случайную величину $\eta_k = \hat{p}_k(s+1) - p_k$, $k = 0, \dots, 2^{s+1} - 1$. Для сходимости ряда Тейлора необходимо потребовать, чтобы $\frac{\eta_k}{p_k} \in (-1; 1]$. Данное условие, проверяемое аналогично условию (23), выполняется согласно формулировке теоремы. Тогда при истинной гипотезе H_0 имеем $\hat{H}(s+1) = H(s+1) - 2^s \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} \eta_k^2 + O\left(\max_k |\eta_k|^3\right)$.

Введем обозначения $u_1 = \sum_{i=0}^{2^s-1} \xi_i^2$, $u_2 = \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} \eta_k^2$. Тогда при истинной гипотезе H_0 $\hat{H}(s) = a_1 u_1 + b_1 + v_1$, $\hat{H}(s+1) = a_2 u_2 + b_2 + v_2$, где $a_1 = -2^{s-1}$; $b_1 = H(s) = s \ln 2$; $v_1 = O\left(\max_i |\xi_i|^3\right)$; $a_2 = -2^s$; $b_2 = H(s+1) = (s+1) \ln 2$; $v_2 = O\left(\max_k |\eta_k|^3\right)$.

Сформируем составной случайный вектор ζ длины $3 \cdot 2^s$ конкатенацией случайных векторов ξ и η : $\zeta = (\xi \parallel \eta) \in \mathbb{R}^{2^s} \times \mathbb{R}^{2^{s+1}}$. Тогда при $M \rightarrow \infty$ вектор ζ будет иметь асимптотически нормальное распределение. Приведем формулу для смешанного центрального момента 4-го порядка гауссовского вектора³

$$\sigma_{ijkl} = \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \sigma_{ik} \sigma_{jl} + \sigma_{il} \sigma_{kj}. \quad (24)$$

Из формулы (14) для всех $i = 0, \dots, 2^s - 1$ следует, что

$$\sigma_{ii} = E_0 \{ \xi_i^2 \} = E_0 \left\{ \left(\hat{p}_i(s) - p_i(s) \right)^2 \right\} = D_0 \{ \hat{p}_i(s) \} = \frac{1}{2^s M(s+1)} \left(1 - \frac{1}{2^s} \right). \quad (25)$$

Аналогично для всех $i, j = 0, \dots, 2^s - 1$, $i \neq j$, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= E_0 \{ \xi_i \xi_j \} = E_0 \left\{ \left(\hat{p}_i(s) - p_i(s) \right) \left(\hat{p}_j(s) - p_j(s) \right) \right\} = \text{cov}_0 \{ \hat{p}_i(s), \hat{p}_j(s) \} = \\ &= \text{cov}_0 \left\{ \frac{v_i}{M(s+1)}, \frac{v_j}{M(s+1)} \right\} = \frac{\text{cov}_0 \{ v_i, v_j \}}{M^2(s+1)^2} = -\frac{M(s+1) p_i p_j}{M^2(s+1)^2} = -\frac{1}{2^s \cdot 2^s M(s+1)}. \end{aligned} \quad (26)$$

С учетом свойств дисперсии, формулы (24) и равенства всех σ_{ii} , $i = 0, \dots, 2^s - 1$, при истинной гипотезе H_0 получаем

$$\begin{aligned} D_0 \{ u_1 \} &= D_0 \left\{ \sum_{i=0}^{2^s-1} \xi_i^2 \right\} = E_0 \left\{ \left(\sum_{i=0}^{2^s-1} \xi_i^2 \right)^2 \right\} - E_0^2 \left\{ \sum_{i=0}^{2^s-1} \xi_i^2 \right\} = \\ &= E_0 \left\{ \sum_{i=0}^{2^s-1} \xi_i^2 \sum_{j=0}^{2^s-1} \xi_j^2 \right\} - \left(E_0 \left\{ \sum_{i=0}^{2^s-1} \xi_i^2 \right\} \right)^2 = \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{j=0}^{2^s-1} E_0 \{ \xi_i^2 \xi_j^2 \} - \left(\sum_{i=0}^{2^s-1} E_0 \{ \xi_i^2 \} \right)^2 = \\ &= \sum_{i,j=0}^{2^s-1} \sigma_{ijij} - \left(\sum_{i=0}^{2^s-1} \sigma_{ii} \right)^2 = \sum_{i,j=0}^{2^s-1} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} + 2\sigma_{ij}^2) - \left(\sum_{i=0}^{2^s-1} \sigma_{ii} \right)^2 = \\ &= \sum_{i,j=0}^{2^s-1} (\sigma_{ii}^2 + 2\sigma_{ij}^2) - \left(\sum_{i=0}^{2^s-1} \sigma_{ii} \right)^2 = 2 \sum_{i,j=0}^{2^s-1} \sigma_{ij}^2 + 2^{2s} \sigma_{ii}^2 - (2^s \sigma_{ii})^2 = \\ &= 2 \sum_{i,j=0}^{2^s-1} \sigma_{ij}^2 = 2 \left(\sum_{i=0}^{2^s-1} \sigma_{ii}^2 + \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{j \neq i}^{2^s-1} \sigma_{ij}^2 \right). \end{aligned} \quad (27)$$

³Харин Ю. С., Зуев Н. М., Жук Е. Е. Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика : учебник. Минск : БГУ, 2011. 464 с. (Классическое университетское издание).

Подставим формулы (25) и (26) в выражение (27) и получим

$$D_0\{u_1\} = 2 \left(2^s \frac{2^{-2s}(1-2^{-s})^2}{M^2(s+1)^2} + 2^s(2^s-1) \frac{2^{-2s} \cdot 2^{-2s}}{M^2(s+1)^2} \right) = \frac{1}{2^{s-1}M^2(s+1)^2} \times \\ \times \left((1-2^{-s})^2 + (2^s-1)2^{-2s} \right) = \frac{1}{2^{s-1}M^2(s+1)^2} (1-2^{-s+1}+2^{-s}) = \frac{2^s-1}{2^{2s-1}M^2(s+1)^2}. \quad (28)$$

Аналогично $D_0\{u_2\} = \frac{2^{s+1}-1}{2^{2s+1}M^2s^2}$.

Воспользовавшись формулой (24) для вычисления $E_0\{u_1u_2\}$, получим

$$E_0\{u_1u_2\} = E_0 \left\{ \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} \xi_i^2 \eta_k^2 \right\} = \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} E_0\{\xi_i^2 \eta_k^2\} = \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} \sigma_{iikk}. \quad (29)$$

При $j=i, l=k$ формула (24) принимает вид $\sigma_{iikk} = \sigma_{ii}\sigma_{kk} + 2\sigma_{ik}^2$, где $\sigma_{ii} = D_0\{\xi_i\}$, $\sigma_{kk} = D_0\{\eta_k\}$ и $\sigma_{ik} = \text{cov}_0\{\xi_i, \eta_k\}$, $i=0, \dots, 2^s-1, k=0, \dots, 2^{s+1}-1$. Поскольку

$$E\{\xi_i\} = E\{\eta_k\} = 0, i=0, \dots, 2^s-1, k=0, \dots, 2^{s+1}-1, \quad (30)$$

имеем $D_0\{\xi_i\} = E_0\{\xi_i^2\}$, $D_0\{\eta_k\} = E_0\{\eta_k^2\}$, $i=0, \dots, 2^s-1, k=0, \dots, 2^{s+1}-1$. Используя формулы (24) и (29) для вычисления $\text{cov}\{u_1, u_2\}$, получим

$$\text{cov}\{u_1, u_2\} = E_0\{u_1u_2\} - E_0\{u_1\}E_0\{u_2\} = \\ = \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} (\sigma_{ii}\sigma_{kk} + 2\sigma_{ik}^2) - \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} \sigma_{ii}\sigma_{kk} = 2 \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} \sigma_{ik}^2.$$

Из выражения (30) для $i=0, \dots, 2^s-1, k=0, \dots, 2^{s+1}-1$ следует, что

$$\text{cov}_0\{\xi_i, \eta_k\} = E_0\{\xi_i\eta_k\} = E_0\{(\hat{p}_i(s) - p_i(s))(\hat{p}_k(s+1) - p_k(s+1))\} = \\ = \text{cov}_0\{\hat{p}_i(s), \hat{p}_k(s+1)\} = d_{ik}.$$

Таким образом,

$$2^{2s-1} \text{cov}_0\{u_1, u_2\} = 2^{2s} \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} d_{ik}^2 \geq 0. \quad (31)$$

Подставим выражения (16) и (21) в выражение (31) и получим

$$2^{2s-1} \text{cov}_0\{u_1, u_2\} = \frac{2^{2s}}{2^{2s}M^2(s+1)^2} \sum_{i=0}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{2^{s+1}-1} g_{ik}^2 = \frac{2^{s+1}-s-2}{M^2s^2(s+1)^2}. \quad (32)$$

Найдем порядок ν_1 относительно M . Справедливо ограничение сверху

$$\max_i |\xi_i|^3 \leq \sum_{i=0}^{2^s-1} |\xi_i|^3.$$

Исследуем свойства величины $\Xi = \sum_{i=0}^{2^s-1} |\xi_i|^3$. Поскольку, как было сказано выше, величины ξ_i имеют одинаковое асимптотически нормальное распределение, моменты всех порядков и нулевое математическое

ское ожидание, то сама величина Ξ будет иметь тот же порядок, что и ее математическое ожидание. Обозначим стандартное отклонение величин ξ_i через $\sigma = \sqrt{D\{\xi_i\}} = \sqrt{\sigma_{ii}}$. Из выражения (27) следует, что $\sigma \sim O\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$. Применим формулу для абсолютного центрального момента 4-го порядка нормальной случайной величины⁴ с учетом того, что величины ξ_i распределены асимптотически нормально и $E\{\xi_i\} = 0, i = 0, \dots, 2^s - 1$. Получим $E\{\xi_i^4\} = 3\sigma_{ii}^2 = 3\sigma^4$. Тогда из неравенства Ляпунова⁵ следует, что

$$\left(E\{|\xi_i|^3\}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \left(E\{\xi_i^4\}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(3\sigma^4\right)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{4}}\sigma,$$

откуда

$$E\{|\xi_i|^3\} \leq \left(E\{\xi_i^4\}\right)^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{4}}\sigma^3 \sim O\left(\frac{1}{M^{\frac{3}{2}}}\right),$$

и при фиксированном значении s справедливо $\Xi \sim O\left(\frac{1}{M^{\frac{3}{2}}}\right)$, откуда $v_1 \sim O\left(\frac{1}{M^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Из выражения (28) следует, что $u_1 \sim O\left(\frac{1}{M}\right)$. Аналогично $u_2 \sim O\left(\frac{1}{M}\right)$, $v_2 \sim O\left(\frac{1}{M^{\frac{3}{2}}}\right)$. Значит, при вычислении ковариации остаточными членами v_1, v_2 можно пренебречь. Учитывая свойство ковариации и применяя выражение (32), получаем

$$\begin{aligned} \text{cov}_0\{\hat{H}(s), \hat{H}(s+1)\} &= a_1 a_2 \text{cov}_0\{u_1, u_2\} + a_1 \text{cov}_0\{u_1, v_2\} + a_2 \text{cov}_0\{v_1, u_2\} + \\ &+ \text{cov}_0\{v_1, v_2\} = 2^{2s-1} \text{cov}_0\{u_1, u_2\} + O\left(\frac{1}{M^{\frac{5}{2}}}\right) = \frac{2^{s+1} - s - 2}{M^2 s^2 (s+1)^2} + o\left(\frac{1}{M^2}\right). \end{aligned}$$

Для того чтобы найти коэффициент корреляции статистических оценок энтропии Шеннона $\text{corr}_0\{\hat{H}(s), \hat{H}(s+1)\} = \frac{\text{cov}_0\{\hat{H}(s), \hat{H}(s+1)\}}{\sqrt{D_0\{\hat{H}(s)\}D_0\{\hat{H}(s+1)\}}}$, необходимо вычислить $D_0\{\hat{H}(s)\}$ и $D_0\{\hat{H}(s+1)\}$.

Аналогично после пренебрежения остаточными членами получаем

$$\begin{aligned} D_0\{\hat{H}(s)\} &= a_1^2 D_0\{u_1\} + D_0\{v_1\} + a_1 \text{cov}_0\{u_1, v_1\} = 2^{2(s-1)} D_0\{u_1\} + O\left(\frac{1}{M^{\frac{5}{2}}}\right) = \\ &= \frac{2^{2(s-1)}(2^s - 1)}{2^{2s-1} M^2 (s+1)^2} + o\left(\frac{1}{M^2}\right) = \frac{2^s - 1}{2 M^2 (s+1)^2} + o\left(\frac{1}{M^2}\right) = \frac{b_1}{M^2} (1 + o_1(1)), \\ D_0\{\hat{H}(s+1)\} &= a_2^2 D_0\{u_2\} + D_0\{v_2\} + a_2 \text{cov}_0\{u_2, v_2\} = 2^{2s} D_0\{u_2\} + O\left(\frac{1}{M^{\frac{5}{2}}}\right) = \\ &= \frac{2^{2s}(2^{s+1} - 1)}{2^{2s+1} M^2 s^2} + o\left(\frac{1}{M^2}\right) = \frac{2^{s+1} - 1}{2 M^2 s^2} + o\left(\frac{1}{M^2}\right) = \frac{b_2}{M^2} (1 + o_2(1)), \end{aligned}$$

⁴Харин Ю. С., Зуев Н. М., Жук Е. Е. Теория вероятностей... 464 с.

⁵Там же.

где $b_1 = \frac{2^s - 1}{2(s+1)^2}$; $b_2 = \frac{2^{s+1} - 1}{2s^2}$. Применив разложение в ряд Тейлора⁶ $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{D_0\{\hat{H}(s)\}D_0\{\hat{H}(s+1)\}}} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b_1}{M^2}(1+o_1(1))\right)\left(\frac{b_2}{M^2}(1+o_2(1))\right)}} = \\ &= \frac{M^2}{\sqrt{b_1b_2}} \frac{1}{\sqrt{(1+o_1(1))(1+o_2(1))}} = \frac{M^2}{\sqrt{b_1b_2}} \left(1 - \frac{1}{2}\max\{o_1(1), o_2(1)\}\right) = \frac{M^2}{\sqrt{b_1b_2}}(1+o(1)) = \\ &= \frac{2M^2s(s+1)}{\sqrt{(2^s-1)(2^{s+1}-1)}} + o(M^2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{corr}_0\{\hat{H}(s), \hat{H}(s+1)\} &= \left(\frac{2^{s+1}-s-2}{M^2(s+1)^2s^2} + o\left(\frac{1}{M^2}\right)\right) \left(\frac{2M^2s(s+1)}{\sqrt{(2^s-1)(2^{s+1}-1)}} + o(M^2)\right) = \\ &= \frac{2(2^{s+1}-s-2)}{s(s+1)\sqrt{(2^s-1)(2^{s+1}-1)}} + o(1). \end{aligned}$$

Заметим, что для главного члена коэффициента корреляции статистических оценок энтропии Шеннона справедливо

$$\frac{2(2^{s+1}-s-2)}{s(s+1)\sqrt{(2^s-1)(2^{s+1}-1)}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{s(s+1)} \frac{1 - \frac{s+2}{2^{s+1}}}{\sqrt{(1-2^{-s})(1-2^{-s-1})}} = O\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

Теорема доказана.

Следствие 4. Из формул (22) следует, что с ростом значения s коэффициент корреляции статистических оценок энтропии Шеннона s - и $(s+1)$ -грамм стремится к нулю.

Результаты и их обсуждение

Для демонстрации справедливости формул (22) и следствия 4 была проведена серия компьютерных экспериментов. Рассматривалась псевдослучайная последовательность, полученная алгоритмом BelT⁷ в режиме счетчика. Для $s = 2, \dots, 10$ из наблюдаемой последовательности брались $K = 1000$ фрагментов длины $T = Ms(s+1)$ с фиксированным значением $M = 10\,000$. По полученным K фрагментам для каждого значения s вычислялись статистические оценки энтропии Шеннона, по которым затем рассчитывались выборочные значения ковариации и коэффициента корреляции. Также для указанных значений параметров были определены теоретические значения ковариации и коэффициента корреляции статистических оценок энтропии Шеннона по главным членам в формулах (22). Проведено сравнение выборочных и теоретических значений ковариации (рис. 2) и коэффициента корреляции (рис. 3) статистических оценок энтропии Шеннона, вычисленных по s - и $(s+1)$ -граммам, в зависимости от значения s . Как видно из рис. 2 и 3, экспериментально полученные значения ковариации и коэффициента корреляции близки к теоретическим значениям, коэффициент корреляции стремится к нулю с ростом значения s .

Следствие 4 обосновывает применение энтропийного профиля [1] для статистического тестирования криптографических генераторов: для принятия решения о справедливости гипотезы о равномерной распределенности наблюдаемой последовательности необходимо вычисление оценки энтропии при различных значениях длины фрагмента s .

⁶Воднев В. Т., Наумович А. Ф., Наумович Н. Ф. Основные математические формулы... 272 с.

⁷Информационные технологии и безопасность. Криптографические алгоритмы генерации псевдослучайных чисел : СТБ 34.101.47-2017. Введ. 09.01.2017. Минск : Госстандарт, 2017. III, 21 с.

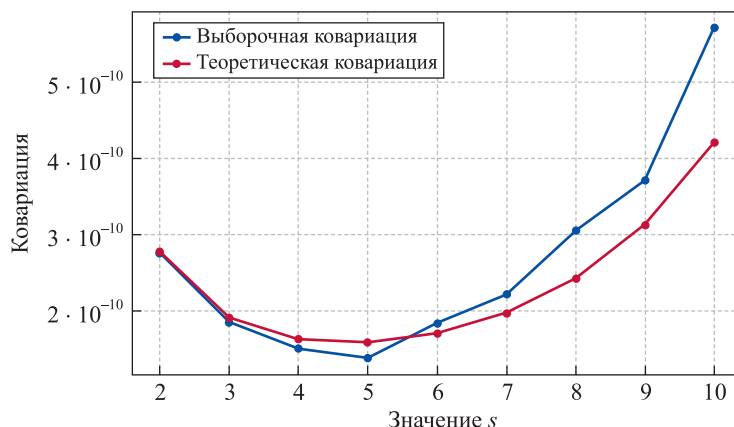


Рис. 2. Сравнение выборочных и теоретических значений ковариации статистических оценок энтропии Шеннона, вычисленных по s - и $(s + 1)$ -граммам, в зависимости от значения s

Fig. 2. Comparison of sample and theoretical values of covariance of the statistical estimates of Shannon entropy, calculated from s - and $(s + 1)$ -tuples, depending on the value of s

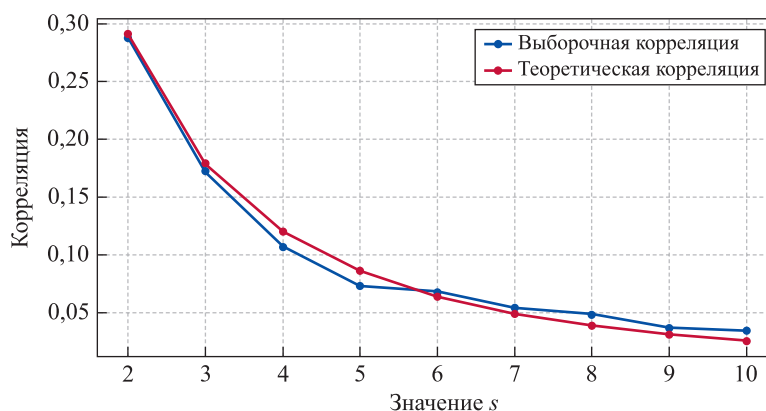


Рис. 3. Сравнение выборочных и теоретических значений коэффициента корреляции статистических оценок энтропии Шеннона, вычисленных по s - и $(s + 1)$ -граммам, в зависимости от значения s

Fig. 3. Comparison of sample and theoretical values of correlation coefficient of the statistical estimates of Shannon entropy, calculated from s - and $(s + 1)$ -tuples, depending on the value of s

Заключение

Найдены асимптотическое (при увеличении длины двоичной последовательности) совместное распределение вероятностей частотных оценок вероятностей s - и $(s + 1)$ -грамм, асимптотическое распределение вероятностей статистической оценки энтропии Шеннона s -грамм $\hat{H}(s)$ и асимптотическое совместное распределение вероятностей статистических оценок энтропии Шеннона s - и $(s + 1)$ -грамм $\hat{H}(s)$, $\hat{H}(s + 1)$. Доказано, что с ростом значений s коэффициент корреляции статистических оценок энтропии Шеннона s - и $(s + 1)$ -грамм $\hat{H}(s)$, $\hat{H}(s + 1)$ стремится к нулю. Теоретические результаты подтверждены компьютерными экспериментами. Обосновано применение энтропийного профиля [1] для статистического тестирования криптографических генераторов.

Библиографические ссылки

1. Palukha UYu, Kharin YuS, Siarheeu AI, Arlou AA. On statistical testing of random and pseudorandom sequences based on entropy functionals. In: Kharin YuS, editor. *Computer data analysis and modeling: stochastic and data science. Proceedings of the 13th International conference; 2022 September 6–10; Minsk, Belarus*. Minsk: Belarusian State University; 2022. p. 148–162. EDN: QBMBVS.

Получена 06.06.2025 / исправлена 13.06.2025 / принята 20.06.2025.
Received 06.06.2025 / revised 13.06.2025 / accepted 20.06.2025.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

УДК 519.157.2

УСЛОВИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ВЫБОРА. ЧАСТЬ 2

В. М. ДЕМИДЕНКО¹⁾

¹⁾Белорусский государственный экономический университет,
пр. Партизанский, 26, 220070, г. Минск, Беларусь

Аннотация. В современной терминологии условия классической теоремы Харди, Литтлвуда и Поля о перестановке трех систем гарантируют строгую разрешимость задачи оптимизации билинейной формы с симметрической матрицей Тёплица специального вида. Билинейная форма с указанной матрицей принимает экстремальные значения на подстановках двух видов в зависимости от того, одинаковые или противоположные упорядочения имеют компоненты двух векторов, определяющих значения переменных. В предыдущей части статьи были описаны условия достижения минимума функционала квадратичной задачи выбора на первой из заданных подстановок, обобщающие ряд результатов аналогичного плана для задачи минимизации квадратичной формы и квадратичной задачи о назначениях. В этой части работы рассматриваются условия, накладывание которых на элементы четырехиндексной матрицы гарантирует достижение минимума функционала квадратичной задачи выбора на второй подстановке, приведенной в теореме о перестановке трех систем. Результаты, представленные в двух частях статьи, на сегодняшний день описывают наиболее широкие классы четырехиндексных матриц, для которых функционал квадратичной задачи выбора принимает экстремальные значения на фиксированных подстановках.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация; квадратичная задача о назначениях; оптимизация на подстановках; эффективно разрешимые случаи.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.5.01).

Образец цитирования:

Демиденко ВМ. Условия эффективной разрешимости квадратичной задачи выбора. Часть 2. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;2:75–88.
EDN: EWYKDZ

For citation:

Demidenko VM. Conditions for the effective solvability of the quadratic choice problem. Part 2. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;2:75–88. Russian.
EDN: EWYKDZ

Автор:

Виталий Михайлович Демиденко – доктор физико-математических наук, доцент; профессор кафедры высшей математики факультета цифровой экономики.

Author:

Vitaliy M. Demidenko, doctor of science (physics and mathematics), docent; professor at the department of higher mathematics, faculty of digital economics.
vmdemidenko@yandex.ru

CONDITIONS FOR THE EFFECTIVE SOLVABILITY OF THE QUADRATIC CHOICE PROBLEM. PART 2

V. M. DEMIDENKO^a

^aBelarus State Economic University, 26 Partyzanski Avenue, Minsk 220070, Belarus

Abstract. In modern terminology, the conditions of the classical Hardy, Littlewood and Pólya theorem on the permutation of three systems guarantee the strict solvability of the optimisation problem for a bilinear form with a symmetric Toeplitz matrix of a special type. The bilinear form with the specified matrix takes extreme values on substitutions of two types, depending on whether the components of two vectors have the same or opposite orderings. Here the vectors determine the values of the variables of the bilinear form. The previous part of the article describes the conditions for achieving the minimum of the functional of the quadratic choice problem on the first of these substitutions. These conditions generalise all previously obtained results of a similar plan for the quadratic form minimisation problem and the quadratic assignment problem. This section of the paper considers conditions, imposing of which on the elements of a four-index matrix, guarantee the achievement of the minimum of the quadratic choice problem functional on the second substitution given in the three-system permutation theorem. The results presented in the two sections of the article describe by far the widest classes of four-index matrices for which the quadratic choice problem functional takes extreme values on fixed substitutions.

Keywords: combinatorial optimisation; quadratic assignment problem; substitutions optimisation; strict solvability of problems.

Acknowledgements. The work was carried out within the framework of the state programme of scientific research «Convergence-2025» (subprogramme «Mathematical models and methods», assignment 1.5.01).

Введение

Одним из направлений в исследовании квадратичной задачи о назначениях [1] является выделение условий, сужающих множество допустимых решений до одной или нескольких подстановок. Известными зарубежными математиками Г. Харди, Дж. Литтлвудом и Г. Полиа в 1926 г. были получены условия [2], которые в современной терминологии гарантируют строгую разрешимость задачи максимизации билинейной формы с матрицей Тёплица специального вида на декартовом квадрате симметрической группы подстановок. Позже этот результат был сформулирован в виде теоремы о перестановке трех систем в монографии [3], переведенной в 1948 г. на русский язык [4]. Из этой теоремы непосредственно следует строгая разрешимость частного случая квадратичной задачи о назначениях, а именно достижение экстремумов билинейной формы на паре подстановок специального вида. Если упорядочение компонент одного из векторов переменных билинейной формы по невозрастанию влечет упорядочение компонент другого вектора переменных по неубыванию, то при перенумерации их компонент в соответствии с упорядочением из теоремы о перестановке трех систем следует, что минимум билинейной формы достигается на паре подстановок вида

$$\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \dots, 6, 4, 2 \rangle, \sigma_1 = \langle 2, 4, 6, \dots, 5, 3, 1 \rangle.$$

В первой части статьи [5] приведены наиболее общие условия достижения минимального значения функционала квадратичной задачи выбора (в терминологии зарубежных исследователей биквадратичной задачи о назначениях) на подстановке $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \dots, 6, 4, 2 \rangle$, которые обобщают все результаты аналогичного плана, полученные в 1969–1998 гг. [6–11] и начале XXI в. [12; 13], включая условия строгой разрешимости квадратичной задачи о назначениях с матрицами, выходящими за рамки класса матриц Тёплица [14–16]. Результаты исследования квадратичной задачи о назначениях и ее обобщения – биквадратичной задачи о назначениях – изложены в книгах [17; 18].

В этой части статьи рассматриваются условия строгой разрешимости квадратичной задачи выбора на подстановке $\sigma_1 = \langle 2, 4, 6, \dots, 5, 3, 1 \rangle$ из теоремы Харди, Литтлвуда и Полиа о перестановке трех систем, которые расширяют условия указанной теоремы на случай минимизации функционала, определяемого произвольной четырехиндексной матрицей $A = (a_{i,j,k,\ell})$. Предложенные условия обобщают аналогичные результаты, полученные для частного случая рассматриваемой задачи, а именно минимизации билинейной формы с матрицей Тёплица специального вида на симметрической группе подстановок.

Предварительные сведения и обозначения

В данной работе используются те же обозначения, что и ранее. В связи с этим напомним, что симметрическая группа, действующая на множестве $N_{1,n} = \{1, 2, \dots, n\}$, обозначается через S_n . Любая подстановка $\sigma \in S_n$ является взаимно однозначным (биективным) отображением $\sigma: N_{1,n} \rightarrow N_{1,n}$, переводящим элемент $i \in N_{1,n}$ в $\sigma(i) \in N_{1,n}$. При этом $\sigma(i)$ называется образом элемента i , а элемент i – прообразом $\sigma(i)$. Подстановка, как и ранее, задается строкой образов $\sigma = \langle \sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i), \dots, \sigma(n) \rangle$ всех элементов множества $N_{1,n}$. Для любых элементов $i < j$ множества $N_{1,n}$ подмножество $\{i, i+1, \dots, j-1, j\}$ обозначается через $N_{i,j}$. Произведение упорядоченной пары подстановок σ, ρ – это подстановка $\sigma \circ \rho$ такая, что $\sigma(\rho(i))$, $i \in N_{1,n}$, где символом \circ обозначена операция умножения подстановок.

Напомним, что квадратичная задача выбора состоит в нахождении подстановки $\sigma_1 \in S_n$, минимизирующей определенный на S_n функционал

$$f_A(\sigma) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j,k,\ell} \sigma(i), \sigma(j),$$

где $A = (a_{i,j,k,\ell})$ – произвольная вещественная четырехиндексная матрица размера $n \times n \times n \times n$.

Выделим в множестве $N_{1,n}$ восемь подмножеств, порождаемых любой подстановкой $\sigma \in S_n$:

$$\begin{aligned} J_{1,1}^\sigma &= \left\{ i \in \mathbb{N}_{1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mid \sigma(i) < \sigma(n+1-i) \right\}, \quad J_{1,2}^\sigma = \left\{ n+1-i \in \mathbb{N}_{1,n} \mid i \in J_{1,1}^\sigma \right\}, \\ J_{1,3}^\sigma &= \mathbb{N}_{1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \setminus J_{1,1}^\sigma, \quad J_{1,4}^\sigma = \left\{ n+1-i \in \mathbb{N}_{1,n} \mid i \in J_{1,3}^\sigma \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} J_{0,1}^\sigma &= \left\{ j \in N_{1, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \mid \sigma(j) > \sigma(n-j) \right\}, \quad J_{0,2}^\sigma = \left\{ n-j \in N_{1,n} \mid j \in J_{0,1}^\sigma \right\}, \\ J_{0,3}^\sigma &= N_{1, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \setminus J_{0,1}^\sigma, \quad J_{0,4}^\sigma = \left\{ n-j \in N_{1,n} \mid j \in J_{0,3}^\sigma \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Определим две подстановки, порождаемые подмножествами $J_{1,1}^\sigma$ и $J_{0,1}^\sigma$:

$$\zeta_\sigma = \prod_{i \in J_{1,1}^\sigma} (i, n+1-i), \quad \xi_\sigma = \prod_{j \in J_{0,1}^\sigma} (j, n-j). \quad (3)$$

Связанные с подстановкой $\sigma \in S_n$ произведения независимых транспозиций вида (3) определяют две подстановки: $\zeta_\sigma = \sigma \circ \zeta_\sigma$ и $\xi_\sigma = \sigma \circ \xi_\sigma$. В случае если подмножество $J_{1,1}^\sigma$ или подмножество $J_{0,1}^\sigma$ является пустым, подстановка ζ_σ либо подстановка ξ_σ полагается равной тождественной подстановке.

