Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра общей математики и информатики

СОГЛАСОВАНО	СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой	Декан факультета
______________Самаль С.А.	_____________Босяков С.М.
« 28 » октября 2025 г.	«28» октября 2025г.

Высшая математика

Электронный учебно-методический комплекс для специальности

6-05-1036-04 «Международная логистика»

Регистрационный № 2.4.3-24 / 681

Авторы:
Прокашева В.А., кандидат физико-математических наук, доцент;
Мартон М.В., кандидат физико-математических наук, доцент;
Велько О.А., старший преподаватель.

Рассмотрено и утверждено на заседании Совета механико-математического факультета. Протокол № 2 от 28.10.2025г.

Минск 2025

УДК 51(075.8)
П 803

Утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ.
Протокол № 3 от 30.10.2025 г.

А в т о р ы:

Прокашева Вера Акимовна, доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета БГУ;

Мартон Марина Владимировна, доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета БГУ;

Велько Оксана Александровна, старший преподаватель кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета БГУ.

Рецензенты:

кафедра математики и методики преподавания математики, учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка» (зав. кафедрой Н.В. Гриб, кандидат физико-математических наук, доцент);

Барвенов С.А., доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

.

Прокашева, В. А. Высшая математика: электронный учебно-методический комплекс для специальности 6-05-1036-04 «Международная логистика» / В. А. Прокашева, М. В. Мартон, О. А. Велько ; БГУ, Механико-математический фак. ; Каф. общей математики и информатики. – Минск: БГУ, 2025. –284 с. – Библиогр.: 281–282 с.

Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Высшая математика» предназначен для студентов специальности 6-05-1036-04 «Международная логистика».

В ЭУМК содержатся лекционный материал, задания для практических занятий, контрольные работы, примерный тематический план, содержание учебного материала, вопросы для подготовки к экзамену, список литературы.

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Высшая математика» предназначен для студентов 1 курса специальности 6-05-1036-04 «Международная логистика».

Комплекс подготовлен в соответствии с требованиями Положения об учебно-методическом комплексе на уровне высшего образования, утвержденного Постановлением министерства образования Республики Беларусь от 26.07.2011 № 167.

Содержание разделов ЭУМК соответствует образовательным стандартам, структуре и тематике учебной программы по дисциплине «Высшая математика».

Главные цели ЭУМК: помощь студентам в организации самостоятельной работы, повышение качества подготовки и усиление практико-ориентированности учебного процесса по дисциплине «Высшая математика».

ЭУМК состоит из следующих разделов.

Теоретический. Включает аннотацию учебного пособия, написанного в соответствии с программой дисциплины. Материал данного пособия, наряду с конспектом лекций, может быть использован для самостоятельной подготовки студентов к практическим занятиям, контрольным работам и экзамену.

Практический. Содержит план практических работ. Данные материалы используются для подготовки к практическим, для самостоятельной работы над курсом.

Раздел контроля знаний представлен вопросами к экзамену, промежуточными контрольными работами. Описаны формы диагностики по дисциплине с учетом текущей успеваемости.

Вспомогательный раздел включает рекомендуемую литературу и содержание учебной программы курса по отдельным темам, на основе которой построено изучение дисциплины и контроль знаний, вопросы к экзамену.

Современная международная логистика – это динамичная и высокотехнологичная сфера, где эффективное управление цепями поставок требует не только практических навыков, но и глубокого аналитического мышления. Высшая математика служит фундаментом для решения ключевых задач логистики: оптимизации маршрутов, прогнозирования спроса, управления запасами, анализа больших данных и моделирования сложных систем.

Данный учебно-методический комплекс разработан специально для студентов обучающихся по специальности «Международная логистика». Он объединяет теоретические основы математики с прикладными примерами из логистической практики, помогая развить:

аналитические способности для работы с цифровыми инструментами и алгоритмами;

математическое моделирование процессов транспортировки, складирования и распределения товаров;

критическое мышление для принятия решений в условиях неопределённости.

В эпоху цифровизации и глобализации владение математическим аппаратом становится конкурентным преимуществом логиста. Этот комплекс не только подготовит васбудущих логистов к освоению профессиональных дисциплин, но и научит применять высшую математику в реальных кейсах – от расчёта рентабельности перевозок до использования искусственного интеллекта в управлении цепями поставок.

При составлении учебного комплекса одним из важнейших выступал принцип профессиональной направленности, который подразумевает тесную связь содержания учебной дисциплины с профессиональной сферой деятельности будущих специалистов.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Высшая математика» относится **к модулю** «Информационные технологии и безопасность» государственного компонента.

Целью учебной дисциплины – подготовка студентов к использованию современного математического аппарата в качестве эффективного инструмента для решения экономических и практических задач в области международной логистики.

Задачами учебной дисциплины являются:

- сформировать у студентов представление о современном математическом аппарате, необходимом для решения теоретических и практических задач в будущей профессиональной деятельности;
- привить умение самостоятельно расширять математические знания, пользоваться справочной литературой по математике и ее приложениям в практической и исследовательской работе;
- развить личностные качества, необходимые для решения научных и практических задач: логическое мышление, аналитические способности, интеллект, интерес к формально-модельному описанию и изучению действительности с помощью языка, средств и методов современной математики.

Студенты должны знать:

- матричное исчисление, применение матриц в сфере международной логистики;
- методы аналитической геометрии и применение их при анализе моделей в сфере профессиональной деятельности;
- основные сведения о функциях одной и нескольких переменных, примеры изучения функций в экономике;
- элементы дифференциального и интегрального исчисления и его использование при исследовании функциональных зависимостей;
- основные статистические методы обработки и анализа экономических данных.

Студенты должны уметь:

− выполнять основные матричные операции, использовать матричное исчисление в экономико-социальных задачах, решать системы линейных алгебраических уравнений;

− составлять и решать системы линейных алгебраических уравнений;

− исследовать функциональные зависимости в экономике;

− находить производные, вычислять интегралы, применять интегралы для нахождения площадей;

− вычислять вероятности событий, приводить примеры случайных величин в социально-экономических исследованиях;

− делать выводы на основе анализа математических моделей;

Студенты должны владеть:

− пользоваться терминологией дисциплины «Высшая математика»;

− применять базовые методы решения задач, связанных с профессиональной деятельностьюспециалиста международной логистики.

Освоение учебной дисциплины «Высшая математика» должно обеспечить формирование следующих **базовых профессиональных компетенций:**

БПК-1. Использовать методы высшей математики для успешного решения задач теоретической и практической направленности.

Дисциплина изучается в I семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Высшая математика» отведено:

- в очной форме получения высшего образования: 100 часов, в том числе 68 аудиторных часа, из них: лекции – 20 часов, практические занятия – 42 часа, управляемая самостоятельная работа – 6 часов (ДОТ).

Форма промежуточной аттестации – экзамен в I семестре.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1.1.1. Элементы матричного анализа

Матрицы находят широкое применение в задачах, изучающих зависимости между различными социально-экономическими показателями. Матричная форма записи используется для компактности записи большого числа элементов, она помогает структурировать экономическую информацию. Матрицы — это мощный математический инструмент, который активно применяется в логистике и управлении цепями поставок. Они помогают структурировать данные, оптимизировать маршруты, анализировать затраты и принимать эффективные управленческие решения. Весьма удобным и полезным математическим аппаратом является матричный метод.

Определение матрицы. Матрицей A называется система $\boldsymbol{m \times n}$ элементов, расположенных в прямоугольной таблице из **m** строк и **n** столбцов.

Заметим, что элементами матрицы могут быть числа, алгебраические или символьные выражения.

Обозначения матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \text{или}\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы обозначаются $\mathbf{a_{ij}}$, где **i** – номер строки, **j** – номер столбца (числа i и j называют индексами элемента).

Матрицу, имеющую **m** строк и **n** столбцов, называют матрицей размера **m**×**n** (читается: эм на эн).

Употребляется и более короткое обозначение матрицы размера **m**×**n**:

$$A=\left(a_{ij}\right)_{m\text{x}n}\ \text{или A=}[a_{ij}]_{mn}\,.$$

Например, запишем матрицу $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$. Это матрица размера 2 × 3, а элемент a_{22} равен (–4).

Матрица А, состоящая лишь из одной строки, называется **строчной матрицей** или **матрицей-строкой**:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Матрица А имеющая лишь один столбец, называется **столбцевой матрицей** или **матрицей-столбцом**:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой матрицей** и обозначается буквой О, тогда по определению

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратной матрицей называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов m=n, т.е. матрица вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Порядком квадратной матрицы называется число ее строк (или столбцов).

Элементы $a_{11}, \quad a_{22}, \quad \dots, \quad a_{nn}$ квадратной матрицы образуют ее **главную диагональ**, а элементы $a_{1n}, \quad a_{2\,n-1}, \quad \dots, \quad a_{n1}$ – **побочную диагональ**.

Квадратная матрица первого порядка отождествляется со своим единственным элементом. Выпишем квадратные матрицы первого, второго и третьего порядков:

$$(a_{11}),\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется **симметрической**, если равны её элементы, симметричные относительно главной диагонали. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Упражнение.</u> Приведите пример симметрической матрицы третьего порядка.

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали равны нулю, т.е. матрица

$$\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Единичная матрица обозначается буквой **Е**. Так, единичные матрицы второго и третьего порядков имеют вид:

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Треугольной матрицей называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали равны нулю. Различают соответственно верхнюю и нижнюю треугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Две матрицы A и B называются **равными** $A=B$, если они одинаковых размеров и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$ ($i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$).

Линейными операциями над матрицами называются сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число. Сложение и вычитание матриц определяются только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{m\times n}$ называется матрица $C=(c_{ij})_{m\times n}$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц слагаемых, то есть

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ (i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n).$$

Сумма двух матриц обозначается $C=A+B$.

Пример. Найдите С=$A+B$, если $A=\begin{pmatrix}1&6\\2&-4\\-3&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&4\\3&7\\8&-11\end{pmatrix}$.

Решение. Находим по определению

$$C=A+B=\begin{pmatrix}1&6\\2&-4\\-3&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&4\\3&7\\8&-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+(-2)&6+4\\2+3&-4+7\\-3+8&9+(-11)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&10\\5&3\\5&-2\end{pmatrix}.$$

Разностью двух матриц $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{m\times n}$ называется матрица $D=(d_{ij})_{m\times n}$, элементы которой равны разности соответствующих элементов этих матриц, то есть

$$d_{ij}=a_{ij}-b_{ij},$$
$$(i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n).$$

Разность двух матриц имеет обозначение D=A–B.

Пример. Найдите D=A–B, если $A=\begin{pmatrix}1&6\\2&-4\\-3&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&4\\3&7\\8&-11\end{pmatrix}$.

Решение. По определению

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-2) & 6-4 \\ 2-3 & -4-7 \\ -3-8 & 9-(-11) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Разность двух матриц $A - B$ можно определить так: $A - B = A + (-B)$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{mn}$ **на число** α называется матрица $\alpha A = (\alpha \cdot a_{ij})_{mn}$, т. е. матрица, полученная из данной матрицы умножением всех ее элементов на число α.

Пример. Найдите матрицу (–2А), где $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение. $-2A = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 & -2\cdot 6 \\ -2\cdot 2 & -2\cdot(-4) \\ -2\cdot(-3) & -2\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ -4 & 8 \\ 6 & -18 \end{pmatrix}$.

Матрицу (–1)А называют матрицей, **противоположной** матрице А, и обозначают **–А**.

Линейные операции над матрицами обладают следующими **свойствами**:

Пусть матрицы А, В и С – матрицы одинакового размера m×n, О – нулевая матрица, (–А) – матрица, противоположная матрице А, а α и β – любые действительные числа. Тогда справедливы следующие свойства:

- А+В=В+А (коммутативность сложения матриц);
- (А+В)+С=А+(В+С) (ассоциативность сложения матриц);
- А+О=А;
- А+(–А)=О;
- $1 \cdot A = A$;
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Таким образом, многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами.

Докажем, например, что А+В=В+А. Известно, что А+В=$\left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m\times n}$, а В+А=$\left(b_{ij} + a_{ij}\right)_{m\times n}$, ($i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$), а так как $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, то А+В=В+А.

Пусть даны две матрицы А и В. Произведение матриц определено только для согласованных матриц. Матрица А называется **согласованной** с матрицей В, если число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В.

Произведением матрицы A размера m×n **на матрицу** B размера n×k называется такая матрица С размера m×k, у которой элементы c_{ij} определяются формулой

$$c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \ldots + a_{in}\cdot b_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\cdot b_{lj}\text{, где } i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,k,$$

т.е. элемент c_{ij} матрицы С равен сумме произведений элементов **i**-й строки матрицы А на соответствующие элементы **j**-го столбца матрицы В. Матрица С имеет m строк (как и матрица А) и k столбцов (как матрица В). Произведение матрицы А на матрицу В имеет обозначение АВ.

Замечание. Из того, что А можно умножать на В, не следует, что В можно умножать на А.

Если для матриц А и В определены произведения АВ и ВА, то в общем случае АВ≠ВА (так как из согласованности А с В не следует согласованность В с А).

Так, умножение матрицы А размеров 3×3 на матрицу В размеров 3×2 дает

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + a_{13}\cdot b_{31} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} + a_{13}\cdot b_{32} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} + a_{23}\cdot b_{31} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} + a_{23}\cdot b_{32} \\ a_{31}\cdot b_{11} + a_{32}\cdot b_{21} + a_{33}\cdot b_{31} & a_{31}\cdot b_{12} + a_{32}\cdot b_{22} + a_{33}\cdot b_{32} \end{pmatrix},$$

тогда как произведение ВА не определено.

В случае, если АВ=ВА, матрицы А и В называются **перестановочными**.

Упражнение. Приведите пример перестановочных матриц.

Пример. Найдите, если это возможно, произведения АВ и ВА, где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Произведение АВ имеет смысл, поскольку число столбцов матрицы А равно трём и равно числу строк матрицы В. Размер матрицы А равен 2×3, размер матрицы В равен 3×2, тогда размер матрицы АВ равен 2×2 и $A\cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$.

Найдём элементы искомой матрицы

$$c_{11} = a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + a_{13}\cdot b_{31} = 4\cdot(-1) + (-5)\cdot(-2) + 8\cdot 3 = -4 + 10 + 24 = 30,$$

$$c_{12} = a_{11}\cdot b_{21} + a_{12}\cdot b_{22} + a_{13}\cdot b_{32} = 4\cdot 5 + (-5)\cdot(-3) + 8\cdot 4 = 20 + 15 + 32 = 67,$$

$$c_{21} = a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} + a_{23}\cdot b_{31} = 1\cdot(-1) + 3\cdot(-2) + (-1)\cdot 3 = -1 - 6 - 3 = -10,$$

$$c_{22}=a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+a_{23}\cdot b_{32}=1\cdot 5+3\cdot(-3)+(-1)\cdot 4=5-9-4=-8.$$

Таким образом $A\cdot B=\begin{pmatrix}4 & -5 & 8\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30 & 67\\ -10 & -8\end{pmatrix}$.

Проверим, можно ли получить произведение ВА. Поскольку число столбцов матрицы В равно двум и равно числу строк матрицы А, произведение ВА имеет смысл. Вычислим его.

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -2 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -5 & 8\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 20 & -13\\ -11 & 1 & -13\\ 16 & -3 & 20\end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матриц

Если имеют смысл соответствующие произведения матриц, то справедливы следующие **свойства умножения матриц**:

- (AB)C = A(BC);
- (A+B)C=AC+BC;
- C(A+B)=CA+CB;
- $\alpha(AB)=(\alpha A)B$;
- AE=EA=A;
- AO=OA=O.

Целой положительной степенью A^k (k>1) квадратной матрицы А называется произведение k матриц, каждая из которых равна А, т.е.

$$A^k=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k\ \text{раз}}.$$

Матрица A^k имеет тот же порядок, что и матрица А.

__**Упражнение**__. Верно ли утверждение «Произведение двух ненулевых матриц может быть нулевой матрицей»?

Матрица, полученная из данной заменой каждой её строки столбцом с тем же номером, называется **транспонированной** относительно данной. Матрица, транспонированная относительно матрицы А, обозначается через A^T . Пусть дана исходная матрица А:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Тогда согласно определению, матрица, транспонированная относительно матрицы А имеет вид

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что если A – матрица размера $n \times m$, то матрица A^T имеет размеры $m \times n$.

Операция нахождения матрицы, транспонированной к данной, называется транспонированием матрицы. Для операции транспонирования матрицы справедливы следующие свойства:

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;.
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Пример. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Матрица называется симметрической, если $A^T = A$.

Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Понятие определителя матрицы вводится только для квадратных матриц.

Определение определителя матрицы. Каждой такой матрице ставится в соответствие по определённому правилу действительное число, которое называется определителем (детерминантом) матрицы и обозначается $|A|, \quad \det A, \quad \Delta$.

Если порядок матрицы равен единице, то эта матрица состоит из одного элемента a_{11}, т.е. $A = (a_{11})$, тогда определителем первого порядка соответствующим такой матрице, назовём сам этот элемент a_{11}.

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}.$$

Определителем квадратной матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

называют число, равное $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$., т.е. $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Здесь и всюду в дальнейшем будем говорить об элементах, строках и столбцах определителя $|A|$, имея в виду элементы, строки и столбцы соответствующей ему матрицы А.

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называют элементами определителя матрицы второго порядка. Правило составления определителя второго порядка по элементам соответствующей матрице А: определителем второго порядка называют число, равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

Пример. Вычислить определители следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 7 \cdot 8 - 6 \cdot 1 = 50, \quad \det B = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 - 1 \cdot (-4) = 50 + 4 = 54.$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка

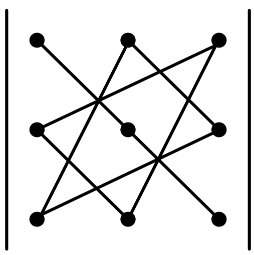
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

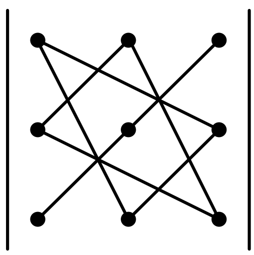
называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Заметим, что каждое слагаемое алгебраической суммы в правой части представляет собой произведение элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца с соответствующим знаком. Чтобы легче было запомнить, какие произведения берутся со знаком плюс, а какие со знаком минус, можно воспользоваться правилом треугольников, представленным схематически ниже.


«+»


«–»

Правило треугольников: три положительных члена определителя представляют собой произведения элементов главной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали; три отрицательных члена определителя представляют собой произведения элементов побочной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны второй диагонали.

Определитель третьего порядка состоит из $6 = 3!$ ($3! = 1\cdot 2\cdot 3$, читается: три факториал) слагаемых, каждое из которых есть произведение трех элементов определителя. Элементы произведения каждого слагаемого берутся по одному из каждой строки и каждого столбца.

Пример. Вычислить определитель следующей матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix} = 1\cdot 6\cdot(-8) + 2\cdot(-1)\cdot 3 + (-4)\cdot 2\cdot 5 - (-4)\cdot 6\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot(-8) - 1\cdot 5\cdot(-1) =$$

$$= -48 - 6 - 40 + 72 + 32 + 5 = -94 + 109 = 15.$$

Определители матриц второго и третьего порядка будем называть определителями второго и третьего порядка.

Вычисление определителей более высоких порядков довольно трудоёмко. При практическом вычислении определителей используется свойство понижения порядка, позволяющее вычислить определитель n-го порядка через определитель (n–1)-го порядка, в свою очередь определитель (n–1)-го порядка вычисляется через определитель (n–2)-го порядка и т.д.

Минором элемента $\mathbf{a_{ij}}$ матрицы n-го порядка называется определитель порядка n–1, соответствующий той матрице, которая получается из данной матрицы вычеркиванием **i**-ой строки и **j**-го столбца (той строки и того столбца на пересечении которых стоит данный элемент). Минор элемента $\mathbf{a_{ij}}$ обозначим через M_{ij}.

Пример. Рассмотрим определитель $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Минором элемента a_{12} является $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, а минором элемента a_{23} является M_{23} $= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением $\mathbf{A_{ij}}$ элемента $\mathbf{a_{ij}}$ матрицы **A** называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Таким образом, алгебраическое дополнение и минор одного и того же элемента либо совпадают, либо противоположны. Например, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$.

Пример. Рассмотрим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix}$. Для него найдём A_{12} и A_{22}

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (3 \cdot 5 - 0 \cdot 7) = -15,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-2) \cdot 7 = 19.$$

Определителем n-го порядка, соответствующим матрице **A** называют число, равное

$$\boldsymbol{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}}.$$

Это сумма всех произведений элементов первой строки на соответствующие им алгебраические дополнения.

Последняя формула выражает правило составления определителя n-го порядка по элементам матрицы и по алгебраическим дополнениям этих элементов, которые являются определителями порядка $n-1$, взятыми с надлежащими знаками.

Равенство для определителя третьего порядка можно записать так:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Возникает вопрос, а нельзя ли использовать для получения величины определителя элементы и соответствующие им миноры не первой, а любой строки матрицы, а также вопрос о разложении определителя по элементам любого столбца. Ответ на эти вопросы дают следующие основные теоремы, приводимые здесь без доказательства.

Теорема. Определитель матрицы **n**-го порядка равен сумме произведений элементов любой ее строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения.

Таким образом, справедливы следующие формулы:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad (i = \overline{1, n});$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = \overline{1, n}).$$

Особенно удобно разлагать определитель по элементам строки (столбца), если в ней много нулей.

При решении задач используются свойства определителей, которые облегчают их вычисление. Рассмотрим свойства определителей без доказательств, демонстрируя их на примере определителя второго порядка.

1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется: $\det A = \det A^T$.

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = |A|.$$

2. При перестановке двух соседних строк или столбцов определитель меняет лишь знак:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{12} - a_{22} \cdot a_{11} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0.$$

4. Множитель, общий для всех элементов некоторой строки (столбца) можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{21} = 0.$$

6. Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

7. Значение определителя не изменится, если к элементам его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число k:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + ka_{21}a_{22} - a_{12}a_{21} - ka_{22}a_{21} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

8. Если каждый элемент строки (столбца) определителя равен сумме двух слагаемых, то такой определитель можно представить в виде суммы двух определителей, у одного из которых соответствующая строка (столбец) составлена из первых слагаемых, а у другого – из вторых слагаемых; элементы же, стоящие на остальных местах, у всех трех определителей одни и те же:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим без доказательства следующую теорему.

Теорема. Определитель произведения двух квадратных матриц A и B одного порядка равен произведению определителей перемножаемых матриц:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

На практике часто пользуются следующим способом вычисления определителей: применяя свойства определителей добиваются, чтобы в какой-либо строке (столбце) определителя стало как можно больше нулей, а затем полученный определитель разлагают по этой строке (столбцу).

Пример. Вычислить определитель матрицы четвёртого порядка

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1 способ:

Разложим данный определитель, например, по элементам 3-ей строки:

$$\det A = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} = a_{31}\cdot(-1)^4\cdot M_{31} + a_{32}\cdot(-1)^5\cdot M_{32} +$$

$$+a_{33}\cdot(-1)^6\cdot M_{33} + a_{34}\cdot(-1)^7 M_{34} = 3\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)\cdot(-1)^6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^7\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Далее надо вычислить четыре определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot2 + 3\cdot2\cdot1 + (-1)\cdot(-3)\cdot4 - 4\cdot5\cdot1 - 3\cdot(-1)\cdot2 - 2\cdot2\cdot(-3) =$$

$$= 20 + 6 + 12 - 20 + 6 + 12 = 36;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot2 + 3\cdot2\cdot1 + 4\cdot0\cdot(-3) - 4\cdot5\cdot1 - 3\cdot0\cdot2 - 2\cdot(-3)\cdot1 = 10 + 6 - 20 + 6 = 2;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot2 + 2\cdot2\cdot1 + 4\cdot0\cdot1 - 4\cdot(-1)\cdot1 - 2\cdot0\cdot2 - 2\cdot1\cdot1 = -2 + 4 + 4 - 2 = 4;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-3) + 2\cdot5\cdot1 + 3\cdot0\cdot1 - 3\cdot(-1)\cdot1 - 2\cdot0\cdot(-3) - 5\cdot1\cdot1 = 3 + 10 + 3 - 5 = 11.$$

Получаем

$$\det A = 3\cdot(-1)^4\cdot36 + 2\cdot(-1)^5\cdot2 + (-1)\cdot(-1)^6\cdot4 + 4\cdot(-1)^7\cdot11 = 3\cdot36 - 4 - 4 - 44 = 56.$$

2 способ:

Данный определитель можно найти, используя свойства определителей. Вычтем из четвёртой строки первую, а из третьей утроенную первую получаем

$$\det A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 5 & 2\\ 0 & -4 & -10 & -8\\ 0 & -1 & -6 & -2\end{pmatrix}.$$

Разложим данный определитель по элементам первого столбца, поскольку первый столбец содержит наибольшее количество нулей:

$$\det A=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 5 & 2\\ -4 & -10 & -8\\ -1 & -6 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 5 & 2\\ -4 & -10 & -8\\ -1 & -6 & -2\end{vmatrix}.$$

Вычтем из последнего столбца удвоенный первый, а затем разложим полученный определитель по третьему столбцу

$$\det A=\begin{vmatrix}-1 & 5 & 4\\ -4 & -10 & 0\\ -1 & -6 & 0\end{vmatrix}.$$

$$\det A=4\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-4 & -10\\ -1 & -6\end{vmatrix}=4\cdot(24-10)=56.$$

Итак, значение определителя равно 56.