При описании свойств введенных подмножеств (1) и (2) используется понятие разбиения конечного множества. В связи с этим напомним, что семейство подмножеств некоторого конечного множества образует его разбиение, если подмножества данного семейства попарно не пересекаются и их объединение совпадает со всем множеством.

Из определения подмножеств вида (1), (2) и подстановок вида (3) непосредственно вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 1. Для любой подстановки $\sigma \in S_n$, порождаемых ею подмножеств вида (1), (2) и подстановок вида (3) справедливы следующие утверждения:

1) семейство подмножеств $J_{1,1}^\sigma, J_{1,2}^\sigma, J_{1,3}^\sigma, J_{1,4}^\sigma \subset N_{1,n}$ является разбиением множества $N_{1,n}$ при четном n и множества $N_{1,n} \setminus \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ при нечетном n ;

2) семейство подмножеств $J_{0,1}^\sigma, J_{0,2}^\sigma, J_{0,3}^\sigma, J_{0,4}^\sigma \subset N_{1,n}$ является разбиением множества $N_{1,n-1}$ при нечетном n и множества $N_{1,n-1} \setminus \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ при четном n ;

3) для подстановки $\sigma \circ \zeta_\sigma = \sigma_\zeta$ выполняются равенства

$$\sigma_{\zeta}(i) = \sigma(n-i), \sigma_{\zeta}(n-i) = \sigma(i) \text{ для всех } i \in J_{1,1}^{\sigma}, \quad (4)$$

$$\sigma_{\zeta}(j) = \sigma(j), \sigma_{\zeta}(n-j) = \sigma(n-j) \text{ для всех } j \in J_{1,3}^{\sigma};$$

4) для подстановки $\sigma \circ \xi_{\sigma} = \sigma_{\xi}$ выполняются равенства

$$\sigma_{\xi}(i) = \sigma(n-i), \sigma_{\xi}(n-i) = \sigma(i) \text{ для всех } i \in J_{0,1}^{\sigma}, n-i \in J_{0,2}^{\sigma}, \quad (5)$$

$$\sigma_{\xi}(j) = \sigma(j), \sigma_{\xi}(n-j) = \sigma(n-j) \text{ для всех } j \in J_{0,3}^{\sigma}, n-j \in J_{0,4}^{\sigma}.$$

Из приведенных в лемме 1 свойств подмножеств $J_{1,1}^{\sigma}$, $J_{0,1}^{\sigma}$ и подстановок ζ_{σ} , ξ_{σ} непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 2. Для любой подстановки $\sigma \in S_n$ существует последовательность подстановок

$$\sigma = \eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i, \eta_{i+1}, \dots, \eta_m = \sigma' \quad (6)$$

такая, что $\sigma' = \sigma_1$, $\eta_i = \eta_{i-1} \circ \zeta_{\eta_{i-1}}$ либо $\eta_i = \eta_{i-1} \circ \xi_{\eta_{i-1}}$, где $\zeta_{\eta_{i-1}}$ и $\xi_{\eta_{i-1}}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, – связанные с подстановкой η_{i-1} подстановки вида (3).

Доказательство. Убедимся в том, что для любой подстановки $\sigma \in S_n$ существует последовательность подстановок вида (6) такая, что для каждого $1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

$$\sigma' = \langle 2, 4, 6, \dots, 2\ell-2, 2\ell, \sigma(\ell+1), \dots, n, \dots, \sigma(n-\ell), 2\ell-1, 2\ell-3, \dots, 5, 3, 1 \rangle.$$

Из справедливости приведенного утверждения очевидно следует справедливость леммы 2, так как при $\ell = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ подстановка σ' совпадает с подстановкой σ_1 .

Пусть для определенности n является нечетным. Тогда $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$, $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n+1}{2}$. Докажем существование последовательности подстановок вида (6) при $\ell = 1$ для подстановки σ такой, что $\sigma(n) \neq 1$ и $\sigma(1) \neq 2$. Возможны два случая: в записи подстановки σ единица стоит правее $\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ либо левее $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$.

В первом случае $\sigma(\ell) = 1$, где $\ell = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \dots, n-1$, так как при $\ell = n$ имеем $\sigma(n) = 1$. Полагая, что $\ell = n-k$, получаем $\sigma(n-k) = 1$, где $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ и $\sigma(n-k) < \sigma(k) \neq 1$. Следовательно, $k \in J_{0,1}^{\sigma}$, транспозиция $(k, n-k)$ входит в запись подстановки ξ_{σ} и в силу равенств (5) для подстановки $\eta_1 = \sigma \circ \xi_{\sigma}$ справедливы соотношения $\eta_1(k) = \sigma \circ \xi_{\sigma}(k) = \sigma(n-k) = 1$. Так как $\eta_1(k) < (n+1-k)$, то $k \in J_{1,1}^{\sigma}$, транспозиция $(k, n+1-k)$ входит в запись подстановки ζ_{η_1} и в силу равенств (4) для подстановки $\eta_2 = \eta_1 \circ \zeta_{\eta_1}$ имеют место соотношения

$$\eta_2(n+1-k) = \eta_1 \circ \zeta_{\eta_1}(n+1-k) = \eta_1(k) = 1.$$

Таким образом, в записи подстановки η_2 единица сдвинута вправо на одну позицию, т. е. имеем последовательность подстановок $\sigma = \eta_0, \eta_1, \eta_2 = \sigma'$ вида (6), в которой $\sigma'(n) = 1$.

Если $2 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, то, продолжив по аналогии построение подстановок η_{2j-1}, η_{2j} , где $\eta_{2j-1} = \eta_{2j-2} \circ \xi_{\eta_{2j-2}}$, а $\eta_{2j} = \eta_{2j-1} \circ \zeta_{\eta_{2j-1}}$, $j = 2, 3, \dots, k$, получим последовательность подстановок, в которой для последней подстановки $\eta_{2k} = \sigma'$ будут выполняться равенства $\eta_{2k}(n) = \sigma'(n) = 1$. Таким образом, в первом случае для любой подстановки σ существует последовательность подстановок вида (6), в которой для последней подстановки σ' выполняется равенство $\sigma'(n) = 1$.

Во втором случае $\sigma(k) = 1$, где $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Следовательно, $\sigma(k) < \sigma(n+1-k) \neq 1$, $k \in J_{1,1}^{\sigma}$, транспозиция $(k, n+1-k)$ входит в запись подстановки ζ_{σ} и в силу равенств (4) для подстановки $\eta_1 = \sigma \circ \zeta_{\sigma}$ справедливы соотношения

$$\eta_1(n+1-k) = \sigma \circ \zeta_\sigma(n+1-k) = \sigma(k) = 1.$$

Таким образом, при $k=1$ для подстановки $\sigma' = \eta_1$ выполняются равенства $\sigma'(n) = \eta_1(n) = 1$. При $2 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ для подстановки η_1 имеет место первый случай, поскольку $\eta_1(n+1-k) = \eta_1(n-(k-1)) = 1$, где $2 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$.

Покажем, что для любой подстановки σ такой, что $\sigma(n) = 1$, существует последовательность подстановок вида (6), в которой $\sigma'(1) = 2$. Возможны два случая: в записи подстановки σ двойка стоит слева от $\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ либо справа от $\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$. В первом случае $\sigma(k) = 2$ при $2 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, так как $\sigma(1) = 2$ при $k=1$. Для указанных k выполняется неравенство $\sigma(k) < \sigma(n+1-k) \neq 1, 2$, следовательно, $k \in J_{1,1}^\sigma$, транспозиция $(k, n+1-k)$ входит в запись подстановки ζ_σ и в силу равенств (4) для подстановки $\eta_1 = \sigma \circ \zeta_\sigma$ справедливы соотношения $\eta_1(n+1-k) = \sigma \circ \zeta_\sigma(n+1-k) = \sigma(k) = 2$.

Так как $\eta_1(n+1-k) = \eta_1(n-(k-1)) < \eta_1(k-1)$, то $k-1 \in J_{0,1}^\sigma$, транспозиция $(k, n-(k-1))$ входит в запись подстановки $\eta_1 = \xi_{\eta_1}$ и в силу равенств (5) для подстановки $\eta_2 = \eta_1 \circ \xi_{\eta_1}$ имеют место соотношения

$$\eta_2(k-1) = \eta_1 \circ \xi_{\eta_1}(k-1) = \eta_1(n-(k-1)) = 2. \quad (7)$$

Из соотношений (7) следует, что в записи подстановки η_2 двойка сместилась влево на одну позицию. При этом если $k=2$, то имеем последовательность подстановок $\sigma = \eta_0, \eta_1, \eta_2 = \sigma'$ вида (6), в которой для последней подстановки σ' выполняются равенства $\sigma'(1) = 2, \sigma'(n) = 1$. Если $3 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, то по аналогии строится последовательность подстановок

$$\sigma = \eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{2j-2}, \eta_{2j-1}, \eta_{2j}, \dots, \eta_{2k-1}, \eta_{2k} = \sigma'$$

такая, что $\eta_{2j} = \eta_{2j-1} \circ \xi_{\eta_{2j-1}}$, $\eta_{2j-1} = \eta_{2j-2} \circ \zeta_{\eta_{2j-2}}$, при этом для подстановки σ' выполняются равенства $\sigma'(1) = 2, \sigma'(n) = 1$.

Пусть имеет место второй случай, т. е. в записи подстановки σ двойка располагается правее $\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$. Тогда $\sigma(\ell) = 2$, где $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \ell \leq n-1$. Полагая, что $\ell = n-k$, преобразуем приведенные соотношения к равносильному соотношению $\sigma(n-k) = 2$, где $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Так как $\sigma(k) \neq 1$, то $\sigma(n-k) < \sigma(k) \neq 2$, следовательно, $k \in J_{0,1}^\sigma$, транспозиция $(k, n-k)$ входит в запись подстановки ξ_σ и в силу равенств (5) для подстановки $\eta_1 = \sigma \circ \xi_\sigma$ должны выполняться равенства $\eta_1(k) = \sigma \circ \xi_\sigma(k) = \sigma(n-k) = 2$.

Очевидно, что в записи подстановки η_1 двойка стоит слева от $\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$, т. е. для подстановки η_1 имеет место первый случай. Таким образом, для любой подстановки σ доказано существование последовательности подстановок вида (6) такой, что для последней подстановки σ' справедливы равенства $\sigma'(1) = 2, \sigma'(n) = 1$.

Для окончательного доказательства леммы 2 достаточно убедиться в том, что для любой подстановки

$$\sigma = \left\langle 2, 4, 6, \dots, 2\ell-2, 2\ell, \sigma(\ell+1), \dots, \sigma(\ell+i), \dots, \sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \dots, \right. \\ \left. \sigma(n-\ell-i), \dots, \sigma(n-\ell), 2\ell-1, 2\ell-3, \dots, 5, 3, 1 \right\rangle \quad (8)$$

такой, что $\sigma(\ell+1) \neq 2\ell+2$, $\sigma(n-\ell) \neq 2\ell+1$, где $2 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$, существует последовательность подстановок вида (6), для последней подстановки σ' которой выполняются равенства $\sigma'(\ell+1) = 2\ell+2, \sigma'(n-\ell) = 2\ell+1$.

Пусть в записи подстановки σ элемент $2\ell + 1$ расположен между $\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ и $\sigma(n - \ell)$, т. е. $2\ell + 1 = \sigma(n - \ell - i)$, где $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \ell$. Так как $2k + 1 = \sigma(n - (\ell + i)) < \sigma(\ell + i)$, то $\ell + i \in J_{0,1}^\sigma$, транспозиция $(\ell + i, n - (\ell + i))$ входит в запись подстановки ξ_σ и в силу равенств (5) для подстановки $\eta_1 = \sigma \circ \xi_\sigma$ справедливы соотношения

$$\eta_1(\ell + i) = \sigma \circ \xi_\sigma(\ell + i) = \sigma(n - (\ell + i)) = 2k + 1.$$

Так как $\eta_1(\ell + i) < \eta_1(n + 1 - (\ell + i))$, то $\ell + i \in J_{1,1}^{\eta_1}$, транспозиция $(\ell + i, n + 1 - (\ell + i))$ входит в запись подстановки ξ_{η_1} и в силу равенств (4) для подстановки $\eta_2 = \eta_1 \circ \xi_{\eta_1}$ имеют место соотношения

$$\eta_2(n + 1 - (\ell + i)) = \eta_1 \circ \xi_{\eta_1}(n + 1 - (\ell + i)) = \eta_1(\ell + i) = 2k + 1.$$

Таким образом, в записи подстановки η_2 элемент $2k + 1$ смещается вправо на одну позицию. Построив аналогичным образом $i - 1$ пар подстановок

$$\eta_{2j-1} = \eta_{2j-2} \circ \xi_{\eta_{2j-2}}, \quad \eta_{2j} = \eta_{2j-1} \circ \xi_{\eta_{2j-1}},$$

где $j = 2, 3, \dots, i$, получим последовательность подстановок

$$\sigma = \eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{2j-2}, \eta_{2j-1}, \eta_{2j}, \dots, \eta_{2i-2}, \eta_{2i} = \sigma',$$

в которой для последней подстановки σ' будет выполняться равенство $\sigma'(n - \ell) = 2\ell + 1$.

Пусть имеет место второй случай, т. е. в записи подстановки σ вида (8) элемент $2\ell + 1$ расположен между $\sigma(\ell) = 2\ell$ и $\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$. Тогда $2\ell + 1 = \sigma(\ell + i)$, где $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \ell$. Так как $\sigma(n + 1 - (\ell + i)) \geq 2\ell + 2$, то $\sigma(n + 1 - (\ell + i)) > \sigma(\ell + i)$, следовательно, $\ell + i \in J_{0,1}^\sigma$, транспозиция $(\ell + i, n + 1 - (\ell + i))$ входит в запись подстановки ξ_{η_σ} и в силу равенств (4) для подстановки $\eta_1 = \sigma \circ \xi_{\eta_\sigma}$ справедливы соотношения

$$\eta_1(n + 1 - (\ell + i)) = \eta_1(n - (\ell + i - 1)) = 2\ell + 1,$$

где $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \ell$. Из полученных соотношений следует, что при $i = 1$ имеем $\eta_1(n - \ell) = 2\ell + 1$, т. е. требуемая последовательность состоит из двух подстановок: $\sigma = \eta_0$ и $\eta_1 = \eta_0 \circ \xi_{\eta_\sigma} = \sigma'$.

Если $2 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \ell$, то в записи подстановки σ элемент $2\ell + 1$ расположен между $\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ и $\sigma(n - (\ell + 1))$, т. е. для подстановки η_1 имеет место первый случай. Таким образом, доказано, что для подстановки σ вида (8) существует последовательность подстановок вида (6), в которой для последней подстановки σ' выполняются равенства

$$\sigma'(i) = 2i, \sigma'(n + 1 - i) = 2i - 1, \sigma'(n - \ell) = 2\ell + 1, \quad (9)$$

где $i = 1, 2, \dots, \ell$.

Пусть теперь для подстановки σ справедливы равенства (9), $\sigma(\ell + 1) \neq 2(\ell + 1)$, т. е.

$$\sigma = \left\langle 2, 4, 6, \dots, 2\ell - 2, 2\ell, \sigma(\ell + 1), \dots, \sigma(\ell + i), \dots, \sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \dots, \right. \\ \left. \sigma(n - (\ell + j)), \dots, \sigma(n - (\ell + 1)), 2\ell + 1, 2\ell - 1, \dots, 5, 3, 1 \right\rangle. \quad (10)$$

Для завершения доказательства леммы 2 осталось убедиться в том, что для подстановки σ вида (10) можно построить последовательность подстановок вида (6) такую, что для последней подстановки σ' выполняются равенства

$$\sigma'(i) = 2i, \sigma'(n + 1 - i) = 2i - 1,$$

где $i = 1, 2, \dots, \ell, \ell + 1$. Возможны два случая: в записи подстановки σ вида (10) элемент $2(\ell + 1)$ стоит между $\sigma(\ell + 1)$ и $\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ либо между $\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ и $2(\ell + 1)$. В первом случае $2(\ell + 1) = \sigma(\ell + i)$, где $2 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \ell$, следовательно, $\ell + 1 \in J_{1,1}^\sigma$, транспозиция $(\ell + i, n + 1 - (\ell + i))$ входит в запись подстановки ξ_σ и в силу равенств (4) для подстановки $\eta_1 = \sigma \circ \xi_\sigma$ должны выполняться равенства

$$\eta_1(n+1-(\ell+i)) = \sigma \circ \zeta_\sigma(n+1-(\ell+i)) = \sigma(\ell+i) = 2(\ell+1).$$

Так как $\eta_1(n+1-(\ell+i)) = \eta_1(n-(\ell+i-1)) = 2(\ell+1)$, то

$$\eta_1(\ell+i-1) > 2(\ell+1) = \eta_1(n-(\ell+i-1)), \ell+i-1 \in J_{1,1}^\sigma,$$

транспозиция $(\ell+i-1, n-(\ell+i-1))$ входит в запись подстановки ξ_{η_1} и в силу равенств (5) для подстановки $\eta_2 = \eta_1 \circ \xi_{\eta_1}$ имеют место соотношения

$$\eta_2(\ell+i-1) = \eta_1 \circ \xi_{\eta_1}(\ell+i-1) = \eta_1(n-(\ell+i-1)) = 2(\ell+1). \quad (11)$$

Из соотношений (11) следует, что в записи подстановки η_2 элемент $2(\ell+1)$ сместился влево на одну позицию. При $i=2$, полагая, что $\sigma' = \eta_2$, получаем искомую последовательность подстановок вида

$$\sigma = \eta_0, \eta_1 = \eta_0 \circ \zeta_{\eta_0}, \eta_2 = \eta_1 \circ \zeta_{\eta_1} = \sigma'.$$

Если $3 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \ell$, то, построив по аналогии $i-1$ пар подстановок

$$\eta_{2j-1} = \eta_{2j-2} \circ \zeta_{\eta_{2j-2}}, \eta_{2j} = \eta_{2j-1} \circ \zeta_{\eta_{2j-1}},$$

где $j=3, \dots, j-1$, получим последовательность подстановок

$$\sigma = \eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{2j-1}, \eta_{2j}, \dots, \eta_{2(i-1)} = \sigma',$$

при этом для подстановки σ' будут справедливы соотношения (11).

Если имеет место второй случай, т. е. в записи подстановки σ вида (10) элемент $2(\ell+1)$ расположен между $\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ и $2(\ell+1) = \sigma(n-\ell)$, то $2(\ell+1) = \sigma(n-(\ell+j))$, где $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \ell$. Следовательно, $\sigma(\ell+j) > \sigma(n-(\ell+j))$, а значит, $\ell+j \in J_{0,1}^\sigma$, транспозиция $(\ell+j, n-(\ell+j))$ входит в запись подстановки ξ_σ и в силу равенств (5) для подстановки $\eta_1 = \sigma \circ \xi_\sigma$ должны выполняться соотношения

$$\eta_1(\ell+j) = \sigma \circ \xi_\sigma(\ell+j) = \sigma(n-(\ell+j)) = 2(\ell+1),$$

т. е. для подстановки η_1 имеет место рассмотренный выше первый случай. Таким образом, справедливость леммы 2 доказана.

Лемма 3. Если для любой подстановки $\sigma \in S_n$ выполняются неравенства

$$\Delta f_A(\sigma, \sigma \circ \zeta_\sigma) \leq 0, \Delta f_A(\sigma, \sigma \circ \xi_\sigma) \leq 0, \quad (12)$$

где ζ_σ и ξ_σ – подстановки вида (6), то функционал $f_A(\sigma)$ достигает минимума на подстановке σ_1 .

Доказательство. Из леммы 2 следует существование для любой подстановки $\sigma \in S_n$ последовательности подстановок $\sigma = \eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{i-1}, \eta_i, \dots, \eta_m = \sigma_1$ такой, что $\eta_i = \eta_{i-1} \circ \omega_{\eta_{i-1}}$, где $\omega_{\eta_{i-1}} = \zeta_{\eta_{i-1}}$ либо $\omega_{\eta_{i-1}} = \xi_{\eta_{i-1}}$, $i=1, \dots, m$. Проверка показывает, что для приращения функционала $f_A(\sigma)$ на паре подстановок η_0, η_m справедлива цепочка равенств

$$\Delta f_A(\eta_0, \eta_m) = f_A(\eta_m) - f_A(\eta_0) = \sum_{i=1}^m (f_A(\eta_i) - f_A(\eta_{i-1})) = \sum_{i=1}^m \Delta f_A(\eta_{i-1}, \eta_i).$$

Так как $\eta_i = \eta_{i-1} \circ \omega_{\eta_{i-1}}$, где $\omega_{\eta_{i-1}} = \zeta_{\eta_{i-1}}$ либо $\omega_{\eta_{i-1}} = \xi_{\eta_{i-1}}$, то в силу неравенств (12) для всех $i=1, \dots, m$ выполняется неравенство $\Delta f_A(\eta_{i-1}, \eta_i) = \Delta f(\eta_{i-1}, \eta_{i-1} \circ \omega_{\eta_{i-1}}) \leq 0$, следствием которого является неравенство $f_A(\eta_m) - f_A(\eta_0) = f_A(\sigma_1) - f_A(\sigma) \leq 0$. Таким образом, справедливость леммы 3 доказана.

Аддитивные разложения приращений функционала квадратичной задачи выбора

Из леммы 3 следует, что при выполнении для любой подстановки $\sigma \in S_n$ неравенств (12) функционал $f_A(\sigma)$ достигает минимума на подстановке σ_1 . Следовательно, достаточно выявить условия, при наложении которых на элементы матрицы $A = (a_{i,j,k}, \ell)$ будет гарантировано выполнение неравенств (12)

для функционала $f_A(\sigma)$. Для этого достаточно записать в явном виде приращения этого функционала на парах подстановок σ , $\sigma \circ \zeta_\sigma$ и σ , $\sigma \circ \xi_\sigma$.

Для подмножеств (1) и подстановок $\sigma_\xi = \sigma \circ \xi_\sigma$ вида (3) в силу леммы 1 справедливы следующие утверждения:

(i) для множества $N_{i,n}$ имеет место разложение

$$N_{1,n} = \begin{cases} J_{1,1}^\sigma \cup J_{1,2}^\sigma \cup J_{1,3}^\sigma \cup J_{1,4}^\sigma & \text{при четном } n, \\ J_{1,1}^\sigma \cup J_{1,2}^\sigma \cup J_{1,3}^\sigma \cup J_{1,4}^\sigma \cup \left\{ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right\} & \text{при нечетном } n; \end{cases}$$

(ii) для любого элемента $k \in J_{1,2}^\sigma$ существует единственный элемент $i \in J_{1,1}^\sigma$ такой, что $k = n + 1 - i$, $\sigma_\xi(k) = \sigma_\xi(n + 1 - i) = \sigma(i)$ и $\sigma_\xi(i) = \sigma(n + 1 - i)$;

(iii) для любого элемента $\ell \in J_{1,4}^\sigma$ существует единственный элемент $j \in J_{1,3}^\sigma$ такой, что $\ell = n + 1 - j$, $\sigma_\xi(\ell) = \sigma_\xi(n + 1 - j) = \sigma(n + 1 - j)$ и $\sigma_\xi(j) = \sigma(j)$.

Для подмножеств (2) и подстановок $\sigma_\xi = \sigma \circ \xi_\sigma$ вида (3) справедливы следующие утверждения:

(j) для множества $N_{i,n}$ имеет место разложение

$$N_{1,n} = \begin{cases} J_{0,1}^\sigma \cup J_{0,2}^\sigma \cup J_{0,3}^\sigma \cup J_{0,4}^\sigma \cup \{n\} & \text{при нечетном } n, \\ J_{0,1}^\sigma \cup J_{0,2}^\sigma \cup J_{0,3}^\sigma \cup J_{0,4}^\sigma \cup \left\{ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n \right\} & \text{при четном } n; \end{cases}$$

(jj) для любого элемента $k \in J_{0,2}^\sigma$ существует единственный элемент $i \in J_{0,1}^\sigma$ такой, что $k = n - i$, $\sigma_\xi(k) = \sigma_\xi(n - i) = \sigma(i)$ и $\sigma_\xi(i) = \sigma(n - i)$;

(jjj) для любого элемента $\ell \in J_{0,4}^\sigma$ существует единственный элемент $j \in J_{0,3}^\sigma$ такой, что $\ell = n - j$, $\sigma_\xi(\ell) = \sigma_\xi(n - j) = \sigma(n - j)$ и $\sigma_\xi(j) = \sigma(j)$.

Из утверждений (i) – (iii) следует, что значение функционала квадратичной задачи выбора на подстановке σ_ξ допускает аддитивное разложение в виде сумм

$$\begin{aligned} f_A(\sigma_\xi) &= \sum_{i \in N_{1,n}} \sum_{j \in N_{1,n}} a_{i,j,\sigma_\xi(i),\sigma_\xi(j)} = \\ &= \sum_{i \in J_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in J_{1,1}^\sigma} \left(a_{i,j,\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} + a_{i,n+1-j,\sigma(n+1-i),\sigma(j)} + \right. \\ &\quad \left. + a_{n+1-i,j,\sigma(i),\sigma(n+1-j)} + a_{n+1-i,n+1-j,\sigma(i),\sigma(j)} \right) + \\ &+ \sum_{i \in J_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in J_{1,3}^\sigma} \left(a_{i,j,\sigma(n+1-i),\sigma(j)} + a_{i,n+1-j,\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} + \right. \\ &\quad \left. + a_{n+1-i,j,\sigma(i),\sigma(j)} + a_{n+1-i,n+1-j,\sigma(i),\sigma(n+1-j)} \right) + \\ &+ \sum_{j \in J_{1,3}^\sigma} \sum_{i \in J_{1,1}^\sigma} \left(a_{j,i,\sigma(j),\sigma(n+1-i)} + a_{j,n+1-i,\sigma(j),\sigma(i)} + \right. \\ &\quad \left. + a_{n+1-j,i,\sigma(n+1-j),\sigma(n+1-i)} + a_{n+1-j,n+1-i,\sigma(n+1-j),\sigma(i)} \right) + \\ &+ \sum_{i \in J_{1,3}^\sigma} \sum_{j \in J_{1,3}^\sigma} \left(a_{i,j,\sigma(i),\sigma(j)} + a_{i,n+1-j,\sigma(i),\sigma(n+1-j)} + \right. \\ &\quad \left. + a_{n+1-i,j,\sigma(n+1-i),\sigma(j)} + a_{n+1-i,n+1-j,\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

при четном n и дополнительных сумм

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in J_{1,1}^\sigma} \left(a_{i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sigma(n+1-i), \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} + a_{n+1-i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sigma(i), \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, i, \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \sigma(n+1-i)} + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n+1-i, \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \sigma(i)} \right) + \\ & + \sum_{i \in J_{1,3}^\sigma} \left(a_{i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sigma(i), \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} + a_{n+1-i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sigma(n+1-i), \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, i, \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \sigma(i)} + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n+1-i, \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \sigma(n+1-i)} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

при нечетном n .

Записав аналогичное аддитивное разложение функционала $f_A(\sigma)$ на подстановке σ , путем непосредственной проверки с учетом утверждений (ii) и (iii) нетрудно убедиться в том, что четвертая двойная сумма с индексами суммирования $i \in J_{1,3}^\sigma$, $j \in J_{1,3}^\sigma$ в формуле (13) и вторая сумма с индексом суммирования $i \in J_{1,3}^\sigma$ в формуле (14) в разложениях $f_A(\sigma_\zeta)$ и $f_A(\sigma)$ совпадают. Следовательно, вычислив разность $f_A(\sigma_\zeta) - f_A(\sigma)$ и сгруппировав слагаемые сумм с индексами суммирования $i, j \in J_{1,1}^\sigma$, $i \in J_{1,1}^\sigma$ и $j \in J_{1,3}^\sigma$, получим аддитивное разложение приращения $\Delta f_A(\sigma, \sigma_\zeta)$ функционала $f_A(\sigma)$ на паре подстановок σ, σ_ζ вида

$$\begin{aligned} \Delta f_A(\sigma, \sigma_\zeta) = & \sum_{i \in J_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in J_{1,1}^\sigma} \left(a_{i, j, \sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)} + a_{i, n+1-j, \sigma(n+1-i), \sigma(j)} + \right. \\ & + a_{n+1-i, j, \sigma(i), \sigma(n+1-j)} + a_{n+1-i, n+1-j, \sigma(i), \sigma(j)} - a_{i, j, \sigma(i), \sigma(j)} - a_{i, n+1-j, \sigma(i), \sigma(n+1-j)} - \\ & - a_{n+1-i, j, \sigma(n+1-i), \sigma(j)} - a_{n+1-i, n+1-j, \sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)} \Big) + \\ & + \sum_{i \in J_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in J_{1,3}^\sigma} \left(a_{i, j, \sigma(n+1-i), \sigma(j)} + a_{i, n+1-j, \sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)} + \right. \\ & + a_{n+1-i, j, \sigma(i), \sigma(j)} + a_{n+1-i, n+1-j, \sigma(i), \sigma(n+1-j)} - a_{i, j, \sigma(i), \sigma(j)} - a_{i, n+1-j, \sigma(i), \sigma(n+1-j)} + \\ & + a_{n+1-i, j, \sigma(n+1-i), \sigma(j)} + a_{n+1-i, n+1-j, \sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)} \Big) + \\ & + \sum_{j \in J_{1,3}^\sigma} \sum_{i \in J_{1,1}^\sigma} \left(a_{j, i, \sigma(j), \sigma(n+1-i)} + a_{j, n+1-i, \sigma(j), \sigma(i)} + \right. \\ & + a_{n+1-j, i, \sigma(n+1-j), \sigma(n+1-i)} + a_{n+1-j, n+1-i, \sigma(n+1-j), \sigma(i)} - a_{j, n+1-i, \sigma(j), \sigma(n+1-i)} - \\ & - a_{j, n+1-i, \sigma(j), \sigma(n+1-i)} - a_{n+1-j, i, \sigma(n+1-j), \sigma(i)} - a_{n+1-j, n+1-i, \sigma(n+1-j), \sigma(n+1-i)} \Big) \end{aligned} \quad (15)$$

при четном n с дополнительной суммой

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in J_{1,1}^\sigma} \left(a_{i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sigma(n+1-i), \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} + a_{n+1-i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sigma(i), \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, i, \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \sigma(n+1-i)} + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n+1-i, \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \sigma(i)} - \right. \\ & \left. - a_{i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sigma(i), \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} - a_{n+1-i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sigma(n+1-i), \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} - a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, i, \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \sigma(i)} - a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n+1-i, \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \sigma(n+1-i)} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

при нечетном n , где $\sigma(i)$, $\sigma(n+1-i)$, $\sigma(j)$, $\sigma(n+1-j)$ – попарно различные элементы множества $N_{1,n}$, при этом в формуле (15) для любых $i \in J_{1,1}^\sigma$, $j \in J_{1,3}^\sigma$ и в формуле (16) для любых $i \in J_{1,1}^\sigma$ справедливы неравенства $\sigma(i) < \sigma(n+1-i)$, $\sigma(j) > \sigma(n+1-j)$ в силу определения подмножеств $J_{1,1}^\sigma$, $J_{1,3}^\sigma$.

Из утверждений (j) – (jjj) следует, что значение функционала квадратичной задачи выбора на подстановке σ_ζ допускает аддитивное разложение в виде сумм

$$\begin{aligned}
 f_A(\sigma_\xi) &= \sum_{i \in N_{1,n}} \sum_{j \in N_{1,n}} a_{i,j,\sigma_\xi(i),\sigma_\xi(j)} = \\
 &= \sum_{i \in J_{0,1}^\sigma} \sum_{j \in J_{0,1}^\sigma} \left(a_{i,j,\sigma(n-i),\sigma(n-j)} + a_{i,n-j,\sigma(n-i),\sigma(j)} + a_{n-i,j,\sigma(i),\sigma(n-j)} + a_{n-i,n-j,\sigma(i),\sigma(j)} \right) + \\
 &+ \sum_{i \in J_{0,1}^\sigma} \sum_{j \in J_{0,3}^\sigma} \left(a_{i,j,\sigma(n-i),\sigma(j)} + a_{i,n-j,\sigma(n-i),\sigma(n-j)} + a_{n-i,j,\sigma(i),\sigma(j)} + a_{n-i,n-j,\sigma(i),\sigma(n-j)} \right) + \\
 &+ \sum_{i \in J_{0,3}^\sigma} \sum_{j \in J_{0,1}^\sigma} \left(a_{i,j,\sigma(i),\sigma(n-j)} + a_{i,n-j,\sigma(i),\sigma(j)} + a_{n-i,j,\sigma(n-i),\sigma(n-j)} + a_{n-i,n-j,\sigma(n-i),\sigma(j)} \right) + \\
 &+ \sum_{i \in J_{0,3}^\sigma} \sum_{j \in J_{0,3}^\sigma} \left(a_{i,j,\sigma(i),\sigma(j)} + a_{i,n-j,\sigma(i),\sigma(n-j)} + a_{n-i,j,\sigma(n-i),\sigma(j)} + a_{n-i,n-j,\sigma(n-i),\sigma(n-j)} \right) + \\
 &+ \sum_{i \in J_{0,1}^\sigma} \left(a_{i,n,\sigma(n-i),\sigma(n)} + a_{n-i,n,\sigma(i),\sigma(n)} + a_{n,i,\sigma(n),\sigma(n-i)} + a_{n,n-i,\sigma(n),\sigma(i)} \right) + \\
 &+ \sum_{i \in J_{0,3}^\sigma} \left(a_{i,n,\sigma(i),\sigma(n)} + a_{n-i,n,\sigma(n-i),\sigma(n)} + a_{n,i,\sigma(n),\sigma(i)} + a_{n,n-i,\sigma(n),\sigma(n-i)} \right) \quad (17)
 \end{aligned}$$

при нечетном n и дополнительных сумм

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i \in J_{0,1}^\sigma} \left(a_{i,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sigma(n-i), \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} + a_{n-i,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sigma(i), \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, i, \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \sigma(n-i)} + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-i, \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \sigma(i)} \right) + \\
 &+ \sum_{i \in J_{0,3}^\sigma} \left(a_{i,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sigma(i), \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} + a_{n-i,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sigma(n-i), \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, i, \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \sigma(i)} + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-i, \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \sigma(n-i)} \right) \quad (18)
 \end{aligned}$$

при четном n .

Непосредственная проверка показывает, что в разложениях значений $f_A(\sigma_\xi)$ и $f_A(\sigma)$ функционала квадратичной задачи выбора на подстановках σ_ξ и σ четвертая двойная сумма с индексами суммирования $i, j \in J_{0,3}^\sigma$ и шестая одинарная сумма с индексом суммирования $i \in J_{0,3}^\sigma$ в формуле (17) и вторая сумма с тем же индексом суммирования в формуле (18) совпадают. Следовательно, вычислив разность $f_A(\sigma_\xi) - f_A(\sigma)$ и проведя аналогичную группировку слагаемых разности, получим аддитивное разложение приращения $\Delta f_A(\sigma, \sigma_\xi)$ вида

$$\begin{aligned}
 \Delta f_A(\sigma, \sigma_\xi) &= \sum_{i \in J_{0,1}^\sigma} \sum_{j \in J_{0,1}^\sigma} \left(a_{i,j,\sigma(n-i),\sigma(n-j)} + a_{i,n-j,\sigma(n-i),\sigma(j)} + \right. \\
 &+ a_{n-i,j,\sigma(i),\sigma(n-j)} + a_{n-i,n-j,\sigma(i),\sigma(j)} - a_{i,j,\sigma(i),\sigma(j)} - a_{i,n-j,\sigma(i),\sigma(n-j)} - \\
 &- a_{n-i,j,\sigma(n-i),\sigma(j)} - a_{n-i,n-j,\sigma(n-i),\sigma(n-j)} \left. \right) + \sum_{i \in J_{0,1}^\sigma} \sum_{j \in J_{0,3}^\sigma} \left(a_{i,j,\sigma(n-i),\sigma(j)} + a_{i,n-j,\sigma(n-i),\sigma(n-j)} + \right. \\
 &+ a_{n-i,j,\sigma(i),\sigma(j)} + a_{n-i,n-j,\sigma(i),\sigma(n-j)} - a_{i,j,\sigma(i),\sigma(j)} - a_{i,n-j,\sigma(i),\sigma(n-j)} - \\
 &- a_{n-i,j,\sigma(n-i),\sigma(j)} - a_{n-i,n-j,\sigma(n-i),\sigma(n-j)} \left. \right) + \sum_{j \in J_{0,3}^\sigma} \sum_{i \in J_{0,1}^\sigma} \left(a_{j,i,\sigma(j),\sigma(n-i)} + a_{j,n-i,\sigma(j),\sigma(i)} + \right. \\
 &+ a_{n-j,i,\sigma(n-j),\sigma(n-i)} + a_{n-j,n-i,\sigma(n-j),\sigma(i)} - a_{j,i,\sigma(j),\sigma(i)} - a_{i,n-j,\sigma(i),\sigma(n-j)} - \\
 &- a_{n-i,j,\sigma(n-i),\sigma(j)} - a_{n-i,n-j,\sigma(n-i),\sigma(n-j)} \left. \right) + \sum_{i \in J_{0,1}^\sigma} \left(a_{i,n,\sigma(n-i),\sigma(n)} + a_{n-i,n,\sigma(i),\sigma(n)} + \right. \\
 &+ a_{n,i,\sigma(n),\sigma(n-i)} + a_{n,n-i,\sigma(n),\sigma(i)} - a_{i,n,\sigma(i),\sigma(n)} - \\
 &- a_{n-i,n,\sigma(n-i),\sigma(n)} - a_{n,i,\sigma(n),\sigma(i)} - a_{n,n-i,\sigma(n),\sigma(n-i)} \left. \right) \quad (19)
 \end{aligned}$$

при нечетном n с дополнительной суммой

$$\sum_{i \in J_{0,1}^\sigma} \left(a_{i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sigma(n-i), \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} + a_{n-i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sigma(i), \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, i, \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \sigma(n-i)} + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-i, \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \sigma(i)} - \right. \\ \left. - a_{i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sigma(i), \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} - a_{n-i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sigma(n-i), \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} - a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, i, \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \sigma(i)} - a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-i, \sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor), \sigma(n-i)} \right) \quad (20)$$

при четном n , где $\sigma(i)$, $\sigma(n-i)$, $\sigma(j)$, $\sigma(n-j)$ – попарно различные элементы множества $N_{1,n}$, при этом для индексов суммирования $i \in J_{0,1}^\sigma$, $j \in J_{0,3}^\sigma$ второй и третьей двойных сумм в формуле (19) справедливы неравенства $1 \leq \sigma(n-i) < \sigma(i) \leq n$, $1 \leq \sigma(j) < \sigma(n-j) \leq n$ в силу определения подмножеств $J_{0,1}^\sigma$, $J_{0,3}^\sigma$.

Полученные аддитивные разложения (15), (16) и (19), (20) приращений функционала $f_A(\sigma)$ на парах подстановок σ , σ_ζ и σ , σ_ξ позволяют получить условия их неположительности, что в силу леммы 3 дает возможность сформулировать условия строгой разрешимости квадратичной задачи выбора с оптимальной подстановкой σ_1 .

Слагаемые сумм в формулах (15), (16) и (19), (20), стоящие в скобках, далее называются общими членами.

Условия строгой разрешимости квадратичной задачи выбора

Предлагаемые достаточные условия неположительности приращения функционала $f_A(\sigma)$ на парах подстановок σ , σ_ζ и σ , σ_ξ состоят в том, что матрица $A = (a_{i,j,k,\ell})$ должна являться решением одной из однородных систем линейных неравенств, описание которых приводится в следующих утверждениях.

Предложение 1. Если элементы матрицы $A = (a_{i,j,k,\ell})$ при любом заданном n удовлетворяют неравенствам

$$a_{i,j,r,s} + a_{i,n+1-j,r,q} + a_{n+1-i,j,p,s} + a_{n+1-i,n+1-j,p,q} - \\ - a_{i,j,p,q} - a_{i,n+1-j,p,s} - a_{n+1-i,j,r,p} - a_{n+1-i,n+1-j,r,s} \leq 0, \quad (21)$$

где $1 \leq i, j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ и $p < r, q < s$ – попарно различные элементы множества $N_{1,n}$,

$$a_{i,j,r,q} + a_{i,n+1-j,r,s} + a_{n+1-i,j,p,q} + a_{n+1-i,n+1-j,p,s} - \\ - a_{i,j,p,q} - a_{i,n+1-j,p,s} - a_{n+1-i,j,r,q} - a_{n+1-i,n+1-j,r,s} \leq 0, \quad (22)$$

$$a_{j,i,q,r} + a_{j,n+1-i,q,p} + a_{n+1-j,i,s,r} + a_{n+1-j,n+1-i,s,p} - \\ - a_{j,n+1-i,q,p} - a_{j,n+1-i,q,r} - a_{n+1-j,i,s,p} - a_{n+1-j,n+1-i,s,r} \leq 0, \quad (23)$$

где $1 \leq i \neq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ и $p < r, s < q$ – попарно различные элементы множества $N_{1,n}$, а при нечетном n дополнительно удовлетворяют неравенству

$$a_{i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, k, \ell} + a_{n+1-i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, j, \ell} + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, i, \ell, k} + a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n+1-i, \ell, j} - \\ - a_{i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, j, \ell} - a_{n+1-i, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, k, \ell} - a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, i, k, j} - a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n+1-i, \ell, k} \leq 0, \quad (24)$$

где $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ и $1 \leq j < k, \ell \leq n$ – попарно различные элементы множества $N_{1,n}$, то для любой подстановки $\sigma \in S_n$ выполняется неравенство $\Delta f_A(\sigma, \sigma_\zeta) \leq 0$.

Доказательство. Пусть для определенности n является четным и элементы матрицы $A = (a_{i,j,k,\ell})$ удовлетворяют неравенствам (21)–(23). Очевидно, что неравенство $\Delta f_A(\sigma, \sigma_\zeta) \leq 0$ выполняется, если все три двойные суммы аддитивного разложения приращения $\Delta f_A(\sigma, \sigma_\zeta)$ (15) неположительны, что гарантируется выполнением следующих неравенств для общих членов указанных сумм:

$$a_{i,j,\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} + a_{i,n+1-j,\sigma(n+1-i),\sigma(j)} + a_{n+1-i,j,\sigma(i),\sigma(n+1-j)} + a_{n+1-i,n+1-j,\sigma(i),\sigma(j)} - \\ - a_{i,j,\sigma(i),\sigma(j)} - a_{i,n+1-j,\sigma(i),\sigma(n+1-j)} - a_{n+1-i,j,\sigma(n+1-i),\sigma(j)} - a_{n+1-i,n+1-j,\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} \leq 0 \quad (25)$$

для любых $i, j \in J_{1,1}^\sigma$,

$$\begin{aligned} & a_{i,j,\sigma(n+1-i),\sigma(j)} + a_{i,n+1-j,\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} + a_{n+1-i,j,\sigma(i),\sigma(j)} + \\ & + a_{n+1-i,n+1-j,\sigma(i),\sigma(n+1-j)} - a_{i,j,\sigma(i),\sigma(j)} - a_{i,n+1-j,\sigma(i),\sigma(n+1-j)} - \\ & - a_{n+1-i,j,\sigma(n+1-i),\sigma(j)} - a_{n+1-i,n+1-j,\sigma(n+1-i),\sigma(n+1-j)} \leq 0 \end{aligned} \quad (26)$$

для любых $i \in J_{1,1}^\sigma$, $j \in J_{1,3}^\sigma$,

$$\begin{aligned} & a_{j,i,\sigma(j),\sigma(n+1-i)} + a_{j,n+1-i,\sigma(j),\sigma(i)} + a_{n+1-j,i,\sigma(n+1-j),\sigma(n+1-i)} + \\ & + a_{n+1-j,n+1-i,\sigma(n+1-j),\sigma(i)} - a_{j,n+1-i,\sigma(j),\sigma(n+1-i)} - a_{j,n+1-i,\sigma(j),\sigma(n+1-i)} - \\ & - a_{n+1-j,i,\sigma(n+1-j),\sigma(i)} - a_{n+1-j,n+1-i,\sigma(n+1-j),\sigma(n+1-i)} \leq 0 \end{aligned} \quad (27)$$

для любых $j \in J_{1,3}^\sigma$, $i \in J_{1,1}^\sigma$.

Покажем, что неравенства (21)–(23) обеспечивают неположительность общих членов в левых частях неравенств (25)–(27). Действительно, в силу $i, j \in J_{1,1}^\sigma$ для индексов левой части неравенства (25) имеют место соотношения $1 \leq i, j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $\sigma(i) < \sigma(n+1-i)$, $\sigma(j) < \sigma(n+1-j)$, где $\sigma(i)$, $\sigma(n+1-i)$, $\sigma(j)$, $\sigma(n+1-j)$ – попарно различные элементы множества $N_{1,n}$. Если положить, что $\sigma(i) = p$, $\sigma(j) = q$, $\sigma(n+1-i) = r$, $\sigma(n+1-j) = s$, то левая часть неравенства (25) записывается в виде

$$\begin{aligned} & a_{i,j,r,s} + a_{i,n+1-j,r,q} + a_{n+1-i,j,p,s} + a_{n+1-i,n+1-j,p,q} - \\ & - a_{i,j,p,q} - a_{i,n+1-j,p,s} - a_{n+1-i,j,r,p} - a_{n+1-i,n+1-j,r,s}, \end{aligned}$$

где $1 \leq i \neq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$; $1 \leq p < r \leq n$; $1 \leq q < s \leq n$. Таким образом, неравенство (25) является следствием неравенства (21). В силу $i \in J_{1,1}^\sigma$, $j \in J_{1,3}^\sigma$ имеют место соотношения $1 \leq i \neq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $1 \leq \sigma(i) < \sigma(n+1-i) \leq n$, $1 \leq \sigma(n+1-j) < \sigma(j) \leq n$, что с учетом введенных выше обозначений равносильно выполнению неравенств $1 \leq p < r \leq n$, $1 \leq s < q \leq n$. Значит, неравенство (26) является следствием неравенства (22). Аналогичным образом доказывается, что неравенство (23) гарантирует выполнение неравенства (27). Таким образом, доказана неотрицательность двойных сумм в формуле (15) и, соответственно, выполнение неравенства $\Delta f_A(\sigma, \sigma_\zeta) \leq 0$ при любом n .

Пусть n является нечетным. Тогда, если положить, что $\sigma(i) = j$, $\sigma(n+1-i) = k$, $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) = \ell$, в силу $i \in J_{1,1}^\sigma$ должны выполняться соотношения $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $1 \leq j < k \leq n$, $1 \leq \ell \leq n$, а общий член дополнительной суммы (16) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & a_{i,\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,k,\ell} + a_{n+1-i,\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,j,\ell} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,i,\ell,k} + a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,n+1-i,\ell,j} - \\ & - a_{i,\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,j,\ell} - a_{n+1-i,\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,k,\ell} - a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,i,\ell,j} - a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,n+1-i,\ell,k}. \end{aligned}$$

Следовательно, его неотрицательность гарантируется выполнением неравенства (24) для элементов матрицы $A = (a_{i,j,k,\ell})$. Таким образом, предложение 1 доказано.

Предложение 2. Если элементы матрицы $A = (a_{i,j,k,\ell})$ для любых заданных n удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} & a_{i,j,p,q} + a_{i,n-j,p,s} + a_{n-i,j,r,q} + a_{n-i,n-j,r,s} - \\ & - a_{i,n,r,s} - a_{n-i,n,r,q} - a_{n-i,j,p,s} - a_{n-i,n-j,p,q} \leq 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где $1 \leq i, j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ и $p < r$, $q < s$ – попарно различные элементы множества $N_{1,n}$,

$$\begin{aligned} & a_{i,j,p,s} + a_{i,n-j,p,q} + a_{n-i,j,r,s} + a_{n-i,n-j,r,q} - \\ & - a_{i,j,r,s} - a_{i,n-j,r,q} - a_{n-i,j,p,s} - a_{n-i,n-j,p,q} \leq 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$a_{i,j,r,q} + a_{i,n-j,r,s} + a_{n-i,j,p,q} + a_{n-i,n-j,p,s} - \\ - a_{i,j,r,s} - a_{i,n-j,r,q} - a_{n-i,j,p,s} - a_{n-i,n-j,p,q} \leq 0, \quad (30)$$

где $1 \leq i \neq j \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ и $p < r, s < q$ – попарно различные элементы множества $N_{1,n}$,

$$a_{i,n,p,\ell} + a_{n-i,n,r,\ell} + a_{n,i,\ell,p} + a_{n,n-i,\ell,r} - \\ - a_{i,n,r,\ell} - a_{n-i,n,p,\ell} - a_{n,i,\ell,r} - a_{n,n-i,\ell,p} \leq 0, \quad (31)$$

где $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ и $p < r, \ell$ – попарно различные элементы множества $N_{1,n}$, а при четном n дополнительно удовлетворяют неравенству

$$a_{i,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,p,t} + a_{n-i,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,r,t} + a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,i,t,p} + a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,n-i,t,r} - \\ - a_{i,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,r,t} - a_{n-i,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,p,t} - a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,i,t,r} - a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,n-i,t,p} \leq 0, \quad (32)$$

где $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ и $p < r, t$ – попарно различные элементы множества $N_{1,n}$, то для любой подстановки $\sigma \in S_n$ выполняется неравенство $\Delta f_A(\sigma, \sigma_\xi) \leq 0$.

Доказательство. Очевидно, что приращение $\Delta f_A(\sigma, \sigma_\xi)$ неотрицательно, если общие члены сумм в формулах (19), (20) неотрицательны, т. е. справедливы неравенства

$$a_{i,j,\sigma(n-i),\sigma(n-j)} + a_{i,n-j,\sigma(n-i),\sigma(j)} + a_{n-i,j,\sigma(i),\sigma(n-j)} + a_{n-i,n-j,\sigma(i),\sigma(j)} - \\ - a_{i,j,\sigma(i),\sigma(j)} - a_{i,n-j,\sigma(i),\sigma(n-j)} - a_{n-i,j,\sigma(n-i),\sigma(j)} - a_{n-i,n-j,\sigma(n-i),\sigma(n-j)} \leq 0$$

для любых $i, j \in J_{0,1}^\sigma$,

$$a_{i,j,\sigma(n-i),\sigma(j)} + a_{i,n-j,\sigma(n-i),\sigma(n-j)} + a_{n-i,j,\sigma(i),\sigma(j)} + a_{n-i,n-j,\sigma(i),\sigma(n-j)} - \\ - a_{i,j,\sigma(n-i),\sigma(j)} - a_{i,n-j,\sigma(n-i),\sigma(n-j)} - a_{n-i,j,\sigma(i),\sigma(j)} - a_{n-i,n-j,\sigma(i),\sigma(n-j)} \leq 0,$$

$$a_{j,i,\sigma(j),\sigma(n-i)} + a_{j,n-i,\sigma(j),\sigma(i)} + a_{n-j,i,\sigma(n-j),\sigma(n-i)} + a_{n-j,n-i,\sigma(n-j),\sigma(i)} - \\ - a_{j,i,\sigma(j),\sigma(i)} - a_{j,n-i,\sigma(j),\sigma(n-i)} - a_{n-j,i,\sigma(n-j),\sigma(i)} - a_{n-j,n-i,\sigma(n-j),\sigma(n-i)} \leq 0$$

для любых $i \in J_{0,1}^\sigma, j \in J_{0,3}^\sigma$,

$$a_{i,n,\sigma(n-i),\sigma(n)} + a_{n-i,n,\sigma(i),\sigma(n)} + a_{n,i,\sigma(n),\sigma(n-i)} + a_{n,n-i,\sigma(n),\sigma(i)} - \\ - a_{i,n,\sigma(i),\sigma(n)} - a_{n-i,n,\sigma(n-i),\sigma(n)} - a_{n,i,\sigma(n),\sigma(i)} - a_{n,n-i,\sigma(n),\sigma(n-i)} \leq 0$$

для любых $i \in J_{0,1}^\sigma$ при любом n и дополнительно неравенство

$$a_{i,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,\sigma(n-i),\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)} + a_{n-i,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,\sigma(i),\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)} + a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,i,\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right),\sigma(n-i)} + a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,n-i,\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right),\sigma(i)} - \\ - a_{i,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,\sigma(i),\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)} - a_{n-i,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,\sigma(n-i),\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)} - a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,i,\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right),\sigma(i)} - a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,n-i,\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right),\sigma(n-i)} \leq 0$$

для любых $i \in J_{0,1}^\sigma$ при четном n .

Полагая, что $p = \sigma(n-i), q = \sigma(n-j), r = \sigma(i), s = \sigma(j), t = \sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$, и используя свойства подмножеств $J_{0,1}^\sigma, J_{0,3}^\sigma$, по аналогии можно доказать, что приведенные неравенства являются следствиями неравенств (28)–(32) соответственно.

Из предложений 1 и 2 напрямую вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Если элементы матрицы $A = (a_{i,j,k,\ell})$ удовлетворяют неравенствам (21)–(23), (28)–(31) и дополнительно неравенству (24) при нечетном n и неравенству (32) при четном n , то функционал $f_A(\sigma)$ достигает минимума на подстановке σ_1 .

Теорема 1 является обобщением полученных ранее условий строгой разрешимости задач минимизации квадратичной и билинейной форм на множестве подстановок [8], а также квадратичной задачи назначений [19]. Представленные в данной работе условия строгой разрешимости квадратичной задачи выбора совместно с условиями достижения минимума функционала $f_A(\sigma)$ на подстановке $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \dots, n, \dots, 6, 4, 2 \rangle$, приведенными в первой части статьи [5], являются обобщением классического результата, полученного Г. Харди, Дж. Литлвудом и Г. Полия, а именно теоремы о перестановке трех систем.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе продолжено исследование строго разрешимых случаев оптимизационных задач на подстановках. В частности, для квадратичной задачи выбора в виде системы неравенств описаны условия, обеспечивающие достижение минимума ее функционала на одной из подстановок, приведенных в теореме о перестановке трех систем.

Библиографические ссылки

1. Koopmans TC, Beckmann M. Assignment problems and the location of economic activities. *Econometrica*. 1957;25(1):53–76. DOI: 10.2307/1907742.
2. Hardy GH, Littlewood JE, Pólya G. The maximum of a certain bilinear form. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1926;25:265–282. DOI: 10.1112/plms/s2-25.1.265.
3. Hardy GH, Littlewood JE, Pólya G. *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press; 1934. XII, 314 p.
4. Харди ГХ, Литлвуд ДжИ, Полия Г. *Неравенства*. Левин ВИ, переводчик. Москва: Государственное издательство иностранной литературы; 1948. 456 с.
5. Демиденко ВМ. Условия эффективной разрешимости квадратичной задачи выбора. Часть 1. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2024;1:45–58. EDN: TEYTMМ.
6. Бурков ВН, Рубинштейн МИ, Соколов ВБ. Некоторые задачи оптимального размещения информации в памяти большого объема. *Автоматика и телемеханика*. 1969;9:83–91.
7. Тимофеев ББ, Литвинов ВА. К вопросу об организации размещения массивов информации в памяти на магнитных лентах. *Кибернетика*. 1969;4:56–61.
8. Метельский НН. Об экстремальных значениях квадратичной формы на симметрической группе. *Весті Академії наук БССР. Серія фізико-математичних наук*. 1972;6:107–110.
9. Pratt VR. An $N \log N$ algorithm to distribute N records optimally in a sequential access file. In: Miller RE, Thatcher JW, editors. *Complexity of computer computations. Proceedings of the symposium; 1972 March 20–22; New York, USA*. New York: Plenum Press; 1972. p. 111–118 (The IBM research symposia series).
10. Vickson RG, Lu X. Optimal product and server locations in one-dimensional storage racks. *European Journal of Operational Research*. 1998;105(1):18–28. DOI: 10.1016/S0377-2217(97)00023-4.
11. Burkard RE, Çela E, Rote G, Woeginger GJ. The quadratic assignment problem with a monotone anti-Monge and a symmetric Toeplitz matrix: easy and hard cases. *Mathematical Programming*. 1998;82:125–158. DOI: 10.1007/BF01585868.
12. Woeginger GJ. Computational problems without computation. *Nieuw Archief voor Wiskunde*. 2003;4(2):140–147.
13. Woeginger GJ. Exact algorithms for NP-hard problems: a survey. In: Jünger M, Reinelt G, Rinaldi G, editors. *Combinatorial optimization – eureka, you shrink! Revised papers of the 5th International workshop dedicated to Jack Edmonds; 2001 March 5–9; Aussois, France*. Berlin: Springer; 2003. p. 185–207 (Goos G, Hartmanis J, van Leeuwen J, editors. Lecture notes in computer science; volume 2570). DOI: 10.1007/3-540-36478-1_17.
14. Demidenko VM, Finke G, Gordon VS. Well solvable cases of the quadratic assignment problem with monotone and bimonotone matrices. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*. 2006;5(2):167–187. DOI: 10.1007/s10852-005-9013-2.
15. Демиденко ВМ. Квадратичная задача о назначениях с аддитивно монотонными матрицами и неполными матрицами анти-Монжа: условия эффективной разрешимости. *Дискретная математика*. 2007;19(1):105–132. EDN: HZFCZF.
16. Demidenko VM, Dolgui A. Efficiently solvable cases of quadratic assignment problem with generalized monotonic and incomplete anti-Monge matrices. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007;43(1):112–125. DOI: 10.1007/s10559-007-0030-1.
17. Çela E. Assignment problems. In: Pardalos PM, Resende MGC, editors. *Handbook of applied optimization*. Oxford: Oxford University Press; 2002. p. 661–678.
18. Burkard R, Dell’Amico M, Martello S. *Assignment problems*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2009. XX, 382 p.
19. Демиденко ВМ. *Эффективно разрешимые случаи и полиэдральные аспекты оптимизационных задач на подстановках* [диссертация]. Минск: [б. и.]; 2011. 315 с.

УДК 519.624.1, 517.927.2

РАЗНОСТНАЯ ТРАКТОВКА НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРИЗОВАННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Д. М. ДОВЛЕТОВ¹⁾

¹⁾Независимый исследователь, г. Ашхабад, Туркменистан

Аннотация. Изучена нелокальная начальная задача с соответствующей конечно-разностной трактовкой для линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с параметром при производной. Нелокальное начальное условие задано в терминах линейной многоточечной комбинации. На равномерной сетке предложена разностная схема с экспоненциальной подгонкой. Выявлены требования на расположение носителей нелокальных данных в многоточечном условии, на значения соответствующих коэффициентов и на интервал изменения параметра, при которых доказаны как равномерная по параметру устойчивость классического и разностного решений, так и равномерная по параметру сходимость разностного решения к классическому решению. Выявление и доказательство таких условий, которые обеспечивают равномерную по параметру аппроксимацию классического решения нелокальной начальной задачи решением экспоненциально-подгоночной разностной схемы, определяют новизну настоящей работы.

Ключевые слова: нелокальная начальная задача; равномерная устойчивость; равномерная сходимость; многоточечное условие; экспоненциальная подгонка.

Образец цитирования:

Довлетов ДМ. Разностная трактовка нелокальной задачи с параметризованным дифференциальным уравнением первого порядка. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;2:89–104. EDN: FXGPSJ

For citation:

Dovletov DM. A finite-difference interpretation of a nonlocal problem with a parameterised first-order differential equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;2:89–104. Russian. EDN: FXGPSJ

Автор:

Довлет Мейданович Довлетов – кандидат физико-математических наук; независимый исследователь.

Author:

Dovlet M. Dovletov, PhD (physics and mathematics); independent researcher.
dovlet.dovletov@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-0834-2163>

A FINITE-DIFFERENCE INTERPRETATION OF A NONLOCAL PROBLEM WITH A PARAMETERISED FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

D. M. DOVLETOV^a

^aIndependent researcher, Ashgabat, Turkmenistan

Abstract. In this work the nonlocal initial value problem and corresponding finite-difference interpretation for the first-order linear ordinary differential equation with a parameter at the derivative is studied. The nonlocal initial value condition is given by terms of multipoint linear combination. The difference scheme with exponential fit is proposed on a uniform mesh. The article identifies the requirements on the location of nonlocal data carriers in the multipoint condition, on the values of corresponding coefficients and on the parameter variation interval, under which a uniform on parameter stability of classical and difference solutions, as well as a uniform on parameter convergence of difference solution to classical solution are proved. The identification and proof of such conditions, which provide a uniform on parameter approximation of the nonlocal initial value problem classical solution by the solution of exponentially fitted difference scheme, define the novelty of the current work.

Keywords: nonlocal initial value problem; uniform stability; uniform convergence; multipoint condition; exponentially fitted parameter.

Введение

В данном кратком обзоре не затрагиваются работы, имеющие отношение к нелокальным задачам с нелинейными дифференциальными уравнениями и с уравнениями в частных производных.

В настоящей статье изучаются дифференциальная и разностная трактовки нелокальной начальной задачи для уравнения $\varepsilon u'(x) + a(x)u(x) = f(x)$, $x > 0$, с параметром $\varepsilon > 0$ при нелокальном условии $u(0) - \sum_{k=1}^m \alpha_k u(\zeta_k) = \varphi$. Решение дифференциальной задачи рассматривается из класса функций $C^1(0, +\infty) \cap C[0, +\infty)$. Конечно-разностная схема выписывается на равномерной сетке с шагом $h > 0$ и содержит параметр экспоненциальной подгонки. Определяются и доказываются условия равномерной по параметру ε устойчивости как классического решения $u(x)$ дифференциальной задачи, так и решения u_i соответствующей разностной задачи, на основании которых доказывается равномерная по параметру ε сходимость разностного решения к классическому решению.