Квадратная матрица называется **невырожденной**, если её определитель отличен от нуля. В противном случае матрица называется **вырожденной**.

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка, а E – единичная квадратная матрица того же порядка.

Определение обратной матрицы. Квадратная матрица A^{-1} называется **обратной** к квадратной матрице A, если она удовлетворяет условиям

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

Теорема. Если обратная матрица существует, то она единственна.

Доказательство. Пусть A_1^{-1} и A_2^{-1} – обратные матрицы к матрице A. Покажем, что $A_1^{-1}=A_2^{-1}$. Действительно,

$$A_1^{-1}=A_1^{-1}E=A_1^{-1}(AA_2^{-1})=(A_1^{-1}A)A_2^{-1}=EA_2^{-1}=A_2^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной.

Доказательство.

Необходимость. Пусть для матрицы A существует обратная матрица. Тогда из соотношения $AA^{-1}=E$ следуют равенства $|A|\cdot|A^{-1}|=|AA^{-1}|=|E|=1$, т. е. $|A|\neq 0$. Отсюда, в частности, следует, что

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}.$$

Достаточность. Возьмем матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

такую, что $|A|\neq 0$. Покажем, что А имеет обратную матрицу.

Рассмотрим матрицу В вида

$$B=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

в i-том столбце которой расположены алгебраические дополнения элементов i-той строки матрицы А. Матрица В называется **присоединенной** к матрице А.

Перемножим матрицы А и В.

$$AB=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}=|A|\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=|A|E.$$

Следовательно, $A\cdot\left(\dfrac{1}{|A|}B\right)=E$.

Таким образом,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}B.$$

Теорема доказана.

Из последней формулы вытекает **алгоритм построения обратной матрицы**: необходимо составить присоединенную матрицу В, а затем каждый ее элемент разделить на число $|A|$.

Таким образом у всякой невырожденной матрицы А существует единственная обратная матрица A^{-1}, определяемая формулой

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы А, заметим, что алгебраические дополнения элементов i-й строки матрицы А расположены в i-м столбце матрицы С.

Заметим, что вырожденная матрица не имеет обратной.

Далее рассмотрим некоторые свойства обратной матрицы, которые часто используются при решении задач, будем их принимать без доказательства.

Свойства обратной матрицы

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
2. $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3. $\left(A^{n}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{n}$;
4. $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$.

Пример. Найдите обратную матрицу A^{-1} к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала вычислим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - (-3)\cdot(-1) = 8 - 3 = 5 .$$

Поскольку $\det A \neq 0$, значит данная матрица невырожденная, т.е. имеет обратную матрицу. Далее находим алгебраические дополнения элементов матрицы:

$\mathbf{A}_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 4=4$, $\mathbf{A}_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-1)=1$, $\mathbf{A}_{21}=(-1)^{2+1}\cdot(-3)=3$, $\mathbf{A}_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 2=2$.

Определяем A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Убедимся в том, что матрица A^{-1} найдена верно. Для этого вычислим $A\cdot A^{-1}$ и $A^{-1}\cdot A$:

$$A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot\frac{4}{5} + (-3)\cdot\frac{1}{5} & 2\cdot\frac{3}{5} + (-3)\cdot\frac{2}{5} \\ -1\cdot\frac{4}{5} + 4\cdot\frac{2}{5} & -1\cdot\frac{3}{5} + 4\cdot\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично убедитесь, что $A^{-1}\cdot A = E$.

1.1.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Системой m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \ldots & + a_{1n}x_n = & b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \ldots & + a_{2n}x_n = & b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \ldots & + a_{mn}x_n = & b_m. \end{cases} \tag{1}$$

где числа a_{ij} ($i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$) называют **коэффициентами системы**, а числа b_i ($i = 1,2,\ldots,m$) – **свободными членами**, j – номер соответствующего неизвестного. Каждый коэффициент системы имеет два индекса, первый из которых i указывает на номер уравнения, а второй j на номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент.

Мы будем рассматривать только случаи, когда число **m** уравнений равно или меньше **n** числа неизвестных.

Если все свободные члены равны нулю, т. е. $\mathbf{b}_i = 0$, $i = 1,2,\ldots,m$, то система (1) называется **однородной**.

Однородная линейная система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots & + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots & + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots & + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Если среди свободных членов имеются отличные от нуля, то линейная система называется **неоднородной**.

Решением линейной системы (1) называется упорядоченная совокупность n чисел c_1, c_2, … c_n, которая при подстановке в каждое из уравнений системы вместо соответствующих переменных x_1, x_2, … x_n ($x_1=c_1$, $x_2=c_2$, … $x_n=c_n$) обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**, а система, не имеющая ни одного решения, – **несовместной**.

Решить систему – значит определить, совместна она или нет, и в случае совместности найти все ее решения.

Система, имеющая только одно решение, называется **определённой,** если система имеет больше одного решения, то она называется **неопределённой**. В случае неопределённой системы каждое её решение называется **частным решением** системы. Совокупность всех частных решений называется **общим решением**.

Две системы называются **эквивалентными** или **равносильными**, если любое решение одной из них является также решением другой и обратно, т.е. если они имеют одно и то же множество решений. Любые две несовместные системы считаются эквивалентными.

Линейную систему (1) можно записать в матричном виде. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

составленная из коэффициентов линейных уравнений системы (1) **называется основной матрицей системы** (или матрицей системы).

Матрица-столбец составленная из неизвестных:

$$X = \begin{bmatrix} x_1, \\ x_2, \\ \dots \\ x_n. \end{bmatrix}.$$

Матрица-столбец составленная из свободных членов:

$$B = \begin{bmatrix} b_1, \\ b_2, \\ \dots \\ b_m. \end{bmatrix}.$$

Заметим что матрица А имеет размер $m \times n$ согласована с матрицей X, имеющей размер $n \times 1$, а значит можно найти произведение AX.

$$\text{AX}=\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \ + a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \ + a_{2n}x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots \ + a_{mn}x_n. \end{bmatrix}.$$

Так как элементами этой столбцевой матрицы размера $m \times 1$ являются левые части уравнений системы (1), то по определению равенства матриц

$$AX = B. \qquad (3)$$

Таким образом, система линейных уравнений (1) может быть записана в виде одного матричного уравнения (3). Эта запись системы называется **матричной**.

Если (c_1, c_2, … c_n) – решение системы (1), то матрица $C = \begin{bmatrix} c_1, \\ c_2, \\ \dots \\ c_n. \end{bmatrix}$

называется решением этой системы.

Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему **n** линейных алгебраических уравнений с **n** неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \ldots & + a_{1n}x_n = & b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \ldots & + a_{2n}x_n = & b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + \ldots & + a_{nn}x_n = & b_n. \end{cases} \tag{4}$$

Матрица A данной системы – квадратная. **Определителем системы** (4) называется определитель матрицы A, составленной из коэффициентов этой системы, обозначим его через Δ ($\Delta = \det A$).

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если определитель Δ системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то для матрицы данной системы A существует единственная обратная матрица A^{-1}, определяемая формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Систему (4) можно записать в матричном виде

$$AX = B.$$

Умножим обе части этого равенства слева на A^{-1} и получим

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

тогда

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Эта формула является матричной записью решения системы (4).

Пример. Решить систему линейных уравнений при помощи обратной матрицы:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 9, \\ 7x + 8y = -6. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в матричном виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Сначала найдём определитель матрицы А

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \quad .$$

Определитель не равен нулю, значит данная матрица невырожденная, т.е. имеет обратную. Найдём алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24, \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Определяем A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Итак $$A^{-1} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Далее найдём искомую матрицу

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{3}{9} \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, то есть: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Формулы Крамера

Рассмотрим систему **n** линейных алгебраических уравнений с **n** неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$ (4).

Обозначим через Δ_k определитель, полученный заменой в определителе Δ столбца из коэффициентов при неизвестной x_k столбцом свободных членов системы (4) тогда

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

В 1750 году швейцарский математик Габриэль Крамер дал общие формулы, выражающие неизвестные системы линейных уравнений через определители, составленные из коэффициентов системы, которые отображены в следующей теореме.

Теорема (Крамера). Если определитель Δ системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, которое называется **формулами Крамера**:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Доказательство. Запишем систему (4) в матричной форме: $AX = B$. Поскольку определитель Δ матрицы А отличен от нуля, она имеет обратную матрицу A^{-1}. Тогда

$$AX = B \ \Rightarrow \ A^{-1}(AX) = A^{-1}B \ \Rightarrow \ (A^{-1}A)X = A^{-1}B \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ EX = A^{-1}B \ \Rightarrow \ X = A^{-1}B.$$

Полученная формула является матричной записью решения системы. Единственность решения следует из единственности обратной матрицы.

Матричное равенство имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$x_1 = \frac{1}{|A|}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n) = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$
$$x_2 = \frac{1}{|A|}(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n) = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$
$$\dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots$$
$$x_n = \frac{1}{|A|}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n) = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

так как $A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \dots + A_{nk}b_n = \Delta_k$ для всякого $k = \overline{1, n}$. Теорема доказана.

Следствие. Если однородная система имеет ненулевое решение, то ее определитель $\Delta = 0$.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}5x_1 - 7x_2 = 1,\\ 3x_1 + x_2 = 11.\end{cases}$$

Решение. Составим определитель системы и найдём его

$$\Delta = \begin{vmatrix}5 & -7\\ 3 & 1\end{vmatrix} = 5\cdot 1-(-7)\cdot 3 = 5+21 = 26.$$

Определитель отличен от нуля, следовательно, система имеет единственное решение. Вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix}1 & -7\\ 11 & 1\end{vmatrix} = 1\cdot 1-(-7)\cdot 11 = 1+77 = 78,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix}5 & 1\\ 3 & 11\end{vmatrix} = 5\cdot 11-1\cdot 3 = 55+3 = 52.$$

Воспользуемся формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{78}{26} = 3,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{52}{26} = 2.$$

Система имеет единственное решение $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Формулы Крамера требуют довольно сложных вычислений (при больших n), связанных с вычислением определителей Δ и Δ_k. А также заметим, что методом Крамера нельзя решить систему, если матрица А данной системы вырожденная. Для практического решения систем линейных алгебраических уравнений используют метод Гаусса, основанный на последовательном исключении неизвестных и пригодный для решения произвольных линейных систем. Хотя в настоящее время данный метод повсеместно называется методом Гаусса, он был известен и до К. Ф. Гаусса. Первое известное описание данного метода упоминалось еще в китайском трактате «Математика в девяти книгах», составленном между I в. до н. э. и II в. н. э.

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \ldots & + a_{1n}x_n = & b_1,\\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \ldots & + a_{2n}x_n = & b_2,\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \ldots & + a_{mn}x_n = & b_m.\end{cases}$$

Матрица

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{array}\right),$$

полученная из основной матрицы системы добавлением столбца свободных членов, называется **расширенной матрицей системы**.

Элементарными преобразованиями линейной системы называются следующие преобразования:

1. умножение любого уравнения на число, не равное нулю;

2. прибавление к одному уравнению системы другого её уравнения, умноженного на любое число, при этом сохраняются остальные уравнения системы, в том числе и то, которое прибавлялось;

3. перестановка местами любых двух уравнений системы.

4. вычеркивание нулевой строки, т.е. строки, у которой все элементы равны нулю.

С помощью таких преобразований каждый раз получается система уравнений, эквивалентная исходной системе.

Метод Гаусса состоит в приведении исходной системы линейных алгебраических уравнений с помощью элементарных преобразований к эквивалентной ей системе, способ решения которой весьма прост.

Метод Гаусса состоит в следующем.

Предположим, что $a_{11}\neq 0$ (это всегда можно сделать за счет перестановки уравнений). Для этого ко второму уравнению системы прибавим почленно первое, умноженное на $\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$. Затем к третьему уравнению системы прибавим почленно первое, умноженное на $\left(-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}\right)$. Аналогичным образом преобразуем все остальные уравнения, в результате чего получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases} \tag{5}$$

где a'_{ij}, b'_i ($i=\overline{2,m}$, $j=\overline{2,n}$) – новые значения коэффициентов и правых частей.

Предполагая, что $a'_{22}\neq 0$, и оставляя без изменения первые два уравнения системы (5), преобразуем её таким образом, чтобы в каждом из остальных уравнений коэффициент при x_2 превратился в нуль. Продолжая этот процесс, приведём систему (5) к одной из систем вида (6) или (7) или (8). Вид таких систем называется **ступенчатым.**

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + & c_{12}x_2 + & c_{13}x_3 + \ldots + & c_{1n}x_n & = d_1, \\ & c_{22}x_2 + & c_{23}x_3 + \ldots + & c_{2n}x_n & = d_2, \\ & & c_{33}x_3 + \ldots + & c_{3n}x_n & = d_3, \\ & & & \ldots & \ldots \\ & & & c_{nn}x_n & = d_n, \end{cases} \tag{6}$$

где $c_{kk} \neq 0$ ($k=1,2,\ldots,n$); c_{kk} – некоторые новые коэффициенты, d_k – свободные члены.

Система (6) имеет единственное решение. Находим из последнего уравнения $x_n = \dfrac{d_n}{c_{nn}}$. Затем, подставляя найденное значение x_n в предпоследнее уравнение системы и находим x_{n-1} и т.д. значение x_1 из первого.

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + & c_{12}x_2 + & c_{13}x_3 + \ldots + & c_{1n}x_n & = d_1, \\ & c_{22}x_2 + & c_{23}x_3 + \ldots + & c_{2n}x_n & = d_2, \\ & & c_{33}x_3 + \ldots + & c_{3n}x_n & = d_3, \\ & & & \ldots & \ldots \\ & & c_{kk}x_k + \ldots + & c_{kn}x_n & = d_r, \end{cases} \tag{7}$$

где $k < n$.

Система (7) имеет бесконечное множество решений. Придавая свободным переменным $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ произвольные значения, последовательно находим $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1$ из системы

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1\,k}x_k = d_1 - c_{1\,k+1}x_{k+1} - \ldots - c_{1n}x_n, \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2\,k}x_k = d_2 - c_{2\,k+1}x_{k+1} - \ldots - c_{2\,n}x_n, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad c_{kk}x_k = d_k - c_{k\,k+1}x_{k+1} - \ldots - c_{k\,n}x_n. \end{cases}$$

В формулах, выражающих $x_1, x_2, \ldots, x_k$ через $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ могут принимать любые значения.

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + & c_{12}x_2 + & c_{13}x_3 + \ldots + & c_{1n}x_n & = d_1, \\ & c_{22}x_2 + & c_{23}x_3 + \ldots + & c_{2n}x_n & = d_2, \\ & & c_{33}x_3 + \ldots + & c_{3n}x_n & = d_3, \\ & & & \ldots & \ldots \\ & & & 0 \cdot x_n & = d_r, \end{cases} \tag{8}$$

где $k \leq n$.

Система (8) несовместна, т.е. не имеет решений, так последнее равенство не выполняется ни при каких значениях неизвестных.

Отметим, что метод последовательного исключения неизвестных применим к любой системе линейных уравнений. Решая систему методом Гаусса, преобразования совершаются не над уравнениями, а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Замечание. На практике удобнее работать не с системой (1), а с расширенной матрицей $\overline{A}$ данной системы, выполняя все элементарные преобразования над ее строками. Удобно, чтобы коэффициент a_{11} был равен 1 (для этого нужно переставить местами уравнения системы, либо разделить обе части первого уравнения на $a_{11} \neq 1$).

Пример. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2, \\ 7x_1-8x_2+9x_3=24, \\ 3x_1+12x_2-5x_3=-14, \\ 13x_1+16x_2-x_3=-4. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 7 & -8 & 9 & 24 \\ 3 & 12 & -5 & -14 \\ 13 & 16 & -1 & -4 \end{array}\right).$$

Прибавим ко второму уравнению системы первое уравнение, умноженное на (–7), к третьему уравнению системы первое уравнение, умноженное на (–3), а к четвертому уравнению системы первое уравнение, умноженное на (–13) и получим матрицу:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -22 & -12 & 10 \\ 0 & 6 & -14 & -20 \\ 0 & -10 & -40 & -30 \end{array}\right).$$

Четвертую строку разделим на (-10) и поменяем со второй строкой:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -14 & -20 \\ 0 & -22 & -12 & 10 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьему уравнению системы второе уравнение, умноженное на (–6), а четвертому уравнению системы второе уравнение, умноженное на 22, и получим матрицу:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 76 & 76 \\ 0 & 0 & -38 & -38 \end{array}\right).$$

Третья и четвертая строки пропорциональны. Одну из них можно убрать из рассмотрения. Данная система совместна и имеет единственное решение**.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 + 4x_3 = 3, \\ -38x_3 = -38; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2 - (2x_2 + 3x_3), \\ x_2 = -4x_3 + 3, \\ x_3 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, единственное решение имеет вид $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{array}\right).$$

Прибавим ко второму уравнению системы первое уравнение, умноженное на (–6), к третьему уравнению системы первое уравнение, умноженное на 7, а к четвертому уравнению системы первое уравнение, умноженное на 3 и получим матрицу:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьему и четвертому уравнениям системы второе уравнение, умноженное на 1, и получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Данная система совместна и имеет бесконечное множество решений. Выразим переменные x_1, x_2 через переменные x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 15. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 1, \\ 15x_2 = -15x_3 - 19x_4 + 15. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 1, \\ x_2 = -x_3 - \frac{19}{15}x_4 + 1. \end{cases}$$

Подставим выражение для переменной x_2 в первое уравнение и найдем x_1:

$$x_1 = -2 \cdot \left(-x_3 - \frac{19}{15}x_4 + 1\right) - 2x_3 - 3x_4 + 1 = 2x_3 + \frac{38}{15}x_4 - 2 - 2x_3 - 3x_4 + 1 = -\frac{7}{15}x_4 - 1.$$

Таким образом, общее решение имеет вид $\begin{pmatrix} -1-\frac{7}{15}x_4 \\ 1-x_3-\frac{19}{15}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, где x_3, x_4 могут принимать любые действительные значения.

Пример. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Прибавим ко второму уравнению системы первое уравнение, умноженное на (–1), а к третьему уравнению системы первое уравнение, умноженное на 2 и получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьему уравнению системы второе уравнение, умноженное на (–2). В итоге получим матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right)$.

Последней матрице соответствует следующая система, равносильная исходной системе:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ 0x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -13. \end{cases}$$

Эта система уравнений решений не имеет, так как получили уравнение $0x_1+0x_2+0x_3 = -13$, которое не имеет решений.

Использование матриц при решении прикладных задач

Пример. Данные о доходах холдинговой компании по трём областям трёх компаний за 2022 и 2024 года в тыс. ден. ед. представлены в матрицах A и B:

$$A=\begin{pmatrix}550 & 680 & 340\\ 2000 & 330 & 170\\ 2200 & 240 & 600\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}600 & 800 & 350\\ 2300 & 500 & 250\\ 2000 & 950 & 600\end{pmatrix}.$$

Здесь элемент a_{ij} матрицы A означает доход i-й компании в j-ой области за 2022 год, а элементы матрицы B – за 2024 год. Вычислите матрицу C прироста доходов за период с 2022 по 2014 года и проанализируйте её. Рассчитайте матрицу $C_{ср}$, характеризующую средние размеры приростов доходов компаний холдинга за год.

Решение. Матрица приростов доходов за рассматриваемый период равна

$$C=B-A=\begin{pmatrix}600-550 & 800-680 & 350-340\\ 2300-2000 & 500-330 & 250-170\\ 2000-2200 & 950-240 & 600-600\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50 & 120 & 10\\ 300 & 170 & 80\\ -200 & 710 & 0\end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы C выражают изменение доходов с 2022 по 2024 года. Так, третья компания по первой области потерпела убытки в размере 200 тыс. ден. ед., так как $c_{31}=-200$, эта же компания по третьей области не принесла доходов, так как $c_{33}=0$.

Матрица $C_{ср}$, характеризующая средние размеры приростов доходов компаний холдинга за год, равна матрице C, делённой на количество лет в рассматриваемом периоде:

$$C_{ср}=\frac{1}{2}\cdot C=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot 50 & \frac{1}{2}\cdot 120 & \frac{1}{2}\cdot 10\\ \frac{1}{2}\cdot 300 & \frac{1}{2}\cdot 170 & \frac{1}{2}\cdot 80\\ \frac{1}{2}\cdot(-200) & \frac{1}{2}\cdot 710 & \frac{1}{2}\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 60 & 5\\ 150 & 85 & 40\\ -100 & 355 & 0\end{pmatrix}.$$

Пример. В социально-экономической сфере широко используются матрицы, моделирующие территориально-экономические связи между районами страны. Такая матрица должна быть квадратной. Элемент a_{ij} указанной матрицы выражает объем рассматриваемого вида продукции, произведенной в i-м районе и потребленной в j-м. Элементы, стоящие на главной диагонали показывают объем продукции, которая потребляется в том же районе, где и производится.

Каждая симметрично расположенная относительно главной диагонали пара элементов матрицы (a_{ij} и a_{ji}) характеризует двусторонние транспортно-экономические связи между районами. Сумма элементов, лежащих на главной диагонали, показывает общий объем производства для местных нужд всех районов. Сумма остальных элементов матрицы равна общему объему продукции, перевозимой между районами. Каждая строка данной матрицы $(a_{i1}\quad a_{i2}\quad \ldots\quad a_{in})$ характеризует размер производства в одном районе и объем поставок его продукции по остальным районам. Каждый столбец матрицы

$$\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \ldots\\ a_{nj}\end{pmatrix}$$

характеризует размеры потребления в одном из районов и его состав по местам производства.

Матрица территориально-экономических связей наглядно моделирует экономические связи, упрощает их анализ и при составлении ряда других, сопряженных с ней матриц позволяет решать ряд социально-экономических задач по рационализации экономических связей, упорядочению размещения производства и т. д. Выполнение арифметических действий с матрицами открывает возможности для упрощения обработки экономической информации и осуществления расчетов непосредственно по сгруппированным данным.

Пример. Пусть некоторое предприятие выпускает продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

где каждый элемент a_{ij} ($i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2$) показывает, сколько единиц сырья j-го типа расходуется на производство единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой $\mathrm{C} = (120 \quad 90 \quad 150)$, стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) – матрицей-столбцом

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем общую стоимость сырья, затраченную на производство продукции.

Затраты 1-го сырья составляют $\mathrm{S}_1 = 120 \cdot 3 + 90 \cdot 4 + 150 \cdot 5 = 1470$ ед. и 2-го сырья $\mathrm{S}_2 = 120 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 150 \cdot 3 = 750$ ед., поэтому матрица-строка затрат сырья S может быть записана как произведение

$$\mathrm{S} = \mathrm{CA} = (120 \quad 90 \quad 150) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = (1470 \quad 750).$$

Тогда общая стоимость сырья $\mathrm{Q} = 1470 \cdot 40 + 750 \cdot 20 = 73800$ ден. ед. может быть записана в матричном виде:

$$\mathrm{Q} = \mathrm{SB} = (\mathrm{CA})\mathrm{B} = (1470 \quad 750) \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} = 73800.$$

Общую стоимость сырья можно вычислить и в другом порядке: вначале вычисляют матрицу стоимостей затрат сырья на единицу продукции, т. е. матрицу

$$\mathrm{R} = \mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} =\cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 200 \\ 260 \end{pmatrix},$$

а затем общую стоимость сырья

$$\mathrm{Q} = \mathrm{CR} = \mathrm{C}(\mathrm{AB}) = (120 \quad 90 \quad 150) \cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 200 \\ 260 \end{pmatrix} = 73800.$$

Рассмотренный пример иллюстрирует выполнение ассоциативного закона для произведения матриц: (CA)B=C(AB).