Исследования различных постановок нелокальных граничных задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в работах [1–6] наводят на вопросы о том, какие факторы будут влиять на однозначную разрешимость нелокальной задачи при наличии параметра в уравнении, при каких условиях решение будет обладать свойством равномерной по параметру устойчивости, какая разностная схема обеспечит равномерное по параметру дискретно-устойчивое решение и будет ли иметь место соответствующая равномерная по параметру сходимость разностного решения к дифференциальному решению. В этом аспекте, в частности, некоторые постановки нелокальных граничных задач для линейных уравнений второго порядка с параметром при старшей производной изучались в работах [4; 7–11], а нелокальная начальная задача для линейного уравнения первого порядка с параметром при производной рассматривалась в статье [12]. В публикациях [11; 12] имеется соответствующий тематике библиографический обзор. Уместно будет добавить, что в книге [13] содержится перечень работ, касающихся различных численных методов, включая используемый в настоящей статье метод экспоненциальной подгонки [13, с. 20]. В завершение данного краткого обзора стоит отметить, что результаты работ [1] и [5], полученные при изучении нелокальной краевой задачи первого рода для уравнения Штурма – Лиувилля, актуально использовались в статьях [14] и [15] соответственно при изучении однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи для уравнения Пуассона в прямоугольнике.

Все упомянутые исследования так или иначе нацелили нас на изучение описанной выше формулировки нелокальной начальной задачи. Для такой задачи в рамках настоящей работы будут выясняться требования на расположение носителей нелокальных данных ζ_k в задаваемом многоточечном начальном условии, на значения соответствующих им коэффициентов α_k и на интервал изменения параметра ε , при которых и будет доказываться равномерная по параметру устойчивость классического и разностного решений, а также равномерная по параметру сходимость решения разностной схемы к решению дифференциальной задачи.

Постановка задачи и общие результаты

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} Lu(x) \equiv \varepsilon u'(x) + a(x)u(x) = f(x), & x > 0, \\ \ell[u] \equiv u(0) - \sum_{k=1}^m \alpha_k u(\zeta_k) = \varphi, \end{cases} \quad (1)$$

в которой $\varepsilon > 0$, $a(x) \in C[0, +\infty)$, $f(x) \in C[0, +\infty)$, $a(x) \geq a > 0$, $x \in [0, +\infty)$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\zeta_k \in \mathbb{R}$, $0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_m < X$, $k = 1, \dots, m$, $X \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathbb{R}$. Решение задачи (1) подразумевается классическим, т. е. $u(x) \in C^1(0, +\infty) \cap C[0, +\infty)$. На равномерной сетке с шагом $h > 0$ задача (1) интерпретируется разностной схемой

$$\begin{cases} L^h u_i \equiv \varepsilon \sigma_i(\rho) D_+ u_i + a_i u_i = f_i, & i \geq 0, \\ \ell^h[u_i] \equiv u_0 - \sum_{k=1}^m \alpha_k [\theta u_{i_{\zeta_k}} + (1 - \theta) u_{i_{\zeta_k} + 1}] = \varphi, \end{cases} \quad (2)$$

в которой $D_+ u_i \equiv \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$, $a_i = a(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = ih$, подгоночный параметр [13, с. 20] $\sigma_i(\rho) = \rho a_i [1 - \exp(-\rho a_i)]^{-1}$, $i \geq 0$, $\rho = \frac{h}{\varepsilon}$, $0 \leq \theta \leq 1$, а каждый номер i_{ζ_k} задается неравенством $i_{\zeta_k} h \leq \zeta_k < (i_{\zeta_k} + 1)h$, $k = 1, \dots, m$, при этом шаг h удовлетворяет условию

$$h < \Delta, \quad \Delta = 2^{-1} \min \{ \zeta_1, \zeta_k - \zeta_{k-1}, k = 2, \dots, m, X - \zeta_m \}. \quad (3)$$

Всюду далее будем использовать обозначение $\omega(x)$ для функции

$$\omega(x) = \exp \left(-\varepsilon^{-1} \int_0^x a(t) dt \right), \quad 0 < x < +\infty. \quad (4)$$

С учетом формулы (4) и соответствующего обозначения в задаче (1) имеем

$$\ell[\omega] = \omega(0) - \sum_{k=1}^m \alpha_k \omega(\zeta_k). \quad (5)$$

Лемма 1. Пусть при некотором $\delta > 0$ выполняется условие $|\ell[\omega]| \geq \delta$ для всех $\varepsilon \in E$, где $E = \{\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ или $E = \{\varepsilon, 0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}\}$ при фиксированном значении $\tilde{\varepsilon} > 0$. Тогда для классического решения задачи (1) справедлива равномерная по параметру ε оценка устойчивости

$$|u(x)| \leq C \left(|\varphi| + \max_{0 \leq t \leq X} |f(t)| \right), \quad 0 \leq x \leq X, \quad (6)$$

в которой константа C не зависит от x и ε .

Доказательство. Исходя из работы [12, р. 86], решение $u(x)$ задачи (1) существует, причем $u(x) = v(x) + w(x)$, где $v(x)$ и $w(x)$ являются решениями задач

$$Lv(x) = f(x), \quad x > 0, \quad v(0) = 0, \quad (7)$$

$$Lw(x) = 0, \quad x > 0, \quad \ell[w] = \varphi - \ell[v], \quad (8)$$

соответственно. Для $v(x)$ и $w(x)$ имеют место следующие оценки и формулы [12, р. 88]:

$$|v(x)| \leq a^{-1} \max_{0 \leq t \leq X} |f(t)|, \quad 0 \leq x \leq X, \quad (9)$$

$$|\ell[v]| \leq a^{-1} \left(\sum_{k=1}^m |\alpha_k| \right) \max_{0 \leq x \leq X} |f(x)|, \quad (10)$$

$$w(0) = \ell[w]^{-1} (\varphi - \ell[v]), \quad (11)$$

$$w(x) = w(0) \omega(x), \quad 0 \leq x \leq X. \quad (12)$$

Тогда, используя формулы (9)–(12), с учетом монотонного убывания функции $\omega(x)$ получаем оценку

$$|w(x)| \leq \delta^{-1} \left(|\varphi| + a^{-1} \left(\sum_{k=1}^m |\alpha_k| \right) \max_{0 \leq t \leq X} |f(t)| \right), \quad 0 \leq x \leq X. \quad (13)$$

Применяя оценки (9) и (13) в неравенстве треугольника $|u(x)| \leq |v(x)| + |w(x)|$, убеждаемся в справедливости оценки устойчивости (6) с не зависящей от x и ε константой C . Лемма 1 доказана.

Всюду далее под ω_i подразумевается сеточная функция, определяемая формулой

$$\omega_i = \exp \left(-\rho \sum_{j=0}^{i-1} a(x_j) \right), \quad i > 0, \quad \omega_0 = 1. \quad (14)$$

С учетом формулы (14) и обозначения для разностного аналога оператора нелокального условия в задаче (2) имеем

$$\ell^h[\omega_i] = \omega_0 - \sum_{k=1}^m \alpha_k \left[\theta \omega_{i_{\zeta_k}} + (1 - \theta) \omega_{i_{\zeta_k}+1} \right]. \quad (15)$$

Лемма 2. Пусть при некоторых $\delta > 0$ и $\tilde{h} > 0$ выполняется условие $|\ell^h[\omega_i]| \geq \delta$ для всех $h \leq \tilde{h}$ и $\varepsilon \in E$, где $E = \{\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ или $E = \{\varepsilon, 0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}\}$ при фиксированном значении $\tilde{\varepsilon} > 0$. Тогда для решения разностной задачи (2) справедлива равномерная по параметру ε оценка дискретной устойчивости

$$|u_i| \leq C \left(|\varphi| + \max_{0 \leq jh \leq X} |f(x_j)| \right), \quad 0 \leq ih \leq X, \quad (16)$$

с не зависящей от i , h и ε константой C .

Доказательство. Рассмотрим две разностные задачи:

$$L^h v_i = f(x_i), \quad i \geq 0, \quad v_0 = 0, \quad (17)$$

$$L^h w_i = 0, \quad i \geq 0, \quad \ell^h[w_i] = \varphi - \ell^h[v_i]. \quad (18)$$

Решение задачи (17) есть не что иное, как решение алгебраической системы уравнений

$$v_0 = 0, \quad v_1 = F_0, \quad v_{i+1} + s_i v_i = F_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

где $s_i = \exp(-\rho a_i)$, $F_i = [1 - \exp(-\rho a_i)] f_i a_i^{-1}$, $i = 0, \dots, n-1$, $n = \left\lfloor \frac{X}{h} \right\rfloor$, определяемое из этой системы единственным образом. Однозначно разрешимой является и задача (18). В самом деле, используя метод математической индукции, несложно убедиться в том, что решение разностного уравнения $L^h w_i = 0$, $i \geq 0$, имеет вид

$$w_i = w_0 \omega_i, \quad i \geq 0. \quad (19)$$

Поскольку $\ell^h[\omega_i] \neq 0$, то из задачи (18) с учетом формулы (19) получаем формулу

$$w_0 = \ell^h[\omega_i]^{-1} (\varphi - \ell^h[v_i]), \quad (20)$$

единственным образом определяющую w_0 , а значит, и решение w_i задачи (18). Учитывая вышеприведенные рассуждения и тот факт, что сеточная функция $u_i = v_i + w_i$, $i \geq 0$, является решением разностной задачи (2), приходим к выводу, что и разностная задача (2) будет однозначно разрешимой.

Для решения задачи (17) справедлива равномерная по параметру $\varepsilon > 0$ оценка устойчивости (см., например, [13, с. 26])

$$|v_i| \leq a^{-1} \max_{0 \leq jh \leq X} |f(x_j)|, \quad 0 \leq ih \leq X, \quad (21)$$

из которой следует, что

$$|\ell^h[v_i]| \leq a^{-1} \left(\sum_{k=1}^m |\alpha_k| \right) \max_{0 \leq jh \leq X} |f(x_j)|. \quad (22)$$

Так как при $i \geq 0$ дискретная функция ω_i является положительной и к тому же монотонно убывающей, то, используя формулы (19)–(22), получаем оценку

$$|w_i| \leq \delta^{-1} \left(|\phi| + a^{-1} \left(\sum_{k=1}^m |\alpha_k| \right) \max_{0 \leq jh \leq X} |f(x_j)| \right), \quad 0 \leq ih \leq X, \quad (23)$$

не зависящую от значений $\varepsilon \in E$. Наконец, из неравенства $|u_i| \leq |v_i| + |w_i|$, $i \geq 0$, с учетом оценок (21) и (23) следует равномерная оценка дискретной устойчивости (16) с не зависящей от i , h и ε константой C . Лемма 2 доказана.

Всюду далее при доказательстве нижеследующей теоремы с применением метода двух сеток будут использоваться обозначения сеточных функций:

• u_i^h, v_i^h, w_i^h – решения задач (2), (17), (18) на разностной сетке с шагом h (и значение в сеточном узле с номером i) соответственно;

• $u_{2i}^{\frac{h}{2}}, v_{2i}^{\frac{h}{2}}, w_{2i}^{\frac{h}{2}}$ – решения задач (2), (17), (18) на разностной сетке с шагом $\frac{h}{2}$ (и значение в сеточном узле с номером $2i$) соответственно.

Теорема 1. Пусть $a(x) \in C^1[0, +\infty)$, $f(x) \in C^1[0, +\infty)$ и при $\delta > 0$ и $\tilde{h} > 0$ выполняются оба неравенства $|\ell[\omega]| \geq \delta$ и $|\ell^h[\omega_i]| \geq \delta$ для всех $h \leq \tilde{h}$ и $\varepsilon \in E$, где $E = \{\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ или $E = \{\varepsilon, 0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}\}$ при фиксированном значении $\tilde{\varepsilon} > 0$. Тогда решение u_i^h задачи (2) равномерно по параметру ε сходится к решению $u(x)$ задачи (1) так, что при $h \rightarrow 0$ справедлива оценка

$$|u(ih) - u_i^h| \leq Ch, \quad 0 \leq ih \leq X, \quad (24)$$

с не зависящей от i , h и ε константой C .

Доказательство. Запишем решение задачи (1) в виде $u(x) = v(x) + w(x)$, где $v(x)$ – решение задачи (7), а $w(x)$ – решение задачи (8). В свою очередь, решение разностной задачи (2) запишем в виде $u_i^h = v_i^h + w_i^h$, где v_i^h – решение задачи (17), а w_i^h – решение задачи (18). Известно [13, с. 22], что разностное решение задачи (17) равномерно по параметру $\varepsilon \in E$ сходится к решению задачи Коши (7) так, что при $h \rightarrow 0$ имеет место оценка

$$|v(x_i^h) - v_i^h| \leq Ch, \quad 0 \leq ih \leq X, \quad (25)$$

с не зависящей от i , h и ε константой C . Так как в силу неравенства треугольника

$$|u(x_i^h) - u_i^h| \leq |v(x_i^h) - v_i^h| + |w(x_i^h) - w_i^h|,$$

то с учетом оценки (25) для доказательства оценки (24) достаточно будет установить равномерную по параметру ε сходимости w_i^h к $w(x)$. Для этого прежде всего докажем оценку

$$|w(x_i^h) - w_i^h| \leq C_\varepsilon h, \quad (26)$$

в которой константа C_ε не зависит от i и h . Для доказательства оценки (26) воспользуемся оценкой [13, с. 29]

$$|v'(x)| \leq C \left(1 + \varepsilon^{-1} \exp\left(-\frac{ax}{\varepsilon}\right) \right), \quad 0 \leq x \leq X,$$

из которой при любом фиксированном значении $x_0 \in (0, X)$, в том числе при $x_0 = \frac{1}{2}\zeta_1$, вытекает оценка

$$|v'(x)| \leq C, \quad x_0 \leq x \leq X, \quad (27)$$

с не зависящей от x и ε константой C . Выбирая $x_0 = \frac{1}{2}\zeta_1$, а затем учитывая оценку (27) при разложении в ряд Тейлора функции $v(x)$, получаем соотношения

$$v(\zeta_k) - v_{i_{\zeta_k}}^h = v(i_{\zeta_k} h) - v_{i_{\zeta_k}}^h + O(h), \quad v(\zeta_k) - v_{i_{\zeta_k}+1}^h = v((i_{\zeta_k} + 1)h) - v_{i_{\zeta_k}+1}^h + O(h),$$

использование которых в совокупности с оценкой (25) приводит к оценке

$$\ell[v] - \ell^h[v_i^h] = O(h). \quad (28)$$

Из явного представления решения нелокальной задачи (8) с применением неравенства

$$t \exp(-t) \leq C(\theta) \exp(-\theta t), \quad t \in [0, +\infty), \quad \theta \in (0, 1),$$

получаем, что

$$|w'(x)| \leq C(\theta) a(x) \frac{|w(0)|}{\int_0^x a(t) dt} \exp\left(-\varepsilon^{-1} \theta \int_0^x a(t) dt\right), \quad 0 \leq x \leq X. \quad (29)$$

Отсюда, учитывая формулы (4) и (8)–(10), в силу леммы 1 получаем оценку

$$|w(0)| \leq C\left(|\varphi| + \max_{0 \leq x \leq X} |f(x)|\right),$$

в которой константа C не зависит от x и ε . При любом фиксированном $x_0 \in (0, X)$ эта оценка вместе с неравенством (29) приводит к оценке

$$|w'(x)| \leq C, \quad x_0 \leq x \leq X. \quad (30)$$

Выбирая $x_0 = \frac{1}{2}\zeta_1$ и используя оценку (30) при разложении в ряд Тейлора функции $w(x)$, получаем соотношение

$$\ell[w] - \ell^h[w(x_i^h)] = O(h), \quad (31)$$

в котором $O(h)$ не зависит от ε . Поскольку

$$\ell^h[w(x_i^h) - w_i^h] = \ell^h[w(x_i^h)] - (\varphi - \ell^h[v_i^h]) = -(\ell[w] - \ell^h[w(x_i^h)]) - (\ell[v] - \ell^h[v_i^h]),$$

то с учетом формул (28) и (31) получаем соотношение

$$\ell^h[w(x_i^h) - w_i^h] = O(h). \quad (32)$$

Принимая во внимание погрешность аппроксимации для L^h , имеем

$$L^h(w(x_i^h) - w_i^h) = O_\varepsilon(h), \quad \ell^h[w(x_i^h) - w_i^h] = O(h). \quad (33)$$

Интерпретируя сеточную функцию $W_i^h = w(x_i^h) - w_i^h$ как решение разностной задачи (33) и применяя доказанную оценку (16), получаем желаемую оценку (26).

Теперь применим метод двух сеток, чтобы доказать равномерную по параметру ε оценку

$$|w(x_i^h) - w_i^h| \leq Ch. \quad (34)$$

Известно [13, с. 23], что оценка

$$\left|L^h\left(w_{2i}^{\frac{h}{2}} - w_i^h\right)\right| \leq Ch \quad (35)$$

справедлива при не зависящей от i, h и ε константе C . Чтобы убедиться в справедливости оценки (34), достаточно доказать оценку

$$\left|\ell^h\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}} - w_i^h\right]\right| \leq Ch, \quad (36)$$

в которой константа C не зависит от i, h и ε . В самом деле, если имеет место оценка (36), то, учитывая оценку (35) и применяя оценку (16) к сеточной функции $\bar{W}_i^h = w_{2i}^{\frac{h}{2}} - w_i^h$, получаем желаемую оценку (34). Для доказательства оценки (36), используя равенство

$$\ell^h\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right] = \ell^2\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right] - \left(\ell^2\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right] - \ell^h\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right]\right) = \varphi - \ell^2\left[v_{2i}^{\frac{h}{2}}\right] - \left(\ell^2\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right] - \ell^h\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right]\right),$$

получаем соотношение

$$\ell^h\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}} - w_i^h\right] = -\left(\ell^2\left[v_{2i}^{\frac{h}{2}}\right] - \ell^h[v_i^h]\right) - \left(\ell^2\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right] - \ell^h\left[w_{2i}^{\frac{h}{2}}\right]\right). \quad (37)$$

Так как

$$v_{2i}^{\frac{h}{2}} - v_i^h = v_{2i}^{\frac{h}{2}} - v\left(2i\frac{h}{2}\right) + v(ih) - v_i^h,$$

то с учетом оценки (25) имеем соотношение

$$v_{2i}^{\frac{h}{2}} - v_i^h = O(h) + O\left(\frac{h}{2}\right). \quad (38)$$

Таким же образом устанавливается и тот факт, что для любой точки $\zeta \in \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$

$$v_{2i_\zeta+1}^{\frac{h}{2}} - v_{i_\zeta}^h = O(h) + O\left(\frac{h}{2}\right), \quad (39)$$

$$v_{2i_\zeta-1}^{\frac{h}{2}} - v_{i_\zeta}^h = O(h) + O\left(\frac{h}{2}\right). \quad (40)$$

Так, например, соотношение (39) получается при использовании оценок (25) и (27) с выбором $x_0 = \frac{1}{2}\zeta_1$ при разложении функции $v(x)$ в ряд Тейлора:

$$v_{2i_\zeta+1}^{\frac{h}{2}} - v_{i_\zeta}^h = v\left(i_\zeta^h h\right) - v_{i_\zeta}^h + v_{2i_\zeta+1}^{\frac{h}{2}} - v\left(2i_\zeta^h \frac{h}{2}\right) = O(h) + O\left(\frac{h}{2}\right), \quad i_\zeta^h \equiv i_\zeta.$$

Аналогично устанавливается и соотношение (40). Далее с учетом соотношений (38)–(40) имеем

$$\ell^{\frac{h}{2}} \left[v_{2i}^{\frac{h}{2}} \right] - \ell^h [v_i^h] = O(h). \quad (41)$$

С другой стороны, поскольку

$$\ell^{\frac{h}{2}} \left[w_{2i}^{\frac{h}{2}} \right] - \ell^h [w_i^h] = - \left(\ell[w] - \ell^{\frac{h}{2}} \left[w_{2i}^{\frac{h}{2}} \right] \right) + \left(\ell[w] - \ell^h [w_i^h] \right),$$

то, учитывая соотношения (31) и (32), получаем

$$\ell^{\frac{h}{2}} \left[w_{2i}^{\frac{h}{2}} \right] - \ell^h [w_i^h] = O(h). \quad (42)$$

Тогда с учетом формул (41) и (42) оценка (36) вытекает из соотношения (37). Установленные оценки (35) и (36) позволяют применить оценку (16) к сеточной функции $\bar{W}_i^h = w_{2i}^{\frac{h}{2}} - w_i^h$, интерпретируемой как решение разностной задачи

$$L^h \bar{W}_i^h = O(h), \quad \ell^h [\bar{W}_i^h] = O(h),$$

и в итоге получить оценку

$$\left| w_{2i}^{\frac{h}{2}} - w_i^h \right| \leq Ch, \quad (43)$$

в которой константа C не зависит от i , h и ε . В свою очередь, из оценки (26) следует, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} |w(ih) - w_i^h| = 0. \quad (44)$$

Наконец, оценка (43) и предельное равенство (44) позволяют утверждать (см. теорему 5.1, приведенную в работе [13, с. 21]), что равномерная по параметру ε оценка (34) установлена. Окончательно из оценок (25) и (34) следует оценка равномерной сходимости (24). Теорема 1 доказана.

Отметим, что в теореме 1, как и в леммах 1 и 2, никакие ограничения на знак или величины коэффициентов α_k , $k = 1, \dots, m$, не накладываются.

Нелокальное условие с коэффициентами одного знака

Рассмотрим случай, когда задача (1) и ее разностная интерпретация (2) имеют в нелокальном начальном условии все коэффициенты α_k , $k = 1, \dots, m$, одного знака. В работе [12, р. 85–86] дано определение критического значения параметра, которое будет использоваться и в настоящей статье. Для удобства приведем это определение.

Определение. Значение ε^* параметра ε , $\varepsilon > 0$, будем называть критическим, если при $\varepsilon = \varepsilon^*$ нелокальная начальная задача (1) не имеет единственное классическое решение.

Известно [12, р. 86–87], что если задача (1) имеет в нелокальном начальном условии коэффициенты только одного знака и при этом $\sum_{k=1}^m \alpha_k \leq 1$, то критического значения параметра нет и при каждом $\varepsilon \in (0, +\infty)$ задача (1) имеет единственное классическое решение, если же $\sum_{k=1}^m \alpha_k > 1$, то критическое значение параметра непременно есть и притом в единственном числе.

Теорема 2. Пусть имеются коэффициенты α_k , $k = 1, \dots, m$, одного знака и выполняется одно из следующих условий.

$$1. -\infty < \sum_{k=1}^m \alpha_k < 1, \varepsilon > 0.$$

$$2. \sum_{k=1}^m \alpha_k \geq 1, 0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon} = a\zeta_1 \cdot 2^{-1} \left[\ln \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k \right) - \ln(1 - \delta) \right]^{-1}, 0 < \delta < 1.$$

Тогда решения задач (1) и (2) являются равномерно устойчивыми по параметру ε . Если к тому же $a(x) \in C^1[0, +\infty)$ и $f(x) \in C^1[0, +\infty)$, то разностное решение задачи (2) равномерно по параметру ε сходится к классическому решению задачи (1).

Доказательство. Введем обозначение $\alpha = \sum_{k=1}^m \alpha_k$.

1. Пусть выполнено условие 1. Так как $-\infty < \alpha < 1$, то, учитывая формулы (4) и (5), имеем

$$\ell[\omega] \geq \begin{cases} 1 > 0 & \text{при } -\infty < \alpha < 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \\ 1 - \alpha > 0 & \text{при } 0 < \alpha < 1 \quad \forall \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (45)$$

С учетом соотношения (45) в силу леммы 1 для решения задачи (1) будет справедлива равномерная по параметру $\varepsilon > 0$ оценка устойчивости (6). Далее в силу порядка расположения носителей нелокальных данных и условия (3) получаем

$$0 < i_{\zeta_1} < i_{\zeta_1} + 1 < \dots < i_{\zeta_m} < i_{\zeta_m} + 1 < X.$$

Исходя из этой упорядоченности и формулы (15), будет иметь место соотношение

$$\ell^h[\omega_i] \geq \begin{cases} 1 > 0 & \text{при } -\infty < \alpha < 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \\ 1 - \alpha > 0 & \text{при } 0 < \alpha < 1 \quad \forall \varepsilon > 0, \end{cases} \quad (46)$$

поскольку в силу формулы (14) сеточная функция ω_i является положительной и строго убывающей, т. е.

$$\omega_0 > \dots > \omega_i > \omega_{i+1} > \dots > 0, i > 0. \quad (47)$$

Теперь, применяя леммы 1 и 2 соответственно, получаем равномерные по параметру ε оценки устойчивости (6) и (16), с учетом которых, используя теорему 1, устанавливаем равномерную по параметру ε сходимость разностного решения задачи (2) к классическому решению задачи (1).

2. Пусть выполнено условие 2. Тогда с учетом положительности коэффициентов α_k , $k = 1, \dots, m$, монотонного убывания и положительности функции $\omega(x)$, а также ограниченности снизу положительной функции $a(x)$ получим неравенства

$$\ell[\omega] \geq \omega(0) - \alpha \omega(\zeta_1) \geq 1 - \alpha \exp\left(-\frac{a\zeta_1}{\varepsilon}\right). \quad (48)$$

Несложно убедиться в том, что для $\alpha \geq 1$ при δ таком, что $0 < \delta < 1$, неравенство

$$1 - \alpha \exp\left(-\frac{a\zeta_1}{\varepsilon}\right) \geq \delta$$

будет выполнено для всех значений ε , удовлетворяющих требованию $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, где

$$\varepsilon_1 = a\zeta_1 [\ln \alpha - \ln(1 - \delta)]^{-1},$$

а значит, в силу неравенств (48) для значений параметра $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ будет выполнено и неравенство $\ell[\omega] \geq \delta$. С другой стороны, учитывая условие (47), положительность всех коэффициентов α_k , $k = 1, \dots, m$, упорядоченность носителей нелокальных данных ζ_i , $i = 1, \dots, m$, ограниченность снизу положительной функции $a(x)$, а также используя формулу (14), получаем соотношение

$$\ell^h[\omega_i] \geq 1 - \alpha \omega_{i_{\zeta_1}} \geq 1 - \alpha \exp\left(-\frac{ai_{\zeta_1}h}{\varepsilon}\right),$$

из которого с учетом условия (3) вытекает неравенство

$$\ell^h[\omega_i] \geq 1 - \alpha \exp\left(-\frac{a\zeta_1}{2\varepsilon}\right). \quad (49)$$

Несложно убедиться в том, что для $\alpha \geq 1$ при δ таком, что $0 < \delta < 1$, неравенство

$$1 - \alpha \exp\left(-\frac{a\zeta_1}{2\varepsilon}\right) \geq \delta$$

будет выполнено для всех значений ε , удовлетворяющих требованию $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$, где

$$\varepsilon_2 = a\zeta_1 \cdot 2^{-1} [\ln \alpha - \ln(1 - \delta)]^{-1},$$

а значит, в силу неравенства (49) для значений параметра $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ будет выполнено и неравенство $\ell^h[\omega_i] \geq \delta$. В итоге из установленных фактов следует, что для значений параметра $0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$, где $\tilde{\varepsilon} = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, т. е. при $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_2$, будут выполнены оба неравенства $\ell[\omega] \geq \delta$ и $\ell^h[\omega_i] \geq \delta$. Наконец, применяя леммы 1 и 2 соответственно, убеждаемся в справедливости оценок (6) и (16), означающих равномерную по параметру ε устойчивость решений задач (1) и (2), а затем, используя теорему 1, устанавливаем равномерную по параметру ε , $0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$, сходимость разностного решения задачи (2) к классическому решению задачи (1). Теорема 2 доказана.

Отметим, что вышеиспользованный подход к доказательству теоремы 2 задает ограничивающее параметр значение $\tilde{\varepsilon}$ меньшим, чем критическое значение параметра.

Нелокальное условие с коэффициентами разного знака

Рассмотрим постановку нелокальной начальной задачи и ее разностную трактовку при наличии коэффициентов разного знака в нелокальном начальном условии. Не теряя общности, будем изучать задачу

$$\begin{cases} Lu(x) \equiv \varepsilon u'(x) + a(x)u(x) = f(x), & x > 0, \\ \ell[u] \equiv u(0) - \sum_{k=1}^n \alpha_k u(\zeta_k) + \sum_{p=1}^m \beta_p u(\eta_p) = \varphi, \end{cases} \quad (50)$$

где $\varepsilon > 0$, $a(x) \in C[0, +\infty)$, $f(x) \in C[0, +\infty)$, $a(x) \geq a > 0$, $x \in [0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $\alpha_k > 0$, $\zeta_k \in (0, X)$, $k = 1, \dots, n$, $\beta_p > 0$, $\eta_p \in (0, X)$, $p = 1, \dots, m$, $X \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathbb{R}$, при этом будем считать, что все носители нелокальных данных различны между собой.

Разностную трактовку задачи на равномерной сетке с шагом $h > 0$ запишем в виде

$$\begin{cases} L^h u_i \equiv \varepsilon \sigma_i(\rho) D_+ u_i + a_i u_i = f_i, & i \geq 0, \\ \ell^h[u_i] \equiv u_0 - \sum_{k=1}^n \alpha_k [\theta u_{i_{\zeta_k}} + (1 - \theta) u_{i_{\zeta_k} + 1}] + \sum_{p=1}^m \beta_p [\theta u_{i_{\eta_p}} + (1 - \theta) u_{i_{\eta_p} + 1}] = \varphi, \end{cases} \quad (51)$$

где $D_+ u_i \equiv \frac{(u_{i+1} - u_i)}{h}$, $a_i = a(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = ih$, а подгоночный параметр $\sigma_i(\rho) = \rho a_i [1 - \exp(-\rho a_i)]^{-1}$, $i \geq 0$, $\rho = \frac{h}{\varepsilon}$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Наконец, в постановке задачи (50), не теряя общности, считаем, что носители нелокальных данных упорядочены в виде

$$0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_n < X, \quad 0 < \eta_1 < \dots < \eta_m < X, \quad \zeta_k \neq \eta_p, \quad k = 1, \dots, n, \quad p = 1, \dots, m, \quad (52)$$

а в разностной задаче (51) соответствующие точкам ζ_k и η_p номера i_{ζ_k} и i_{η_p} задаем неравенствами

$$i_{\zeta_k} h \leq \zeta_k < (i_{\zeta_k} + 1)h, \quad k = 1, \dots, n, \quad i_{\eta_p} h \leq \eta_p < (i_{\eta_p} + 1)h, \quad p = 1, \dots, m,$$

при этом на шаг сетки накладываем следующее требование (далее – условие на h): шаг h строго меньше половины длины наименьшего расстояния между парами, составленными из различных точек множества $\{0, \zeta_1, \dots, \zeta_n, \eta_1, \dots, \eta_m, X\}$.