Пример. Пусть все население разделено на 5 групп: до года, от года до 25 лет, от 26 до 50 лет, от 51 до 75 лет и старше 75 лет. Если начальное состояние

$$\sigma(0) = (2114 \quad 5631 \quad 4957 \quad 3284 \quad 1265)$$

и матрица перехода π имеет вид

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}98 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}9 & 0{,}05 & 0 & 0 \\ 0{,}15 & 0 & 0{,}8 & 0{,}04 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix},$$

то через год мы получим следующую демографическую ситуацию:

$$\sigma(1) = (2114 \quad 5631 \quad 4957 \quad 3284 \quad 1265) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0{,}98 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}9 & 0{,}05 & 0 & 9 \\ 0{,}15 & 0 & 0{,}8 & 0{,}04 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix} =$$

$$= (2480 \quad 7140 \quad 4247 \quad 2497 \quad 1163).$$

Все числа в последнем равенстве получены умножением строки $\sigma(0)$ на соответствующие столбцы матрицы π. Например, число 7140 человек во второй возрастной группе получилось (с округлением) так:

$$7140=2114\cdot 0{,}98+5631\cdot 0{,}9.$$

Аналогично, через 2 года

$$\sigma(2) =(2672 \quad 8856 \quad 3755 \quad 1918 \quad 965)$$

и через 3 года

$$\sigma(3) =(2969 \quad 10588 \quad 3447 \quad 1493 \quad 769).$$

Цифры в данном примере не имеют никакого экспериментального подтверждения, но если представить себе, что ситуация действительно развивается по приведенным данным, то можно сделать вывод о росте населения, но при этом сокращении среднего срока жизни.

1.1.3. Аналитическая геометрия на плоскости

Аналитическая геометрия – это раздел математики, в котором с помощью алгебраических методов изучаются геометрические объекты. Основным методом аналитической геометрии является метод координат.

Метод координат на плоскости

Декартовы прямоугольные координаты на плоскости

Для того чтобы можно было на плоскости описывать местоположение любого объекта используют различные системы координат. Координатной числовой осью называют прямую линию с выбранным положительным направлением, масштабным (единичным) отрезком и точкой начала отсчета (начало координат), обозначаемую как О.

Точки на оси принято обозначать большими латинскими буквами А, В,…,Х…, возможно с нижними индексами A_1, A_2,… Координату точки указывают сразу после буквы в круглых скобках $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$. Имеет место следующий факт: расстояние между двумя точками $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$ числовой оси, вне зависимости от их расположения, равно $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$.

Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат.

Для ее задания в данной плоскости проведем две взаимно перпендикулярные координатные оси: горизонтальную Ох (ось абсцисс) и вертикальную Оу (ось ординат). Точку О пересечения координатных осей назовем также началом координат. Кроме того, выберем единицу масштаба одинаковую для каждой из осей (иногда масштаб по осям может быть разный) для возможности измерения расстояний.

Пусть М – произвольная точка плоскости. Опустим из нее перпендикуляры МА и МВ на соответствующие оси Ох и Оу (рис. 1).

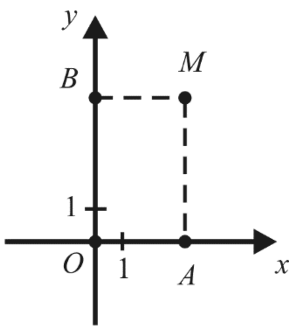


Рис. 1

Декартовыми прямоугольными координатами х и у точки М на плоскости называются соответственно координаты точки А (на оси Ох) и точки В (на оси Оу).

При выбранной системе координат точке М плоскости соответствует упорядоченная пара чисел $(x; y)$ – ее декартовы прямоугольные координаты, и обратно, каждой упорядоченной паре чисел $(x; y)$ соответствует единственная точка М плоскости Оху такая, что ее абсцисса равна х, а ордината равна у. Запись $M(x; y)$ означает, что точка М имеет координаты х и у.

Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

Расстояние между двумя точками

Теорема. Для любых двух точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ плоскости расстояние d между ними выражается формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Доказательство. Опустим из точек M_1 и M_2 перпендикуляры M_1B и M_2A на оси Oy и Ox соответственно и обозначим через K точку пересечения прямых M_1B и M_2A (рис. 2).

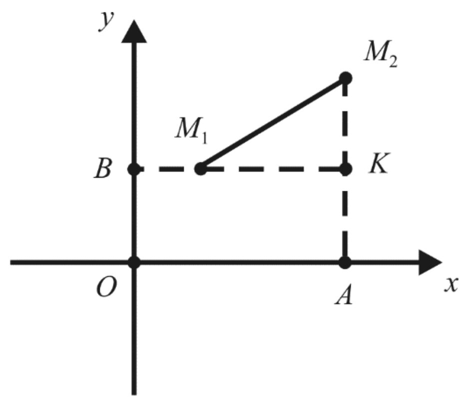


Рис. 2

Точки M_1 и K имеют одинаковую ординату y_1 и абсциссы x_1 и x_2, соответственно. Они лежат на прямой параллельной оси Ox, следовательно, по формуле указанной выше, имеем $|M_1K| = |x_2 - x_1|$. Точки M_2 и K имеют одинаковую абсциссу x_2 и ординаты y_2 и y_1 соответственно. Они лежат на прямой параллельной оси Oy, значит, $|M_2K| = |y_2 - y_1|$. Треугольник M_1M_2K – прямоугольный, поскольку его стороны M_1K и M_2K лежат на прямых, параллельных осям координат. По теореме Пифагора находим

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{|M_1K|^2 + |M_2K|^2} =$$
$$= \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Теорема доказана.

Деление отрезка в данном отношении

Пусть на плоскости задан произвольный отрезок M_1M_2 (точки M_1 и M_2 различны) и M – любая точка этого отрезка, отличная от точки M_2.

Число λ, определяемое равенством $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}$, называется отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2. Очевидно, что $\lambda \geq 0$. Задача о делении отрезка в данном отношении состоит в том, чтобы по заданному λ и заданным координатам точек M_1 и M_2 найти координаты точки M. Решить эту задачу позволяет следующая теорема.

Теорема. Если точка $M(x, y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то координаты этой точки определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad (9)$$

где $(x_1,\ y_1)$ – координаты точки M_1; $(x_2,\ y_2)$ – координаты точки M_2.

Доказательство. Пусть прямая M_1M_2 не перпендикулярна оси Ох. Спроектируем точки M_1, M, M_2 на ось Ох, обозначив их проекции соответственно $P_1,\ P,\ P_2$ (рис. 3).

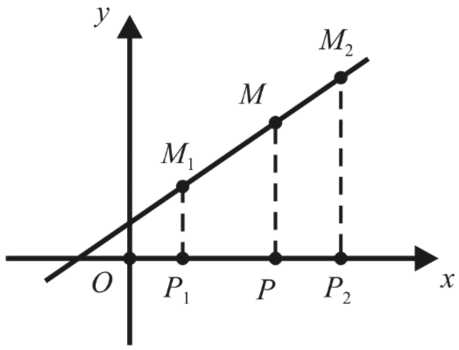


Рис. 3

На основании обобщенной теоремы Фалеса о пропорциональных отрезках из элементарной геометрии (параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки) имеем

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}=\lambda,$$

где $|P_1P|=|x-x_1|$; $|PP_2|=|x_2-x|$. Так как числа $(x-x_1)$ и (x_2-x) одного и того же знака (при $x_1<x_2$ они положительны, а при $x_1>x_2$ – отрицательны), то $\frac{|x-x_1|}{|x_2-x|}=\frac{x-x_1}{x_2-x}$. Поэтому $\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$, откуда $x-x_1=\lambda(x_2-x)$ и $x(1+\lambda)=x_1+\lambda x_2$. Разделив последнее равенство на $1+\lambda\neq 0$, получаем первую из формул (9).

Если прямая M_1M_2 перпендикулярна оси Ох, то $x_1=x_2=x$ и первая из формул (9) принимает вид $x=\frac{x(1+\lambda)}{1+\lambda}$, т. е. верна.

Вторая из формул (9) доказывается аналогично (точки M_1, M и M_2 необходимо предварительно спроектировать на ось Оу).

Следствие. Если $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$ – две произвольные несовпадающие точки и точка $M(x,y)$ является серединой отрезка M_1M_2, т.е. $|M_1M|=|MM_2|$, то $\lambda=1$ и формулы (9) приобретают вид

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Таким образом, каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

Пример. Даны точки $M_1(1,\ 1)$ и $M_2(7,\ 4)$. На отрезке M_1M_2 найти точку $M(x,\ y)$, которая в 2 раза ближе к M_1, чем к M_2.

Решение. Искомая точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}=\frac{|M_1M|}{2|M_1M|}=\frac{1}{2}$. Применяя формулы (9), получаем

$$x=\frac{1+\frac{7}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{4,5}{1,5}=3,\quad y=\frac{1+2}{1+\frac{1}{2}}=\frac{3}{1,5}=2.$$

Таким образом, точка M имеет координаты $(3,\ 2)$.

Пример. Найти длину медианы BM в треугольнике ABC с вершинами $A(1,\ 2)$, $B(4,\ 3)$, $C(3,\ 1)$.

Решение. Для того чтобы найти длину медианы BM, нужно знать координаты x и y точки M – середины отрезка AC:

$$x = \frac{1+3}{2} = 2, \quad y = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Зная координаты точек $B(4,\ 3)$ и $M\left(2,\ \frac{3}{2}\right)$, найдем $|BM|$:

$$|BM| = \sqrt{(2-4)^2 + \left(\frac{3}{2} - 3\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = 2{,}5.$$

Ответ. 2,5.

Площадь треугольника

Теорема. Для любых точек $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ и $C(x_3,\ y_3)$, не лежащих на одной прямой, площадь S треугольника ABC выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}\,|\,(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\,| = \left|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right|. \qquad (10)$$

Доказательство. Как видно из рис. 4,

$$S_{ABC} = S_{ADEC} + S_{BCEF} - S_{ABFD}.$$

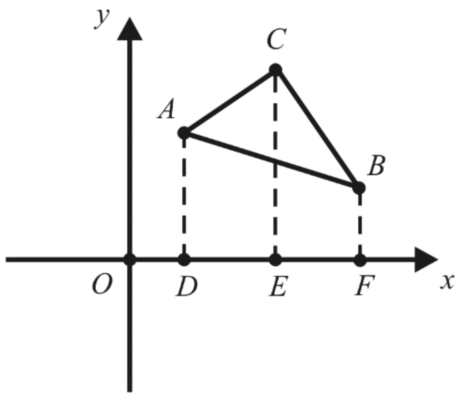


Рис. 4

Для определенности будем считать, что треугольник ABC лежит в первой координатной четверти и $x_1 < x_3 < x_2$, $y_2 < y_1 < y_3$ (т. е. расположение точек A, B, C именно такое, как на рисунке). По формуле для площади трапеции имеем

$$S_{ADEC} = |DE|\frac{|AD| + |CE|}{2} = \frac{(x_3 - x_1)(y_1 + y_3)}{2};$$

$$S_{BCEF} = |EF|\frac{|EC| + |FB|}{2} = \frac{(x_2 - x_3)(y_2 + y_3)}{2};$$

$$S_{ABFD} = |DF|\frac{|AD| + |FB|}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2}.$$

Отсюда

$$S = \frac{1}{2}[(x_3 - x_1)(y_1 + y_3) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) - (x_2 - x_1)(y_1 + y_2)] =$$

$$= \frac{1}{2}[x_3y_1 + x_3y_3 - x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 + x_2y_3 -$$
$$-x_3y_2 - x_3y_3 - x_2y_1 - x_2y_2 + x_1y_1 + x_1y_2] =$$
$$= \frac{1}{2}[x_3y_1 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 + x_1y_2] =$$
$$= \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)y_3 - x_3(y_2 - y_1) - x_2y_1 + x_1y_2] =$$
$$= \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)y_3 - x_3(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)y_1 + x_1(y_2 - y_1)] =$$
$$= \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)].$$

Заметим, что знак модуля в данном случае не нужен, т. е. полученное выражение для S положительно.

Рассмотрение других случаев расположения точек A, B, C на плоскости предоставляется читателю в качестве упражнения.

Пример. Вычислить длину высоты CH треугольника ABC с вершинами $A(-1;2)$, $B(3;5)$, $C(5;-1)$.

Решение. Найдем сначала площадь треугольника ABC по формуле (10).

$$S = \frac{1}{2}|(3-(-1))(-1-2)-(5-(-1))(5-2)| = 15.$$

Затем вычислим длину стороны AB.

$$|AB| = \sqrt{(3-(-1))^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

Известно, что площадь треугольника ABC можно вычислить по формуле

$$S = \frac{1}{2}|AB||CH|.$$

Отсюда, $|CH| = \frac{2S}{|AB|} = \frac{30}{5} = 6$.

Ответ. 6.

Линия первого порядка на плоскости

Прямую линию на плоскости относительно системы декартовых прямоугольных координат можно задать различными способами. Рассмотрим разные исходные условия, которые позволяют однозначно определить прямую и ее уравнение.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть дана некоторая прямая на плоскости Oxy. Углом наклона данной прямой к оси Ox называется наименьший неотрицательный угол ϕ, на который нужно повернуть (против часовой стрелки) ось Ox, чтобы ее положительное направление совпало с одним из направлений прямой. Тангенс угла наклона называется угловым коэффициентом прямой.

Пусть известны угловой коэффициент $k = \mathrm{tg}\phi$ ($\phi \neq \frac{\pi}{2}$) прямой и величина b отрезка OB, который она отсекает на оси Oy. Пусть, далее, $M(x,\ y)$ – произвольная точка прямой. Проведем прямые BC и MC, параллельные осям координат. В случае, когда $k \neq 0$, образуется прямоугольный треугольник BCM (рис. 5).

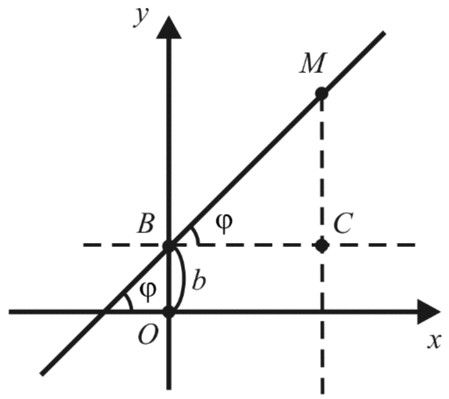


Рис. 5

Имеем $\mathrm{tg}\phi = \frac{MC}{BC} = \frac{y-b}{x}$, откуда $y - b = kx$, т. е.

$$y = kx + b. \tag{11}$$

Таким образом, координаты любой точки M прямой удовлетворяют уравнению (11). Обратно, если координаты некоторой точки $N(x_1,\ y_1)$, $x_1 \neq 0$, удовлетворяют уравнению (16), то $\frac{y_1-b}{x_1} = k$ и N принадлежит данной прямой.

Уравнение (11) называют уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Если $b = 0$, то прямая проходит через начало координат. Если $k = 0$, то прямая параллельна Ox и ее уравнение имеет вид $y = b$. В случае, когда $\phi = \frac{\pi}{2}$, прямая перпендикулярна оси Ox и ее уравнение имеет вид $x = a$, где a – абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox. В частности, ось Ox определяется уравнением $y = 0$, а ось Oy – уравнением $x = 0$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая образует угол φ с положительным направлением оси Ox и проходит через заданную точку $M(x_1,\ y_1)$. Выведем уравнение этой прямой, предполагая сначала, что прямая не перпендикулярна оси Ox.

Так как прямая проходит через точку $M(x_1,\ y_1)$, то координаты x_1, y_1 удовлетворяют уравнению (11): $y_1 = kx_1 + b$. Определяя b из этого равенства и подставляя в уравнение (11), получаем искомое уравнение прямой:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{12}$$

Уравнение (12) называется уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

Если прямая проходит через точку $M(x_1,\ y_1)$ перпендикулярно оси Ox, т. е. угловой коэффициент обращается в бесконечность, то ее уравнение, очевидно, будет иметь вид $x = x_1$.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Известно, что через две различные точки можно провести прямую, и притом только одну. Составим уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1,\ y_1)$, $M_2(x_2,\ y_2)$, где $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

Так как прямая проходит через точку M_1, то $y - y_1 = k(x - x_1)$, где k – угловой коэффициент, который требуется определить. Поскольку прямая проходит через точку M_2, то $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Таким образом, искомое уравнение прямой имеет вид

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

или

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (13)$$

Если $y_1 = y_2$, то уравнение искомой прямой имеет вид $y = y_1$. В этом случае прямая параллельна оси Ox. Если $x_1 = x_2$, то прямая параллельна оси Oy и ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

Параметрические уравнения прямой

Обозначим в уравнении (13) равные отношения буквой t:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = t.$$

Отсюда получим: $y - y_1 = (y_2 - y_1)t$, $x - x_1 = (x_2 - x_1)t$ или

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t. \qquad (14)$$

При $t = 0$ получим координаты точки M_1, при $t = 1$ – координаты точки M_2, при $0 < t < 1$ – координаты любой внутренней точки отрезка M_1M_2. Когда t меняется в бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$,точка $M(x,\ y)$ описывает всю прямую.

Уравнения (14) называются параметрическими уравнениями прямой.

Уравнение прямой в отрезках

Выведем уравнение прямой, положение которой на плоскости задано ненулевыми отрезками, отсекаемыми на осях координат. Пусть прямая отсекает на оси Ox отрезок $OA = a$, а на оси Oy – отрезок $OB = b$ (рис. 6). Ясно, что тем самым положение прямой вполне определено. Эта прямая проходит через точки $A(a, 0)$ и $B(0,\ b)$. Поэтому ее уравнение легко получается из (13).

Если положить $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = b$, то получим $\frac{y}{b} = \frac{x - a}{-a}$, откуда $\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1$, или

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (15)$$

Уравнение (15) называется уравнением прямой в отрезках.

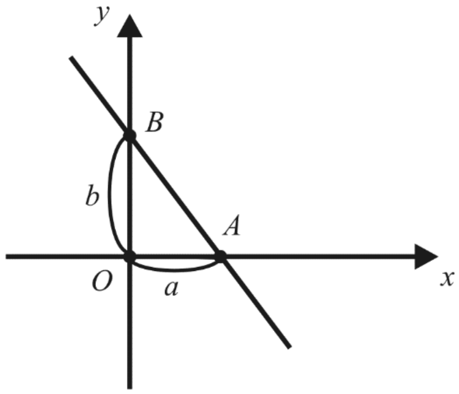


Рис. 6

Замечание. Уравнение прямой, проходящей через начало координат или параллельной одной из осей координат, не может быть записано как уравнение прямой в отрезках.

Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Рассмотрим две прямые; предположим, что ни одна из них не параллельна оси Оу (рис. 11). В этом случае прямые можно задать уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, где $k_1 = \mathrm{tg}\phi_1$, $k_2 = \mathrm{tg}\phi_2$.

Под углом γ между прямыми будем понимать наименьший угол, на который нужно повернуть вокруг точки пересечения данных прямых первую из них, чтобы она совпала со второй: $\gamma = \angle ACB$.

Выведем формулу, по которой можно найти угол γ, если даны k_1 и k_2.

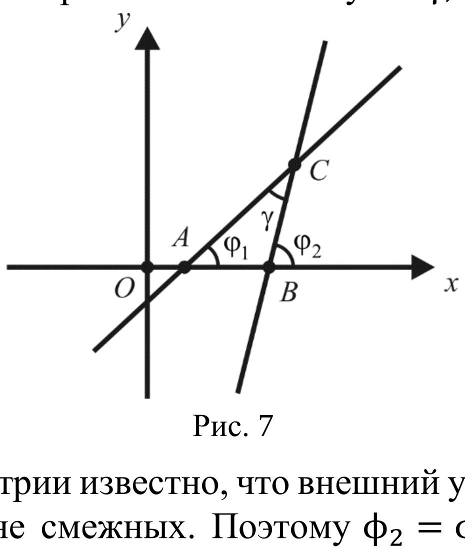


Рис. 7

Из элементарной геометрии известно, что внешний угол треугольника равен сумме внутренних, с ним не смежных. Поэтому $\phi_2 = \phi_1 + \gamma$, или $\gamma = \phi_2 - \phi_1$. Отсюда

$$\mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\mathrm{tg}\phi_2 - \mathrm{tg}\phi_1}{1 + \mathrm{tg}\phi_1 \cdot \mathrm{tg}\phi_2}$$

и, окончательно,

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (16)$$

Замечание. При другой нумерации прямых (замене k_1 на k_2 и k_2 на k_1) правая часть формулы (16) меняет знак; в этом случае формула определяет тангенс другого угла $\tilde{\gamma}$ между двумя прямыми, причем $\tilde{\gamma} = \pi - \gamma$.

Выведем теперь условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

1) Прямые на плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны между собой (т. е. $k_1 = k_2$).

Действительно, если прямые параллельны, то $\phi_1 = \phi_2$, $\mathrm{tg}\phi_1 = \mathrm{tg}\phi_2$ и, значит, $k_1 = k_2$. Обратно, если выполнено равенство $k_1 = k_2$, то $\mathrm{tg}\phi_1 = \mathrm{tg}\phi_2$ и, так как углы заключены в пределах от 0 до π, то $\phi_1 = \phi_2$, т. е. прямые параллельны.

2) Прямые на плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку $\left(\text{т. е. } k_2 = -\frac{1}{k_1}\right)$.

Действительно, пусть прямые перпендикулярны, т. е. $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Тогда $\mathrm{ctg}\gamma = \frac{1}{\mathrm{tg}\gamma} = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0$, откуда $1 + k_1 k_2 = 0$, и, следовательно, $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Обратно, если $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, то $1 + k_1 k_2 = 0$, $\mathrm{ctg}\gamma = 0$ и $\gamma = \frac{\pi}{2}$, т. е. прямые перпендикулярны.

Пусть теперь уравнения прямых заданы в общем виде: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Отсюда, предполагая, что $B_1 \neq 0$ и $B_2 \neq 0$, получаем $y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1}$ и $y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$. Следовательно, $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$, $k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$. Тогда тангенс угла между прямыми определяется формулой

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{-\frac{A_2}{B_2} + \frac{A_1}{B_1}}{1 + \frac{A_1 A_2}{B_1 B_2}} = \frac{B_2 A_1 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

Условие параллельности прямых выражается равенством

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

а условие их перпендикулярности – равенством $\frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2}$, или

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Пример. Найти угол между прямыми, определяемыми уравнениями $3x - 5y + 15 = 0$ и $8x - 2y - 1 = 0$.

Решение. Согласно условию задачи имеем $A_1 = 3$, $B_1 = -5$, $A_2 = 8$, $B_2 = -2$, откуда

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{B_2 A_1 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} = \frac{-2 \cdot 3 - 8 \cdot (-5)}{3 \cdot 8 + (-5) \cdot (-2)} = \frac{-6 + 40}{24 + 10} = 1.$$

Следовательно, угол между прямыми $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

Пример. Через точку $C(-6,\ 3)$ провести прямую, перпендикулярную прямой $2x + 3y - 12 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение заданной прямой в виде $y = -\frac{2}{3}x + 4$. Значит, угловой коэффициент данной прямой $k_1 = -\frac{2}{3}$. Угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Следовательно, угловой коэффициент искомой прямой равен $k_2 = \frac{3}{2}$. Уравнение искомой прямой находим по формуле $y - y_1 = k_2(x - x_1)$, где $(x_1,\ y_1)$ – координаты точки C. Получаем: $y - 3 = \frac{3}{2}(x + 6)$, или $3x - 2y + 24 = 0$.

Пример. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $M(5;1)$ и образующих с прямой $2x + y - 4 = 0$ угол 45^0.

Решение. Перепишем уравнение заданной прямой в виде $y = -2x + 4$. Значит, угловой коэффициент данной прямой –2. Пусть угловой коэффициент одной из искомых прямых равен k. Так как угол между этими прямыми равен 45^0, то

$$\mathrm{tg}\,45^0 = 1 = \frac{k+2}{1-2k} \text{ или } \mathrm{tg}\,45^0 = 1 = \frac{-2-k}{1-2k}$$

(в зависимости от того, какую из двух рассматриваемых прямых считать первой). Решая каждое из полученных уравнений, находим $k = -\frac{1}{3}$ и $k = 3$. Итак, уравнение одной из искомых прямых запишется в виде $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 5)$, т.е. $x + 3y - 8 = 0$, а уравнение другой прямой в виде $y - 1 = 3(x - 5)$, т.е. $3x - y - 14 = 0$.

Расстояние от точки до прямой

Рассмотрим прямую Δ, заданную общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и некоторую точку $M_1(x_1,\ y_1)$.