В дальнейшем с учетом формул (4) и (14) будем использовать формулы

$$\ell[\omega] = \omega(0) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \omega(\zeta_k) + \sum_{p=1}^m \beta_p \omega(\eta_p), \quad (53)$$

$$\ell^h[\omega_i] = \omega_0 - \sum_{k=1}^n \alpha_k [\theta \omega_{i_{\zeta_k}} + (1-\theta) \omega_{i_{\zeta_k}+1}] + \sum_{p=1}^m \beta_p [\theta \omega_{i_{\eta_p}} + (1-\theta) \omega_{i_{\eta_p}+1}], \quad (54)$$

которые выписаны в соответствии с обозначениями в задачах (50) и (51).

Сперва рассмотрим задачи (50) и (51) при условии, что

$$\eta_m < \zeta_1. \quad (55)$$

Теорема 3. Пусть имеет место упорядоченность (55) и выполняется одно из следующих условий.

$$1. -\infty < \sum_{k=1}^n \alpha_k - \sum_{p=1}^m \beta_p < 1, \varepsilon > 0.$$

$$2. \sum_{k=1}^n \alpha_k - \sum_{p=1}^m \beta_p \geq 1, 0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon} = a\eta_m \left[\ln \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k - \sum_{p=1}^m \beta_p \right) - \ln(1-\delta) \right]^{-1}, 0 < \delta < 1.$$

Тогда классическое решение задачи (50) и разностное решение задачи (51) являются равномерно устойчивыми по параметру ε . Если к тому же $a(x) \in C^1[0, +\infty)$ и $f(x) \in C^1[0, +\infty)$, то решение задачи (51) равномерно по параметру ε сходится к решению задачи (50).

Доказательство. Будем использовать обозначения $\alpha = \sum_{k=1}^n \alpha_k$, $\beta = \sum_{p=1}^m \beta_p$.

1. Пусть выполнено условие 1. Так как $-\infty < \alpha - \beta < 1$, то из формулы (53), учитывая условия (52) и (55) и свойства функции $\omega(x)$, получаем неравенство

$$\ell[\omega] \geq 1 - \omega(\zeta_1) \sum_{k=1}^n \alpha_k + \omega(\zeta_1) \sum_{p=1}^m \beta_p \geq 1 - (\alpha - \beta) \omega(\zeta_1),$$

из которого следует справедливость соотношения

$$\ell[\omega] \geq \begin{cases} 1 > 0 & \text{при } -\infty < \alpha - \beta \leq 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \\ 1 - (\alpha - \beta) > 0 & \text{при } 0 < \alpha - \beta < 1 \quad \forall \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Далее в силу формулы (53), условий (52) и (55), а также условия на h имеем

$$0 < i_{\eta_1} < i_{\eta_1} + 1 < \dots < i_{\eta_m} < i_{\eta_m} + 1 < i_{\zeta_1} < i_{\zeta_1} + 1 < \dots < i_{\zeta_n} < i_{\zeta_n} + 1 < X. \quad (56)$$

Тогда из формулы (54) с учетом условий (47) и (56) получаем неравенство

$$\ell^h[\omega_i] \geq 1 - \omega_{i_{\zeta_1}} \sum_{k=1}^n \alpha_k + \omega_{i_{\zeta_1}} \sum_{p=1}^m \beta_p \geq 1 - (\alpha - \beta) \omega_{i_{\zeta_1}},$$

из которого следует справедливость соотношения

$$\ell^h[\omega_i] \geq \begin{cases} 1 > 0 & \text{при } -\infty < \alpha - \beta \leq 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \\ 1 - (\alpha - \beta) > 0 & \text{при } 0 < \alpha - \beta < 1 \quad \forall \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Применяя леммы 1 и 2 соответственно, получаем равномерные по параметру ε оценки устойчивости (6) и (16) решений задач (50) и (51) соответственно, а затем, используя теорему 1, устанавливаем равномерную по параметру ε сходимость разностного решения задачи (51) к классическому решению задачи (50).

2. Пусть выполнено условие 2. С учетом свойств функции $\omega(x)$, ограниченности функции $a(x)$, а также условий (52) и (55) из формулы (53) следует, что

$$\ell[\omega] \geq 1 - (\alpha - \beta) \omega(\eta_m) \geq 1 - (\alpha - \beta) \exp\left(-\frac{a\eta_m}{\varepsilon}\right). \quad (57)$$

Несложно убедиться в том, что для $\alpha - \beta \geq 1$ при δ таком, что $0 < \delta < 1$, неравенство

$$1 - (\alpha - \beta) \exp\left(-\frac{a\eta_m}{\varepsilon}\right) \geq \delta$$

будет выполнено для всех значений ε , удовлетворяющих требованию $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, где

$$\varepsilon_1 = a\eta_m [\ln(\alpha - \beta) - \ln(1 - \delta)]^{-1},$$

а значит, в силу неравенств (57) для значений параметра $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ будет выполнено и неравенство $\ell[\omega] \geq \delta$. С другой стороны, с учетом условий (47), (52) и (55), ограниченности функции $a(x)$ и формулы (14) из формулы (54) имеем

$$\ell^h[\omega_i] \geq 1 - (\alpha - \beta) \exp\left(-\frac{a\zeta_1 h}{\varepsilon}\right).$$

Отсюда, принимая во внимание условия (55) и (56), а также условие на h , получаем неравенство

$$\ell^h[\omega_i] \geq 1 - (\alpha - \beta) \exp\left(-\frac{a\eta_m}{\varepsilon}\right).$$

Несложно убедиться в том, что для $\alpha - \beta \geq 1$ при δ таком, что $0 < \delta < 1$, неравенство

$$1 - (\alpha - \beta) \exp\left(-\frac{a\eta_m}{\varepsilon}\right) \geq \delta$$

будет выполнено для всех значений ε , удовлетворяющих требованию $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$, где

$$\varepsilon_2 = a\eta_m [\ln(\alpha - \beta) - \ln(1 - \delta)]^{-1},$$

а значит, при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ будет выполнено и неравенство $\ell^h[\omega_i] \geq \delta$. В итоге из вышеизложенного следует, что для $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}]$, где $\tilde{\varepsilon} = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, т. е. при $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$, будут выполнены оба неравенства $\ell[\omega] \geq \delta$ и $\ell^h[\omega_i] \geq \delta$. Наконец, применяя леммы 1 и 2 соответственно, устанавливаем оценки (6) и (16), означающие равномерную по параметру $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}]$ устойчивость решений задач (50) и (51), а затем, используя теорему 1, устанавливаем равномерную по параметру $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}]$ сходимость разностного решения задачи (51) к классическому решению задачи (50). Теорема 3 доказана.

При отсутствии упорядоченности (55) в задаче (50), т. е. при произвольном расположении носителей нелокальных данных, докажем следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть выполняется одно из нижеприведенных условий.

$$1. \sum_{k=1}^n \alpha_k < 1, \varepsilon > 0.$$

$$2. \sum_{k=1}^n \alpha_k \geq 1, 0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon} = a\zeta_1 \cdot 2^{-1} \left[\ln\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k\right) - \ln(1 - \delta) \right]^{-1}, 0 < \delta < 1.$$

Тогда решение задачи (50) и решение задачи (51) являются равномерно устойчивыми по параметру ε , а если к тому же $a(x) \in C^1[0, +\infty)$ и $f(x) \in C^1[0, +\infty)$, то решение разностной задачи (51) равномерно по параметру ε сходится к решению дифференциальной задачи (50).

Доказательство. Доказательством будет формальное повторение доказательства теоремы 2. Отличия состоят лишь в том, что $\ell[\omega]$ задается формулой (53), $\ell^h[\omega_i]$ – формулой (54), вместо соотношения (45) имеет место только одно неравенство:

$$\ell[\omega] \geq 1 - \alpha > 0,$$

а вместо соотношения (46) используется неравенство

$$\ell^h[\omega_i] \geq 1 - \alpha > 0,$$

при этом и здесь $0 < \alpha < 1$, $\alpha = \sum_{k=1}^n \alpha_k$. Теорема 4 доказана.

Теперь рассмотрим задачу (50), когда для случая $n = m$ расположение носителей нелокальных данных ζ_k и η_k , $k = 1, \dots, n$, задано чередующимся образом. Для лаконичности формулировки нижеследующего результата введем обозначения

$$\gamma_k = \alpha_k - \beta_k, \gamma_k^+ = 2^{-1}[(\alpha_k - \beta_k) + |\alpha_k - \beta_k|], \gamma_k^- = 2^{-1}[(\alpha_k - \beta_k) - |\alpha_k - \beta_k|],$$

$$\gamma^+ = \sum_{k=1}^n \gamma_k^+, \gamma^- = \sum_{k=1}^n \gamma_k^-, \gamma = \sum_{k=1}^n \gamma_k.$$

Теорема 5. Пусть $n = m$, $\eta_k < \zeta_k < \eta_{k+1}$, $k = 1, \dots, n-1$, $\eta_n < \zeta_n$ и выполняется одно из следующих условий.

1. $\gamma_k \leq 0$ ($\gamma_k \geq 0$), $k = 1, \dots, n$, $-\infty < \gamma < 1$, $\varepsilon > 0$.
2. $\gamma_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n$, $\gamma \geq 1$, $0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon} = a\eta_1 \cdot 2^{-1} [\ln \gamma - \ln(1 - \delta)]^{-1}$.
3. $0 < \gamma^+ < 1$, $\varepsilon > 0$.
4. $\gamma^+ \geq 1$, $0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon} = a\eta_s \cdot 2^{-1} [\ln \gamma^+ - \ln(1 - \delta)]^{-1}$, $s = \min_{1 \leq k \leq n} \{k, \gamma_k^+ > 0\}$.
5. $\gamma_k \leq 0$, $k = 1, \dots, r$, $\gamma_k \geq 0$, $k = r+1, \dots, n$, $0 < r < n$, $r \in N$, $-\infty < \gamma < 1$, $\varepsilon > 0$.
6. $\gamma_k \leq 0$, $k \leq r$, $\gamma_k \geq 0$, $k > r$, $r < n$, $r \in N$, $\gamma \geq 1$, $0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon} = a\eta_r \cdot 2^{-1} [\ln \gamma - \ln(1 - \delta)]^{-1}$.

При этом в условиях 2, 4 и 6 значение δ такое, что $0 < \delta < 1$. Тогда классическое решение задачи (50) и соответствующее разностное решение задачи (51) являются равномерно устойчивыми по параметру ε , а если к тому же $a(x) \in C^1[0, +\infty)$ и $f(x) \in C^1[0, +\infty)$, то разностное решение задачи (51) равномерно по параметру ε сходится к классическому решению задачи (50).

Доказательство. Учитывая леммы 1, 2 и теорему 1, достаточно доказать, что при каждом из шести условий теоремы выполняются неравенства $\ell[\omega] \geq \delta$ и $\ell^h[\omega_i] \geq \delta$. Прежде всего с учетом формул (4) и (14), (53) и (54) соответственно получим, что

$$\ell[\omega] \geq 1 - \sum_{k=1}^n \gamma_k \omega(\eta_k), \quad \ell^h[\omega_i] \geq 1 - \sum_{k=1}^n \gamma_k [\theta \omega_{i_{\eta_k}} + (1 - \theta) \omega_{i_{\eta_k}+1}]. \quad (58)$$

1. Пусть выполнено условие 1. Тогда из неравенств (58) вытекают соотношения

$$\ell[\omega] \geq \begin{cases} 1 > 0 & \text{при } -\infty < \gamma \leq 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \\ 1 - \gamma > 0 & \text{при } 0 \leq \gamma < 1 \quad \forall \varepsilon > 0, \end{cases}$$

$$\ell^h[\omega_i] \geq \begin{cases} 1 > 0 & \text{при } -\infty < \gamma \leq 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \\ 1 - \gamma > 0 & \text{при } 0 \leq \gamma < 1 \quad \forall \varepsilon > 0. \end{cases}$$

2. Пусть выполнено условие 2. В этом случае из неравенств (58) следует, что

$$\ell[\omega] \geq 1 - \gamma \exp\left(-\frac{a\eta_1}{2\varepsilon}\right), \quad \ell^h[\omega_i] \geq 1 - \gamma \exp\left(-\frac{a\eta_1}{2\varepsilon}\right).$$

Отсюда с учетом того факта, что при $\tilde{\varepsilon} = a\eta_1 \cdot 2^{-1} [\ln \gamma - \ln(1 - \delta)]^{-1}$ для всех значений параметра $0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$ выполняется неравенство

$$1 - \gamma \exp\left(-\frac{a\eta_1}{2\varepsilon}\right) \geq \delta,$$

имеем $\ell[\omega] \geq \delta$ и $\ell^h[\omega_i] \geq \delta$.

3. Пусть выполнено условие 3. Тогда из неравенств (58) при $\varepsilon > 0$ получаем

$$\ell[\omega] \geq 1 - \gamma^+ > 0, \quad \ell^h[\omega_i] \geq 1 - \gamma^+ > 0.$$

4. Пусть выполнено условие 4. В этом случае из неравенств (58) следует, что

$$\ell[\omega] \geq 1 - \gamma^+ \exp\left(-\frac{a\eta_s}{2\varepsilon}\right), \quad \ell^h[\omega_i] \geq 1 - \gamma^+ \exp\left(-\frac{a\eta_s}{2\varepsilon}\right),$$

где $s = \min_{1 \leq k \leq n} \{k, \gamma_k^+ > 0\}$. Отсюда с учетом того факта, что при $\tilde{\varepsilon} = a\eta_s \cdot 2^{-1} [\ln \gamma^+ - \ln(1 - \delta)]^{-1}$ для всех значений параметра $0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$ выполняется неравенство

$$1 - \gamma^+ \exp\left(-\frac{a\eta_s}{2\varepsilon}\right) \geq \delta,$$

получаем $\ell[\omega] \geq \delta$ и $\ell^h[\omega_i] \geq \delta$.

5. Пусть выполнено условие 5. Тогда из неравенств (58) вытекают неравенства

$$\ell[\omega] \geq 1 - \omega(\eta_r) \left[\sum_{k=1}^r \gamma_k^- + \sum_{k=r+1}^n \gamma_k^+ \right], \quad \ell^h[\omega_i] \geq 1 - \omega_{i_{\eta_r+1}} \left[\sum_{k=1}^r \gamma_k^- + \sum_{k=r+1}^n \gamma_k^+ \right],$$

из которых следует, что

$$\ell[\omega] \geq 1 - \gamma > 0, \quad \ell^h[\omega_i] \geq 1 - \gamma > 0.$$

6. Пусть выполнено условие 6. В этом случае из неравенств (58) получаем

$$\ell[\omega] \geq 1 - \gamma \omega(\eta_r) \geq 1 - \gamma \exp\left(-\frac{a\eta_r}{\varepsilon}\right), \quad \ell^h[\omega_i] \geq 1 - \gamma \omega_{i_{\eta_r+1}} \geq 1 - \gamma \exp\left(-\frac{a\eta_r}{\varepsilon}\right).$$

Отсюда с учетом того факта, что при $\tilde{\varepsilon} = a\eta_r \cdot 2^{-1}[\ln \gamma - \ln(1 - \delta)]^{-1}$ для всех значений параметра $0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$ выполняется неравенство

$$1 - \gamma \exp\left(-\frac{a\eta_r}{\varepsilon}\right) > \delta,$$

следует, что $\ell[\omega] \geq \delta$ и $\ell^h[\omega_i] \geq \delta$. Теорема 5 доказана.

Оценка близости решений нелокальных начальных задач

Введем обозначения

$$E_1 = \{\varepsilon, 0 < \varepsilon < \infty\} \text{ либо } E_1 = \{\varepsilon, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1\},$$

$$E_2 = \{\varepsilon, 0 < \varepsilon < \infty\} \text{ либо } E_2 = \{\varepsilon, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2\}.$$

Далее будем полагать, что формулировка каждой из задач

$$Lu_1(x) = f(x), \quad x > 0, \quad \ell_1[u_1] \equiv u_1(0) - \sum_{k=1}^n \alpha_{1k} u_1(\zeta_k) = \varphi, \quad \varepsilon \in E_1, \quad (59)$$

$$Lu_2(x) = f(x), \quad x > 0, \quad \ell_2[u_2] \equiv u_2(0) - \sum_{k=1}^n \alpha_{2k} u_2(\zeta_k) = \varphi, \quad \varepsilon \in E_2, \quad (60)$$

отвечает всем условиям, требуемым при общей постановке задачи (1). Также будем считать, что все условия, требуемые при постановке разностной задачи (2), выполняются и для разностных интерпретаций задач (59) и (60), формулируемых в следующем виде:

$$L^h u_{1_i}^h = f_i, \quad i \geq 0, \quad \ell_1^h[u_{1_i}] \equiv u_{1_0} - \sum_{k=1}^n \alpha_{1k} \left[\theta u_{1_{i\zeta_k}} + (1 - \theta) u_{1_{i\zeta_k+1}} \right] = \varphi, \quad (61)$$

$$L^h u_{2_i}^h = f_i, \quad i \geq 0, \quad \ell_2^h[u_{2_i}] \equiv u_{2_0} - \sum_{k=1}^n \alpha_{2k} \left[\theta u_{2_{i\zeta_k}} + (1 - \theta) u_{2_{i\zeta_k+1}} \right] = \varphi. \quad (62)$$

Теорема 6. Пусть для некоторого $\delta > 0$ неравенство $|\ell_1[\omega]| \geq \delta$ выполняется при всех $\varepsilon \in E_1$, а неравенство $|\ell_2[\omega]| \geq \delta$ выполняется при всех $\varepsilon \in E_2$. Тогда для решений задач (59) и (60) справедлива оценка

$$|u_1 - u_2| \leq C \sum_{k=1}^n |\alpha_{1k} - \alpha_{2k}|, \quad 0 \leq x \leq X, \quad (63)$$

с константой C , не зависящей от x и параметра $\varepsilon \in E$, где $E = E_1 \cap E_2$. Если к тому же $a(x) \in C^1[0, +\infty)$ и $f(x) \in C^1[0, +\infty)$, при этом для $\varepsilon \in E$ выполняются неравенства $|\ell_1^h[\omega_i]| \geq \delta$ и $|\ell_2^h[\omega_i]| \geq \delta$, то для решений задач (61) и (62) при $h \rightarrow 0$ справедлива оценка

$$|u_{1_i} - u_{2_i}| \leq C \sum_{k=1}^n |\alpha_{1k} - \alpha_{2k}| + C'h, \quad 0 \leq ih \leq X, \quad (64)$$

с константами C и C' , не зависящими от i , h и ε .

Доказательство. В силу леммы 1 для решения каждой из задач (59) и (60) выполняется оценка устойчивости (6). Запишем решения задач (59) и (60) в виде

$$u_1(x) = v(x) + w_1(x), \quad u_2(x) = v(x) + w_2(x)$$

соответственно. Здесь функции $v(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ являются решениями задач

$$Lv(x) = f(x), \quad x > 0, \quad v(0) = 0,$$

$$Lw_1(x) = 0, \quad x > 0, \quad \ell_1[w_1] = \varphi - \ell_1[v],$$

$$Lw_2(x) = 0, \quad x > 0, \quad \ell_2[w_2] = \varphi - \ell_2[v],$$

соответственно. С учетом формул (4) и (12) имеем

$$\max_{0 \leq x \leq X} |u_1(x) - u_2(x)| \leq |w_1(0) - w_2(0)|.$$

Учитывая формулу (11), получаем

$$w_1(0) - w_2(0) = \frac{(\ell_2[\omega] - \ell_1[\omega])\varphi + \ell_2[v]\ell_1[\omega] - \ell_1[v]\ell_2[\omega]}{\ell_1[\omega]\ell_2[\omega]}.$$

В числителе последней дроби

$$\begin{aligned} & (\ell_2[\omega] - \ell_1[\omega])\varphi = \varphi \sum_{k=1}^n (\alpha_{1k} - \alpha_{2k})\omega(\zeta_k), \\ & \ell_2[v]\ell_1[\omega] - \ell_1[v]\ell_2[\omega] = \left[\sum_{k=1}^n \alpha_{2k}v(\zeta_k) \right] \left[1 - \sum_{k=1}^n \alpha_{1k}\omega(\zeta_k) \right] - \left[\sum_{k=1}^n \alpha_{1k}v(\zeta_k) \right] \left[1 - \sum_{k=1}^n \alpha_{2k}\omega(\zeta_k) \right] = \\ & = \sum_{k=1}^n (\alpha_{2k} - \alpha_{1k})v(\zeta_k) + \sum_{k=1}^n \alpha_{1k}v(\zeta_k) \sum_{l=1}^n \alpha_{2l}\omega(\zeta_l) - \sum_{k=1}^n \alpha_{2k}v(\zeta_k) \sum_{l=1}^n \alpha_{1l}\omega(\zeta_l) = \\ & = \sum_{k=1}^n (\alpha_{2k} - \alpha_{1k})v(\zeta_k) + \sum_{\substack{k \neq l \\ 1 \leq k \leq n, \\ 1 \leq l \leq n}} (\alpha_{1k}\alpha_{2l} - \alpha_{2k}\alpha_{1l})v(\zeta_k)\omega(\zeta_l) = \\ & = \sum_{k=1}^n (\alpha_{2k} - \alpha_{1k})v(\zeta_k) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \neq l \\ 1 \leq k \leq n, \\ 1 \leq l \leq n}} [(\alpha_{1k} - \alpha_{2k})(\alpha_{1l} + \alpha_{2l}) - (\alpha_{1l} - \alpha_{2l})(\alpha_{1k} + \alpha_{2k})]v(\zeta_k)\omega(\zeta_l). \end{aligned}$$

С учетом этого

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq x \leq X} |u_1(x) - u_2(x)| \leq |w_1(0) - w_2(0)| \leq \\ & \leq \delta^{-2} \left\{ |\varphi| + a^{-1} \max_{0 \leq x \leq X} |f(x)| \left[1 + (n-1) \max_{1 \leq k \leq n} (|\alpha_{1k}| + |\alpha_{2k}|) \right] \right\} \sum_{k=1}^n |\alpha_{1k} - \alpha_{2k}|, \end{aligned}$$

что завершает доказательство оценки (63). Для доказательства второго утверждения теоремы воспользуемся равенством

$$u_{1_i} - u_{2_i} = u_{1_i} - u_1(ih) + u_2(ih) - u_{2_i} + u_1(ih) - u_2(ih),$$

из которого в силу неравенства треугольника следует, что

$$|u_{1_i} - u_{2_i}| \leq |u_{1_i} - u_1(ih)| + |u_{2_i} - u_2(ih)| + |u_1(ih) - u_2(ih)|.$$

Применяя к правой части последнего неравенства теорему 1, а также уже полученную оценку (63), завершаем доказательство оценки (64). Теорема 6 доказана.

Отметим, что в доказанной теореме 6 отсутствуют какие-либо требования на знаки коэффициентов в нелокальных начальных условиях задач (59) и (60).

Примеры и комментарии

В настоящей работе имеется ссылка на статью [12, р. 86–87] (перед определением критического значения), указывающая на эффект появления критического значения параметра при определенных значениях коэффициентов в нелокальном начальном условии. Именно этот эффект и влияет на формулировки условий теоремы 2, а также теорем 3 и 4. Примеры задач вида (1), имеющих критическое значение, приведены в работе [12, р. 91, 97]. Ограничение сверху на вариацию ε , например, в условии 2 теоремы 2 связано именно с требованием $\varepsilon \neq \varepsilon^*$, где ε^* – обозначение критического значения. В дополнение к примерам работы [12] проследим эффект появления критического значения на примере разностной трактовки нелокальной начальной задачи

$$\varepsilon u'(x) + u(x) = 0, \quad x > 0, \quad u(0) = \alpha u(\zeta) + 1, \quad 0 < \zeta < X, \quad \alpha \neq 0,$$

имеющей решение $u(x) = (\ell[\omega])^{-1} \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$ при $\ell[\omega] \neq 0$, $\ell[\omega] = 1 - \alpha \exp\left(-\frac{\zeta}{\varepsilon}\right)$. Видно, что если $-\infty < \alpha < 1$ (условие 1 теоремы 2), то $\ell[\omega] > 1$ для любого $\varepsilon > 0$, а если $\alpha > 1$ (условие 2 теоремы 2), то появляется

критическое значение $\varepsilon^* = \frac{\zeta}{\ln \alpha}$, в окрестности которого $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon^* - 0} u(x) = +\infty$, т. е. при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^* - 0$ поведение решения не будет равномерно устойчивым по параметру ε . По этой причине уже отсюда напрашивается вывод о том, что разностная схема будет применима для значений параметра $0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$, где $\tilde{\varepsilon}$ такое, что $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon^*$. В свою очередь, непосредственно соответствующая примеру разностная схема

$$\varepsilon \sigma(\rho) D_+ u_i + u_i = 0, u_0 - \alpha u_{i_\zeta} = 1, \sigma(\rho) = \rho [1 - \exp(-\rho)]^{-1}, h = \frac{X}{n},$$

$$h < 2^{-1} \min \{ \zeta, X - \zeta \}, i_\zeta \in N, i_\zeta h \leq \zeta < (i_\zeta + 1)h$$

имеет решение $u_i = \left(\ell^h[\omega_i] \right)^{-1} \exp(-i\rho)$ при $\ell^h[\omega_i] \neq 0$, $\ell^h[\omega_i] = 1 - \alpha \exp(-i_\zeta \rho)$. Видно, что если $-\infty < \alpha < 1$ (условие 1 теоремы 2), то $\ell^h[\omega_i] > 1$ при любом $\varepsilon > 0$, а если $\alpha > 1$ (условие 2 теоремы 2), то требование $\ell^h[\omega_i] \neq 0$ равносильно неравенству $\varepsilon \neq \frac{i_\zeta h}{\ln \alpha}$. Введя обозначение $\varepsilon_h^* = \frac{i_\zeta h}{\ln \alpha}$, заметим, что $\varepsilon_h^* \rightarrow \varepsilon^*$ при $h \rightarrow 0$. Далее убедимся в том, что использование разностных схем Эйлера не обеспечило бы равномерной по параметру аппроксимации. Убеждаемся, что аппроксимация явной схемой

$$\varepsilon D_+ u_i + u_i = 0, u_0 - \alpha u_{i_\zeta} = 1$$

определяет разностное решение $u_i = \left[1 - \alpha(1 - \rho)^{i_\zeta} \right]^{-1} (1 - \rho)^i$, которое при $\rho = 1$ не сходится к решению $u(x)$ равномерно по параметру ε , так как $\lim_{h \rightarrow 0} |u(h) - u_1| = \exp(-1)$ противостоит тому, что $|u(0) - u_0| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. К тому же при значениях $\rho > 1$ приближенное решение u_i еще и осциллирует в отличие от решения $u(x)$ (здесь подразумевается, что и точное, и разностное решения существуют). Наконец, отметим, что неявная схема

$$\varepsilon D_+ u_i + u_{i+1} = 0, u_0 - \alpha u_{i_\zeta} = 1$$

имеет решение, определяемое формулой $u_i = \left[1 - \alpha(1 + \rho)^{-i_\zeta} \right]^{-1} (1 + \rho)^{-i}$, которое тоже не сходится к решению $u(x)$ равномерно по параметру ε при значении $\rho = 1$, поскольку $|u(0) - u_0| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, в то время как $\lim_{h \rightarrow 0} |u(h) - u_1| = \frac{1}{2} - \exp(-1)$.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе сформулированы требования на расположение носителей в нелокальном начальном условии, на значения коэффициентов при этих носителях, а также на интервал изменения параметра, при совокупности которых доказаны равномерная по параметру устойчивость классического решения сформулированной нелокальной начальной задачи, равномерная по параметру дискретная устойчивость решения соответствующей экспоненциально-подгоночной разностной схемы, а также равномерная по параметру сходимость решения предложенной разностной схемы к классическому решению дифференциальной задачи. В первую очередь были установлены результаты общего характера, касающиеся равномерной по параметру устойчивости классического решения нелокальной начальной задачи (1) (лемма 1), равномерной по параметру дискретной устойчивости решения разностной схемы (2) (лемма 2). На основании лемм 1 и 2 доказана общая теорема 1 о равномерной по параметру сходимости разностного решения задачи (2) к классическому решению задачи (1). С учетом этих результатов для нелокальных начальных задач с оригинально задаваемыми требованиями на входные данные нелокального начального условия и на интервал вариации параметра доказаны теоремы 2–5, касающиеся вопросов равномерной по параметру устойчивости решения дифференциальной и разностной задач, а также равномерной по параметру сходимости решения разностной задачи к классическому решению дифференциальной задачи. Завершает статью теорема 6, устанавливающая равномерную по параметру оценку близости классических решений двух разных нелокальных начальных задач, различающихся коэффициентами в нелокальных начальных условиях, равномерную по параметру дискретную оценку близости решений двух разностных схем, соответствующих двум разным нелокальным начальным задачам.

Подводя итог, заключаем, что нелокальная начальная задача, рассмотренная в дифференциальной и разностной трактовках, детально исследована, доказаны условия равномерной по параметру устойчивости и сходимости на равношаговой сетке.

Библиографические ссылки

1. Ильин ВА, Моисеев ЕИ. Нелокальная краевая задача первого рода для оператора Штурма – Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках. *Дифференциальные уравнения*. 1987;23(7):1198–1207.
2. Ильин ВА, Моисеев ЕИ. Нелокальная краевая задача второго рода для оператора Штурма – Лиувилля. *Дифференциальные уравнения*. 1987;23(8):1422–1431.
3. Ильин ВА, Моисеев ЕИ. Априорная оценка решения задачи, сопряженной к нелокальной краевой задаче первого рода. *Дифференциальные уравнения*. 1988;24(5):795–804.
4. Ciegis R. Numerical solution of a problem with small parameter for the highest derivative and a nonlocal condition. *Lithuanian Mathematical Journal*. 1988;28(1):90–96. DOI: 10.1007/BF00972255.
5. Довлетов ДМ. О нелокальной краевой задаче первого рода в дифференциальной и разностной трактовках. *Дифференциальные уравнения*. 1989;25(8):1297–1307.
6. Dovletov DM. Nonlocal boundary value problem in terms of flow for Sturm – Liouville operator in differential and difference statements. *e-Journal of Analysis and Applied Mathematics*. 2018;2018:37–55. DOI: 10.2478/ejaam-2018-0004.
7. Ažić N. Spectral approximation and nonlocal boundary value problems. *Novi Sad Journal of Mathematics*. 2000;30(3):1–10.
8. Amiraliyev GM, Cakir M. Numerical solution of the singularly perturbed problem with nonlocal boundary condition. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2002;23(7):755–764. DOI: 10.1007/BF02456971.
9. Cakir M, Amiraliyev GM. A finite difference method for the singularly perturbed problem with nonlocal boundary condition. *Applied Mathematics and Computation*. 2005;160(2):539–549. DOI: 10.1016/j.amc.2003.11.035.
10. Arslan D, Cakir M. A numerical solution study on singularly perturbed convection-diffusion nonlocal boundary problem. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara. Series A1, Mathematics and Statistics*. 2019;68(2):1482–1491. DOI: 10.31801/cfsuasmas.540631.
11. Dovletov DM. A uniformly stable solvability of NLBVP for parameterized ODE. *Proceedings of International Mathematical Sciences*. 2021;3(2):50–69. DOI: 10.47086/pims.975424.
12. Dovletov DM. On a multipoint nonlocal initial value problem for a singularly-perturbed first-order ODE. *e-Journal of Analysis and Applied Mathematics*. 2019;2019:84–103. DOI: 10.2478/ejaam-2019-0006.
13. Дулан Э, Миллер Дж, Шилдерс У. *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем*. Демидова ГВ, переводчик; Яненко НН, редактор. Москва: Мир; 1983. 200 с.
14. Ильин ВА, Моисеев ЕИ. Двумерная нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в дифференциальной и разностной трактовках. *Математическое моделирование*. 1990;2(8):139–156.
15. Dovletov DM. New solvability condition of 2-d nonlocal boundary value problem for Poisson’s operator on rectangle. *e-Journal of Analysis and Applied Mathematics*. 2021;2021:12–28. DOI: 10.2478/ejaam-2021-0002.

Получена 06.11.2024 / исправлена 26.06.2025 / принята 26.06.2025.
Received 06.11.2024 / revised 26.06.2025 / accepted 26.06.2025.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

УДК 004.93

RLD-YOLO: НОВЫЙ МЕТОД ОБНАРУЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ YOLOv11

ВУ СЯНЬИ¹⁾, С. В. АБЛАМЕЙКО^{1), 2)}

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Изображения, получаемые с беспилотных летательных аппаратов, в настоящее время широко используются во многих приложениях. Однако эти изображения сталкиваются с рядом проблем (плотное распределение мелких объектов, переменные масштабы объектов и незаметные контурные особенности), которые приводят к пропускам объектов и ложному обнаружению объектов. Для решения этих проблем в данной статье предлагается улучшенный алгоритм обнаружения объектов RLD-YOLO, разработанный на основе версии YOLOv11n семейства

Образец цитирования:

Ву Сяньи, Абламейко СВ. RLD-YOLO: новый метод обнаружения объектов на изображениях беспилотных летательных аппаратов с использованием модели нейронной сети YOLOv11. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;2:105–117 (на англ.).
EDN: RBEXHB

For citation:

Wu Xianyi, Ablameyko SV. RLD-YOLO: new method for object detection in unmanned aerial vehicle images using YOLOv11 neural network. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;2:105–117.
EDN: RBEXHB

Авторы:

Ву Сяньи – аспирант кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета. Научный руководитель – С. В. Абламейко.

Сергей Владимирович Абламейко – доктор технических наук, академик НАН Беларуси, профессор; профессор кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета¹⁾, главный научный сотрудник отдела интеллектуальных информационных систем²⁾.

Authors:

Wu Xianyi, postgraduate student at the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics.

tigerv5872@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0003-6976-5386>

Sergey V. Ablameyko, doctor of science (engineering), academician of the National Academy of Sciences of Belarus, full professor; professor at the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics^a, and chief researcher at the department of intelligent information systems^b.

ablameyko@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0001-9404-1206>

алгоритмов YOLO. Алгоритм RLD-YOLO включает технологию структурной репараметризации RepConv, сохраняющую способность к многоветочной экспрессии признаков во время обучения и автоматически преобразующуюся в эффективную одноветвевую структуру во время вывода. Этот алгоритм разрабатывает модуль большого ядерного внимания LKAConv для улучшения способности к захвату признаков мелких целей с помощью глубокой разделяемой свертки размера 7×7 и механизма пространственного внимания. Алгоритм RLD-YOLO вводит динамический адаптивный модуль слияния DASI для оптимизации многоуровневого взаимодействия признаков с помощью обучаемого распределения весов. Экспериментальные результаты показывают, что улучшенный алгоритм обнаружения объектов RLD-YOLO, который объединяет модули LKAConv, RepConv и DASI, увеличивает на наборе данных VisDrone2019-DET значения mAP50 и mAP50-95 на 2,02 и 1,17 % соответственно. Скорость постобработки оптимизирована на 9,09 %. Хотя время предварительной обработки увеличивается из-за операций по улучшению признаков, критический этап вывода все еще поддерживает реальное время выполнения 1,7 мс/кадр. Алгоритм RLD-YOLO, интегрированный с модулями LKAConv, RepConv и DASI, очень подходит для задачи обнаружения мелких объектов на изображениях беспилотных летательных объектов.

Ключевые слова: обнаружение мелких объектов; YOLOv11; изображения БПЛА; LKAConv.

RLD-YOLO: NEW METHOD FOR OBJECT DETECTION IN UNMANNED AERIAL VEHICLE IMAGES USING YOLOv11 NEURAL NETWORK

WU XIANYI^a, S. V. ABLAMEYKO^{a, b}

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bUnited Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus,
6 Surganova Street, Minsk 220012, Belarus

Corresponding author: Wu Xianyi (tigerv5872@gmail.com)

Abstract. Unmanned aerial vehicle images are widely used now in many applications. However, these images face many challenges such as dense distribution of small objects, variable object scales, and inconspicuous edge features, leading to missed and false object detection. To address these issues, this paper proposes a lightweight enhanced solution based on the improved YOLOv11n model RLD-YOLO. The algorithm combines RepConv structural reparameterisation technology, retaining multi-branch feature expression capabilities during training and automatically converting to an efficient single-branch structure during inference. It designs the LKAConv large kernel attention module to enhance the feature capture ability of small targets through 7×7 depthwise separable convolution and spatial attention mechanism. It introduces the DASI dynamic adaptive fusion module to optimise multi-scale feature interaction through learnable weight allocation. Experimental results show that the improved RLD-YOLO object detection algorithm, which integrates LKAConv, RepConv, and DASI, increases mAP50 and mAP50-95 by 2.02 and 1.17 % respectively on the VisDrone2019-DET dataset. The post-processing speed is optimised by 9.09 %. Although the pre-processing time increases due to feature enhancement operations, the critical inference stage still maintains a real-time performance of 1.7 ms/frame. The RLD-YOLO model, fused with LKAConv, RepConv, and DASI, is very suitable for the task of small object target detection in unmanned aerial vehicle images.

Keywords: small object detection; YOLOv11; UAV images; LKAConv.

Introduction

With the continuous development of technologies, object detection technology has been widely applied in many practical fields, such as smart cities [1], precision agriculture [2], and disaster relief [3]. In recent years, with the rapid development of unmanned aerial vehicle (UAV) technology, its presence in people's lives has also increased. Nowadays, UAVs are widely used in traffic patrol, environmental monitoring, maritime search and rescue, and other fields [4]. However, object detection from a UAV perspective faces unique challenges: low-light environments such as night [5], fog or dawn, dusk [6], and complex background interference, such as building shadows, vegetation occlusion [7], which seriously affect the detection accuracy and efficiency of target objects. With the increasing real-time detection requirements of UAV platforms, UAV object detection algorithms need higher precision and speed, posing significant challenges to the design and optimisation of object detection algorithms in low-light scenes from a UAV perspective.

Currently, the YOLO series of models with outstanding performance have been widely used in object detection tasks in multiple fields [8] (for example, remote sensing target detection [9], intelligent parking [10], etc.).

However, when performing object detection from a UAV perspective, the maintenance of high detection accuracy while keeping the model lightweight has become a research challenge [7]. H. Chen, et al. [11], proposed an IDOU-YOLO (infrared detection of UAV-YOLO) algorithm model for UAV target detection based on thermal imaging, which improved the detection accuracy and convergence speed of the model by constructing a multi-scale fusion feature pyramid mechanism and introducing the bounding box loss function SIOU (smooth intersection over union). The researcher Z. Zhang [12] proposed a multi-scale UAV image target detection algorithm Drone-YOLO based on the YOLOv8 model. This method uses a three-layer path aggregation feature pyramid network (PAFPN) structure and combines large-scale feature maps with a detection head customised for small-sized objects, significantly enhancing the algorithm's ability to detect small-sized targets. Y. Huang, et al. [13], proposed a real-time detection algorithm for urban low-altitude multi-scale UAV images. It is used for UAV detection tasks with different image features during the day and night. During the day, the paper proposed a defogging detection structure to solve the detection problem in foggy environments. At night, the paper proposed a squeeze-and-excitation backbone (SE-backbone) [14] structure and SPD-PAFPN (spatial-to-depth PAFPN) [15] structure with a feature pyramid network, to obtain effective information from deeper feature maps for UAV detection in low-resolution images. A. He, et al. [16], proposed an ALSS-YOLO (adaptive lightweight channel splitting and shutting YOLO model) detection architecture based on the improved YOLOv8, which designed an ALSS module that adopts an adaptive channel segmentation strategy to optimise feature extraction and integrates a channel shuffle mechanism to enhance channel-wise information exchange. It improved the detection accuracy of blurred targets, especially when dealing with blurred and overlapping targets caused by jitter. S. Liu, et al. [17], proposed the LI-YOLO (low-illumination YOLO model) algorithm by improving YOLOv8, which proposed a feature enhancement module (FEB) and embedded the FEB into the C2f module at the end of the backbone network to enhance the algorithm's feature extraction ability. For the problems of low brightness, high noise, and blurry details in low-light images, the feature enhancement block and adaptive spatial feature fusion structure were used to improve the target detection performance in low-light scenes. X. Wu, et al. [18], proposed solutions from the perspective of deep learning models for three research directions: object detection in images, object detection in videos, and object tracking in videos. Currently, open datasets have been widely used for UAV target detection and tracking research, and performance evaluation has been carried out through four benchmark datasets.

The current mainstream of small target detection methods have the following problems. Firstly, the impact of dense small targets on object detection: small targets, due to their small size and low pixel ratio, have fewer grid points on the feature map, leading to inconspicuous recognisable features in the image, limiting the perception ability of the detection network for these targets, making it difficult for the model to learn enough discriminative information [19]. Secondly, the impact of complex backgrounds on object detection: images captured by UAVs usually contain complex backgrounds, such as trees, buildings, and changing terrain. These complex backgrounds may be similar to the features of small targets, increasing the probability of the model misjudging the background noise as the target. In addition, the high-speed movement of UAVs may cause image blurring, further reducing the detection accuracy of small targets [20]. Thirdly, UAV systems usually require detection algorithms to have high real-time performance to quickly respond and execute tasks [21]. However, detecting small targets usually requires more complex model structures or more computing resources, which conflicts with the requirement of real-time performance. To maintain real-time performance, some model complexity may need to be sacrificed, thereby affecting the detection accuracy.

In response to the above problems, this paper proposes an improved YOLOv11n aerial photography lightweight small target detection algorithm RLD-YOLO (RepConv-LKAConv-DASI-YOLOv11n). The model designs a reparameterisation convolution (RepConv) structure in the first layer of the backbone, which achieves performance separation in training and deployment stages through multi-branch convolution fusion and single-branch inference reconstruction technology, reducing the computational load of the first layer while retaining feature expression capabilities. To meet the demand for long-distance dependency modelling in complex scenes, the large kernel attention convolution (LKAConv) module is introduced in the deep feature extraction link, using a joint decomposition strategy of depthwise convolution and dilated convolution (5×5 depthwise convolution + 7×7 dilated rate 3 convolution) to build an equivalent 21×21 ultra-large receptive field, combined with spatial attention feature reweighting mechanism, to enhance the model's ability to capture features of dense small targets and occluded targets, and improve the detection accuracy of small targets. In complex environments, background noise often affects the detection of small targets. The DASI (dimension-aware selective integration) dynamic adaptive interaction unit is deployed in the head feature fusion stage, which achieves intelligent weight allocation and cross-level detail calibration of multi-scale features through the dual-path architecture of channel attention and spatial cross-correlation, enhancing the model's adaptability to dense targets and scale changes, and effectively suppressing the interference of background noise such as clouds and vegetation in aerial photography scenes. The RLD-YOLO model, through efficient inference of RepConv, global

perception of LKACnv, dynamic fusion of DASI, and collaborative optimisation, achieves dual improvements in precision and speed on the basis of maintaining the detection characteristics of YOLOv11n, providing an efficient solution for UAV target detection.

YOLOv11 model

YOLOv11 model (fig. 1) is a new generation of object detection algorithm, launched by company «Ultralytics» in 2023, aiming to further improve the precision and efficiency of the object detection. It has made many improvements on the basis of YOLOv8¹ to adapt to a wider range of application scenarios and improve model performance. YOLOv11 provides multiple versions of different scales, including YOLOv11n (ultra-lightweight), YOLOv11s (small), YOLOv11m (medium), YOLOv11l (standard), and YOLOv11x (extra-large) to meet different needs. Compared with previous versions of YOLO, YOLOv11 has made improvements in the following aspects:

1) backbone network. YOLOv11 introduced the C3k2 module [22], replacing the C2f module in YOLOv8. The C3k2 module uses smaller convolution kernels to improve computational efficiency while maintaining performance. It retained the spatial pyramid pooling fast (SPPF) [23] module and introduced the cross-stage partial and spatial attention (C2PSA) module [24], enhancing the spatial attention of feature maps and improving detection accuracy;

2) neck structure. In the neck structure, YOLOv11 replaced the C2f module with the C3k2 module, improving the speed and performance of feature aggregation. Through the C2PSA module, it enhanced spatial attention, enabling the model to focus more effectively key areas in the image and improve the detection accuracy of small targets and partially occluded targets;

3) head structure. In the head structure, YOLOv11 used multiple C3k2 modules to process and optimise feature maps, improving the model's detection accuracy.

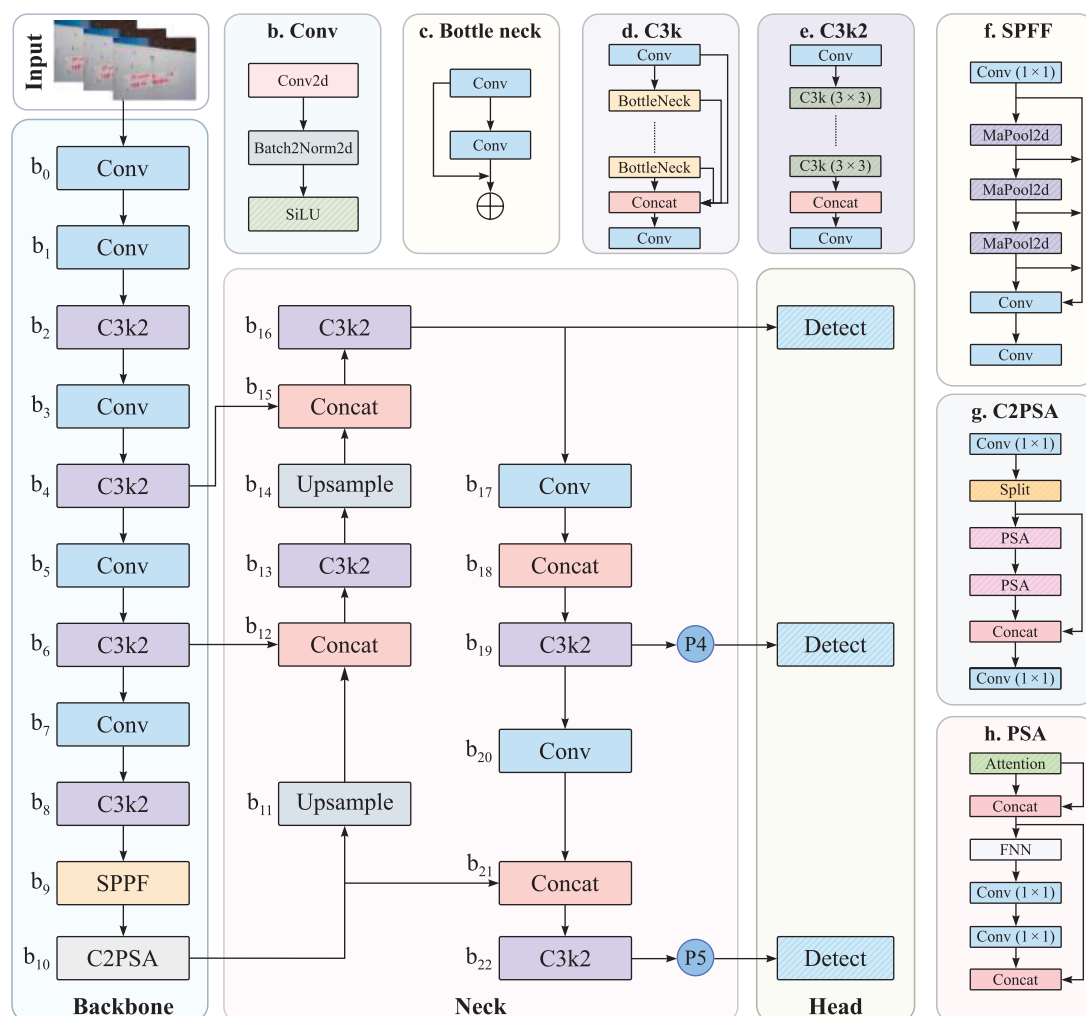


Fig. 1. YOLOv11 network structure diagram

¹Jocher G., Chaurasia A., Qiu J. Ultralytics YOLO (version 8.0.0) [Electronic resource]. URL: <https://github.com/ultralytics/ultralytics> (date of access: 12.01.2025).

Meanwhile, YOLOv11 model adopted multi-scale training and data augmentation techniques during training, further improving the model's generalisation ability and detection accuracy. Compared with its predecessors, YOLOv11 model has made significant improvements in inference speed and accuracy. In summary, YOLOv11 model has made significant progress in the precision and efficiency of object detection through the introduction of innovative technologies such as the C3k2 module and the C2PSA module. It not only performs well in models of different scales but also demonstrates strong adaptability and practicality in various application scenarios.

RLD-YOLO model

This paper takes YOLOv11n as the baseline and targets the small target detection problem in UAV aerial photography images. YOLOv11n still has high rates of missed and false detections in complex backgrounds, dense targets, and small target detection. Therefore, an improved model RLD-YOLO based on YOLOv11n is proposed. The model significantly improves detection accuracy and robustness while maintaining lightweight characteristics. The specific improvements are as follows:

1) RepConv structural reparameterisation technology. The RepConv module is introduced in the initial layer and key paths of the backbone. RepConv uses a multi-branch structure during training to enhance feature expression capabilities and merges into a single 3×3 convolution through structural reparameterisation during inference, reducing computational load;

2) LKAConv large kernel attention module. The LKAConv module is introduced in the backbone and head parts, combining 7×7 depthwise separable convolution with a spatial attention mechanism to expand the receptive field to 120×120 pixels. LKAConv can effectively capture the context information of small targets, reducing the missed detection rate;

3) DASI dynamic adaptive fusion module. The DASI module is introduced in the neck part, dynamically adjusting the fusion ratio of multi-scale features through learnable weights. DASI optimises the static fusion defect of the traditional FPN + PAN structure and enhances the model's adaptability to dense targets and scale changes;

4) detection and feature enhancement. The head part retains three detection layers P3, P4, and P5, and dynamically fuses multi-scale features through the DASI module to enhance the model's ability to recognise targets of different scales;

5) lightweight design and efficiency optimisation. The C3k2 module of YOLOv11 is retained to reduce model parameters and computational load. A dynamic data augmentation strategy is adopted to improve the model's accuracy for scale changes and occlusions in UAV perspectives.

The improved model network structure is shown in fig. 2.

RepConv. The multi-branch structure of RepConv can capture richer feature patterns during training, enhancing the model's discriminative ability for complex backgrounds and small targets. In the RLD-YOLO model, RepConv is introduced in the initial layer, which is responsible for extracting basic image features such as edges and textures. Through convolution operations, the input image is convolved with the convolution kernel using a sliding window calculation to generate feature maps, which are crucial for the construction of subsequent high-level semantic information. The core idea of RepConv is to use a multi-branch structure during training to enhance feature expression capabilities and merge the branches into a single convolution through mathematical equivalence transformations during inference, reducing computational load. During the inference stage, RepConv merges the above branches into an equivalent 3×3 convolution kernel through structural reparameterisation. This process can be regarded as reparameterising the basic weights, enabling the new convolution kernel to learn more diverse representations. The computational load is the same as that of standard convolution, but the feature expression capability is stronger. The principle diagram of RepConv is shown in fig. 3.

The core idea of RepConv is to enhance the model's representation capability by establishing connections between convolution kernel parameters. For example, in the depthwise separable convolution, each convolution kernel channel focuses only on one channel of the input feature map. RepConv uses refocusing transformation to enable each convolution kernel channel to focus on the features of other channels, thereby learning richer representations. This process can be described by the following formula:

$$W_t = T(W_b, W_r),$$

where W_b is the basic weight; W_r is the trainable parameter of the refocusing transformation; T is the refocusing transformation function; W_t is the generated new convolution kernel parameter [25].

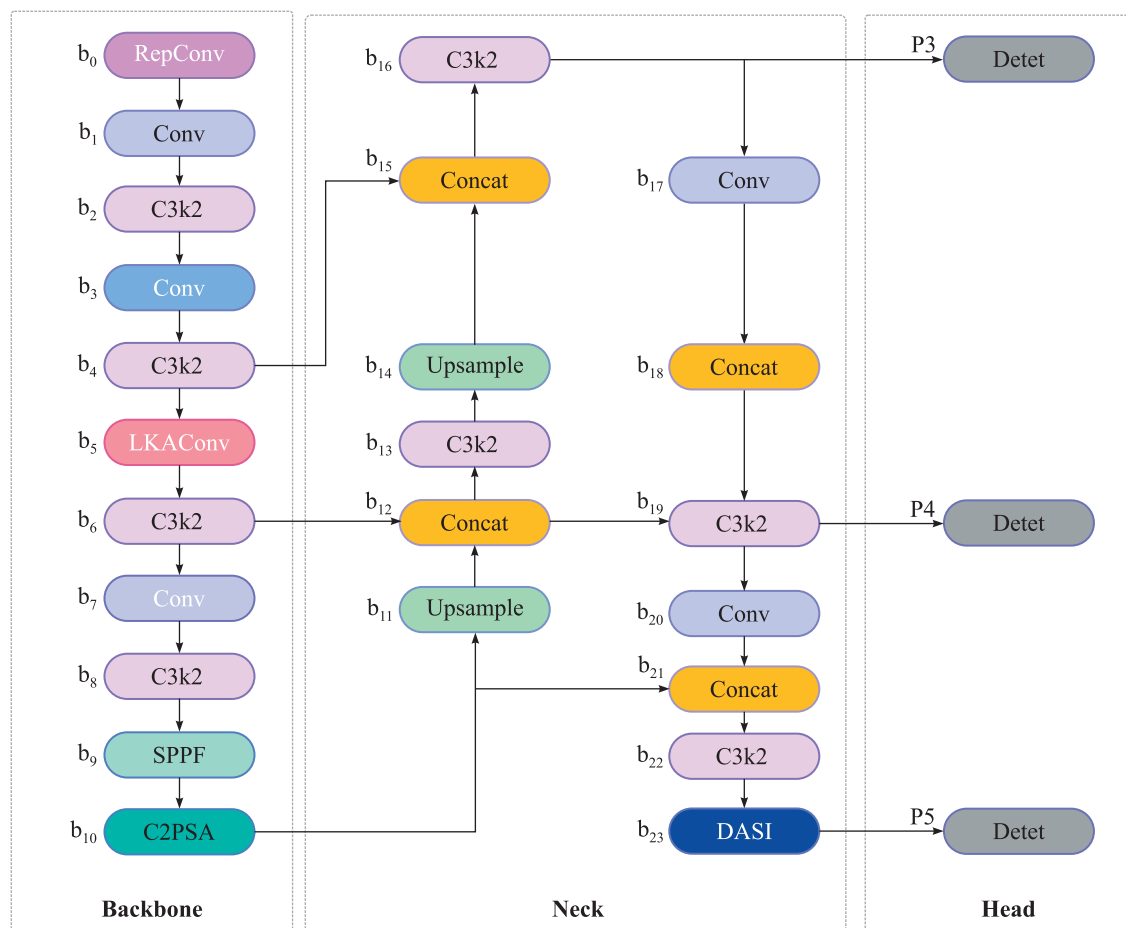


Fig. 2. RLD-YOLO network structure diagram

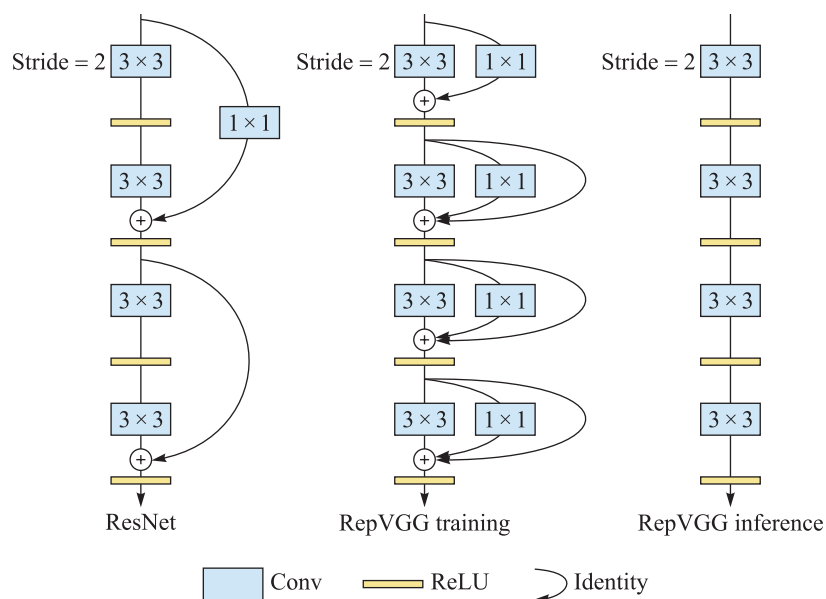


Fig. 3. RepConv principle diagram

LKAConv. LKAConv is a key component of the LKA mechanism, used to implement the decomposition of large convolution kernels. LKA captures long-range dependencies by decomposing a large convolution kernel into multiple small convolution kernels and dilated convolutions. This decomposition method not only retains local structural information but also effectively captures long-range dependencies while maintaining linear complexity. The principle of large convolution kernels is shown in fig. 4 [26].

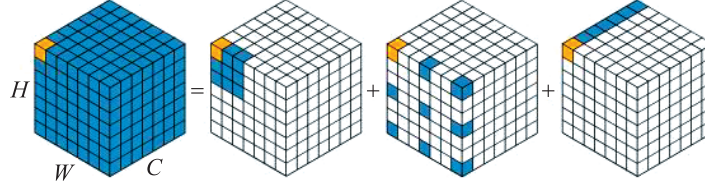


Fig. 4. Decomposition diagram of large kernel convolution

The core formula of LKA is as follows:

$$\text{Attention} = \text{Conv}_{1 \times 1}(\text{DW-D-Conv}(\text{DW-Conv}(F))),$$

$$\text{Output} = \text{Attention} \otimes F,$$

where F is the input feature map; DW-Conv represents depthwise separable convolution; DW-D-Conv represents dilated depthwise separable convolution; $\text{Conv}_{1 \times 1}$ represents 1×1 convolution; \otimes represents element-wise multiplication.

In this study, we introduced LKAConv to enhance the feature extraction capability of the YOLOv11 model, especially when processing UAV datasets. LKAConv is a new type of convolution module that combines the advantages of convolution and self-attention mechanisms, effectively capturing long-range dependencies and local structural information. In our model, the fifth layer adopted LKAConv with parameter settings of 512 input channels, a 3×3 convolution kernel, and a dilation rate of two. In addition, the downsampling process was mainly completed by standard convolution and LKAConv. The features extracted by LKAConv were fused with the features of the previous layers through concatenation and convolution layers to form rich feature maps. This fusion method effectively combined multi-scale features, further enhancing the model's detection performance.

DASI. Since small targets occupy fewer pixels in the image and the background is complex, high-dimensional features may lose information about small targets during multiple downsampling processes, while low-dimensional features may not provide sufficient contextual information. The DASI module enhances the model's ability to capture features of different scales by adaptively selecting and fusing features of different dimensions, increasing the saliency of small targets and thus improving detection performance. The main function of the DASI module is to perform selective fusion of features at different dimensions of the feature map. The principle diagram is shown in fig. 5.

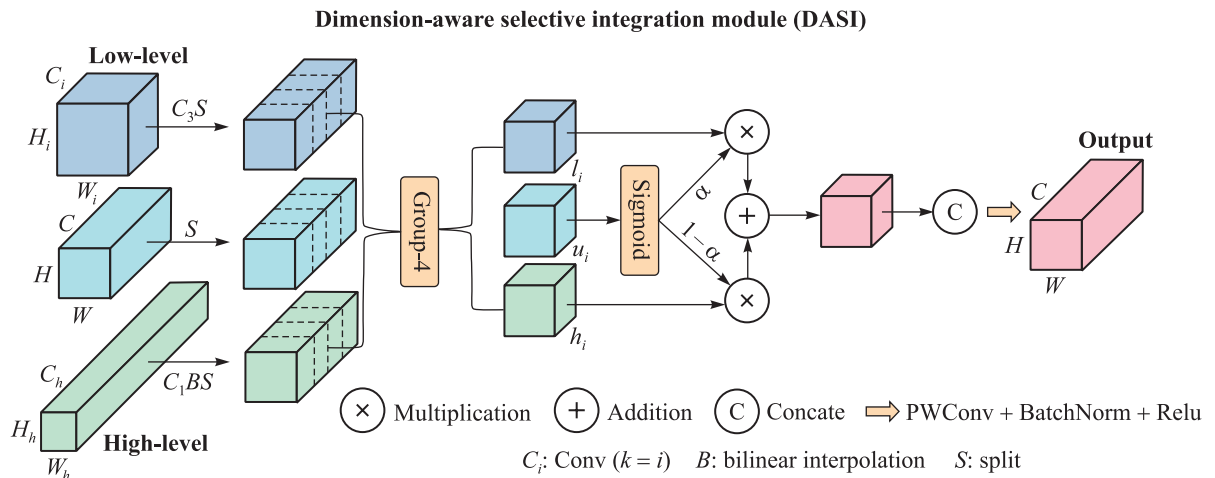


Fig. 5. Detail structure of DASI

Specifically, it aligns high-dimensional and low-dimensional feature maps and achieves feature adaptive fusion through channel splitting and selective aggregation [27]. This process can be described by the following formula:

$$\alpha = \sigma(u_i), u'_i = \alpha l_i + (1 - \alpha) h_i,$$

$$F'_u = [u'_1, u'_2, u'_3, u'_4], \hat{F}_u = \delta(B(\text{Conv}(F'_u))),$$

where σ represents the sigmoid activation function; u_i , l_i and h_i represent the i channel segment of the current layer, low-dimensional, and high-dimensional feature maps respectively; α is the weight calculated from the current layer's features, used to control the fusion ratio of low-dimensional and high-dimensional features; F'_u is the fused feature map; δ and B represent the ReLU (rectified linear unit) activation function and batch normalisation operation respectively; Conv represents the convolution operation.