Под расстоянием от точки M_1 до прямой Δ понимается длина d перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на прямую Δ (рис. 8).

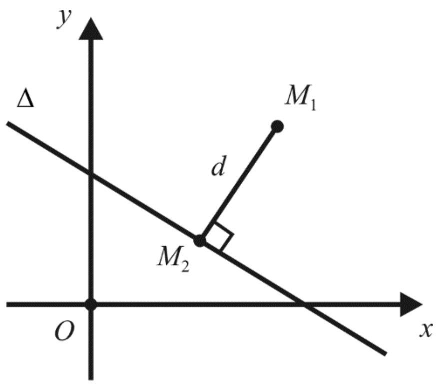


Рис. 8

Пусть $M_2(x_2,\ y_2)$ – основание перпендикуляра. Тогда $d = |M_1M_2|$.

Прямая Δ имеет угловой коэффициент $k_1 = -\frac{A}{B}$. Прямая M_1M_2 перпендикулярна прямой Δ и, следовательно, ее угловой коэффициент $k_2 = \frac{B}{A}$. Уравнение прямой M_1M_2 можно записать в виде $y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1)$ или $B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$. Так как эта прямая проходит через точку M_2, то $B(x_2 - x_1) - A(y_2 - y_1) = 0$, откуда

$$\frac{x_2 - x_1}{A} = \frac{y_2 - y_1}{B} = t,$$

или

$$x_2 = x_1 + At, \quad y_2 = y_1 + Bt,$$

где t – коэффициент пропорциональности. По формуле, выражающей расстояние между двумя точками, имеем

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{A^2t^2 + B^2t^2} = |t|\sqrt{A^2 + B^2}.$$

С другой стороны, учитывая, что точка $M_2(x_2,\ y_2)$ лежит на прямой Δ, получаем

$$Ax_2 + By_2 + C = A(x_1 + At) + B(y_1 + Bt) + C =$$
$$= (Ax_1 + By_1 + C) + t(A^2 + B^2) = 0,$$

откуда

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}.$$

Таким образом, формула для вычисления расстояния от точки $M_1(x_1,\ y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ имеет вид

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

В частности, полагая $x_1 = y_1 = 0$, получаем расстояние от начала координат до прямой Δ: $d_0 = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Замечание. Разделив обе части уравнения прямой на $\sqrt{A^2 + B^2}$, получим уравнение

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

Свободный член которого равен с точностью до знака расстоянию от начала координат до прямой. Такое уравнение прямой будем называть нормированным.

Правило. Чтобы определить расстояние от точки до прямой, нужно в левую часть нормированного уравнения этой прямой подставить координаты данной точки и взять модуль полученного результата.

Пример. Найти длину перпендикуляра, опущенного из вершины A на сторону BC треугольника ABC, если известны координаты вершин треугольника $A(-3,\ 6)$, $B(6,\ 1)$, $C(3,\ 5)$.

Решение. Составим уравнение прямой BC:

$$\frac{y-1}{5-1}=\frac{x-6}{3-6}, \quad \frac{y-1}{4}=\frac{x-6}{-3}, \quad 4x+3y-27=0.$$

Нормируем его: $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5;\ \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{27}{5}=0.$

Подставляем в нормированное уравнение прямой BC координаты точки A и берем модуль полученного результата:

$$d=\left|\frac{4}{5}\cdot(-3)+\frac{3}{5}\cdot 6-\frac{27}{5}\right|=\left|-\frac{21}{5}\right|=4{,}2.$$

Итак, длина перпендикуляра равна 4,2.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗА

1.2.1. Функция одной действительной переменной. Концепция предела

Понятие функции возникло тогда, когда люди впервые поняли, что окружающие их явления взаимосвязаны. Однако строгое математическое определение понятия функции появилось лишь в конце 17 века в трудах Готфрида Вильгельма Лейбница и Исаáка Ньютона.

Функции одной переменной – это базовый раздел математики, который лежит в основе анализа и моделирования логистических процессов. Понимание функций позволяет прогнозировать спрос, оптимизировать затраты, анализировать зависимости между ключевыми показателями и принимать обоснованные управленческие решения. Рассмотрим определение понятия функции, являющегося центральным понятием математического анализа.

Пусть X и Y – непустые множества. Пусть x – произвольный элемент множества X, y – произвольный элемент множества Y, т.е. $x \in X, \quad y \in Y$.

Соответствие f, которое каждому элементу x множества X сопоставляет только один элемент y множества Y, называется **функцией**. Записывается так: y = f(x) или f : X→Y.

При этом элементы **у**, или f (x), из множества Y называются **значениями функции**, а элементы x из X – **значениями аргумента**.

Пример. Пусть X – множество студентов–международников, $Y=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ – множество оценок по десятибалльной системе. Тогда можно задать функцию $y = f(x)$, которая каждому студенту $x \in X$ будет ставить в соответствие некоторую оценку $y \in Y$.

Пример. Пусть B – множество граждан республики Беларусь, S – множество всевозможных фамилий. Тогда правило, которое каждому гражданину ставит в соответствие его фамилию, есть функция с множеством определения B и множеством значений S.

Множество X называется **областью определения** функции f и обозначается через $D(f)$. Множество всех $y \in Y$, являющихся значениями функции f в точках $x \in X$, называется **множеством значений** функции f и обозначается через $E(f)$.

Функция, у которой область определения и область значений – числовые множества, называется **числовой функцией**.

Способы задания функций. Примеры функций.

Чтобы задать функцию, необходимо указать правило, позволяющее, зная значения x, находить соответствующие значения y. Наиболее часто встречаются следующие три способа задания функции: аналитический; табличный; графический.

- **Аналитический способ** заключается в том, что функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений, например

– $y = -0{,}9 + 9{,}638x^{-1{,}394}$,

где y – годовой темп прироста ставки заработной платы (в процентах), x общий уровень безработицы (в процентах). Это формула Филлипса.

– Зависимость спроса на товар от цены: Q(p)=a−b·p (линейная функция).

– Прогнозирование сезонных колебаний:

D(t)=A·sin(ωt+ϕ)+B (тригонометрическая модель).

Аналитический способ удобен для решения задач прогнозирования. Положительными сторонами аналитического способа задания функции являются краткость записи, возможность определения значения функции для любого значения аргумента и, что самое главное, возможность изучения функциональной зависимости с помощью математического анализа. Недостатком этого способа является то, что он применим для описания лишь сравнительно простых форм и процессов.

- **Табличный способ,** если дана таблица, содержащая значения переменной x и соответствующие значения переменной y. В виде таблиц записываются результаты экспериментального исследования каких-либо социологических процессов и явлений.

Пример. Рост числа научных изданий y, начиная с 1750 г. с интервалом в 50 лет, в зависимости от года x, выглядит (округленно) следующим образом.

x	1750 г.	1800 г.	1850 г.	1900 г.	1950 г.
Y	10	100	1000	10000	100000

К недостатку табличного способа можно отнести невозможность поместить в таблице все значения аргумента. Табличная запись, особенно если она велика, не обладает наглядностью и не позволяет обозреть общий вид графика функции.

- **Графический способ** заключается в том, что строится график функции. Непосредственно из этого графика находятся значения функции y, соответствующие значениям аргумента x. Не всякая линия является графиком некоторой функции. Например, множество точек окружности не может быть графиком функции, поскольку одному значению абсциссы x соответствуют два значения ординаты y_1 и y_2.

Постоянная функция $y = C \quad (C \in R)$, степенная $y = x^{\alpha} \quad (\alpha \in R)$, показательная $y = a^x \ (a > 0,\ a \neq 1)$, логарифмическая $y = \log_a x \ (a > 0,\ a \neq 1)$, тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg} x$, $\mathrm{ctg} x$ и обратные тригонометрические $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg} x$, $\mathrm{arcctg} x$ называются основными элементарными функциями.

Все функции, получаемые с помощью конечного числа арифметических действий и образования сложных функций из основных элементарных функций, составляют класс элементарных функций. Например, $y = \lg^3 \mathrm{arctg}\, 2x + \sin^2 \sqrt{1 - x^2}$. Функция $y = \mathrm{sgn}\, x$ не является элементарной.

Функция f (x) называется **четной**, если для всех x из области определения данной функции f справедливо равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси OY.

Функция f (x) называется **нечетной**, если для всех x из области определения данной функции f справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начало координат (0;0).

Пусть заданы функция $u = g(x)$ с областью определения X , областью значений U и функция $y = f(u)$ с областью определения, содержащей множество U и областью значений Y. Тогда функция, обозначаемая через $y = f(g(x))$, которая каждому значению x из множества X ставит в соответствие единственное значение y из множества Y такое, что $y = f(u)$ и $u = g(x)$, называется сложной функцией.

Например, если $y = u^3$, $u = \sin x$, то $y = (\sin x)^3 = \sin^3 x$ – сложная функция, определенная на всей числовой прямой.

Понятие предела функции. Односторонние пределы. Предел функции на бесконечности

Пусть x_0 – любое действительное число (точка на числовой прямой). Окрестностью точки x_0 называется любой интервал $(a,\ b)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε-окрестностью точки x_0 (обозначается $U_{\varepsilon}(x_0)$).

Если $x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$, то $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, или, что одно и то же, $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение последнего неравенства означает попадание точки x в ε-окрестность точки x_0 (рис. 9)

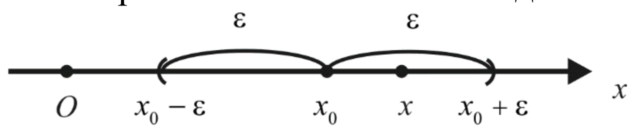


Рис.9

Проколотой окрестностью точки x_0 называется ее окрестность, из которой исключена сама точка x_0.

Проколотой ε-окрестностью точки x_0 (обозначается $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(x_0)$) называется ε-окрестность точки x_0, из которой исключена сама точка x_0, т. е. объединение интервалов $(x_0 - \varepsilon,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + \varepsilon)$.

Если $x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0 + \varepsilon)$, то $0 < |x - x_0| < \varepsilon$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Сформулируем определение предела функции в точке.

Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (зависящее от ε), что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$. Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ означает, что $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Выясним геометрический смысл определения предела функции в точке. Число A является пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любой ε-окрестности точки A на оси ординат найдется такая проколотая δ-окрестность точки x_0 на оси абсцисс, что для всех x из этой окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A. Иными словами, все точки $(x,\ f(x))$, где $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$, лежат внутри полосы $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$ шириной 2ε (рис. 10)

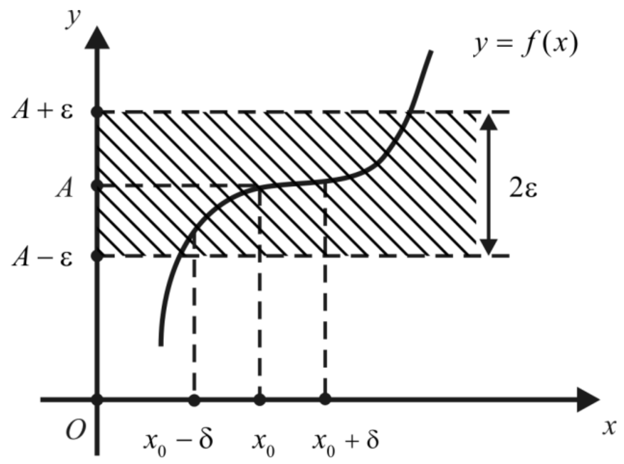


Рис. 10

Замечание: Из определения предела функции в точке $\mathbf{x_0}$, а именно из условия, что в этой точке функция может быть не определена, непосредственно следует утверждение: если функции f и g таковы, что $f(x)=g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a и пределы этих функций в точке x_0 существуют, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2) = 5$.

Решение. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-1| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)-5| = |(3x+2)-5| = |3x-3| < \varepsilon$, т. е. $|x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$. Положив $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, видим, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $0 < |x-1| < \delta \left(=\frac{\varepsilon}{3}\right)$, выполняется неравенство $|(3x+2)-5| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2) = 5$.

Иногда приходится рассматривать предел функции $y=f(x)$ при условии, что точка x, приближаясь к точке x_0, остается либо правее, либо левее ее. При этом способ приближения x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. В связи с этим вводят понятия односторонних пределов.

Число A называется **пределом слева (справа**) функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0-\delta,\ x_0)$ (для всех $x \in (x_0,\ x_0+\delta)$) выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$.

Обозначения: для предела функции слева

$$A = f(x_0-0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x);$$

для предела функции справа

$$A = f(x_0+0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

Пример. Найти односторонние пределы функции $f(x) = \frac{|x|}{x}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Раскрывая модуль по определению, получаем:

$$f(-0) = \lim_{x\to -0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to -0}\frac{-x}{x} = -1,\quad f(+0) = \lim_{x\to +0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to +0}\frac{x}{x} = 1.$$

Этот результат можно увидеть наглядно, построив график функции (рис. 11).

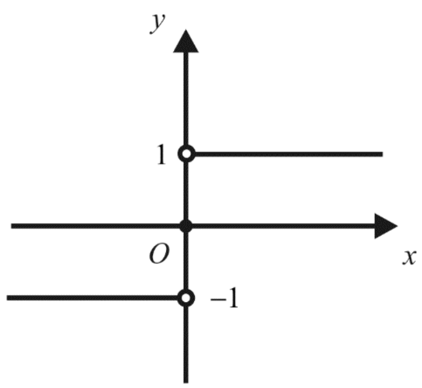


Рис. 11

Следующая теорема устанавливает связь между односторонними пределами и пределом функции в точке.

Теорема. Функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке у нее существуют равные пределы слева и справа, причем общее значение этих пределов является пределом функции в точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Пример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ 3 - x, & x > 1 \end{cases}$$

при $x \to 1$ имеет предел, равный 2, поскольку

$$\lim_{x \to 1 - 0} f(x) = \lim_{x \to 1 + 0} f(x) = 2.$$

Далее рассмотрим определение предела функции на бесконечности.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ и говорят, что функция $y = f(x)$ стремится к A при x, стремящемся к ∞.

Пример, при достаточно больших по модулю x значение функции $y = \dfrac{1}{x}$ становится сколь угодно малым (меньше любого сколь угодно малого положительного числа ε), поэтому $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Кратко определение предела функции на бесконечности можно записать в виде:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall x: \ |x| > M \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Геометрический смысл этого определения таков: если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что при $x \in (-\infty, M)$ или $x \in (M, +\infty)$ соответствующие значения функции $y = f(x)$ попадают в ε-окрестность точки A, т. е. точки $(x, f(x))$ графика функции лежат в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$ (рис. 12).

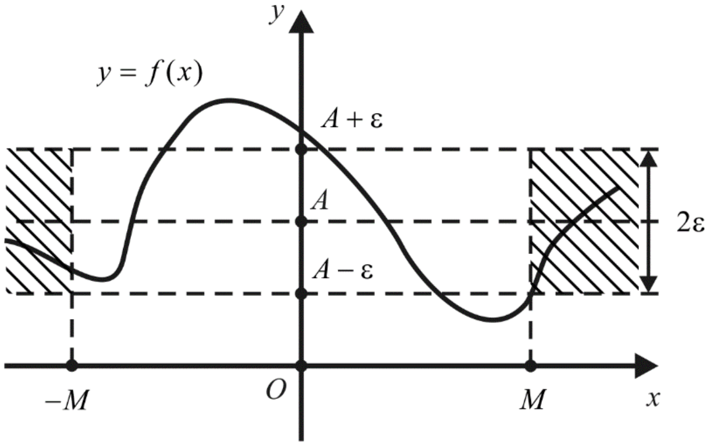


Рис. 12

Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $x > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall x: \ \ x > M \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $x < -M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall x: \ \ x < -M \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пример. Доказать по определению, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Решение. Выберем любое $\varepsilon > 0$ и выясним, для каких x будет выполнятся неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$. Решая это неравенство, получаем $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, если $M = \frac{1}{\varepsilon}$, то при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, справедливо неравенство $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

Свойства функций, имеющих предел в точке. Бесконечно малые функции. Бесконечно большие функции

Общие свойства функций, имеющих передел в точке:

1. Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке x_0, то он единственный.

2. Функция, имеющая предел в точке, ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

Предел и неравенства

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > B$ ($A < B$), то существует проколотая окрестность точки x_0, в которой выполняются неравенства: $f(x) > B$ ($f(x) < B$).

2. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ и в некоторой проколотой окрестности точки x_0 справедливо неравенство $f(x) \ge g(x)$ ($f(x) \le g(x)$). Тогда $A \ge B$ ($A \le B$).

3. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$ и в некоторой проколотой окрестности точки x_0 справедливы неравенства $f(x) \le h(x) \le g(x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

Предел и арифметические операции

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Тогда существуют пределы функций $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ и

а) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = A \cdot B$, в частности $\lim\limits_{x\to x_0} (cf(x)) = cA$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0)$.

В последнем случае функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ рассматривается только при тех значениях x, для которых функция $g(x) \neq 0$.

Рассмотренные выше свойства будем принимать без доказательства.

Замечание: Свойства 1–3 справедливы также и в случае, когда x_0 является одним из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞. Под окрестностью $U(x_0)$ в этих случаях понимается множество, у которого существует подмножество $U(x_0, \varepsilon) \subset U(x_0)$, где $\varepsilon > 0$ и

$$U(+\infty, \varepsilon) = \left\{x: \ x \in R, \ x > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{+\infty\};$$

$$U(-\infty, \varepsilon) = \left\{x: \ x \in R, \ x < -\frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{-\infty\};$$

$$U(\infty, \varepsilon) = \left\{x: \ x \in R, \ |x| > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{\infty\}.$$

Данные множества называются ε-окрестностями элементов $+\infty$, $-\infty$ и ∞ соответственно.

Пример. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2) = 3\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 2 = 3\cdot 1 + 2 = 5.$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\left(3x^2-2x+7\right) = \lim\limits_{x\to -1} 3x^2 - \lim\limits_{x\to -1} 2x + \lim\limits_{x\to -1} 7 =$

$= 3\lim\limits_{x\to -1} x^2 - 2\lim\limits_{x\to -1} x + 7 = 3\cdot(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 7 = 3+2+7 = 12.$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x}{2x+1}$

Решение. Пределы числителя и знаменателя существуют. Убедимся, что предел знаменателя отличен от 0: $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1) = 2\lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 1 = 2\cdot 2 + 1 = 5$. Тогда применимо свойство о пределе частного:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+3x\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(2x+1\right)}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2+3\lim\limits_{x\to 2}x}{2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1}=\frac{2^2+3\cdot 2}{2\cdot 2+1}=\frac{10}{5}=2\,.$$

Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$.

Примерами бесконечно малых функций являются функции $y = x^2$ при $x \to 0$, $y = x - 2$ при $x \to 2$, $y = \sin x$ при $x \to \pi k$, где $k \in Z$, $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \to \infty$.

Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** на множестве X, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.

Теорема: Сумма конечного числа бесконечно малых функций, а также произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию являются бесконечно малыми функциями.

Следствие:Так как всякая бесконечно малая при $x \to x_0$ функция ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция. Произведение бесконечно малой функции на число также является бесконечно малой функцией.

Между функциями, имеющими предел в точке, и бесконечно малыми функциями существует определенная связь, которую устанавливает следующая теорема, рассмотрим ее без доказательства.

Теорема. Для того чтобы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to x_0$, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ и говорят, что функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to x_0$, или что она имеет бесконечный предел в точке x_0.

Например, функция $y=\dfrac{1}{x-1}$ является бесконечно большой функцией при $x\to 1$ (рис.13)

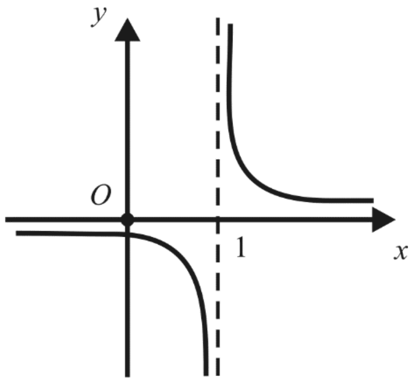


Рис. 13

Если же выполняется неравенство $f(x)>M$ $(f(x)<-M)$, то пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty)$.

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x\to +\infty,\ -\infty,\ \infty$.

Так, функция $y=f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x\to\infty$, если для любого числа $M>0$ существует такое число $L=L(M)>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>L$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$.

Например, $y=x^3$ является бесконечно большой функцией при $x\to\infty$.

Теорема. Если функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x\to x_0$ $(\alpha\neq 0)$, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x\to x_0$, и наоборот, если функция $f(x)$ – бесконечно большая при $x\to x_0$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая при $x\to x_0$.

Пример. Доказать по определению, что функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x\to 0$.

Решение. Выберем любое $\varepsilon>0$ и выясним, для каких x будет выполняться неравенство $|f(x)|>M$, т. е. $\left|\frac{1}{x}\right|>M$. Решая это неравенство, получаем $|x|<\frac{1}{M}$. Таким образом, если $\delta=\frac{1}{M}$, то для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x)|>M$. Это означает, что функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x\to 0$.

Пример. Вычислим $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5}{3x-12}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 4}(3x-12)=0$, то (3х–12) есть бесконечно малая величина, а обратная ей величина есть бесконечно большая. Т.е.

$$\lim_{x\to 4}\frac{5}{3x-12}=5\cdot\lim_{x\to 4}\frac{1}{3x-12}=5\cdot\infty=\infty.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{4x+3}$.

Решение. Так как (4х+3) при х→∞ есть бесконечно большая величина, а обратная ей величина $\frac{1}{4x+3}$ есть бесконечно малая, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{4x+3}=2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{4x+3}=0$.

Замечательные пределы

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используется предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad (9)$$

называемый **первым замечательным пределом**.

Формула (9) обобщается на случай, когда вместо независимой переменной x имеется бесконечно малая функция $\alpha(x)$ при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=1 \qquad (17)$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Используем формулу (17).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}.$$

Рассмотрим важную для теории и практики функцию $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Можно доказать, что при $x\to\infty$, она имеет предел. Этот предел, следуя Л. Эйлеру, обозначают через e, т. е.:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (18)$$

Предел (18) называется **вторым замечательным пределом**.

Замечание. Число e является иррациональным: $e=2,71828\ldots$

Если в равенстве (18) положить $\frac{1}{x}=t$ ($t\to 0$ при $x\to\infty$), оно запишется в виде

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.$$

Формула (18) обобщается на случай, когда вместо независимой переменной x имеется бесконечно большая функция $u(x)$ при $x \to x_0 \quad (x \to \infty)$:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e. \tag{19}$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}$, где $k \in R, \quad k \neq 0$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида $[1^{\infty}]$. Используем формулу (19).

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}k}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right)^{k}=e^{k}.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби $\frac{x+3}{x-2}$ на x, сведем данный предел к частному пределов из предыдущего примера:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}}=\frac{e^{3}}{e^{-2}}=e^{5}.$$

Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если существует предел функции в точке x_0, равный значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Последнее равенство означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Подчеркнем, что если функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой точке, то согласно данному определению она определена в некоторой окрестности этой точки (обычной, а не проколотой, как это было в случае определения предела функции).

Замечание: Так как $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, то равенство из определения непрерывной в точке функции можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0),$$

т. е. для непрерывной функции символы предела и функции перестановочны.

Пример. Функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, так как она определена в этой точке, имеет в ней предел и $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$.

Пример. Функция $f(x) = x^2$ непрерывна в точке $x_0 = 2$, так как она определена в этой точке и $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 = (\lim\limits_{x\to 2} x)^2 = 4 = f(2)$ (рис.14, а).

Пример. Функция $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 2,\\ x+2, & x>2\end{cases}$ определена в точке $x_0 = 2$, но не имеет предела в этой точке (рис. 14, б), поскольку

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = 2 \neq 4 = \lim_{x\to 2+0} f(x).$$

Следовательно, она не является непрерывной в точке $x_0 = 2$.

Пример. Функция $f(x) = \begin{cases}x^2, & x\neq 2,\\ 1, & x=2\end{cases}$ определена в точке $x_0 = 2$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$, но не является непрерывной в этой точке, поскольку $f(2)=1\neq \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ (рис. 14, в).

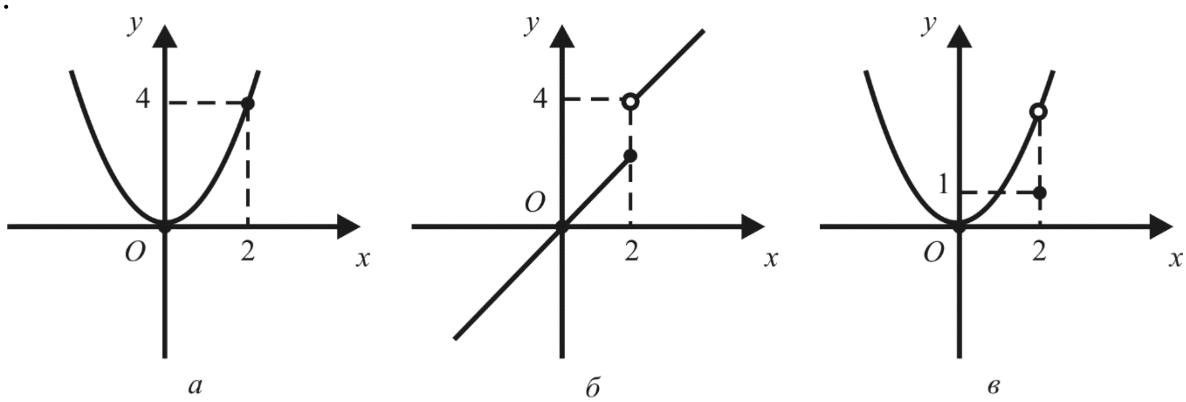


Рис. 14

Таким образом, для непрерывности функции $y=f(x)$ существенно выполнение трех условий:

1) функция $y=f(x)$ определена в окрестности точки x_0;
2) функция $y=f(x)$ имеет предел при $x\to x_0$;
3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Свойства функций, непрерывных в точке

Следует отметить, что свойства функций, непрерывных в точке, вытекают из определения непрерывности и соответствующих свойств предела функции в точке. Сформулируем свойства без доказательства.

1. Функция, непрерывная в точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки.

2. Непрерывная функция, отличная от нуля в точке x_0, сохраняет знак в некоторой окрестности этой точки, т. е. если $f(x_0) > 0$ $(f(x_0) < 0)$, то существует $U(x_0)$ такая, что $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ для любого $x \in U(x_0)$.

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \neq 0)$ также непрерывны в точке x_0.

Непрерывность основных элементарных функций

1. Постоянная функция $f(x) = C$ непрерывна в любой точке $x_0 \in R$, поскольку $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} C = C = f(x_0)$.

2. Функция $f(x) = x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in R$, поскольку $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0)$.

3. Многочлен

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ где } n \geq 0, \quad n \in Z, \quad a_i \in R,$$

есть функция, непрерывная в любой точке $x_0 \in R$.

Это следует из непрерывности функций $f(x) = C$, $f(x) = x$ и свойства 3 непрерывных в точке функций.

4. Дробно-рациональная функция, т. е. функция вида $g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, непрерывна во всех таких точках $x \in R$, в которых ее знаменатель не равен нулю.

5. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ непрерывны во всех точках $x \in R$.

6. Функция $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ непрерывна в точках, где $\cos x \neq 0$, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

7. Функция $y = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ непрерывна в точках, где $\sin x \neq 0$, т. е. $x \neq \pi k$, $k \in Z$.

8. Функция $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ непрерывна при всех $x \in R$.

9. Функция $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ непрерывна при всех $x > 0$, $x \in R$.

Односторонняя непрерывность. Точки разрыва функции

и их классификация

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной слева (справа) в точке** x_0, если

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0) \quad ((\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)).$$

Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\ge 0,\\ 1+x, & x<0\end{cases}$$

непрерывна справа в точке $x = 0$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = f(0) = 0$, и не является непрерывной слева в точке $x = 0$, поскольку $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$.

Очевидно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна и слева и справа в этой точке, т. е. $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Точка x_0 называется **точкой разрыва функции** $y = f(x)$, либо если функция не определена в самой точке x_0, либо если она определена в этой точке, но не является в ней непрерывной.

Иными словами, точка x_0 является точкой разрыва функции, если x_0 является значением аргумента, при котором происходит «разрыв графика функции».

Все точки разрыва функции подразделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Точка x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции $y = f(x)$, если в этой точке пределы функции слева и справа (т. е. односторонние пределы) существуют и конечны. Величина $|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$ называется скачком функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Если пределы функции $y = f(x)$ слева и справа существуют, конечны, и при этом $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ (т. е. скачок функции в точке x_0 равен нулю), то точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва**. Чтобы устранить разрыв функции в точке x_0, достаточно изменить значение функции только в одной этой точке. В этом случае говорят, что функция может быть доопределена по непрерывности в точке x_0.

Точка x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции $y = f(x)$, если в этой точке по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Пример. Функция $f(x) = \frac{|x|}{x}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода, так как $\lim\limits_{x\to -0} \frac{|x|}{x} = -1$, $\lim\limits_{x\to +0} \frac{|x|}{x} = 1$. Скачок функции в точке $x = 0$ равен $|1 - (-1)| = 2$.

Пример. Для функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 2 & \text{при } x=0\end{cases}$$

точка $x=0$ является точкой устранимого разрыва, поскольку

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Если положить $f(0)=1$ (вместо $f(0)=2$), разрыв устранится и функция станет непрерывной.

Пример. Для функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ точка $x=0$ является точкой разрыва второго рода, поскольку $\lim\limits_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +0}\frac{1}{x}=+\infty$.

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной на интервале** $(a,\ b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a,\ b]$, если она непрерывна на интервале (a,b) и в точке a непрерывна справа, а в точке b непрерывна слева.

1.2.2. Производные и дифференциал функции одной переменной и их приложения

Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной

Одним из основных понятий дифференциального исчисления является **производная**, которая используется при исследовании процессов, в том числе социологических и экономических, описываемых функциями.

Рассматривая различные по характеру задачи, мы приходим к пределу одного вида, который очень часто используется в различных областях науки. Дадим общее определение производной.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке X $(x\in X)$. Выберем некоторую точку $x_0\in X$ и найдём значение функции в этой точке: $f(x_0)=y_0$. Дадим x_0 **приращение аргумента** Δx, $\Delta x\neq 0$ такое, чтобы $(x_0+\Delta x)\in X$, и вычислим **приращение функции** $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, которое зависит от приращения аргумента Δx (рис. 15).

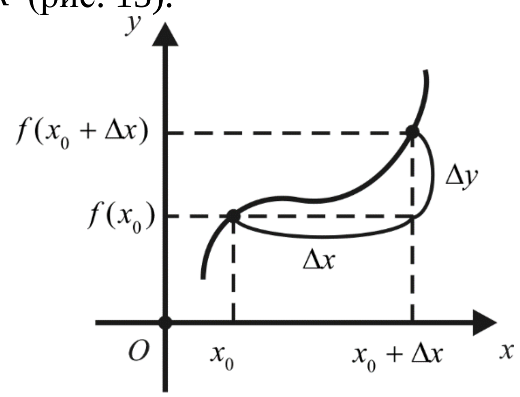


Рис. 15

Далее рассмотрим некоторые задачи, приводящие к понятию производной.

Задача о мгновенной скорости прямолинейного движения

Предположим, что точка M движется по некоторой прямой, которую примем за ось Ox. Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние $OM = x$. Следовательно, можно сказать, что абсцисса x движущейся точки есть функция времени t, т. е. $x = f(t)$. Это уравнение называется уравнением движения, оно выражает закон движения точки.

Найдем скорость движения точки в любой момент времени t.

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка занимает положение M, причем $OM = x$. Наряду с моментом времени t рассмотрим более поздний момент времени $t + \Delta t$. За промежуток времени Δt между этими моментами точка проходит путь $\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t)$

Средняя скорость за промежуток времени Δt равна

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Будем уменьшать длину промежутка времени Δt. Предел средней скорости $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ называется мгновенной скоростью в момент времени t:

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Таким образом, если точка движется прямолинейно, то ее скорость в момент времени t равна пределу отношения приращения координаты точки к приращению времени, когда последнее стремится к нулю.

Задача о касательной

Дадим сначала определение касательной к кривой на плоскости.

Пусть L – некоторая непрерывная кривая, M_0 – точка этой кривой. Проведем через точку M_0 секущую M_0N (рис. 16). Когда точка N, двигаясь вдоль кривой, как угодно близко приближается к точке M_0, эта секущая, поворачиваясь около точки M_0, стремится к некоторому предельному положению M_0T. Касательной к кривой L в точке M_0 называется предельное положение M_0T секущей M_0N, когда точка N стремится к точке M_0 вдоль данной кривой.

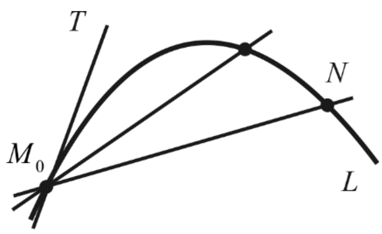


Рис.16

Если секущая M_0N при $N \to M_0$ не имеет предельного положения, то говорят, что касательной к данной кривой в точке M_0 не существует.

Пусть $y = f(x)$ – некоторая непрерывная функция. Найдем уравнение касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Придадим абсциссе x_0 приращение Δx и от точки M_0 графика перейдем к точке N с абсциссой $x_0 + \Delta x$ и ординатой $y_0 + \Delta y$. Пусть M_0N – секущая, φ – угол наклона секущей к положительному направлению оси Ox (рис. 17).

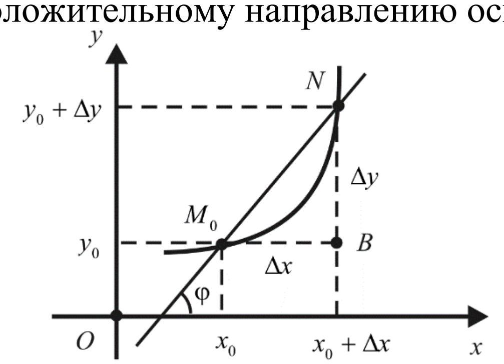


Рис. 17

Из треугольника M_0NB находим $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пусть точка N стремится к точке M_0 вдоль графика функции $y = f(x)$. Тогда $\Delta x \to 0$ и секущая M_0N стремится к своему предельному положению – касательной M_0T (мы предполагаем, что касательная существует). Пусть α – угол, который образует касательная M_0T с осью Ox. Тогда при $\Delta x \to 0$ $\varphi \to \alpha$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{N \to M_0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Значит, если в точке $M_0(x_0, y_0)$ к графику функции $y = f(x)$ можно провести касательную, то ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Зная угловой коэффициент касательной, легко написать ее уравнение:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

В рассмотренных выше задачах по существу делалось одно и то же: приращение функции делилось на приращение независимой переменной, и затем вычислялся предел их отношения. Оказывается, что многие задачи приводят к необходимости вычисления такого же предела, поэтому имеет смысл специально заняться его изучением.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Придадим точке x_0 ненулевое приращение Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$. Тогда функция получит соответствующее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если этот предел существует.

Таким образом, производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 – это число, которое обозначается через $f'(x_0)$ (читается: эф штрих от x_0) или $y'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если производная существует во всех точках x из окрестности $U(x_0)$, то она является функцией аргумента x.

Производная имеет несколько обозначений: y', $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}$.

Замечание: Если для некоторого значения x_0 выполняется одно из условий $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, то говорят, что в точке x_0 существует бесконечная производная, равная соответственно $+\infty$ или $-\infty$.

Из рассмотренных выше задач следует **физический и геометрический смысл производной**.

Геометрический смысл производной: угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0,\ f(x_0))$ равен значению производной данной функции в точке x_0.

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0,\ f(x_0))$ имеет вид $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной графика функции $y=f(x)$ в точке касания $M(x_0,\ f(x_0))$, называется нормалью. Так как угловые коэффициенты k_1 и k_2 перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1\cdot k_2 = -1$, то отсюда, предполагая, что $f'(x_0)\neq 0$, получаем уравнение нормали: $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$.

Пример. Пользуясь определением, найти производную функции $f(x)=x^2+x$ в точке $x_0 = 2$. Составить уравнение касательной к графику данной функции в точке $x_0 = 2$.

Решение. По определению производной получаем

$$f'(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2+(2+\Delta x)-(2^2+2)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+5\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+5) = 5.$$

Пользуясь уравнением касательной $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, имеем

$$y = f'(2)(x-2)+f(2) = 5(x-2)+2^2+2 = 5x-4.$$

Таким образом, уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2+x$ в точке $x_0=2$ имеет вид $y = 5x-4$.

Используя понятия односторонних пределов функции, введем понятия правой и левой производных функции $y=f(x)$ в точке x_0.

Правой производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 (производной справа) называется предел

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Левой производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 (производной слева) называется предел

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Это **односторонние производные**.

Замечание. Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда односторонние производные $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ существуют и равны между собой, причем $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Пример. Функция $y = |x|$ имеет в точке $x_0 = 0$ правую производную

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x + 0| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

и левую производную

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x + 0| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

но не имеет производной $f'(x_0)$, поскольку $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$.

В дальнейшем под выражением «функция имеет производную» будем понимать наличие конечной производной, если не оговорено противное.

Функция, имеющая производную в данной точке, называется **дифференцируемой в этой точке**. Операция нахождения производной называется **дифференцированием**.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке, то она и непрерывна в ней.

Доказательство: Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0. Тогда существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Отсюда следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$, или $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Таким образом, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (f'(x_0) \cdot \Delta x) + \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\alpha \cdot \Delta x) = 0$, а это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Замечание. При доказательстве теоремы мы установили, что если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение в этой точке выражается формулой

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Замечание. Обратное утверждение предыдущей теоремы не всегда верно: непрерывная в данной точке функция может не иметь в ней производной.

Например, функция $y = |x - 1|$ непрерывна в точке $x_0 = 1$, но не является в ней дифференцируемой.

Основные правила дифференцирования

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x, то сумма, разность, произведение и частное этих функций (при $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место следующие равенства:

1) $(u+v)' = u' + v'$;
2) $(u-v)' = u' - v'$;
3) $(uv)' = u'v + uv'$;
4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Рассмотрим примеры нахождения производных элементарных функций.

1. $f(x) = C$.

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0$, т. е. $C' = 0$.

Таким образом постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(Cu)' = Cu'.$$

2. $f(x) = x^{\alpha}$, α – действительное число.

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = x^{\alpha} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$, т. е. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$. Отметим частные случаи этой формулы:

$$(x)' = 1, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

3. $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$, т. е. $(a^x)' = a^x \ln a$. В частности, $(e^x)' = e^x$.

4. $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}, \text{ т. е.}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \text{ В частности, } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

5. Тригонометрические функции:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x,$$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x.$$

Таким образом, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$. Отсюда

$$(\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\mathrm{ctgx})' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример. Найти производные функций:

1) $y = x^7 - 4x^5 + 2x - 1$;

2) $y = x\sin x$;

3) $y = \frac{x+1}{x^2+2}$.

Решение. Используя основные правила дифференцирования и формулы для производных элементарных функций, имеем:

1) $(x^7 - 4x^5 + 2x - 1)' = 7x^6 - 4\cdot 5x^4 + 2\cdot 1 - 0 = 7x^6 - 20x^4 + 2$;

2) $(x\sin x)' = (x)'\sin x + x(\sin x)' = \sin x + x\cos x$;

3) $\left(\frac{x+1}{x^2+2}\right)' = \frac{(x+1)'(x^2+2)-(x+1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} = \frac{1\cdot(x^2+2)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2} =$

5) $= \frac{x^2+2-2x^2-2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2-2x+2}{(x^2+2)^2}$.

Пример. Найти угол φ между положительным направлением оси абсцисс и касательной к параболе $y = x^2 - 5x - 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

Решение. Так как $y' = 2x - 5$, то $y'(3) = 1$. Поэтому для искомого угла φ имеем $\mathrm{tg}\,\varphi = 1$, откуда находим $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Производная сложной функции.

Пусть функция $u = g(x)$ задана в некоторой окрестности $U = U(x_0)$ точки x_0, а функция $y = f(u)$ – в некоторой окрестности $V = V(u_0)$ точки $u_0 = g(x_0)$, причем V содержит множество $g(U)$. Тогда определена **сложная функция** $y = f(g(x))$ с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

Теорема. Если функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем

$$y'(x_0) = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Таким образом, для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько. Так, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = g(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.

Пример. Найти производную функции $y = \sin(5x + 2)$.

Решение. Данная функция является сложной. Ее можно представить так: $y = \sin u$, где $u = 5x + 2$. Поскольку $y'_u = \cos u = \cos(5x + 2)$, $u'_x = 5$, то по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos(5x + 2)\cdot 5 = 5\cos(5x + 2).$$

Пример. Найти производную функции $y = \sin^3(5x + 2)$.

Решение. Представим данную функцию в виде $y = u^3$, где $u = \sin v$, $v = 5x + 2$. По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 3u^2 \cdot \cos v \cdot 5 = 15\sin^2(5x + 2)\cos(5x + 2).$$

Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда ее приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

При достаточно малых значениях Δx и $f'(x_0) \neq 0$ основной вклад в эту сумму вносит первое слагаемое $f'(x_0) \cdot \Delta x$, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$, т. е. величина $\alpha \cdot \Delta x$ сколь угодно мала по сравнению с Δx при $\Delta x \to 0$. Первое слагаемое пропорционально Δx и, следовательно, линейно зависит от Δx.

Говорят, что слагаемое $f'(x_0) \cdot \Delta x$ является главной линейной частью приращения функции $y = f(x)$ в точке x_0 и называют его **дифференциалом функции** $y = f(x)$ в точке x_0.

Обозначают дифференциал через dy или $df(x_0)$. Таким образом,

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Для функции $y = x$ получаем $dy = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, т. е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$. Поэтому предыдущую формулу можно переписать в виде:

$$dy = f'(x_0)dx,$$

откуда $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$, или, более кратко, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ (читается: игрек штрих равно дэ игрек по дэ икс). Это означает, что производная функции равна отношению дифференциала данной функции к дифференциалу ее аргумента.

Замечание: Дифференциал функции можно определить и так. Если приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0 представимо в виде $\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x$, где A – постоянная, то $dy = A\Delta x$, а сама функция называется дифференцируемой в точке x_0.

Дифференциал функции в точке имеет простой **геометрический смысл**. Проведем к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ касательную MT и рассмотрим ординату этой касательной для точки $x_0 + \Delta x$ (рис. 18).

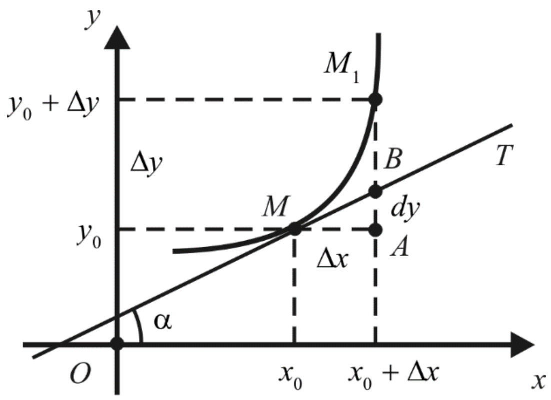


Рис. 18

На рисунке $|AM| = \Delta x$, $|AM_1| = \Delta y$. Из прямоугольного треугольника MAB имеем: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{|AB|}{\Delta x}$, т. е. $|AB| = \mathrm{tg}\alpha \cdot \Delta x$. Но согласно геометрическому смыслу производной $\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$. Поэтому имеет место равенство $|AB| = f'(x_0) \cdot \Delta x$, т. е. $|AB| = dy$.

Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x_0 получает приращение Δx.

Процесс нахождения дифференциала функции, как и производной, называется **дифференцированием** и осуществляется по тем же правилам, что и для производных:

1) $d(u+v) = du + dv$;
2) $d(u-v) = du - dv$;
3) $d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv$;
4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}, \quad v \neq 0.$

Пример. Найти дифференциал функции $y = (\cos x + x \sin x)$.

Решение.

$$dy = d(\cos x) + d(x \sin x) = -\sin x \cdot dx + \sin x \cdot dx + x \cdot d(\sin x) = x \cos x \, dx.$$

Основные теоремы дифференциального исчисления

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a,\ b)$.

Точка $x_0 \in (a,\ b)$ называется точкой минимума (максимума) функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для любого $x \in U(x_0)$ выполнено условие $f(x) \geq f(x_0)$ $(f(x) \leq f(x_0))$. Если для любого $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$, выполнено условие $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$, то точка x_0 называется точкой строгого минимума (строгого максимума) функции $y = f(x)$. Точки минимума и максимума называются точками экстремума, а значения функции в них – экстремумами функции.

Отметим, что точки минимума и максимума функции имеют локальный характер, в силу чего значения функции в точках минимума могут оказаться больше ее значений в точках максимума. Так, на рис.19 точки x_1 и x_3 являются точками максимума функции, а точки x_2 и x_4 – точками минимума функции.

Значение функции в точке максимума x_1 меньше ее значения в точке минимума x_4.

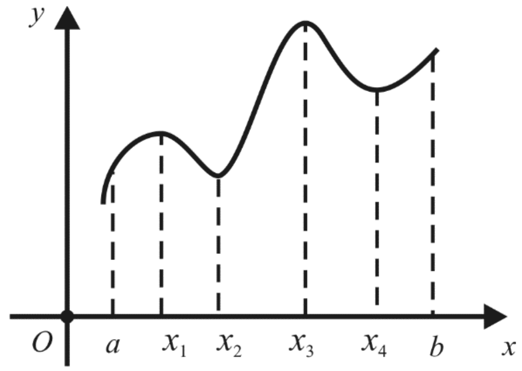


Рис.19

Необходимое условие экстремума функции выражается следующей теоремой.

Теорема (Ферма). Пусть x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$ и существует производная $f'(x_0)$. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ферма имеет следующий геометрический смысл: если x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$ и существует $f'(x_0)$, то касательная, проведенная к графику данной функции в точке $(x_0, f(x_0))$, параллельна оси Ox (рис.20). В самом деле, в этом случае угловой коэффициент касательной равен нулю: $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = 0$.

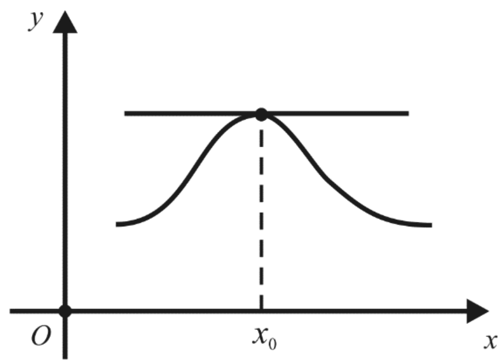


Рис. 20

Замечание. Условие $f'(x_0) = 0$ является необходимым, но не достаточным условием экстремума функции $y = f(x)$ в точке x_0. Например, функция $y = x^3$ в точке $x_0 = 0$ имеет производную, равную нулю, но $x_0 = 0$ не является точкой экстремума данной функции (рис. 21, а).

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ производной не имеет, но $x_0 = 0$ является точкой минимума данной функции (рис. 21, б).

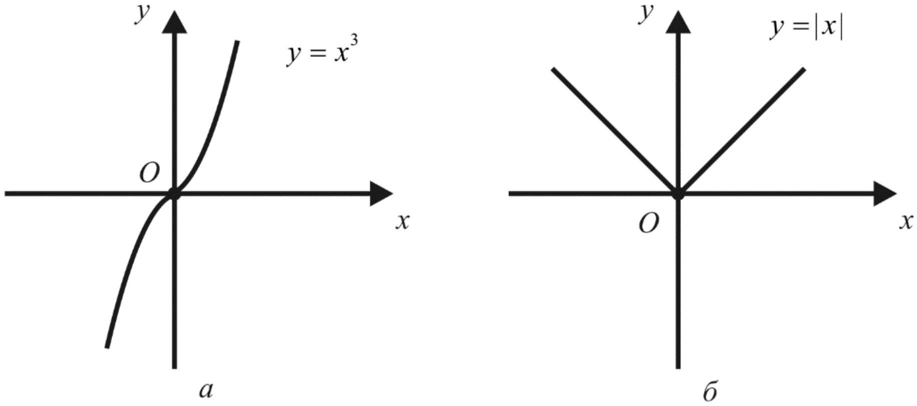


Рис.21

Точки, в которых производная функции не существует или равна нулю, называют **критическими точками** или точками, подозрительными на экстремум. Точки, в которых производная функции равна нулю, называют **стационарными точками**.

Теорема (Ролля). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения, т. е. $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Теорема Ролля допускает простую геометрическую интерпретацию: при выполнении условий теоремы на графике функции $y = f(x)$ найдется точка с абсциссой $c \in (a, b)$, в которой касательная к графику параллельна оси Ox (рис.22).