Through this design, the DASI module can adaptively select appropriate features for the fusion based on the size and characteristics of the target, thereby enhancing the model's ability to detect small targets. In UAV dataset detection tasks, the DASI module effectively addresses the problems of small target loss and background interference, significantly improving the model's detection accuracy and maintaining stable functionality.

Dataset

The experiments are based on the VisDrone2019 [28] UAV object detection dataset, which is a large-scale UAV perspective dataset obtained by the AISKEYEYE team from the machine learning and data mining laboratory at Tianjin University. The dataset contains 10 209 images with a total of 471 266 annotated targets covering 13 categories (such as pedestrians, cars, trucks, buses, etc.). The validation set contains 38 759 instances, with small targets (pixel area is less than 32×32) accounting for 68.2 %, and dense scenes (more than 100 targets per image) accounting for 45 %, fully reflecting the detection challenges of UAV perspectives.

Experimental results and analysis

Experimental environment and configuration. The experimental platform is a Windows (version 11) 64-bit operating system, and the experiment is based on the deep learning framework PyTorch (version 2.4.0) and the corresponding CUDA (version 2.4.1). We used an NVIDIA GeForce RTX 4060 GPU for training, with the development language Python (version 3.9) and the CUDA (version 12.41). The specific environmental configuration parameters are shown in table 1. Parameters not provided in this paper use the default parameters of the official YOLOv11n.

Table 1

Experimental configuration

Parameters	Values
epochs:	100
batch:	16
imgsz:	640
device:	0
optimizer:	auto
amp:	TRUE

Comparison of different attention mechanisms. In the experiments with different attention mechanisms, EfficientNetv2 is a lightweight attention mechanism [29] widely used in other object detection studies. However, in this experiment, the EfficientNetv2 model had the shortest post-processing time (0.8 ms), but its accuracy was significantly lower than other had. EMA is an efficient multi-scale attention module [30] that enhances the ability to fuse multi-scale features. In this experiment, the EMA module had a longer inference time (1.9 ms), but its accuracy was higher, suitable for scenarios with low real-time requirements. Squeeze-and-excitation (SE) channel attention mechanism [31] mainly improves the model's performance by compressing and exciting the input features. In this experiment, the SE module had the shortest inference time (1.6 ms), but its accuracy was low (mAP50 = 29.5). Simple attention module (SimAM) is an attention mechanism based on the local self-similarity of feature maps [32]. It dynamically adjusts the weight of each pixel by calculating the similarity between each pixel and its surrounding pixels in the feature map, thereby enhancing important features and suppressing irrelevant features. In this experiment, the overall performance of SimAM was not outstanding. StokenAttention is a method that improves the efficiency of capturing global dependencies by sampling super-tokens from

visual tokens through sparse associative learning [33], but the improvements were not significant enough. SwinTransformer is a transformer module based on the window self-attention [34], suitable for long-range dependency modelling. SwinTransformer had the highest computational load (16.6 GFLOPs), and although its accuracy was high, its computational complexity limited its deployment on edge devices. RLD-YOLO had moderate parameter quantity (3.21 mln) and computational load (6.9 GFLOPs), suitable for real-time application scenarios. RLD-YOLO maintained high accuracy (mAP50 = 30.3) while keeping the inference time the same as the baseline model (1.7 ms), performing excellently in terms of accuracy, inference time, and computational efficiency. In summary, the RLD-YOLO model proposed in this paper, through the collaborative design of large kernel attention, dynamic fusion, and structural reparameterisation, provides an efficient solution for UAV object detection.

Table 2

Comparison of different attention mechanisms on the VisDrone2019-DET dataset

Model	mAP50, %	mAP50-95, %	Inference, ms	Postprocess per image, ms	Parameters, mln	GFLOPs
YOLOv11n (baseline)	29.7	17.1	1.7	1.1	2.58	6.3
YOLOv11n-EfficientNetv2	18.8 ↓	10.3 ↓	1.9 ↓	0.8 ↑	2.1 ↑	3.0 ↑
YOLOv11n-EMA_attention	30.2 ↑	17.1	1.9 ↓	1.2 ↓	2.58	6.3
YOLOv11n-SE_attention	29.5	16.9	1.6 ↑	1.2 ↓	2.58	6.3
YOLOv11n-SimAM	29.4	16.8	1.8	1.1	2.58	6.3
YOLOv11n-StackedAttention	29.9	17.0	1.8	1.1	2.85	6.5
YOLOv11n-SwinTransformer	29.9	17.2 ↑	1.8	1.2 ↓	2.91	16.6 ↓
RLD-YOLO	30.3 ↑	17.2 ↑	1.7	1.0	3.21	6.9

Cross-model comparison experiment. To verify the comprehensive performance of the proposed RLD-YOLO model in UAV object detection tasks, we compared it with mainstream lightweight versions of the YOLO series, including YOLOv5 [35], YOLOv6 [36], YOLOv8, YOLOv10 [37], and YOLOv11. Through the experiments, we found that in terms of accuracy, RLD-YOLO achieved an mAP50 of 30.3 %, which is 0.6 % higher than the baseline YOLOv11n, and 1.2 % higher than YOLOv8n and YOLOv10n respectively. The mAP50-95 metric (17.2 %) was also the best, indicating stronger performance in complex scenes (such as occlusion, small targets). The inference time of RLD-YOLO was 1.7 ms, the same as YOLOv11n and YOLOv6n, but the post-processing time was optimised to 1.0 ms (a 9.1 % reduction compared to YOLOv11n). RLD-YOLO had a parameter quantity of 3.21 mln and a computational load of 6.9 GFLOPs, significantly lower than YOLOv5n (11.8 GFLOPs) and YOLOv6n (11.5 GFLOPs). RLD-YOLO achieved the best balance between precision and efficiency while maintaining real-time performance (1.7 ms/frame) through dynamic fusion and structural reparameterisation techniques (table 3).

Table 3

Comparison of different models on the VisDrone2019-DET dataset

Model	P, %	R, %	mAP50, %	mAP50-95, %	Speed preprocess, ms	Inference, ms	Postprocess per image, ms	Parameters, mln	GFLOPs
YOLOv5n	38.7	27.9	27.3	15.4	0.2	1.7	3.2	4.23	11.8
YOLOv6n	36.3	28	27.1	15.6	0.2	1.7	1.3	4.16	11.5
YOLOv8n	39.8	30.2	29.1	16.5	0.2	2.0	0.6	2.70	8.2
YOLOv10n	40.2	29.9	29.1	16.3	0.2	1.4	3.3	2.50	7.1
YOLOv11n	40.2	30.8	29.7	17.1	0.1	1.7	1.1	2.58	6.3
RLD-YOLO	41.5 ↑	31.1 ↑	30.3 ↑	17.2	0.2	1.7	1.0	3.21	6.9

YOLOv11n comparison experiment. UAVs have high real-time requirements for small target detection tasks, making lightweight model design very necessary. The goal in designing a lightweight model is to reduce the model size and computational load while maintaining or improving the model's detection accuracy as much as possible. To verify the effectiveness of the proposed modules (LKACnv, RepCnv, DASI) for UAV object detection tasks, we introduced different modules step by step on the YOLOv11n baseline model and designed the following ablation experiment variants:

- 1) YOLOv11n. The baseline model is without any improvement modules;
- 2) YOLOv11n + LKACnv. The LKACnv large kernel attention module is integrated into the backbone;
- 3) YOLOv11n + RepCnv. The RepCnv structural reparameterisation technology is used in the initial layer;
- 4) YOLOv11n + DASI. The DASI dynamic adaptive fusion module is introduced in the neck part;
- 5) RLD-YOLO. The combined use of LKACnv, RepCnv, and DASI modules.

Table 4

Experimental results for YOLOv11 for VisDrone2019-DET dataset

Model	mAP50, %	Δ mAP50, %	mAP50-95, %	Inference, ms	Parameters, mln	GFLOPs
YOLOv11n (baseline)	29.7	–	17.1	1.7	2.58	6.3
YOLOv11n + LKACnv	30.1	1.35 ↑	17.3 ↑	2.0	2.64	6.7
YOLOv11n + RepCnv	29.8	0.34 ↑	17.1	1.8	2.58	6.3
YOLOv11n + DASI	29.9	0.67 ↑	17.0	1.9	3.15	6.5
RLD-YOLO	30.3	2.02 ↑	17.2 ↑	1.7	3.21	6.9

The LKACnv module improved the accuracy by 1.35 % (29.7 → 30.1), indicating that the large kernel attention mechanism effectively enhanced the feature extraction capability of small targets. However, the inference time increased up to 2.0 ms (+17.6 %), and the computational load increased up to 6.7 GFLOPs, mainly due to the additional overhead of the 7×7 depthwise separable convolution. The RepCnv module had the same parameter quantity as the baseline, with an inference time of 1.8 ms (+5.9 %) and an mAP50 improvement of only 0.34 % (29.7 → 29.8), indicating that using RepCnv alone had limited accuracy gains and required the synergy with other modules. The DASI module improved mAP50-95 by 0.6 % (17.1 → 17.2), indicating that dynamic weight allocation optimised multi-scale feature interaction. However, mAP50-95 decreased. After jointly using the three modules, the RLD-YOLO model significantly improved mAP50 by 2.02 % (29.7 → 30.3), and the inference time returned to the baseline level (1.7 ms), with the final computational load only increasing up to 6.9 GFLOPs (+9.5 %). The experiment showed that the synergistic design of LKACnv and RepCnv achieved a 2.02 % improvement in mAP50 over the baseline model while maintaining real-time performance. It is worth noting that introducing the DASI module alone increased latency, but this negative impact could be completely offset by combining it with structural reparameterisation technology. In summary, the model proposed in this paper is better suited for small target detection tasks in UAV images.

Object detection experiments. To demonstrate more intuitively the detection effect of the proposed RLD-YOLO method, YOLOv11n and RLD-YOLO models were used to detect several different UAV aerial photography scenes in the VisDrone2019-DET dataset, and the detection effect comparison is shown in fig. 6. For small target dense distribution scenes, as it is shown in fig. 6, *a*, the improved algorithm can detect smaller targets further away compared to the YOLOv11n algorithm, such as the pedestrians in the upper right corner of the image. For small target detection in scenes with background interference, as it is shown in fig. 6, *b*, the RLD-YOLO algorithm can detect more targets. For dark light scenes, as it is shown in fig. 6, *c*, RLD-YOLO has a higher accuracy, such as the building on the left side of the road in the lower left corner of the image, which YOLOv11n detected as a car. For scenes with occluded targets, as it is shown in fig. 6, *d*, RLD-YOLO has a higher accuracy, and even if a part of an object is in the shadow or blocked by a large tree, RLD-YOLO can better detect the type of the object. In scenes with large scale changes, as it is shown in fig. 6, *e*, for small targets and very small targets such as bicycles, motorcycles, and pedestrians on both sides, the recognition accuracy has been improved to a certain extent. The YOLOv11n algorithm has problems of missed and false detections for small targets, while RLD-YOLO can make up for this problem.

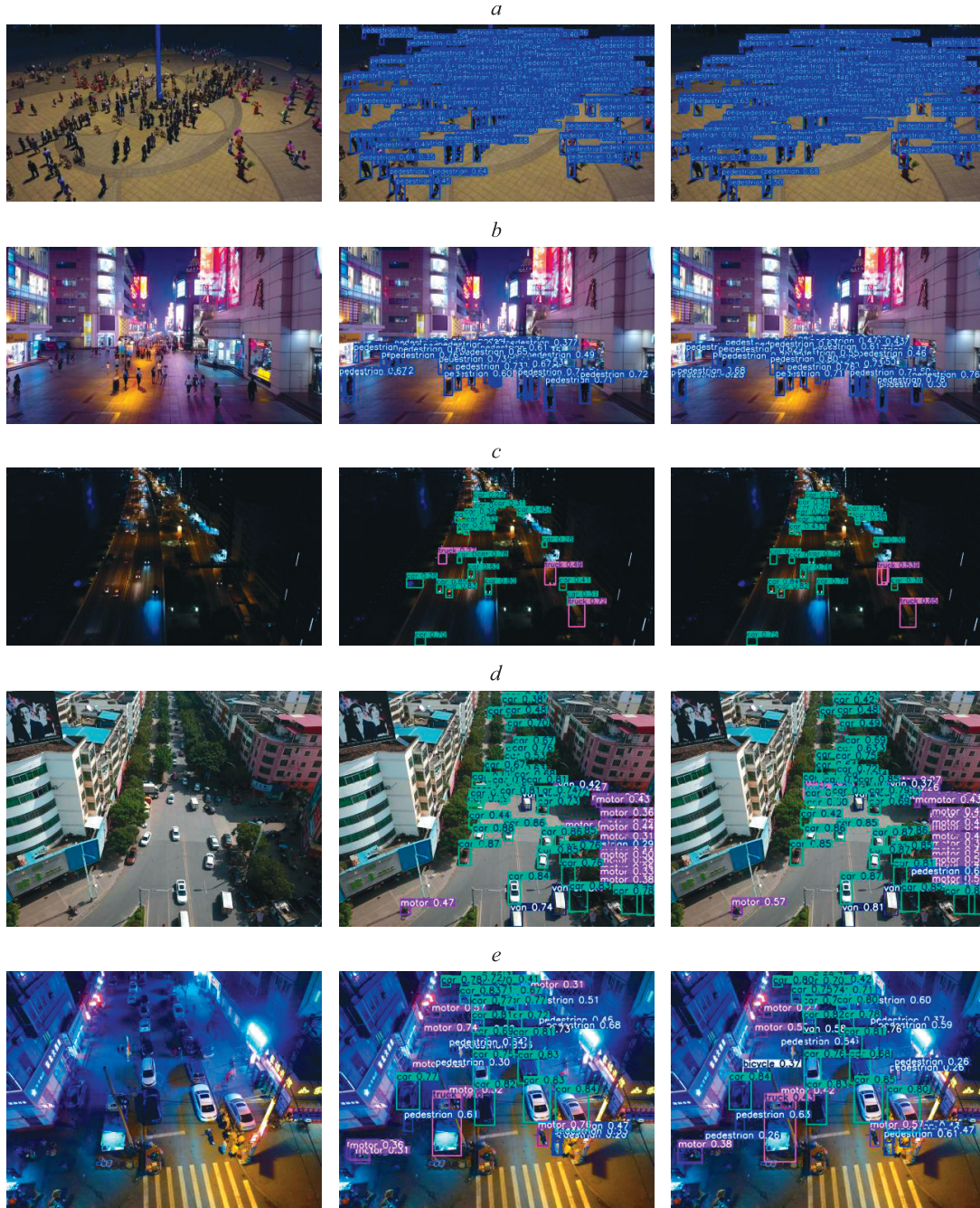


Fig. 6. Detection effect comparison diagrams in various scenes:
small target-intensive scenarios (a), complex background scenes (b),
dark light scenes (c), target obscured scenes (d), multi-scale target scenarios (e).
The left side is the original image, the middle one is the algorithm detection effect diagram
of YOLOv11n, and the right side is the algorithm detection effect diagram of RLD-YOLO

Conclusions

This paper proposes an improved YOLOv11n lightweight small object detection algorithm for UAV images RLD-YOLO. The core innovation of RLD-YOLO lies in the collaborative design of three modules. Through RepConv structural reparameterisation technology, the training and inference stages are decoupled, enhancing feature expression capabilities while maintaining inference efficiency. Through the LKAConv large kernel attention module's depthwise separable convolution and spatial attention mechanism, the receptive field is expanded, significantly enhancing the feature capture ability of small targets. Finally, the DASI dynamic adaptive fusion module is introduced, with learnable weights dynamically adjusting the fusion ratio of multi-scale features, optimising the static fusion defect of traditional FPN, and improving the recall rate in dense scenes.

Compared with the original YOLOv11n model, RLD-YOLO has comprehensively outperformed YOLOv11n in performance. The YOLOv11n model, targeting small target detection in UAV aerial photography images, adaptability to dense scenes, and the demand for edge device deployment, has achieved collaborative optimisation of precision and efficiency through modular innovation design and technological integration. However, the model still faces some challenges and issues that need to be addressed. Specifically, there are the following problems, Firstly, the bottleneck of extremely small target detection, with a high missed detection rate for targets smaller than 16×16 pixels, which requires further optimisation through super-resolution preprocessing. Secondly, the adaptability to complex weather conditions, such as maintaining high detection accuracy in heavy rain and dense fog scenes. Future work will focus on improving the feature extraction capabilities of the network model to capture more subtle and distinctive features, in order to improve the classification performance for similar targets and increase the detection accuracy of extremely small targets, reducing missed detections.

References

1. Kumar S, Yadav D, Gupta H, Verma OP, Ansari IA, Ahn CW. A novel YOLOv3 algorithm-based deep learning approach for waste segregation: towards smart waste management. *Electronics*. 2021;10(1):1–20. DOI: 10.3390/electronics10010014.
2. Peng C, Vougioukas SG. Deterministic predictive dynamic scheduling for crop-transport co-robots acting as harvesting aids. *Computers and Electronics in Agriculture*. 2020;178:105742. DOI: 10.1016/j.compag.2020.105742.
3. Wu K, Wang X. Aligning pixel values of DMSP and VIIRS nighttime light images to evaluate urban dynamics. *Remote Sensing*. 2022;11(12):1463. DOI: 10.3390/rs11121463.
4. Klemas VV. Sensing from unmanned aerial vehicles: an overview. *Journal of Coastal Research*. 2015;31(5):1260–1267. DOI: 10.2112/JCOASTRES-D-15-00005.1.
5. Lin S, Jin L, Chen Z. Real-time monocular vision system for UAV autonomous landing in outdoor low-illumination environments. *Sensors*. 2021;21(18):6226. DOI: 10.3390/s21186226.
6. Zhang Y, Carballo A, Yang H, Takeda K. Perception and sensing for autonomous vehicles under adverse weather conditions: a survey. *Robotics and Autonomous Systems*. 2023;196:146–177. DOI: 10.1016/j.isprsjprs.2022.12.021.
7. Liu W, Anguelov D, Erhan D, Szegedy C, Reed S, Fu C-Y, et al. SSD: single shot multibox detector. In: Leibe B, Matas J, Sebe N, Welling M, editors. *Computer vision – ECCV2016. Proceedings of the 14th European conference on computer vision; 2016 October 11–14; Amsterdam, the Netherlands*. Cham: Springer; 2016. p. 21–37. DOI: 10.1007/978-3-319-46448-0_2.
8. Ouyang D, He S, Zhang G, Luo M, Guo H, Zhan J, et al. Efficient multi-scale attention module with cross-spatial learning. In: Institute of Electrical and Electronics Engineers. *Proceedings of the 2023 IEEE International conference on acoustics, speech and signal processing; 2023 June 4–10; Rhodes Island, Greece*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2023. p. 1–5. DOI: 10.1109/ICASSP49357.2023.10096516.
9. Wu X, Ablameyko SV. Efficient detection of building in remote sensing images using an improved YOLOv10 network. *Informatics*. 2025;22(2):33–47. DOI: 10.37661/1816-0301-2025-22-2-33-47.
10. Zhang S, Ma G, Yang W, Zuo F, Ablameyko SV. Car parking detection in images by using a semi-super-vised modified YOLOv5 model. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2023;3:72–81. EDN: XVDRSN.
11. Chen H, Liu D, Yan X. Infrared image UAV target detection algorithm based on IDOU-YOLO. *Journal of Applied Optics*. 2024;45(4):723–731. DOI: 10.5768/JAO202445.0402001.
12. Zhang Z. Drone-YOLO: an efficient neural network method for target detection in drone images. *Drones*. 2023;7(8):526. DOI: 10.3390/drones7080526.
13. Huang Y, Qu J, Wang H, Yang J. An all-time detection algorithm for UAV images in urban low altitude. *Drones*. 2024;8(7):332. DOI: 10.3390/drones8070332.
14. Sunkara R, Luo T. No more strided convolutions or pooling: a new CNN building block for low-resolution images and small objects. In: Amini MR, Canu S, Fischer A, Guns T, Kralj Novak P, Tsoumakas G, editors. *Machine learning and knowledge discovery in databases (ECML PKDD 2022). Proceedings of the European conference; 2022 September 19–23; Grenoble, France. Part 3*. Cham: Springer; 2023. p. 443–459 (Goebel R, Wahlster W, Zhou Z-H, editors. *Lecture notes in computer science; volume 13715*). DOI: 10.1007/978-3-031-26409-2_27.
15. Hu J, Shen L, Sun G. Squeeze-and-excitation networks. In: Computer Vision Foundation. *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition; 2018 June 18–22; Salt Lake City, USA*. Salt Lake City: Computer Vision Foundation; 2018. p. 7132–7141.
16. He A, Li X, Wu X, Su C, Chen J, Xu S, et al. ALSS-YOLO: an adaptive lightweight channel split and shuffling network for TIR wildlife detection in UAV imagery. arXiv:2409.06259 [Preprint]. 2024 [cited 2024 October 20]: [19 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2409.06259>.
17. Liu S, He H, Zhang Z, Zhou Y. LI-YOLO: an object detection algorithm for UAV aerial images in low-illumination scenes. *Drones*. 2024;8(11):653. DOI: 10.3390/drones8110653.
18. Wu X, Li W, Hong D, Tao R, Du Q. Deep learning for unmanned aerial vehicle-based object detection and tracking: a survey. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine*. 2022;10(1):91–124. DOI: 10.1109/MGRS.2021.3115137.
19. Lyu Y, Zhang T, Li X, Liu A, Shi G. LightUAV-YOLO: a lightweight object detection model for unmanned aerial vehicle image. *Journal of Supercomputing*. 2025;81:105. DOI: 10.1007/s11227-024-06611-x.
20. Chen N, Li Y, Yang Z, Lu Z, Wang S, Wang J. LODNU: lightweight object detection network in UAV vision. *Journal of Supercomputing*. 2023;79:10117–10138. DOI: 10.1007/s11227-023-05065-x.
21. Sun W, Dai L, Zhang X, Chang P, He X. RSOD: real-time small object detection algorithm in UAV-based traffic monitoring. *Applied Intelligence*. 2022;52:8448–8463. DOI: 10.1007/s10489-021-02893-3.
22. He K, Zhang X, Ren S, Sun J. Spatial pyramid pooling in deep convolutional networks for visual recognition. In: Fleet D, Pajdla T, Schiele B, Tuytelaars T, editors. *Computer vision – ECCV2014. Proceedings of the 13th European conference on computer vision; 2014 September 6–12; Zurich, Switzerland*. Cham: Springer; 2014. p. 346–361. DOI: 10.1007/978-3-319-10578-9_23.

23. Khanam R, Hussain M. YOLOv11: an overview of the key architectural enhancements. arXiv:2410.17725 [Preprint]. 2024 [cited 2024 December 17]: [9 p.]. Available from: <https://arxiv.org/pdf/2410.17725>.
24. Ding X, Zhang X, Ma N, Han J, Ding G, Sun J. RepVGG: making VGG-style convnets great again. arXiv:2101.03697 [Preprint]. 2021 [cited 2024 November 14]: [10 p.]. Available from: <https://arxiv.org/pdf/2101.03697>.
25. Cai Z, Ding X, Shen Q, Cao X. RefCovn: re-parameterized refocusing convolution for powerful ConvNets. arXiv:2310.10563 [Preprint]. 2023 [cited 2024 December 21]: [18 p.]. Available from: <https://arxiv.org/pdf/2310.10563>.
26. Guo M-H, Lu CZ, Liu ZN, Cheng MM, Hu SM. Visual attention network. arXiv:2202.09741 [Preprint]. 2022 [cited 2024 October 25]: [12 p.]. Available from: <https://arxiv.org/pdf/2202.09741>.
27. Xu S, Zheng S, Xu W, Xu R, Wang C, Zhang J, et al. HCF-Net: hierarchical context fusion network for infrared small object detection. arXiv:2403.10778 [Preprint]. 2024 [cited 2025 January 20]: [6 p.]. Available from: <https://arxiv.org/pdf/2403.10778>.
28. Zhu P, Wen L, Du D, Bian X, Fan H, Hu Q, et al. Detection and tracking meet drones challenge. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2021;44(11):7380–7399. DOI: 10.1109/TPAMI.2021.3119563.
29. Tan M, Le QV. EfficientNetv2: smaller models and faster training. arXiv:2104.00298 [Preprint]. 2021 [cited 2024 December 18]: [11 p.]. Available from: <https://arxiv.org/pdf/2104.00298>.
30. Ouyang D, He S, Zhang G, Luo M, Guo H, Zhan J, et al. Efficient multi-scale attention module with cross-spatial learning. In: Institute of Electrical and Electronics Engineers. *Proceedings of the 2023 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing; 2023 June 4–10; Rhodes Island, Greece*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2023. p. 1–5. DOI: 10.1109/ICASSP49357.2023.10096516.
31. Hu J, Shen L, Albanie S, Sun G, Wu E. Squeeze-and-excitation networks. arXiv:1709.01507 [Preprint]. 2017 [cited 2024 November 13]: [13 p.]. Available from: <https://arxiv.org/pdf/1709.01507>.
32. Yang L, Zhang R, Li L, Xie X. SimAM: a simple, parameter-free attention module for convolutional neural networks. In: Meila M, Zhang T, editors. *Proceedings of the 38th International conference on machine learning; 2021 July 18–24* [Internet]. [S. l.]: [s. n.]; 2021 [cited 2024 December 27]. p. 11863–11874 (Proceedings of machine learning research; volume 139). Available from: <https://proceedings.mlr.press/v139/yang21o/yang21o.pdf>.
33. Huang H, Zhou X, Cao Ji, He R, Tan T. Vision transformer with super token sampling. arXiv:2211.11167 [Preprint]. 2022 [cited 2024 December 28]: [13 p.]. Available from: <https://arxiv.org/pdf/2211.11167>.
34. Liu Z, Lin Y, Cao Y, Hu H, Wei Y, Zhang Z, et al. Swin transformer: hierarchical vision transformer using shifted windows. arXiv:2103.14030 [Preprint]. 2021 [cited 2025 January 10]: [14 p.]. Available from: <https://arxiv.org/pdf/2103.14030>.
35. Bochkovskiy A, Wang CY, Liao HYM. YOLOv4: optimal speed and accuracy of object detection. arXiv:2004.10934 [Preprint]. 2020 [cited 2025 January 3]: [17 p.]. Available from: <https://arxiv.org/pdf/2004.10934>.
36. Geetha AS. What is YOLOv6? A deep insight into the object detection model. arXiv:2412.13006 [Preprint]. 2024 [cited 2024 November 30]: [16 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2412.13006>.
37. Wang A, Chen H, Liu L, Chen K, Lin Z, Han J, et al. YOLOv10: real-time end-to-end object detection. arXiv:2405.14458 [Preprint]. 2024 [cited 2024 December 23]: [21 p.]. Available from: <https://arxiv.org/pdf/2405.14458>.

Received 04.03.2025 / revised 08.07.2025 / accepted 08.07.2025.

УДК 519.2, 519.7, 519.8

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДСТВ С УЧЕТОМ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ О НАДЕЖНОСТИ ВЫПУСКАЕМЫХ ПРИБОРОВ

М. С. БАРКЕТОВ¹⁾

¹⁾Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Рассматривается задача распределения средств среди исполнителей проекта с учетом статистической информации о надежности выпускаемых приборов. Приводятся формулировки математического программирования, необходимые для построения оптимальной стратегии распределения. Для учета влияния потраченной суммы денег на количество отказов компонента предлагается построить линейную или обобщенную линейную регрессию, коэффициенты которой используются в формулировках математического программирования.

Ключевые слова: распределение средств; математическое программирование; стандартная ошибка случайной величины; математическая статистика.

Благодарность. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф23РНФ-017).

Образец цитирования:

Баркетов МС. Распределение средств с учетом статистической информации о надежности выпускаемых приборов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;2:118–125.
EDN: SVJUOO

For citation:

Barketau MS. Distribution of finances taking into account statistical information on the reliability of the items produced. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;2:118–125. Russian.
EDN: SVJUOO

Автор:

Максим Сергеевич Баркетов – кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник лаборатории математической кибернетики.

Author:

Maksim S. Barketau, PhD (physics and mathematics), docent; senior researcher at the laboratory of mathematical cybernetics.
barketau@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0001-5209-0149>

DISTRIBUTION OF FINANCES TAKING INTO ACCOUNT STATISTICAL INFORMATION ON THE RELIABILITY OF THE ITEMS PRODUCED

M. S. BARKETAU^a

^aUnited Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus,
6 Surganova Street, Minsk 220012, Belarus

Abstract. This paper examines the problem of distribution of finances among project contractors taking into account statistical information on the reliability of the items produced. Mathematical programming formulations necessary for constructing an optimal strategy of distribution are presented. To account for the influence of the spent amount of money on the number of component failures, it is proposed to build a linear or generalised linear regression, the coefficients of which are used in mathematical programming formulations.

Keywords: distribution of finances; mathematical programming; standard error of a random variable; mathematical statistics.

Acknowledgements. This work was carried out with partial financial support from the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project F23RNF-017).

Введение

Предполагается, что организация производит сложный прибор, который включает в себя n компонентов. Известна статистика по отказам каждого компонента за определенный период, т. е. количество отказов компонента i за определенный период является случайной величиной X_i , из распределения которой экспериментальным путем получено некоторое количество значений. Будем считать, что статистика собрана для каждого прибора, т. е. для k произведенных приборов указано количество отказов каждого компонента за определенный период. Другими словами, даны векторы $x_j = (x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,n})$, $1 \leq j \leq k$, где $x_{j,i}$ – количество отказов компонента i прибора j за определенный период. Также дан некоторый неотрицательный бюджет R потенциальных инвестиций, который необходимо распределить между отделами, занимающимися разработкой каждого компонента. Предполагается, что один компонент производится одним отделом. Таким образом, допустимое разбиение бюджета – это вектор

$$r = (r_1, r_2, \dots, r_n), \underline{r}_i \leq r_i \leq \bar{r}_i, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n r_i \leq R. \quad (1)$$

Ограничение $\underline{r}_i \leq r_i \leq \bar{r}_i$ определяет минимальную и максимальную сумму для отдела i . Ограничение $\sum_{i=1}^n r_i \leq R$ устанавливает, что сумма выплат всем отделам не должна превышать бюджет R .

Определим игру¹, а затем на ее основе статистическую игру. Множеством стратегий природы является множество случайных величин $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Множество стратегий игрока есть множество допустимых разбиений бюджета (1).

Функция потерь, определенная для каждой пары стратегия игрока – стратегия природы, является случайной величиной и выражается следующим образом:

$$w(r, X) = \sum_{i=1}^n w_i \max \{c_i r_i + d_i X_i + e_i, 0\},$$

где w_i – некоторые неотрицательные действительные коэффициенты; c_i , d_i и e_i – некоторые коэффициенты. Коэффициенты w_i даны на входе задачи, они отражают тяжесть отказа соответствующего компонента. Будем сначала предполагать, что коэффициенты c_i , d_i и e_i также даны на входе задачи. В разделе «Определение коэффициентов линейной регрессии» обсудим возможность их вычисления при условии наличия дополнительных статистических данных.

Смысловая нагрузка функции потерь состоит в следующем. При условии, что в развитие компонента i вкладывается r_i инвестиций, ожидается уменьшение случайной величины количества отказов до значения $\max \{c_i r_i + d_i X_i + e_i, 0\}$. Эта величина, домноженная на коэффициент, и есть вклад компонента i в функцию потерь.

¹Боровков А. А. Математическая статистика : учебник. 4-е изд., стер. СПб. : Лань, 2010. С. 575–625 (Учебники для вузов. Специальная литература).

В статистической игре присутствуют те же элементы, что и в вышеописанной игре. Однако один игрок (природа) загадывает вектор X , а второй игрок (статистик) имеет возможность проводить эксперименты. В данном случае значениями экспериментов являются $x_j = (x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,n})$, $1 \leq j \leq k$. На основе экспериментальных данных статистик выбирает стратегию $\delta(X)$. Тогда функция потерь, которая в статистической игре называется функцией риска, определяется следующим образом:

$$W(\delta(\cdot), X) = E_X w(\delta(X), X).$$

Хорошим ходом в исследовании игры было бы определить какое-либо распределение для вектора X , чтобы, отталкиваясь от него, строить байесовские стратегии игрока, т. е. стратегии, которые минимизируют функцию риска игрока при данном распределении стратегий природы. Теоретически в качестве такого распределения могло бы быть использовано распределение случайных величин отказов компонентов, но в реальности известно только эмпирическое распределение этих случайных величин на основе статистической информации. Оно представляет собой дискретное распределение, в котором вектор $x_j = (x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,n})$, $1 \leq j \leq k$, имеет вероятность $\frac{1}{k}$.

Далее будет использоваться следующая теорема².

Теорема 1. Если для какого-либо распределения Q существует смешанная байесовская стратегия π_Q , то существует и чистая байесовская стратегия δ_Q , для которых функции риска (потерь) совпадают.

Таким образом, можно найти чистую байесовскую стратегию для эмпирического распределения случайных величин отказов компонентов. При условии данной эмпирической функции функция риска имеет вид

$$W(\delta(X), X) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n w_i \max\{c_i r_i + d_i x_{j,i} + e_i, 0\} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \max\left\{\frac{w_i c_i}{k} r_i + \frac{w_i d_i x_{j,i}}{k} + \frac{w_i e_i}{k}, 0\right\}.$$

Значения оптимальной чистой стратегии игрока $\delta(X)$ можно определить с помощью следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n z_{j,i}, \\ & z_{j,i} \geq 0 \quad \forall i, j, \\ & z_{j,i} \geq \frac{w_i c_i}{k} r_i + \frac{w_i d_i x_{j,i}}{k} + \frac{w_i e_i}{k} \quad \forall i, j, \\ & \underline{r}_i \leq r_i \leq \bar{r}_i, \quad 1 \leq i \leq n, \\ & \sum_{i=1}^n r_i \leq R. \end{aligned} \tag{2}$$

Эта задача допустима при подходящих значениях \underline{r}_i , \bar{r}_i . Решение может быть найдено, например, с помощью симплекс-метода. Приведем пример работы данной модели.

Пример. Пусть выпускаемый прибор состоит из двух компонентов, а статистика по отказам является равной $x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}) = (10, 15)$, $x_2 = (x_{2,1}, x_{2,2}) = (20, 18)$. Коэффициенты c_i , d_i и e_i имеют значения $c_1 = -0,001$, $d_1 = \frac{1}{2}$, $e_1 = 2$, $c_2 = -0,00112$, $d_2 = \frac{1}{3}$, $e_2 = 4$, а коэффициенты w_i – значение $w_1 = w_2 = 1$. Общая сумма инвестиций равна 10 000. Суммы r_i , $i = 1, 2$, могут принимать любые неотрицательные значения, меньшие или равные 10 000. Система (2) сводится к виду

$$\begin{aligned} & \min z_{1,1} + z_{2,1} + z_{1,2} + z_{2,2}, \\ & z_{1,1} \geq 0, \\ & z_{2,1} \geq 0, \\ & z_{1,2} \geq 0, \end{aligned}$$

²Боровков А. А. Математическая статистика... С. 578.

$$\begin{aligned}
 z_{2,2} &\geq 0, \\
 r_1 &\geq 0, \\
 r_2 &\geq 0, \\
 z_{1,1} &\geq -0,000\,5r_1 + 3,5, \\
 z_{2,1} &\geq -0,000\,5r_1 + 6, \\
 z_{1,2} &\geq -0,000\,56r_2 + 4,5, \\
 z_{2,2} &\geq -0,000\,56r_2 + 5, \\
 r_1 + r_2 &\leq 10\,000.
 \end{aligned}$$

Найдя решение этой задачи линейного программирования с помощью пакета *CPLEX*, получим оптимальные значения переменных сумм вкладов $r_1 = 1964,285\,714$, $r_2 = 8035,714\,286$.

Определение коэффициентов линейной регрессии

Рассмотрим вопрос об определении коэффициентов c_i , d_i и e_i . Предположим, что приборы выпускаются без модернизации. Однако когда отделу выделяется некоторая инвестиционная сумма, то приборы выпускаются в новой модификации.

Предположим, что отделу i была выделена сумма r_i^l . До внедрения новшества статистика по отказам компонента составляла $x_1^l < x_2^l < \dots < x_{t_i}^l$, где компонент i продемонстрировал x_g^l отказов $n(x_g^l)$ раз. После внедрения новшества статистика по отказам компонента составила $y_1^l < y_2^l < \dots < y_{h_i}^l$, где компонент i продемонстрировал y_f^l отказов $n(y_f^l)$ раз. Рассмотрим случайную величину ξ_l с эмпирическим

распределением на основе случайной последовательности $x_1^l, x_2^l, \dots, x_{t_i}^l$, т. е. $P(\xi_l = x_g^l) = \frac{n(x_g^l)}{\sum_{k=1}^{t_i} n(x_k^l)}$.

Аналогично пусть τ_l – случайная величина с эмпирическим распределением на основе последовательности $y_1^l, y_2^l, \dots, y_{h_i}^l$. Необходимо подобрать такие параметры c_i , d_i и e_i , чтобы случайные величины $c_i r_i^l + d_i \xi_j + e_i$ и τ_j имели наиболее близкое распределение для всех j . Указанная задача является довольно трудной, поэтому изложим два простых подхода к нахождению приближенных значений коэффициентов c_i , d_i и e_i .

Рассмотрим первый подход. Дано некоторое количество статистических данных (r_i^l, ξ_l, τ_l) . Сначала определим оптимальное в некотором смысле значение коэффициента d_i . Будем исходить из того, что если высказанные предположения о линейной зависимости верны, то значения $(c_i r_i^l + d_i x_{t_i}^l + e_i) - (c_i r_i^l + d_i x_1^l + e_i) = d_i(x_{t_i}^l - x_1^l)$ и $y_{h_i}^l - y_1^l$ не должны сильно отличаться при довольно большом объеме выборки, поскольку оставшийся компонент линейной функции является сдвигом. Следовательно, выберем такое значение коэффициента d_i , чтобы значение функции $\max_l |d_i(x_{t_i}^l - x_1^l) - (y_{h_i}^l - y_1^l)|$ было минимальным. Эта задача легко моделируется с помощью задачи линейного программирования. Далее зафиксируем значение коэффициента d_i и будем рассматривать регрессию $c_i r_i^l + e_i$ с факторами $(r_i^l, 1)$ на значение $y_1^l - d_i x_1^l$. Вычислим стандартными методами³ коэффициенты c_i и e_i .

Второй подход является еще более простым. Подсчитаем выборочное среднее рядов значений

$$x_1^l < x_2^l < \dots < x_{t_i}^l \text{ и } y_1^l < y_2^l < \dots < y_{h_i}^l: \bar{x}^l = \frac{\sum_{k=1}^{t_i} n(x_k^l) x_k^l}{\sum_{k=1}^{t_i} n(x_k^l)} \text{ и } \bar{y}^l = \frac{\sum_{k=1}^{h_i} n(y_k^l) y_k^l}{\sum_{k=1}^{h_i} n(y_k^l)}.$$

Рассмотрим регрессию факторов $(r_i^l, \bar{x}^l, 1)$ на значение \bar{y}^l . С помощью стандартных методов⁴ найдем коэффициенты c_i , d_i и e_i .

³Боровков А. А. Математическая статистика... С. 477.

⁴Там же.

Более сложные подходы к определению вышеуказанных коэффициентов будут изложены в работе автора «Вычисление параметров связывающей две случайные величины линейной функции по статистической информации», планируемой к публикации в ближайшее время.

Использование обобщенных линейных моделей

Если производство устроено таким образом, что приборы выпускаются, а потом модернизируются и снова применяются, то возможны следующие модификации вышеизложенных подходов.

Предлагаем использовать обобщенную линейную модель для пуассоновского распределения [1]. Предположим, что есть статистика по отказам компонента i до внедрения новой технологии, размер бюджета, выделенного отделу i , и статистика по отказам этого компонента после внедрения новой технологии. В качестве вектора факторов выберем $(1, x_j, r_j)$, $1 \leq j \leq N$, где x_j – количество отказов компонента i до внедрения новой технологии; r_j – размер вложенных в модернизацию компонента i средств; y_j – количество отказов компонента i после внедрения новой технологии. Допустим, что количество отказов компонента i после внедрения новшества является случайной величиной с пуассоновским распределением и математическим ожиданием m_j . В соответствии с обобщенной линейной моделью пуассоновского распределения $\ln m = X\alpha$, где $\ln m = (\ln m_1, \ln m_2, \dots, \ln m_N)^T$; X – матрица из строк $(1, x_j, r_j)$, $1 \leq j \leq N$; $\alpha = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i)^T$ – коэффициенты, которые возможно определить методом максимального правдоподобия, используя данную модель [1, р. 116].

Функцию риска можно представить в виде

$$W(\delta(X), X) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n w_i e^{\alpha_1^i + \alpha_2^i x_{j,i} + \alpha_3^i r_i} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{k} e^{\alpha_1^i + \alpha_2^i x_{j,i} + \alpha_3^i r_i}.$$

Заметим, что в функции риска отсутствуют максимумы, так как математическое ожидание для случайной величины, распределенной по пуассоновскому закону, и так неотрицательное.

Значения оптимальной чистой стратегии игрока $\delta(X)$, как и в предыдущем случае, можно определить с помощью следующей задачи выпуклого программирования:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n z_{j,i}, \\ & z_{j,i} \geq \frac{w_i}{k} e^{\alpha_1^i + \alpha_2^i x_{j,i} + \alpha_3^i r_i} \quad \forall i, j, \\ & \underline{r}_i \leq r_i \leq \bar{r}_i, \quad 1 \leq i \leq n, \\ & \sum_{i=1}^n r_i \leq R. \end{aligned}$$

Для данного типа выпуклых программ существуют полиномиальные методы построения оптимальных решений [2].

Модернизация подмножества приборов

Допустим, что из всего множества приборов, по которым известна статистика за определенный период, необходимо модернизировать только те, у которых количество отказов компонента l больше или равно \underline{x}_l и меньше или равно \bar{x}_l (в общем случае вектор отказов приборов находится в некотором множестве A). Тогда из всех векторов $x_j = (x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,n})$, $1 \leq j \leq k$, будем рассматривать только те, которые находятся в множестве

$$\begin{aligned} & [\underline{x}_1, \bar{x}_1] \times [-\infty, +\infty] \times \dots \times [-\infty, +\infty] \cup [-\infty, +\infty] \times [\underline{x}_2, \bar{x}_2] \times \dots \times [-\infty, +\infty] \cup \dots \\ & \cup [-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty] \times \dots \times [\underline{x}_n, \bar{x}_n] \end{aligned}$$

(в общем случае они находятся в множестве A), и относительно них будем применять вышеизложенные подходы. Это действие эквивалентно рассмотрению случайной величины с эмпирическим распределением при условии нахождения значения данной случайной величины в указанном множестве.

Если даны только один прибор, подлежащий модернизации, и бюджет, выделенный отделу для этой цели, то можно найти t векторов статистики, наиболее близких к вектору отказов этого прибора, и применить вышеперечисленные подходы относительно указанного набора статистических данных.

Подсчет стандартных ошибок

Используя известную технику [1], можно подсчитать стандартную ошибку стоимости игры. Рассмотрим эмпирическое распределение. Напомним, что это дискретное распределение, в котором вектор $x_j = (x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,n})$, $1 \leq j \leq k$, имеет вероятность $\frac{1}{k}$. Обозначим данное распределение через F^* . Сгенерируем из него k векторов и вычислим на их основе значения игры с помощью одной из вышеприведенных программ. Повторим шаги по генерации векторов и вычислению значений игры B раз, при этом получим B значений игры, выражаемых в виде $\hat{\theta}^{(l)}$, $1 \leq l \leq B$. Подсчитаем оценку стандартного отклонения распределения значения игры при эмпирическом распределении F^* следующим образом:

$$sd(F^*) = \left[\sum_{l=1}^B \frac{(\hat{\theta}^{(l)} - \hat{\theta}^{(\cdot)})^2}{B-1} \right]^{\frac{1}{2}},$$

где $\hat{\theta}^{(\cdot)} = \frac{1}{B} \sum_{l=1}^B \hat{\theta}^{(l)}$. Эта величина называется оценкой стандартной ошибки значения игры при данной статистической информации. Используя стандартную ошибку и неравенство Чебышева [3], можно построить доверительные интервалы для значения игры.

Для большей весомости информации, изложенной в данном разделе, докажем, что $sd(F^*) \xrightarrow{\text{п. н.}} sd(F)$, где F – неизвестное распределение значения игры; $sd(F)$ – среднеквадратичное отклонение случайной величины значения игры θ . Основная идея доказательства – спроецировать величины значений игры на пространство переменных X . С этой целью рассмотрим подробнее задачу (2) и на ее основе сформулируем систему неравенств

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n z_{j,i} &\leq Z, \\ z_{j,i} &\geq 0 \quad \forall i, j, \\ \underline{r}_i &\leq r_i \leq \bar{r}_i, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \sum_{i=1}^n r_i &\leq R, \end{aligned} \tag{3}$$

где Z – некоторая константа. Для каждого допустимого значения вектора переменных этой системы неравенств, т. е. вектора (z, r) , определим многогранник возможных значений переменных x , используя ограничение $z_{j,i} \geq \frac{w_i c_i}{k} r_i + \frac{w_i d_i x_{j,i}}{k} + \frac{w_i e_i}{k} \quad \forall i, j$ из задачи (2) и предполагая, что коэффициент d_i является положительным:

$$\begin{aligned} R(z, r) &= \prod_{j,i} R_{j,i}(z, r), \\ R_{j,i}(z, r) &= \left\{ x_{j,i} \mid \frac{k}{w_i d_i} z_{j,i} - \frac{c_i}{d_i} r_i - \frac{e_i}{d_i} \geq x_{j,i} \right\}. \end{aligned}$$

Отметим, что многогранник $R_{j,i}(z, r)$ – это полуинтервал.

Множество значений x , соответствующее системе (3), определяется как объединение многогранников $R(z, r)$ по всем допустимым векторам (z, r) :

$$R(Z) = \bigcup_{\substack{\sum_{j,i} z_{j,i} \leq Z, \quad z_{j,i} \geq 0, \quad \underline{r}_i \leq r_i \leq \bar{r}_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{i=1}^n r_i \leq R}} R(z, r).$$

Множество $\sum_{j,i} z_{j,i} \leq Z, z_{j,i} \geq 0, \underline{r}_i \leq r_i \leq \bar{r}_i, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n r_i \leq R$ является многогранником с конечным количеством вершин. Тогда верна следующая лемма.

Лемма. $R(Z) = \bigcup_{(z_h, r_h)} \prod_{j,i} \left\{ x_{j,i} \mid \frac{k}{w_i d_i} z_{j,i}^h - \frac{c_i}{d_i} r_i^h - \frac{e_i}{d_i} \geq x_{j,i} \right\}$, где (z_h, r_h) – вершина многогранника $\sum_{j,i} z_{j,i} \leq Z, z_{j,i} \geq 0, \underline{r}_i \leq r_i \leq \bar{r}_i, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n r_i \leq R$.

Доказательство. Пусть (z^1, r^1) – некоторая точка многогранника $\sum_{j,i} z_{j,i} \leq Z, z_{j,i} \geq 0, \underline{r}_i \leq r_i \leq \bar{r}_i, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n r_i \leq R$. Допустим, что x принадлежит многограннику, построенному для этой точки. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} \min_{j,i} w_{j,i} &\rightarrow \max, \\ w_{j,i} &= \frac{k}{w_i d_i} z_{j,i} - \frac{c_i}{d_i} r_i - \frac{e_i}{d_i} - \left(\frac{k}{w_i d_i} z_{j,i}^1 - \frac{c_i}{d_i} r_i^1 - \frac{e_i}{d_i} \right) \forall i, j, \\ \sum_{j,i} z_{j,i} &\leq Z, \\ z_{j,i} &\geq 0 \forall i, j, \\ \underline{r}_i &\leq r_i \leq \bar{r}_i, 1 \leq i \leq n, \\ \sum_{i=1}^n r_i &\leq R. \end{aligned} \tag{4}$$

Вектором переменных данной задачи является (z, r, w) . Отметим, что ее допустимое решение – это точка (z^1, r^1, w^1) , где w^1 вычисляется из первого ограничения. Целевая функция на этом допустимом решении равна нулю. Значит, оптимальное решение задачи (4), которое является одновременно вершиной многогранника, может быть найдено с помощью симплекс-метода и критерий на этом оптимальном решении больше нуля или равен нулю. Из метода построения первого ограничения следует, что верхние границы в компонентах многогранника $\prod_{j,i} \left\{ x_{j,i} \mid \frac{k}{w_i d_i} z_{j,i}^h - \frac{c_i}{d_i} r_i^h - \frac{e_i}{d_i} \geq x_{j,i} \right\}$, соответствующего этому решению, могли только увеличиваться, а значит, точка x остается допустимой для многогранника $R(z, r)$, соответствующего вершине многогранника $\sum_{j,i} z_{j,i} \leq Z, z_{j,i} \geq 0, \underline{r}_i \leq r_i \leq \bar{r}_i, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n r_i \leq R$.

Лемма доказана.

Итак, множество $R(Z)$ определяется как объединение конечного числа многогранников, каждый из которых является борелевским множеством. Другими словами, это множество измеримо. Найдем пересечение этого множества с множеством неотрицательных значений $x \prod_{j,i} \{x_{j,i} \mid x_{j,i} \geq 0\}$:

$$\begin{aligned} R^+(Z) &= R(Z) \cap \prod_{j,i} \{x_{j,i} \mid x_{j,i} \geq 0\} = \\ &= \left(\bigcup_{(z_h, r_h)} \prod_{j,i} \left\{ x_{j,i} \mid \frac{k}{w_i d_i} z_{j,i}^h - \frac{c_i}{d_i} r_i^h - \frac{e_i}{d_i} \geq x_{j,i} \right\} \right) \cap \left(\prod_{j,i} \{x_{j,i} \mid x_{j,i} \geq 0\} \right) = \\ &= \bigcup_{(z_h, r_h)} \left(\left(\prod_{j,i} \left\{ x_{j,i} \mid \frac{k}{w_i d_i} z_{j,i}^h - \frac{c_i}{d_i} r_i^h - \frac{e_i}{d_i} \geq x_{j,i} \right\} \right) \cap \left(\prod_{j,i} \{x_{j,i} \mid x_{j,i} \geq 0\} \right) \right), \end{aligned}$$

где (z_h, r_h) – вершина многогранника $\sum_{j,i} z_{j,i} \leq Z, z_{j,i} \geq 0, \underline{r}_i \leq r_i \leq \bar{r}_i, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n r_i \leq R$.

Это множество останется борелевским и будет ограниченным, так как ограничены многогранники $\left(\prod_{j,i} \left\{ x_{j,i} \mid \frac{k}{w_i d_i} z_{j,i}^h - \frac{c_i}{d_i} r_i^h - \frac{e_i}{d_i} \geq x_{j,i} \right\} \right) \cap \left(\prod_{j,i} \{x_{j,i} \mid x_{j,i} \geq 0\} \right)$. Тогда предполагаемую функцию распре-

ления значения игры можно записать в виде $F_\theta(t) = P(x \in R^+(t))$. Множество допустимых значений x , принадлежащих $R^+(t)$, находится перебором, так как каждый многогранник, соответствующий своей вершине, ограничен. Можно доказать, что эта функция действительно является функцией распределения, т. е. обладает всеми свойствами такой функции. Этот вывод следует из того, что когда компоненты вектора x – неотрицательные целые случайные величины, то случайная величина θ является дискретной случайной величиной.

Выборочную функцию распределения, которая также является дискретной случайной величиной, можно записать как $F_\theta^*(t) = \frac{k_1}{k}$, где k_1 – количество векторов X в множестве $R^+(t)$.

Остается воспользоваться следующей теоремой⁵.

Теорема 2. Пусть $X_n = [X_\infty]_n$ имеет распределение F . Тогда если $S(X) = G(F_n^*)$ есть статистика типа I или II, то при $n \rightarrow \infty$ $G(F_n^*) \xrightarrow{\text{п. н.}} G(F)$.

Заключение

Рассмотрена задача определения оптимального распределения инвестиционной суммы между отделами, разрабатывающими компоненты сложного прибора. Выбор распределения зависит от оправданности средств, ранее вложенных в надежность производимого компонента. Для учета влияния потраченной суммы денег на количество отказов компонента предложено построить линейную или обобщенную линейную регрессию, коэффициенты которой используются в формулировках математического программирования.

Библиографические ссылки

1. Efron B, Hastie T. *Computer age statistical inference: algorithms, evidence, data science*. New York: Cambridge University Press; 2016. XIX, 475 p.
2. Nemirovski A. *Modern convex optimization*. [S. l.]: Georgia Institute of Technology; 2005. 558 p.
3. Боровков АА. *Теория вероятностей*. Москва: Эдиториал УРСС; 1999. 472 с.

Получена 18.04.2024 / исправлена 24.06.2025 / принята 24.06.2025.
Received 18.04.2024 / revised 24.06.2025 / accepted 24.06.2025.

⁵Боровков А. А. Математическая статистика... С. 30.

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN BSU

УДК 517(075.8)

Кротов В. Г. Обзорные лекции по математическому анализу и ТФКП / В. Г. Кротов, Т. С. Мардвилко ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2025. 78 с. Библиогр.: с. 77–78. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/327566>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 24.03.2025, № 004624032025. Текст : электронный.

Представлены обзорные лекции по учебным дисциплинам «Математический анализ» и «Теория функций комплексного переменного». В пособии содержится теоретический материал, предназначенный для подготовки к государственному экзамену.

УДК 004(075.8)

Попова Е. Э. Информационные системы : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0322-04 «Управление документами» / Е. Э. Попова, Н. Н. Садова ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2025. 128 с. : ил. Библиогр.: с. 121–122. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/327804>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 02.04.2025, № 005202042025. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для студентов, обучающихся по специальности 6-05-0322-04 «Управление документами». Содержание ЭУМК содействует изучению вопросов согласно учебной программе по учебной дисциплине «Информационные системы». ЭУМК нацелен на формирование знаний и практических навыков в области автоматизации управления документами, он способствует формированию универсальных и базовых профессиональных компетенций. ЭУМК включает теоретический раздел, практический раздел, раздел контроля знаний и вспомогательный раздел.

УДК 519.1(075.8) + 510.6(075.8)

Васильков Д. М. Дискретная математика и математическая логика : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-11 «Прикладная информатика» : в 2 ч. Ч. 1 / Д. М. Васильков ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2025. 87 с. : ил. Библиогр.: с. 85–87. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/328447>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 15.04.2025, № 006115042025. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Дискретная математика и математическая логика» (часть 1) предназначен для студентов специальности 6-05-0533-11 «Прикладная информатика». В ЭУМК содержатся лекционный материал, задания для практических занятий, список литературы.

УДК 519.1(075.8) + 510.6(075.8)

Волчкова Г. П. Дискретная математика и математическая логика : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 6-05-0533-09 «Прикладная математика», 6-05-0533-12 «Кибербезопасность» : в 6 ч. Ч. 1 / Г. П. Волчкова ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2025. 112 с. : ил. Библиогр.: с. 111–112. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/329108>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 06.05.2025, № 006506052025. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Дискретная математика и математическая логика» (часть 1) предназначен для студентов специальностей 6-05-0533-09 «Прикладная математика», 6-05-0533-12 «Кибербезопасность». В ЭУМК содержатся лекционный материал по теме «Логика высказываний и логика предикатов», задания для практических занятий, наборы тестов для проверки знаний, список литературы.

УДК 004.925.8(075.8)

Шолтанюк С. В. Математические методы компьютерной графики : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-11 «Прикладная информатика» : в 3 ч. Ч. 2. Основные алгоритмы вычислительной геометрии / С. В. Шолтанюк ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2025. 500 с. : ил. Библиогр.: с. 483–485. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/329888>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 05.06.2025, № 007605062025. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для студентов специальности «прикладная информатика». Настоящий ЭУМК посвящен базовым алгоритмам компьютерной графики и вычислительной геометрии, которые предназначены для решения различных задач: отсечения и удаления невидимых частей объектов, растеризации, разбиения объектов на элементарные части, построения оптических эффектов и некоторых других задач. Для этих алгоритмов даны подробное описание и обоснование, а также приведены примеры их работы. В практическом разделе представлены задачи для самостоятельного решения на использование описанных алгоритмов, а в ответах к большинству из них приведены чертежи, что наряду с числовыми результатами дает лучшее понимание назначения и работы рассматриваемых алгоритмов. Настоящий ЭУМК сопровождается материалами для контроля знаний (варианты для контрольной работы, список вопросов для коллоквиума и экзамена) и перечнем рекомендуемой и дополнительной литературы, среди которой присутствуют научные статьи, где впервые описаны и обоснованы рассматриваемые алгоритмы.

УДК 517.98(075.8)

Зеленков В. И. Функциональный анализ и теория функций : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 7-07-0533-01 «Фундаментальная физика», 7-07-0533-02 «Ядерная физика и технологии» / В. И. Зеленков ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2025. 515 с. Библиогр.: с. 502–505. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/331812>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 09.07.2025, № 009609072025. Текст : электронный.

В электронном учебно-методическом комплексе (ЭУМК) по учебной дисциплине «Функциональный анализ и теория функций» приводятся основные понятия и теоретические сведения. Дается подробное решение большого числа типовых примеров, и предлагается значительное количество задач различной степени сложности для самостоятельного решения. ЭУМК предназначен для студентов физического факультета БГУ, а также для преподавателей высших учебных заведений при подготовке и проведении практических занятий по дисциплине «Функциональный анализ и теория функций».

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

- Шилин А. П.* Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения на кривой, расположенной в угловой области 6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

- Руденок А. Е., Василевич М. Н.* Об изохронах грубого фокуса 16

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

- Григорьев Д. С., Оскорбин Д. Н., Родионов Е. Д.* О потоке Риччи на трехмерных неунимодулярных группах Ли с полусимметрической эквивариантной связностью..... 30

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

- Васьковский М. М., Фирсов М. А., Бабаева П. Д.* Обобщение теоремы Штейнера – Лемуса и трансцендентность критических значений ее параметров 42

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

- Палуха В. Ю., Харин Ю. С.* Асимптотический анализ статистических оценок энтропии Шеннона двоичных s -грамм 62

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

- Демиденко В. М.* Условия эффективной разрешимости квадратичной задачи выбора. Часть 2... 75

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

- Довлетов Д. М.* Разностная трактовка нелокальной задачи с параметризованным дифференциальным уравнением первого порядка 89

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

- Бу Сяньи, Абламейко С. В.* RLD-YOLO: новый метод обнаружения объектов на изображениях беспилотных летательных аппаратов с использованием модели нейронной сети YOLOv11 105

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

- Баркетов М. С.* Распределение средств с учетом статистической информации о надежности выпускаемых приборов 118

- Аннотации депонированных в БГУ работ 126

CONTENTS

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

<i>Shilin A. P.</i> Solution of the hypersingular integro-differential equation on a curve located in the angular domain.....	6
---	---

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

<i>Rudenok A. E., Vasilevich M. N.</i> About isochrons of strong focus	16
--	----

GEOMETRY AND TOPOLOGY

<i>Grigoryev D. S., Oskorbin D. N., Rodionov E. D.</i> About the Ricci flow on three-dimensional non-unimodular Lie groups with semisymmetric equiaffine connection.....	30
--	----

MATHEMATICAL LOGIC, ALGEBRA AND NUMBER THEORY

<i>Vaskouski M. M., Firsau M. A., Babayeva P. D.</i> A generalisation of the Steiner – Lehmus theorem and critical values transcendence of its parameters	42
---	----

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

<i>Palukha U. Yu., Kharin Yu. S.</i> Asymptotic analysis of the statistical estimators of Shannon entropy of binary s -tuples	62
---	----

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

<i>Demidenko V. M.</i> Conditions for the effective solvability of the quadratic choice problem. Part 2....	75
---	----

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

<i>Dovletov D. M.</i> A finite-difference interpretation of a nonlocal problem with a parameterised first-order differential equation	89
---	----

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

<i>Wu Xianyi, Ablameyko S. V.</i> RLD-YOLO: new method for object detection in unmanned aerial vehicle images using YOLOv11 neural network	105
--	-----

SHORT COMMUNICATIONS

<i>Barketau M. S.</i> Distribution of finances taking into account statistical information on the reliability of the items produced	118
---	-----

Indicative abstracts of the papers deposited in BSU.....	126
--	-----

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики), техническим наукам (в области информатики).

Журнал включен в наукометрические базы данных Scopus, Mathematical Reviews, Ulrichsweb, Google Scholar, zbMath, Russian Science Citation Index, PIIHC, China National Knowledge Infrastructure.

**Журнал Белорусского
государственного университета.
Математика. Информатика.
№ 2. 2025**

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Журнал Белорусского государственного
университета. Математика. Информатика»
издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редакторы *М. Д. Баранова,*
О. А. Семенец, М. А. Подголина
Технический редактор *В. В. Пишкова*
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 31.07.2025.
Тираж 25 экз.

© БГУ, 2025

**Journal
of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics.
No. 2. 2025**

Founder:
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliezhnasci Ave.,
Minsk 220030, Republic of Belarus.
Correspondence address: 4 Niezaliezhnasci Ave.,
Minsk 220030, Republic of Belarus.
Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Journal of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics»
published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU.
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editors *M. D. Baranova,*
O. A. Semenets, M. A. Podgolina
Technical editor *V. V. Pishkova*
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 31.07.2025.
Edition 25 copies.

© BSU, 2025