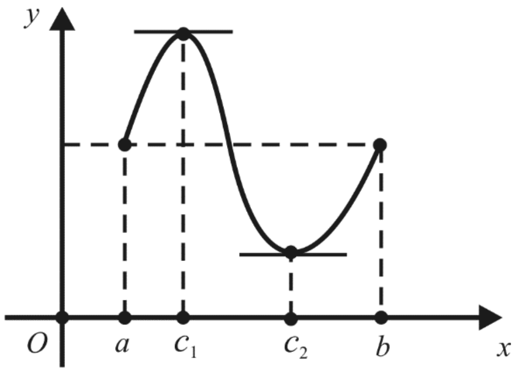


Рис.22

Замечание. Все условия теоремы Ролля существенны. Если отказаться от одного из условий теоремы, то может случиться, что точки $c \in (a, b)$ с требуемым свойством не найдется. Так, на рис.22, а функция разрывна в точке $x = b$; на рис.22, б не существует производной функции в точке $x = x_0$; на рис. 22, в $f(a) \neq f(b)$.

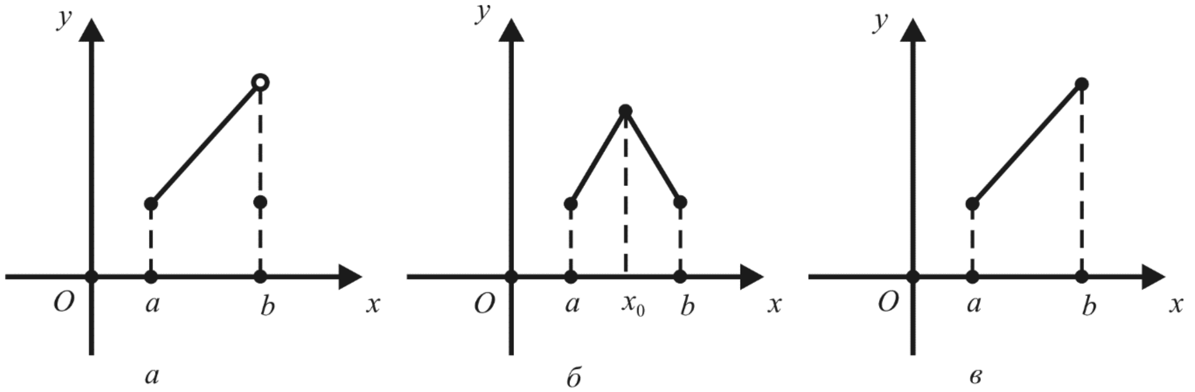


Рис.22

Теорема. (Лагранжа). Пусть функция $\mathrm{y = f(x)}$ непрерывна на отрезке $\mathrm{[a,\ b]}$ и дифференцируема на интервале $\mathrm{(a,\ b)}$. Тогда найдется хотя бы одна точка $\mathrm{c} \in \mathrm{(a,\ b)}$ такая, что

$$\mathrm{f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)}. \tag{20}$$

Формулу (13) называют формулой Лагранжа или формулой конечных приращений: приращение дифференцируемой функции на отрезке $[a, b]$ равно приращению аргумента, умноженному на значение производной функции в некоторой внутренней точке этого отрезка.

Отношение $\frac{\mathrm{f(b)-f(a)}}{\mathrm{b-a}}$ есть угловой коэффициент секущей, проходящей через точки $\mathrm{A(a,\ f(a))}$ и $\mathrm{B(b,\ f(b))}$, а величина $f'(c)$ – угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой $x = c$. Следовательно, геометрически теорема Лагранжа означает, что на графике функции $\mathrm{y = f(x)}$ найдется точка $C(c,\ f(c))$, в которой касательная к графику параллельна секущей AB (рис. 23).

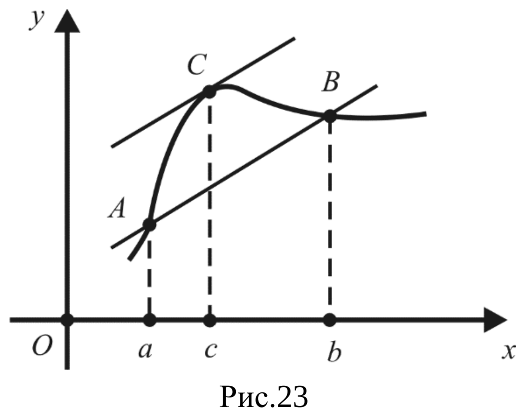


Рис.23

Следствие 1. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

Доказательство. Пусть $f'(x) = 0$ для любого $x \in (a, b)$. Возьмем произвольные точки x_1 и x_2 из (a, b) такие, что $x_1 < x_2$. Тогда по теореме Лагранжа существует точка $c \in (x_1, x_2)$ такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1).$$

Поскольку $f'(c)=0$, то $f(x_2)-f(x_1)=0$, т. е. $f(x_1)=f(x_2)$. Так как x_1 и x_2 – произвольные точки из (a,b), то $f(x)=\text{const}$.

Следствие 2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Доказательство. Пусть $f'(x)=g'(x)$ для любого $x\in(a,b)$. Тогда $(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)=0$. В силу следствия 1 $f-g=\text{const}$, т. е. $f(x)=g(x)+C$.

Правило Лопиталя – Бернулли

Во многих случаях отыскание пределов функции в точке или на бесконечности приводит к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, раскрытие которых часто можно осуществить, используя правило Лопиталя – Бернулли.

Отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a$ есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Раскрыть эту неопределенность – значит вычислить $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, если он существует, или установить, что он не существует. Следующая теорема устанавливает правило для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Теорема. (правило Лопиталя – Бернулли раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$). Пусть функции f и g дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки $a\in\boldsymbol{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ и $g'(x)\neq 0$ для любого $x\in\overset{\circ}{U}(a)$. Если существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Теорема остается верной и в том случае, когда $x\to\infty$, $\pm\infty$. Действительно, положив $x=\frac{1}{t}$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогичные соотношения получим при $x\to+\infty$ (соответственно $t\to+0$) и $x\to-\infty$ (соответственно $t\to-0$).

Теорема. (правило Лопиталя – Бернулли раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$). Пусть функции f и g дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a ($a\in\boldsymbol{R}$ либо является одной из бесконечностей $\infty, +\infty, -\infty$), $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ и $g'(x)\neq 0$ для любого $x\in\overset{\circ}{U}(a)$. Если существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Правило Лопиталя – Бернулли раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ при выполнении соответствующих условий можно применять несколько раз.

Пример. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$.

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x)'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1}=\frac{1}{0+1}=1;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6};$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$

Кроме неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ правило Лопиталя – Бернулли дает возможность раскрывать неопределенности и других видов, таких как $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

Действительно, неопределенность вида $0\cdot\infty$ сводится к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ следующим образом: $f\cdot g=\frac{f}{\frac{1}{g}}$ или $f\cdot g=\frac{g}{\frac{1}{f}}$. Для неопределенности вида $\infty-\infty$ можно выполнить преобразование $f-g=\frac{1}{\frac{1}{f}}-\frac{1}{\frac{1}{g}}=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}$. Неопределенности вида 0^0, ∞^0 и 1^∞ можно свести к неопределенности $0\cdot\infty$, предварительно прологарифмировав соответствующее выражение или воспользовавшись равенством $f^g=e^{g\ln f}$ $(f>0)$.

Пример. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to+0}x^x$.

Решение.

1) $$\lim_{x\to+0}x\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0;$$

2) $$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2};$$

3) $$\lim_{x\to+0}x^x=[0^0]=\lim_{x\to+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}x\ln x}=e^0=1.$$

Исследование функции с помощью производных

Возрастание и убывание функции. Достаточные условия экстремума функции

Функция $\boldsymbol{y=f(x)}$ называется **возрастающей (убывающей)** на интервале $\boldsymbol{(a,b)}$, если для любых значений $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$, принадлежащих данному интервалу, из неравенства $\boldsymbol{x_1<x_2}$ следует неравенство $\boldsymbol{f(x_1)<f(x_2)}$ $\boldsymbol{(f(x_1)>f(x_2))}$.

Возрастающие и убывающие функции называются монотонными.

Одна из основных задач исследования функции – это нахождение промежутков ее возрастания и убывания. Исследование на монотонность легко провести с помощью производной.

Теорема. (достаточное условие возрастания (убывания) функции). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любого $x \in (a, b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a, b).

Доказательство. Пусть $f'(x) > 0$ и $x_1, x_2 \in (a, b)$, причем $x_1 < x_2$. Применяя к отрезку $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа, получим

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где $c \in (x_1, x_2)$. По условию $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$. Следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, или $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. функция $y = f(x)$ возрастает на интервале (a, b).

Аналогичным образом проводится доказательство в случае, когда $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Теорема имеет простой геометрический смысл. Если на некотором интервале касательная к графику функции $y = f(x)$ образует с осью Ox острый угол α ($\mathrm{tg}\,\alpha > 0$), то функция возрастает на этом интервале (рис.24, а). Если касательная к графику образует с осью Ox тупой угол α ($\mathrm{tg}\,\alpha < 0$), то функция убывает (рис. 24, б).

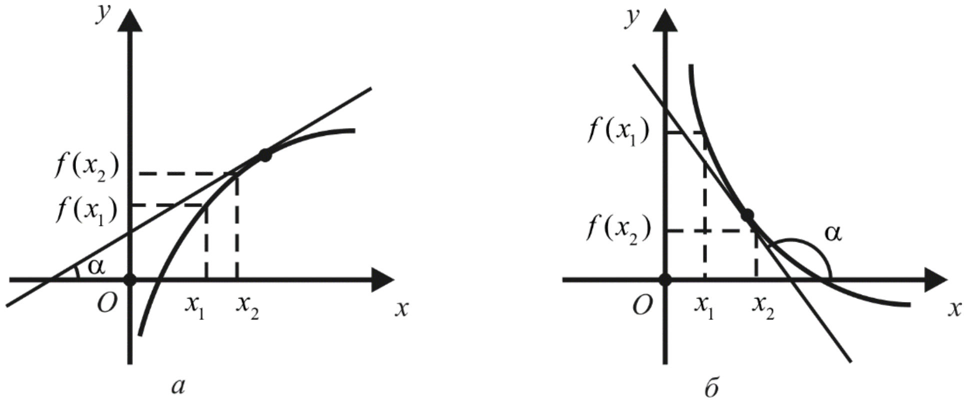


Рис.24

Пример. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Решение. Данная функция определена на всей числовой прямой. Найдем ее производную:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Значит, $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-1, 1)$. Следовательно, функция возрастает на интервалах $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ и убывает на интервале $(-1, 1)$.

Замечание. Теорема остается справедливой, если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любого $x \in (a, b)$, за исключением конечного числа точек интервала (a, b), в которых $f'(x) = 0$. Так, например, для функции $f(x) = x + \sin x$ на интервале $(-100, 100)$ имеем $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, причем $f'(x) = 0$ лишь в конечном числе точек этого интервала; поэтому функция $f(x) = x + \sin x$ возрастает на интервале $(-100, 100)$.

Согласно теореме Ферма из дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке x_0 экстремума следует, что $f'(x_0) = 0$. Однако равенство $f'(x_0) = 0$ не является, вообще говоря, достаточным условием экстремума в точке x_0.

Теорема (первое достаточное условие экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой ε-окрестности точки x_0. Если в точке $x = x_0$ производная функции $y = f(x)$ равна нулю и при переходе через эту точку меняет знак, то x_0 является точкой экстремума, причем x_0 – точка максимума, если знак производной меняется с плюса на минус (т. е. $f'(x) > 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$), и x_0 – точка минимума, если знак производной меняется с минуса на плюс (т. е. $f'(x) < 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$).

Доказательство. Пусть в точке x_0 производная функции $y = f(x)$ равна нулю и выполняются условия: $f'(x) > 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$. Тогда функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и убывает на интервале $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Следовательно, значение $f(x)$ в точке x_0 является наибольшим на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, а это и означает, что x_0 – точка максимума функции.

Аналогично, если $f'(x) < 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, то функция $y = f(x)$ убывает на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и возрастает на интервале $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Следовательно, значение $f(x)$ в точке x_0 является наименьшим на интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, т. е. x_0 – точка минимума функции. Теорема доказана.

Замечание. Теорема остается верной и в случае, если x_0 – точка непрерывности функции и производная в ней не существует, но меняет знак при переходе через данную точку.

Теорема (второе достаточное условие экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Если в точке $x = x_0$ первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю, а вторая производная существует и отлична от нуля, то x_0 – точка максимума при $f''(x_0) < 0$; x_0 – точка минимума при $f''(x_0) > 0$.

Замечание. Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$, то о наличии экстремума в точке x_0 ничего сказать нельзя. Так, функция $y = x^3$ не имеет экстремума в точке $x_0 = 0$, а функция $y = x^4$ имеет минимум в точке $x_0 = 0$.

Исследование случая, когда $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$, проводится с помощью следующей теоремы.

Теорема. Пусть в точке x_0 первые $n-1$ производных равны нулю, а n-я производная отлична от нуля и непрерывна в этой точке. Тогда:

1) если n – нечетное число, то экстремума в точке x_0 нет;

2) если n – четное число, то в точке x_0 есть максимум при $f^{(n)}(x_0)<0$, минимум при $f^{(n)}(x_0)>0$.

Пример. Найти экстремумы функции

$$f(x)=2x^3-12x^2-30x+7.$$

Решение. Найдем критические точки функции, т. е. точки, подозрительные на экстремум. Поскольку $f'(x)=6x^2-24x-30=6(x-5)(x+1),$ то критическими точками являются $x_1=5$ и $x_2=-1.$ Исследуем знак второй производной $f''(x)=12x-24$ в этих точках:

$$f''(5)=12\cdot 5-24=36>0,\quad f''(-1)=12\cdot(-1)-24=-36<0.$$

Следовательно, $x_1=5$ – точка минимума, $x_2=-1$ – точка максимума, причем

$$\min f(x)=f(5)=-193,\quad \max f(x)=f(-1)=23.$$

Выпуклость функции. Точки перегиба

Дифференцируемая функция $\boldsymbol{y=f(x)}$ называется выпуклой вверх (вниз) на интервале $\boldsymbol{(a,b)},$ если все точки графика функции лежат не выше (не ниже) любой ее касательной (рис. 25, а, б), т. е. для любых $\boldsymbol{x,\ x_0\in(a,b)}$ выполняется неравенство

$$\boldsymbol{f(x)\le f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\quad (f(x)\ge f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)).}$$

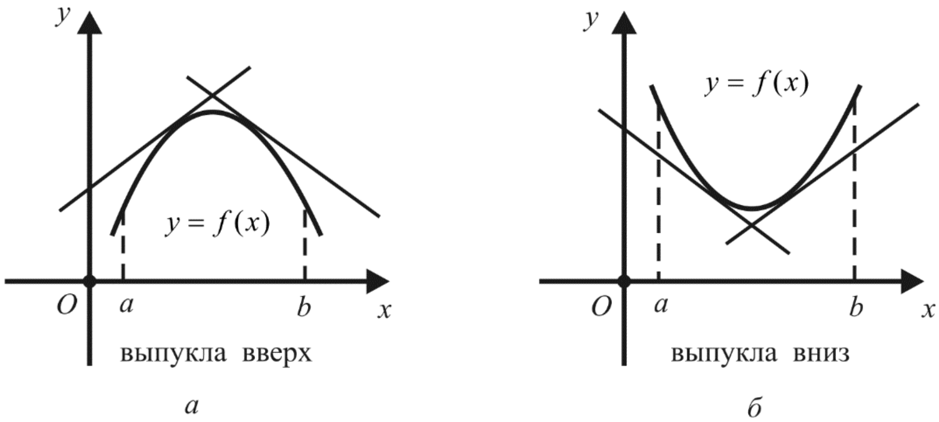


Рис. 25

Теорема (достаточное условие выпуклости). Если для любого $x\in(a,b)$ $f''(x)<0,$ то функция $y=f(x)$ выпукла вверх на интервале (a,b). Если же для любого $x\in(a,b)$ $f''(x)>0,$ то функция $y=f(x)$ выпукла вниз на интервале (a,b).

Точку $\boldsymbol{M(x_0, f(x_0))}$ называют **точкой перегиба** графика функции $\boldsymbol{y = f(x)}$, если в этой точке функция непрерывна и при переходе через нее меняет направление выпуклости (рис. 26).

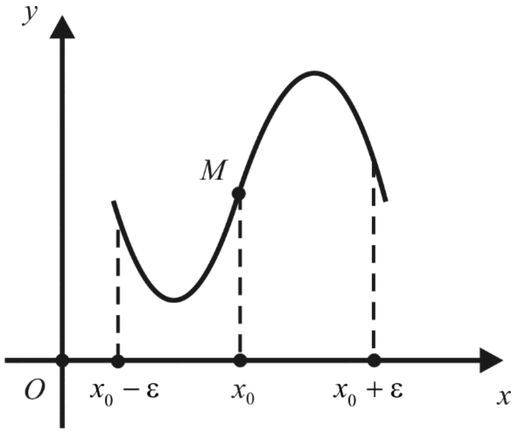


Рис. 26

Теорема (необходимое условие точки перегиба). Если в точке $M(x_0, f(x_0))$ перегиба графика функции $y = f(x)$ существует непрерывная вторая производная, то она равна нулю: $f''(x_0) = 0$.

Замечание. Условие $f''(x_0) = 0$ играет такую же роль в отношении точек перегиба, какую играло условие $f'(x_0) = 0$ при нахождении экстремумов. Оно необходимо, но не является достаточным. Например, функция $f(x) = x^4$ не имеет перегиба в точке $(0, 0)$, хотя $f''(x) = 12x^2 = 0$ при $x = 0$.

Из теоремы следует, что точками возможного перегиба графика функции $y = f(x)$ могут быть точки, в которых вторая производная f'' равна нулю или не существует.

Возможные случаи, когда в точке перегиба вторая производная не существует, показаны на рис. 27, а и б. На рис. 27, а касательная к графику функции вертикальна, т. е. первая производная в точке x_0 бесконечна, а следовательно, вторая производная не существует. На рис. 27, б первая производная в точке x_0 не существует, поэтому не существует в этой точке и вторая производная.

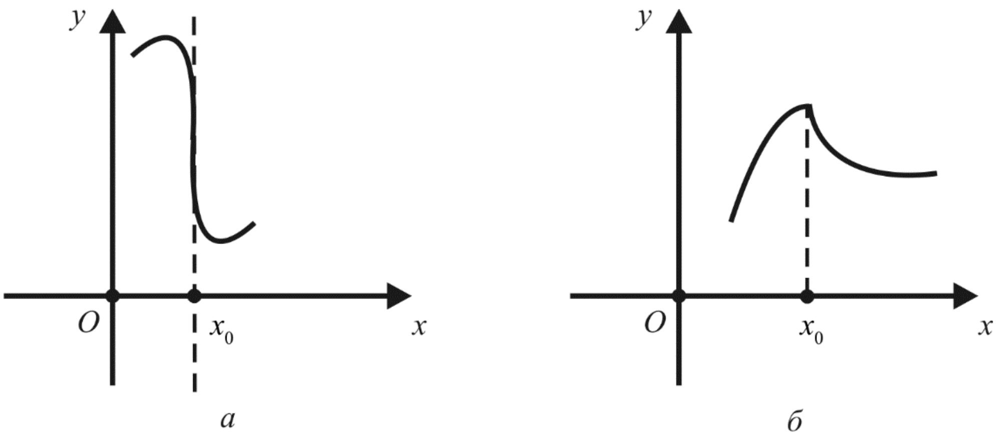


Рис. 27

Теорема (достаточное условие точки перегиба). Если вторая производная f'' при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Пример. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$.

Решение. Находим $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$, $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$. Поскольку вторая производная обращается в нуль при $x = 1$ и меняет знак при переходе через это значение, то $x = 1$ – абсцисса точки перегиба. Ордината этой точки $y = f(1) = -3$, т. е. $M(1, -3)$ – точка перегиба графика функции.

Так как $f''(x) < 0$ при $x < 1$ и $f''(x) > 0$ при $x > 1$, то функция является выпуклой вверх на интервале $(-\infty, 1)$ и выпуклой вниз на интервале $(1, +\infty)$.

Пример. Найти точки перегиба графика функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Решение. Находим $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. В точке $x = 0$ функция имеет бесконечную производную, а касательная к графику функции в точке $O(0, 0)$ совпадает с осью Оу (рис. 28). Вторая производная в точке $x = 0$ не существует. Однако график функции имеет перегиб в точке $O(0, 0)$, так как вторая производная $f''(x) = \dfrac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$ имеет слева и справа от точки $x = 0$ разные знаки.

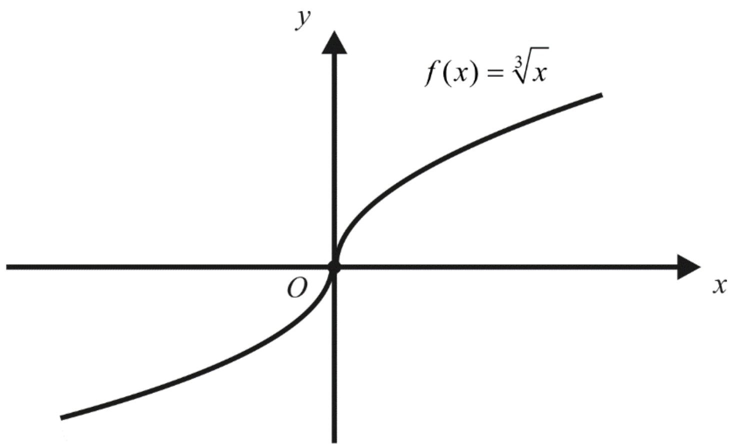


Рис. 28

Пример. (Оптимизация затрат на перевозку) Затраты логистической компании на перевозку груза описываются функцией:

C(q)=0,1q^3–2q^2+20q+1000, где q – объем перевозок (в тоннах), C(q) – затраты в у.е. Найти предельные затраты. Определить, при каком объеме перевозок затраты минимальные.

Решение: вычисляем предельные затраты: C′(q)=0.3q^2–4q+20

Найдем минимум затрат: находим критическую точку C′(q)=0:

$$0.3q^2-4q+20=0\ ,\ q\approx 6.67\ (\text{тонн}).$$

Проверяем знак второй производной $C''(q)=0.6q-4$:

При $q=6.67$: $C''(6.67)>0\Rightarrow$ это минимум.

Вывод: Оптимальный объем перевозок — 6.67 тонн, затраты минимальные.

Пример: (Максимизация прибыли) Прибыль компании от доставки грузов зависит от цены услуги pp (в у.е./кг):

$$\Pi(p)=500p-10p^2-2000$$

Найти цену p, при которой прибыль максимальная.

Решение: Находим производную: $\Pi'(p)=500-20p$.

Критическая точка: $500-20p=0\Rightarrow p=25$

Проверяем максимум $\Pi''(p)=-20<0$.

Ответ: При цене 25 у.е./кг прибыль максимальная.

Пример: (Анализ скорости доставки) Время доставки груза зависит от расстояния d (км): $T(d)=0{,}01d^2+2d+10$ (в часах). Найти скорость изменения времени доставки при $d=100$ км.

Решение: Производная функции времени:

$T'(d)=0{,}02d+2$. Подставляем $d=100$,

$T'(100)=0{,}02\cdot 100+2=4$ ч/км

Ответ: При увеличении расстояния на 1 км, время доставки вырастет на 4 часа.

Пример: (Управление запасами) Общие затраты на хранение и заказ товара: $TC(Q)=5000/Q\cdot 50+Q/2\cdot 10$, где Q – размер заказа. Найти оптимальный размер заказа Q^*, минимизирующий затраты.

Решение: Упрощаем функцию: $TC(Q)=250\,000/Q+5Q$

Вычисляем производную: $TC'(Q)=-250\,000/Q^2+5$.

Находим критическую точку: $-250\,000/Q^2+5=0\Rightarrow Q^2=50\,000\Rightarrow Q\approx 223{,}6$

Ответ: Оптимальный заказ — 224 единицы.

Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции

Асимптота – это прямая, к которой неограниченно приближается график функции. Построение графика функции значительно облегчается, если знать его асимптоты. Асимптоты могут быть вертикальными и наклонными.

Прямая $\boldsymbol{x=a}$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $\boldsymbol{y=f(x)}$**,** если хотя бы один из односторонних пределов этой функции в точке a является бесконечным, т. е.

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a+0} f(x)=\infty.$$

Для отыскания вертикальных асимптот необходимо найти те значения x, вблизи которых функция $y=f(x)$ неограниченно возрастает по модулю. Обычно это точки разрыва функции второго рода.

Например, прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = \dfrac{1}{x-2}$ (рис. 29), так как

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty.$$

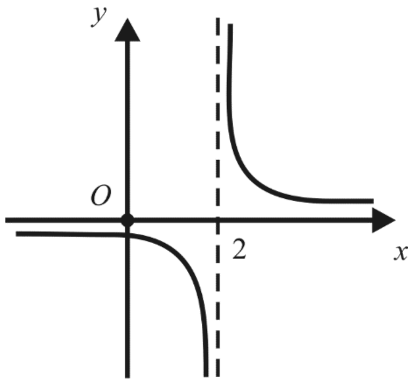


Рис. 29

Прямая $\boldsymbol{y = kx + b}$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ при $\boldsymbol{x \to +\infty}$ $\boldsymbol{(x \to -\infty)}$, если $\boldsymbol{f(x)}$ можно представить в виде $\boldsymbol{f(x) = kx + b + \alpha(x)}$, где $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0}$ $\boldsymbol{(\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha(x) = 0)}$.

Например, прямая $y = x$ является наклонной асимптотой графика функции $y = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$ как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$, поскольку $\alpha(x) = \dfrac{1}{x} \to 0$ и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$ (рис. 30).

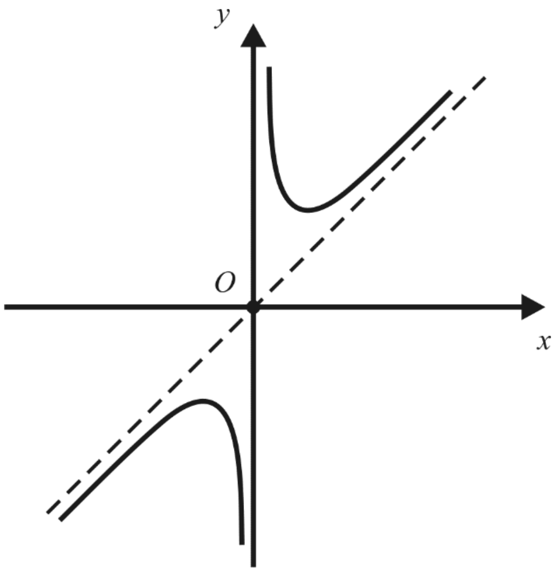


Рис. 30

Частным случаем наклонной асимптоты (при $k = 0$) является горизонтальная асимптота, которая имеет вид $y = b$.

Теорема. Для того чтобы прямая $y = kx + b$ являлась наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, необходимо и достаточно существование конечных пределов

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - kx) = b. \tag{21}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Достаточность. Пусть выполнены условия (44) при $x \to +\infty$. Из условия $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$ следует условие $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = 0$, т. е. $f(x) - kx - b = \alpha(x)$, или $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Следовательно, по определению прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$.

Аналогичным образом проводится доказательство в случае $x \to -\infty$.

Замечание. Наклонные асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут быть разными. Поэтому при нахождении пределов (14) следует отдельно рассматривать случай, когда $x \to +\infty$, и случай, когда $x \to -\infty$.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{2x^2 - 9}{x + 2}$.

Решение. Функция определена на множестве $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. На этом множестве она представляет собой частное двух непрерывных функций, где делитель не обращается в нуль. Следовательно, рассматриваемая функция непрерывна в каждой точке ее области определения. Поэтому единственной конечной точкой a, в которой хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ может обратиться в бесконечность, является точка $a = -2$. Найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to-2-0} \frac{2x^2 - 9}{x + 2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-2+0} \frac{2x^2 - 9}{x + 2} = -\infty.$$

Здесь при $x \in (-2 - \delta, -2)$ $2x^2 - 9 < 0$ и $x + 2 < 0$, а при $x \in (-2, -2 + \delta)$ $2x^2 - 9 < 0$ и $x + 2 > 0$ $(\delta > 0)$. Следовательно, прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9}{x(x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\dfrac{9}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}}=2=k,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-9}{x+2}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9-2x^2-4x}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x-9}{x+2}=-4=b,$$

то прямая $y=2x-4$ является наклонной асимптотой графика функции при $x\to+\infty.$ Аналогично находим наклонную асимптоту графика функции при $x\to-\infty,$ которая также есть прямая $y=2x-4.$

Общая схема исследования графика функции

Рассмотрим примерную схему, по которой целесообразно исследовать поведение функции и строить ее график.

1. Найти область определения функции, точки ее разрыва.

2. Исследовать изменение функции при стремлении аргумента к концам промежутков области определения и точкам разрыва.

3. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.

4. Найти асимптоты графика функции.

5. Найти, если это возможно, точки пересечения графика функции с осями координат.

6. Найти точки экстремума, экстремумы функции, промежутки возрастания и убывания функции.

7. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции.

Порядок исследования иногда целесообразно выбирать, исходя из конкретных особенностей данной функции.

Пример. Исследовать функцию $y=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$ и построить ее график.

1. Областью определения рассматриваемой функции является множество $D(f)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty).$ Функция непрерывна на $D(f),$ $x=2$ – точка разрыва.

2. При стремлении аргумента к концам промежутков области определения и точке разрыва получаем:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+1}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=\left[\frac{1}{-0}\right]=-\infty\,,$$

$$\lim_{x\to2-0}\frac{(x+1)^2}{x-2}=\left[\frac{9}{-0}\right]=-\infty\,,\quad \lim_{x\to2+0}\frac{(x+1)^2}{x-2}=\left[\frac{9}{+0}\right]=+\infty\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=\left[\frac{1}{+0}\right]=+\infty$$

Следовательно, точка $x=2$ является точкой разрыва второго рода для данной функции.

3. Так как область определения рассматриваемой функции несимметрична относительно начала координат, то функция имеет общий вид, т. е. не является ни четной, ни нечетной.

4. Из п. 2 следует, что прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой графика функции. Определим наклонные асимптоты при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$. Для этого находим:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{(x+1)^2}{x(x-2)}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}=1,$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}(f(x)-x)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left(\frac{(x+1)^2}{x-2}-x\right)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{4x+1}{x-2}=4,$$

откуда получаем одну наклонную асимптоту $y=x+4$.

5. Поскольку при $x=0$ $y=-\frac{1}{2}$, а $y=0$ при $x=-1$, то имеем две точки пересечения с осями: $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ и $(-1,0)$.

6. Найдем первую производную функции:

$$y'=\frac{\left((x+1)^2\right)'\cdot(x-2)-(x+1)^2\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{2(x+1)(x-2)-(x+1)^2}{(x-2)^2}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

Критическими точками (точками, в которых производная функции не существует или равна нулю) являются точки $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=5$. Отметим их на координатной оси и исследуем знак первой производной на полученных интервалах (рис. 31).

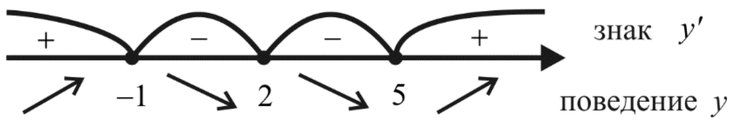


Рис. 31

Таким образом, на интервалах $(-\infty,-1)$ и $(5,+\infty)$ функция возрастает, а на интервалах $(-1,2)$ и $(2,5)$ убывает. Точка $x_1=-1$ является точкой максимума функции, а точка $x_3=5$ – точкой минимума функции. Точка $x_2=2$ не является точкой экстремума, поскольку сама функция в ней не определена.

Находим экстремумы функции:

$$y_{\max} = \frac{(-1+1)^2}{-1-2} = 0\,, \quad y_{\min} = \frac{(5+1)^2}{5-2} = 12\,.$$

7. Найдем вторую производную функции:

$$y'' = \left(\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2} \right)' = \frac{(x^2-4x-5)' \cdot (x-2)^2 - (x^2-4x-5) \cdot \left((x-2)^2 \right)'}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{2(x-2)^3 - 2(x^2-4x-5)(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{18}{(x-2)^3}\,.$$

При переходе через точку $x = 2$ она меняет знак (рис. 27).

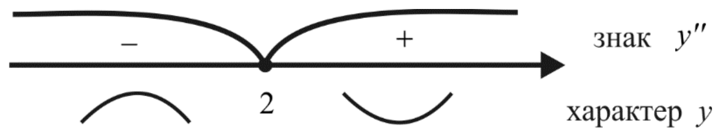


Рис. 27

Следовательно, функция выпукла вверх на интервале $(-\infty, 2)$ и выпукла вниз на интервале $(2, +\infty)$ Точек перегиба график рассматриваемой функции не имеет, поскольку вторая производная в нуль нигде не обращается и не определена в той же точке $x = 2$, в которой не определена сама функция.

График функции $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$ изображен на рис. 32

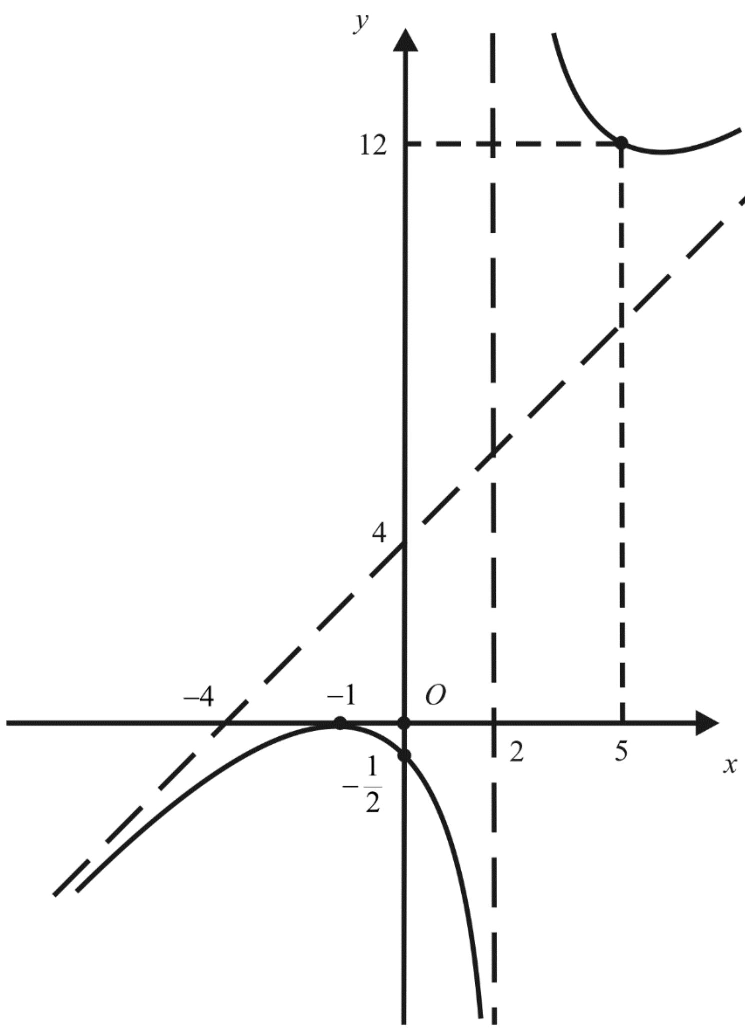


Рис.32

1.2.3. Интегрирование функции одной переменной. Приложения

Во многих вопросах науки приходится восстанавливать функцию по известной ее производной, т. е. зная функцию $F'(x) = f(x)$, нужно найти функцию $F(x)$. Для решения таких задач служит операция интегрирования, обратная операции дифференцирования, а раздел математического анализа, изучающий способы нахождения функции по ее производной, называют интегральным исчислением.

Функция $F(x)$ называется **первообразной функции** $f(x)$ на некотором интервале $(a,\ b)$, если для любого $x \in (a,\ b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример. Пусть $f(x) = 3x^2$, тогда $F(x) = x^3$, т.к. $F'(x) = \left(x^3\right)' = 3x^2 = f(x)$.

Иногда не указывают конкретно, на каком интервале рассматривается вопрос о первообразной данной функции $f(x)$. В таких случаях предполагается, что речь идет о максимальном промежутке, на котором функция $f(x)$ определена и непрерывна.

Теорема. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$. Тогда $\Phi(x) = F(x) + C$, где С – константа, также является первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$. **Обратно**, каждая функция, являющаяся первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$, может быть представлена в виде

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$; С – константа.

Из теоремы следует, что множество функций вида $F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, С – произвольная постоянная, исчерпывает все семейство первообразных функции $f(x)$.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называют **неопределенным интегралом** от этой функции и обозначают символом $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F'(x) = f(x)$.

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, выражение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования. Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется **интегрированием** этой функции.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых, получаемых из одной из них (любой) путем параллельных ее переносов вдоль оси ординат (рис. 33).

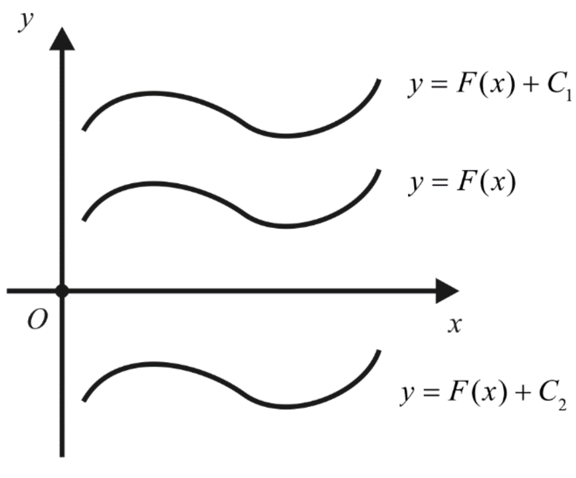


Рис. 33

Возникает вопрос: для любой ли функции f (x) существует первообразная, а значит, и неопределенный интеграл? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема. Если функция f(x) непрерывна на промежутке [a, b], то на этом промежутке у функции f(x) существует первообразная.

Некоторые свойства неопределённого интеграла:

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

То есть правильность интегрирования проверяется дифференцированием. Равенство $\int \left(3x^2+4\right)dx = x^3+4x+C$ верно, так как $\left(x^3+4x+C\right)' = 3x^2+4$.

3. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$, интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

Таблица основных неопределенных интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1,$$

$$\int dx = x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C, \quad a \neq 0$$

Примеры.

1. $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$;

2. $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$

Основные методы интегрирования

1. **Непосредственным интегрированием** называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путём применения к ним основных свойств неопределённого интеграла. При этом подынтегральную функцию обычно соответствующим образом преобразуют.

Пример. Найдите интеграл $\int \left(2x^4 + 3\sin x - 5e^x\right)dx$.

Решение.

$$\int \left(2x^4 + 3\sin x - 5e^x\right)dx = \int 2x^4 dx + \int 3\sin x\, dx - \int 5e^x dx =$$

$$= 2 \cdot \int x^4 dx + 3 \cdot \int \sin x\, dx - 5 \cdot \int e^x dx = 2 \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} + C_1 + 3 \cdot (-\cos x) + C_2 - 5 \cdot e^x + C_3 =$$

$$= \frac{2}{5}x^5 - 3\cos x - 5e^x + C, \qquad C = C_1 + C_2 + C_3 .$$

2. Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, т. е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется **методом замены переменной или методом подстановки**. Он основан на следующей теореме.

Теорема: Если F(x) – первообразная функции $f(x)$, а $x = \varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную, то функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ также имеет первообразную, причем

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C.$$

Отметим, что в случае «удачной» замены переменной $x = \varphi(t)$ заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или сводящимся к табличному. Умение правильно подобрать замену переменной приобретается только практикой.

Пример. Вычислите интеграл $\int (2x+1)^{10}\,dx$.

Решение.

$$\int (2x+1)^{10}\,dx = \left| \begin{array}{l} 2x+1 = t \\ d(2x+1) = dt \\ 2\,dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^{10}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{11}}{11} + C = \frac{(2x+1)^{11}}{22} + C.$$

3. Метод интегрирования по частям основан на интегрировании соотношения:

$$\int u dv = uv - \int v du ,$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные.

Эта форму далает возможность свести вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int vdu,$ который может оказаться существенно более простым.

Перечислим группы интегралов, берущихся по частям:

а. К первой группе интегралов относятся интегралы, в которых подынтегральная функция в качестве множителя содержит одну из следующих функций:

lnx, arcsinx, arccosx, arctgx, arcctgx.

и т.п. при условии, что оставшаяся часть подынтегральной функции представляет собой производную известной функции. В этом случае, полагают u(x) равной одной из перечисленных функций.

Пример. Вычислите интеграл $\int \ln x\,dx$.

Решение.

$$\int \ln x\,dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & dv=dx \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=x \end{vmatrix} = x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

b. К этой группе относятся интегралы вида:

$$\int P_n(x)\cos axdx,\ \int P_n(x)\sin axdx,\ \int P_n(x)e^{ax}dx,$$

где a – постоянное число; $P_n(x)$ – многочлен степени n. Здесь считают $u(x)=P_n(x)$, а за dv берём остальные сомножители.

Пример. Вычислите интеграл $\int (2x+3)\sin xdx$.

Решение.

$$\int (2x+3)\sin xdx = \begin{vmatrix} u=2x+3, & du=2dx \\ dv=\sin xdx, & v=-\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -(2x+3)\cos x - \int(-\cos x)2dx = -(2x+3)\cos x + 2\sin x + C.$$

c. К третьей группе относятся интегралы вида:

$$\int e^{ax}\cos b\,xdx,\ \int e^{ax}\sin b\,xdx,\ \int \sin(\ln x)dx,\ \int \cos(\ln x)dx.$$

Применив формулу интегрирования по частям к любому из этих интегралов дважды, получим для нахождения интеграла уравнение 1-ого порядка.

Определенный интеграл

К понятию определенного интеграла приводят задачи на нахождение предела интегральной суммы. Рассмотрим некоторые из них.

Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a,b]$ оси Ox задана непрерывная функция $y=f(x)$, не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$ называют криволинейной трапецией.

Пусть $f(x)\geq 0$ для всех $x\in[a,\ b]$. Найдем площадь S криволинейной трапеции, образованной графиком этой функции на отрезке $[a,\ b]$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ и восстановим в точках деления этого отрезка перпендикуляры до пересечения с графиком функции $y=f(x)$ (рис. 30). Тем самым мы разложим рассматриваемую криволинейную трапецию на n частей.

На каждом из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ выберем произвольную точку ξ_k и заменим k-ю криволинейную трапецию разбиения прямоугольником с основанием $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и высотой $f(\xi_k)$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$. Таким образом, мы заменим исходную криволинейную трапецию ступенчатой фигурой, составленной из n прямоугольников. Площадь k-го прямоугольника равна произведению основания на высоту, т. е. $f(\xi_k)\Delta x_k$.

Просуммировав площади всех прямоугольников, получим площадь всей ступенчатой фигуры:

$$S_n = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Эта величина может быть принята за приближенное значение площади рассматриваемой криволинейной трапеции: $S \approx S_n$.

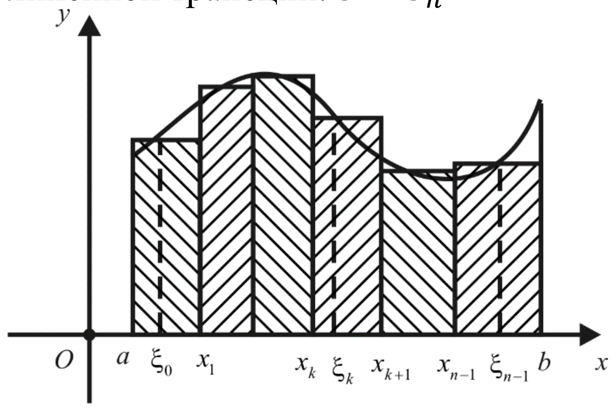


Рис. 34

Приближение к искомой площади S криволинейной трапеции будет тем точнее, чем более мелкое разбиение отрезка $[a, b]$ на части мы будем брать. Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n, когда n неограниченно возрастает так, что $\lambda = max\,\Delta\, x_k \to 0$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Задача о вычислении длины пути по заданной скорости

Пусть точка М движется прямолинейно с переменной скоростью $V = f(t)$, где $f(t)$ – заданная функция времени t. Вычислим длину пути, пройденного точкой М за промежуток времени от t_0 до Т. Промежуток $[t_0, T]$ разобьем на n промежутков

$[t_0,\ t_1]$, $[t_1,\ t_2]$, ..., $[t_{n-1},\ T]$ длиной $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$.

В течение малого промежутка времени Δt_k скорость движения можно приближенно считать постоянной и равной $f(t'_k)$, где t'_k – некоторое значение из промежутка $[t_k,\ t_{k+1}]$. Длина пути, пройденного за этот промежуток времени, приближенно равна $f(t'_k)\Delta t_k$. Складывая все длины $f(t'_k)\Delta t_k$, получаем приближенное значение длины пути, пройденного точкой М за промежуток времени от t_0 до Т:

$$S_n = f(t_0')\Delta t_0 + f(t_1')\Delta t_1 + \ldots + f(t_{n-1}')\Delta t_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k')\,\Delta t_k.$$

Переходя к пределу при $\lambda = max\,\Delta\,t_k \to 0$, находим точное значение длины пути

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k')\,\Delta t_k.$$

Сравнивая результаты этих двух задач, нетрудно заметить общий метод их решения: разбиение отрезка, на котором задана функция, на части; составление суммы S_n, которая принимается в качестве приближенного значения искомой величины; предельный переход. Этот метод применяется и для решения многих других задач (например, вычисления объемов, вычисления работы переменной силы). Поэтому пределы такого рода стали предметом особого исследования.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограниченна на отрезке $[a,\ b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольным образом на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Пусть $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ – длина частичного отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$. На каждом таком отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k и составим сумму

$$S_n = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

которая называется интегральной суммой Римана (немецкий математик, 1826–1866) функции $y = f(x)$, соответствующей разбиению отрезка $[a, b]$ с фиксированными точками ξ_k.

Пусть λ – длина наибольшего частичного отрезка разбиения, т. е. $\lambda = \max \Delta x_k$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$. Данная величина называется диаметром разбиения.

Если существует конечный предел интегральной суммы S_n при $\lambda \to 0$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a,\ b]$ на частичные отрезки и выбора точек ξ_k, то этот предел называется **определенным интегралом** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ и обозначается

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k},$$

а сама функция $y = f(x)$ называется **интегрируемой по Риману** на отрезке $[a,\ b]$.

Таким образом, определенный интеграл есть число, к которому стремится интегральная сумма, когда $\lambda \to 0$.

Символ $\int\limits_a^b f(x)dx$ читается так: определенный интеграл от a до b эф от икс дэ икс. Число a называется нижним пределом интегрирования, число b – верхним пределом интегрирования, функция $f(x)$ – подынтегральной функцией, выражение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования.

Обозначение определенного интеграла похоже на обозначение неопределенного. И это не случайно. Оказывается, что вычисление определенного интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла.

Отличия: определенный интеграл от $f(x)$ на $[a, b]$ есть число, а неопределенный интеграл – множество первообразных $F(x) + C$.

Возвращаясь к задаче о площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, можно сказать, что

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции. В этом и состоит **геометрический смысл определенного интеграла.**

Если тело движется прямолинейно с переменной скоростью $V = f(t)$, то путь s, пройденный телом за время движения от $t = t_0$ до $t = T$, можно определить по формуле

$$s = \int_{t_0}^T f(t)dt.$$

В этом состоит **физический смысл определенного интеграла**.

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b dx = b - a$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,\ b]$, то их сумма $f(x) + g(x)$ также интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

т. е. интеграл от суммы равен сумме интегралов.

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\ b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[\alpha,\ \beta] \subset [a,\ b]$.

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a,\ b]$, $[a,\ c]$, $[c,\ b]$, то она интегрируема на двух других отрезках, причем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

При $a < c < b$ данное равенство имеет простой геометрический смысл: площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a, c]$ и $[c,\ b]$.

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ и $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a,\ b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

7. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ и $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in [a,\ b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на отрезке $[a,\ b]$, причем

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

9. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ и для всех $x \in [a, b]$ выполняются неравенства $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

10. **Теорема о среднем.** Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и для всех $x \in [a, b]$ выполняются неравенства $m \leq f(x) \leq M$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \mu \cdot (b-a),$$

где $m \leq \mu \leq M$.

Величину μ называют средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$.

Замечание: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то теорема о среднем принимает вид

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \quad \text{где } c \in [a,\ b].$$

Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования. Формула Ньютона – Лейбница

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, интегрируемую на отрезке $[a,\ b]$. Если $x \in [a,\ b]$, то данная функция интегрируема также на отрезке $[a,\ x]$, т. е. существует $\int_a^x f(t)dt$. Предположим, что x меняется на отрезке $[a,\ b]$. Тогда на этом отрезке определена функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

которая задается **определенным интегралом с переменным верхним пределом интегрирования**.

Очевидно, что $\Phi(a) = 0, \Phi(b) = \int_a^b f(t)dt$.

Теорема. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\ b]$, то функция $\Phi(x)$ непрерывна на этом отрезке.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$. Тогда функция $\Phi(x)$ дифференцируема в любой точке $x \in [a, b]$ и $\Phi'(x) = f(x)$.

Таким образом установлено, что любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет первообразную (а следовательно, и бесконечное множество первообразных), одной из которых является интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$. А так как всякая другая первообразная для функции $f(x)$ может отличаться от $\Phi(x)$ только на постоянную, то тем самым установлена связь между неопределенным и определенным интегралами:

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Теорема. (Формула Ньютона – Лейбница). Определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой ее первообразной на верхнем и нижнем пределах интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.

Формула $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, называется **формулой Ньютона – Лейбница**; ее можно переписать в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b,$$

где $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ – **двойная подстановка от a до b**.

Вычисление определенных интегралов непосредственно по определению очень громоздко и затруднительно даже для простых функций. Гораздо более удобно вычислять определенный интеграл по формуле Ньютона – Лейбница.

Пример. Найдите $\int\limits_2^3 x^2 dx$.

Решение.

$$\int\limits_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{27-8}{3} = \frac{19}{3}.$$

Для случаев нахождения определённых интегралов с помощью теоремы Ньютона-Лейбница могут быть использованы все перечисленные выше приемы для нахождения неопределённых интегралов. Следует учесть, что при вычислении определённого интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется; не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных.

Пример. Найдите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x, \\ dt = (2x)'dx = 2dx \Rightarrow \\ \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt \\ \alpha = 2 \cdot 0 = 0; \\ \beta = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi. \end{array} \right| = \int\limits_0^{\pi} (\sin t)\frac{1}{2}dt = \left(-\frac{1}{2}\cos t\right)\Bigg|_0^{\pi} = \left(\frac{1}{2}\cos t\right)\Bigg|_{\pi}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 0 - \frac{1}{2}\cos\pi = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot(-1) = 1.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{2} \frac{2x\,dx}{\left(2x^2+1\right)^2}$.

Решение. $$\int\limits_{-1}^{2} \frac{2x\,dx}{\left(2x^2+1\right)^2} = \left| \begin{array}{l} 2x^2+1 = t \\ d\left(2x^2+1\right) = dt \\ 4x\,dx = dt \\ 2x\,dx = \frac{1}{2}dt \\ \alpha = 2\cdot(-1)^2+1 = 3 \\ \beta = 2\cdot 2^2 + 1 = 9 \end{array} \right| =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_3^9 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int\limits_3^9 t^{-2}dt = -\frac{1}{2}t^{-1}\Bigg|_3^9 = \frac{1}{2t}\Bigg|_9^3 = \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 9} = \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{1}{9}.$$

Теорема. (формула интегрирования по частям для определенного интеграла) Если функции u и v имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, то справедлива формула:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$$

Пример. Вычислите интеграл $\int\limits_1^e x\ln x dx$.

Решение.

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & dv = x\,dx \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{x^2}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1\right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+e^2}{4}.$$

Вычисление площадей плоских фигур

Площадь криволинейной фигуры $ABCD$, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y = f_2(x)$, снизу – графиком непрерывной функции $y = f_1(x)$, слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 35), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

Геометрически данное равенство очевидно: площадь указанной криволинейной фигуры представляет собой разность площадей двух криволинейных трапеций, ограниченных снизу осью Ох.

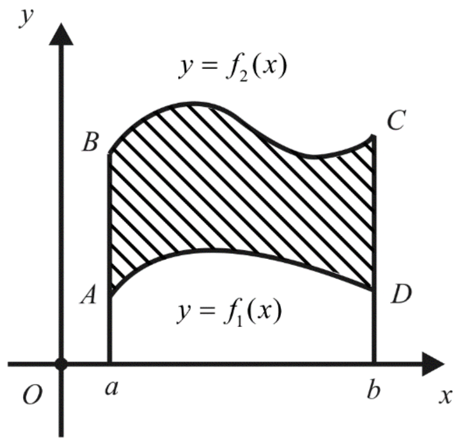


Рис. 35

Аналогичным образом, площадь криволинейной фигуры, ограниченной слева графиком непрерывной функции $x = \varphi_1(y)$, справа – графиком непрерывной функции $x = \varphi_2(y)$, снизу и сверху – прямыми $y = c$ и $y = d$, вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy.$$

Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то прямыми, параллельными оси Оу (или оси Ох), ее следует разбить на части так, чтобы можно было применить известные формулы для вычисления площадей.

Пример. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = x^2$.

Решение. Изобразив графики обеих функций на плоскости (рис. 36), убеждаемся, что речь идет о криволинейной фигуре, ограниченной сверху графиком функции $y = x$, снизу – графиком функции $y = x^2$. Точки пересечения графиков $(0,\ 0)$ и $(1,\ 1)$ легко находятся из уравнения $x = x^2$. Таким образом, $f_2(x) = x$, $f_1(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$ и

$$S = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

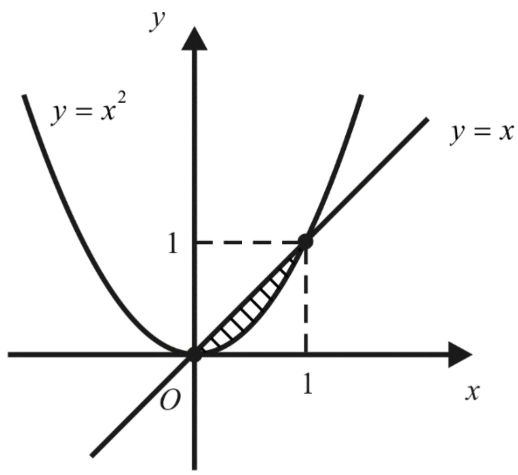


Рис. 36

Применение интегрального исчисления в социально-экономической сфере

Применение определенного интеграла в социально-экономической сфере основано на том, что любой меняющийся социально-экономический процесс может быть интерпретирован как скачкообразный, скачки которого близки к нулю.

Количество произведенной продукции.

Объем произведенной продукции Q зависит от производительности труда и длительности промежутка рабочего времени, в течение которого производительность может меняться. Пусть $f(t)$ – фукция изменения производительности труда от времени. Количество продукции Q, произведенной в промежутке времени от a до b при производительности труда $f(t)$, вычисляется по формуле:

$$Q = \int_a^b f(t)dt.$$

Если затраты труда считать линейно зависимыми от времени, а затраты капитала – неизменными, то функция Кобба-Дугласа примет вид $f(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$. Тогда объем произведенной продукции Q за T лет составит:

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}dt.$$

Пример. Найдите дневную выработку Q за рабочий день продолжительностью 8 ч., если производительность труда в течение дня меняется по эмпирической формуле $f(t) = -0{,}1t^2 + 0{,}8t + 10$.

Решение. Воспользуемся формулой $Q = \int_a^b f(t)dt$. В нашем случае имеем $Q = \int_0^8 f(t)dt = \int_0^8 (-0{,}1t^2 + 0{,}8t + 10)dt = \left(-0{,}1 \cdot \frac{t^3}{3} + 0{,}8 \cdot \frac{t^2}{2} + 10t\right)\Big|_0^8 = 88{,}53$.

Количество денег, поступивших в банк за определенный промежуток времени

Пусть функция $f(t)$ описывает количество денег, поступающих в банк в каждый момент времени t. Определим общее количество денег, поступивших в банк за промежуток времени [0; T]. Если $f(t) = const$, то количество денег U, поступившее в банк за промежуток времени [0; T], находится по формуле $U = f(c) \cdot T$, где c – произвольное значение из отрезка [0; T].

Если $f(t)$ – количество денег, поступивших в банк в момент времени t, то общее количество денег, поступивших в банк за промежуток времени [0; T] находится по формуле

$$U = \int_0^T f(t)dt.$$

Дисконтирование

Пусть доход изменяется со временем и описывается функцией $f(t)$, удельная норма процента равна $i = \frac{p}{100}$ и процент начисляется непрерывно. Тогда дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле

$$K = \int_0^T f(t)e^{i\,t}dt.$$

Вычисление средних величин

В социально-экономической сфере часто требуется найти среднюю производительность труда за определённый промежуток времени, среднее значение затрат на производство труда за определённый промежуток времени и т.д. Такого рода задачи решаются с помощью теоремы о среднем: Для непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ существует такая точка c$\in[a; b]$, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$. Тогда среднее значение f(c) функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ равно

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx.$$

Пример. Найдите среднее значение затрат в денежных единицах на производство и реализацию продукции, имеющих вид $S(x) = 3x^2 + 4x + 2$, где x – объём продукции в усл.ед., если объём продукции меняется от 2 до 4 усл. ед.

Решение. В этом примере a=2, b =4, f (x) = S(x). Тогда среднее значение функции равно

$$S_{\text{ср}} = \frac{1}{4-2}\int_2^4 (3x^2 + 4x + 2)dx = \frac{1}{2}(x^3 + 2x^2 + 2x)|_2^4 = \frac{1}{2}(104 - 20) = 42.$$

Таким образом, средние издержки составляют 42 усл. ед.

1.2.4. Функции нескольки действительных переменных

Основные понятия

Функции одной независимой переменной не охватывают всех зависимостей, существующих в природе. Многие величины, представляющие интерес, зависят не от одного, а от очень многих факторов. **Например,** Площадь S прямоугольника со сторонами x и y является функцией двух переменных: S(x, y)=xy.

В связи с этим естественно ввести понятие функции нескольких переменных. В данном разделе будут рассматриваться функции действительных переменных, принимающие значения во множестве действительных чисел.

Напомним, что пара чисел x и y называется упорядоченной, если указано, какое из этих чисел считается первым, а какое – вторым. Упорядоченную пару чисел записывают в виде $(x,\ y)$, где x – первое число, y – второе число.

Определение. Пусть **D** – некоторое множество упорядоченных пар действительных чисел. Соответствие f, которое каждой паре чисел $(x,\ y)$ из **D** сопоставляет одно и только одно действительное число z, называется функцией двух переменных и записывается в виде $z = f(x,\ y)$ или $f{:}\,D \to R$.

Множество D называется областью определения функции f. **Множество значений**, принимаемых переменной z в области определения, называется **областью изменения** этой функции.

Поскольку каждой упорядоченной паре чисел $(x,\ y)$ в декартовой прямоугольной системе координат соответствует единственная точка M плоскости и, обратно, каждой точке M соответствует единственная упорядоченная пара чисел $(x,\ y)$, то функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки M и вместо $z = f(x,\ y)$ писать $z = f(M)$.

Геометрическим изображением функции двух переменных является некоторая поверхность в пространстве. Значение функции $z = f(x,\ y)$ при $x = a$ и $y = b$ обозначается через $f(a,\ b)$.

Способы задания функции двух переменных, как и в случае одной переменной, могут быть различными. Чаще используется **аналитический способ**, т. е. с **помощью формулы**. Областью определения функции в этом случае считается множество всех точек плоскости, для которых эта формула имеет смысл.

Пример. а) Областью определения функции $z = x^2 + y^2$ является множество всех пар чисел $(x,\ y)$, т. е. вся плоскость Oxy;

b) Областью определения функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ является множество точек, для которых определено выражение $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, т. е. множество точек, для которых $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$. Множество всех таких точек образует круг с центром в начале координат и радиусом $R = 1$.

Определение. Соответствие f, которое каждой упорядоченной тройке действительных чисел $(x,\ y,\ z)$ сопоставляет одно и только одно действительное число u, называется функцией трех переменных и записывается в виде $u = f(x,\ y,\ z)$.

Функцию трех переменных можно рассматривать как функцию точки $M(x,\ y,\ z)$ пространства.

Аналогичным образом определяется функция n $(n \in N)$ переменных $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$. В этом случае множество всех упорядоченных совокупностей n чисел $(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ образует n-мерное пространство, а каждая точка $M(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ называется точкой этого пространства.

Как известно, функция одной переменной изображается на плоскости в виде линии, определяемой уравнением $y = f(x)$. Функция двух переменных изображается в пространстве в виде поверхности, определяемой уравнением $z = f(x,\ y)$. **Например**, функция $z = x - y$ задает плоскость, а функция $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ – полусферу.

Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Рассмотрим понятия предела и непрерывности для функции двух переменных. Для функции большего числа переменных данные понятия вводятся аналогично.

Напомним, что расстояние между двумя точками плоскости $M(x,\ y)$ и $M_0(x_0,\ y_0)$ определяется по формуле

$$\rho(M,\ M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Аналогично определяется расстояние между точками $M(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ и $M_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0)$:

$$\rho(M,\ M_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}.$$

Пусть функция $z = f(x,\ y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $M_0(x_0,\ y_0)$. **Сформулируем два эквивалентных между собой определения предела функции в точке.**

Определение. Число А называется пределом функции $z = f(x,\ y)$ в точке $M_0(x_0,\ y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (зависящее от ε) такое, что для всех точек $M(x,\ y)$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(M,\ M_0) < \delta$, выполняется неравенство $|f(x,\ y) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,\ y) = A$.

Определение. Число А называется пределом функции $z = f(x,\ y)$ в точке M_0, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую проколотую δ-окрестность точки M_0, в которой выполняется неравенство $|f(x,\ y) - A| < \varepsilon$.

Геометрический смысл предела функции двух переменных состоит в следующем: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такая проколотая δ-окрестность точки $M_0(x_0,\ y_0)$, во всех точках $M(x,\ y)$ которой аппликаты соответствующих точек поверхности $z = f(x,\ y)$ отличаются от числа А по модулю меньше, чем на ε.

Из определения предела функции следует также, что существование предела функции в точке M_0, а если он существует, то и его значение, не зависят от значения самой функции в точке M_0 (если она определена в этой точке).

Отметим, что определение предела функции нескольких переменных дословно повторяет определение предела функции одной переменной. Поэтому предел функции нескольких переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам **предела функции одной переменной.** Например, справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$, $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) = B$ $(A,\ B \in R)$. Тогда в точке M_0 существуют пределы функций $f(M) \pm g(M)$, $f(M)g(M)$, $\frac{f(M)}{g(M)}$ $(g(M) \neq 0)$, причем:

а) $\lim\limits_{M \to M_0} (f(M) \pm g(M)) = A \pm B$;

б) $\lim\limits_{M \to M_0} (f(M)g(M)) = A \cdot B$, в частности, $\lim\limits_{M \to M_0} (cf(M)) = cA$;

в) $\lim\limits_{M \to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{A}{B}$ $(B \neq 0)$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 3}} (5x^2 + 2y - 4)$.

Решение.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 3}} (5x^2 + 2y - 4) = 5\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 3}} x^2 + 2\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 3}} y - 4 = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 4 = 7.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{y}$.

Решение.

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} x \cdot \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} x \cdot \lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Пусть функция $z = f(x,\ y)$ определена в некоторой окрестности (обычной, а не проколотой) точки $M_0(x_0,\ y_0)$.

Определение. Функция $z = f(x,\ y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0,\ y_0)$, если существует предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ функции в точке $M_0(x_0,\ y_0)$, равный значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0) \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,\ y) = f(x_0,\ y_0).$$

Для непрерывности функции $z = f(x,\ y)$ в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ существенно выполнение **следующих трех условий**:

1.функция $z = f(x,\ y)$ должна быть определена в окрестности (обычной, а не проколотой, как в случае определения предела) точки $M_0(x_0,\ y_0)$;

2.функция $z = f(x,\ y)$ должна иметь предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ в точке $M_0(x_0,\ y_0)$;

3.предел функции $z = f(x,\ y)$ в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ должен быть равен значению функции в этой точке.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторого множества, называется непрерывной на этом множестве.

Точки, в которых непрерывность функции нарушается, называются точками разрыва этой функции.

Определение непрерывной функции можно переписать и в другом, эквивалентном приведенному выше виде. Обозначим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = f(x,\ y) - f(x_0,\ y_0)$. Величины Δx и Δy называются приращениями аргументов x и y, а величина Δz – полным приращением функции $z = f(x,\ y)$ в точке $M_0(x_0,\ y_0)$.

Пусть функция $z = f(x,\ y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,\ y_0)$ и приращения Δx и Δy таковы, что точка $N(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ не выходит за пределы указанной окрестности.

Определение. Функция $z = f(x,\ y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0,\ y_0)$, если выполняется равенство: $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$,

т. е. полное приращение функции в этой точке стремится к нулю, когда приращения ее аргументов стремятся к нулю.

Поскольку непрерывность в точке для функции нескольких переменных определяется так же, как и в случае функции одной переменной, то локальные свойства непрерывной функции нескольких переменных аналогичны соответствующим свойствам функции одной переменной.

Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных

Поскольку переменные x и y, являющиеся аргументами функции $z = f(x,\ y)$, независимы, то одна из них может изменяться, а другая – оставаться фиксированной. Пусть функция $z = f(x,\ y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,\ y_0)$. Если мы припишем y постоянное значение y_0 и будем изменять x, то z будет являться функцией от одной переменной x. Придадим значению x_0 приращение Δx, тогда функция z получит приращение, которое называется частным приращением z по x в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ и обозначается $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0).$$

Аналогично определяется частное приращение z по y в точке $M_0(x_0,\ y_0)$:

$$\Delta_y z = f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0).$$

Определение. Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных в фиксированной точке называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции двух переменных $z = f(x,\ y)$ частные производные по x и по y в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ определяются соответственно формулами:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = f'_x(x_0,\ y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta x},$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} = f'_y(x_0,\ y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\ y_0+\Delta y) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta y}.$$

Частная производная функции $\boldsymbol{z = f(x,\ y)}$ по переменной x выражает скорость изменения функции в данном направлении $(\boldsymbol{y = y_0})$, или скорость изменения функции $\boldsymbol{\phi = f(x,\ y_0)}$ одной переменной x.

Пример. Найти частные производные функции $z = x^2 + 2xy + y^3$, а также их значения в точке $M_0(4,\ 1)$.

Решение. Считая y постоянной и дифференцируя функцию по x, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y + 0 = 2(x + y).$$

Считая x постоянной и дифференцируя функцию по y, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2x + 3y^2 = 2x + 3y^2.$$

Значения частных производных в точке $M_0(4,\ 1)$, т. е. при $x = 4,\ y = 1$, равны

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = 2(4 + 1) = 10, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1^2 = 11.$$

Частные производные функции нескольких переменных называют также частными производными первого порядка (или первыми частными производными). Их также можно рассматривать как функции нескольких переменных.

Частными производными второго порядка (или вторыми частными производными) данной функции называются соответствующие частные производные от ее первых частных производных. Для функции $z = f(x,\ y)$ по определению имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = [f_x'(x,\ y)]_x' = f_{xx}''$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = [f_y'(x,\ y)]_y' = f_{yy}''$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = [f_x'(x,\ y)]_y' = f_{xy}''$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = [f_y'(x,\ y)]_x' = f_{yx}''$$

Производные f_{xy}'' и f_{yx}'' называются смешанными частными производными.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^3 + 4x^2y - 6xy^2 + y^3$.

Решение. Найдем сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 8xy - 6y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 - 12xy + 3y^2.$$

Отсюда по определению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 8xy - 6y^2) = 6x + 8y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 8xy - 6y^2) = 8x - 12y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4x^2 - 12xy + 3y^2) = 8x - 12y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^2 - 12xy + 3y^2) = -12x + 6y.$$

Полный дифференциал функции равен сумме произведений частных производных первого порядка на соответствующие дифференциалы независимых переменных.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Пример. Найти dz, если $z = ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{x^2+y^2},$$

откуда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}.$$

Дифференцирование сложных и неявных функций

Пусть $z = f(x,\ y)$ – функция двух переменных x и y, каждая из которых является функцией независимой переменной t: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Тогда функция $z = f(x(t),\ y(t))$ – сложная функция одной независимой переменной t, а переменные x и y называются промежуточными переменными.

Теорема. Если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы в точке t_0, а функция $z = f(x,\ y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,\ y_0)$, где $x_0 = x(t_0)$,

$y_0 = y(t_0)$, то сложная функция $z = f(x(t),\ y(t))$ дифференцируема в точке t_0 и в этой точке производная вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \qquad (22)$$

Общий случай рассмотрим: Пусть теперь x и y являются функциями двух переменных u и v: $x = x(u,\ v)$, $y = y(u,\ v)$. Тогда функция $z = f(x(u,\ v),\ y(u,\ v))$ является сложной функцией двух независимых переменных u и v. Если функции $x = x(u,\ v)$ и $y = y(u,\ v)$ дифференцируемы в точке $N_0(u_0,\ v_0)$, а функция $z = f(x,\ y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,\ y_0)$, где $x_0 = x(u_0,\ v_0)$, $y_0 = y(u_0,\ v_0)$, то в точке $N_0(u_0,\ v_0)$ существуют частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = f(x(u,\ v),\ y(u,\ v))$ и

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (23)$$

Формулы (23) следуют из формулы (22), поскольку зафиксировав одну из переменных u или v, мы оказываемся в условиях **теоремы**: сложная функция $z = f(x(u,\ v),\ y(u,\ v))$ будет являться функцией одной переменной.

Частная производная сложной функции (z) по каждой независимой переменной (u или v) равна сумме произведений частных производных этой функции (z) по ее промежуточным переменным (x и y) и их частных производных по соответствующей независимой переменной (u или v).

Формулы (23) можно обобщить на случай функций любого конечного числа переменных.

Пример. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^4 + 2xy - y^3$, $x = sin\,2\,t$, $y = \mathrm{arctg}t$.

Решение. Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 3y^2, \quad \frac{dx}{dt} = 2\,cos\,2\,t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2},$$

откуда

$$\frac{dz}{dt} = 4(2x^3 + y)\,cos\,2\,t + \frac{2x - 3y^2}{1+t^2}.$$

Пример. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^3 + y^3$, $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.

Решение. Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = v, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{v}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = u, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{u}{v^2},$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = 3x^2 v + 3y^2 \cdot \frac{1}{v} = 3u^2 v^3 + 3\frac{u^2}{v^2} \cdot \frac{1}{v} = 3u^2\left(v^3 + \frac{1}{v^3}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = 3x^2 u - 3y^2 \cdot \frac{u}{v^2} = 3u^2 v^2 u - 3\frac{u^2}{v^2} \cdot \frac{u}{v^2} = 3u^3\left(v^2 - \frac{1}{v^4}\right).$$

Функция z от n переменных $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ называется неявной, если она задана уравнением

$$F(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ z) = 0, \qquad (24)$$

не разрешенным относительно z.

Если функция F и ее частные производные $F'_{x_1},\ F'_{x_2},\ \dots,\ F'_{x_n},\ F'_z$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0,\ z_0)$, причем $F(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0,\ z_0)=0$, а $F'_z(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0,\ z_0)\neq 0$, то существует окрестность точки $(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0)$, в которой уравнение (7.6) определяет единственную непрерывную и дифференцируемую функцию $z=z(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ такую, что $z(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0)=z_0$ и

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=-\frac{F'_{x_i}}{F'_z},\qquad i=1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

В частности, если **<u>z – функция одной переменной x</u>**, то

$$z'=\frac{dz}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_z};$$

если **<u>z – функция двух переменных x и y</u>**, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Пример. Найти частные производные функции z, заданной уравнением $e^z+z-x^5y+2=0$.

Решение. Здесь $F(x,\ y,\ z)=e^z+z-x^5y+2$, $F'_x=-5x^4y$, $F'_y=-x^5$, $F'_z=e^z+1$, откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{5x^4y}{e^z+1},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^5}{e^z+1}.$$

Экстремумы функции нескольких переменных

Понятие максимума, минимума, экстремума функции 2-х переменных аналогичны соответствующим понятиям функции одной независимой переменной.

Определение: Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,\ y_0)$. Если для всех точек $(x,\ y)$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x,\ y)\geq f(x_0,\ y_0)$ $(f(x,\ y)\leq f(x_0,\ y_0))$, то M_0 **называется точкой минимума (максимума) функции** $z=f(x,y)$. **Точки минимума и максимума называются точками экстремума, а значения функции в них – экстремумами функции.**

Отметим, что, как и в случае функции одной переменной, точки минимума и максимума функции $z=f(x,y)$ имеют локальный характер: значение функции в точке M_0 сравнивается с ее значениями в точках, достаточно близких к M_0.

Теорема (необходимое условие экстремума). В точке экстремума дифференцируемой функции все ее первые частные производные равны нулю, т. е. $f'_x(x_0,\ y_0)=f'_y(x_0,\ y_0)=0$.

Доказательство. Пусть $M_0(x_0,\ y_0)$ – точка максимума функции $z=f(x,y)$. Тогда в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x,\ y)\leq f(x_0,\ y_0)$ и, в частности, неравенство $f(x,\ y_0)\leq f(x_0,\ y_0)$. Это означает, что x_0 – точка максимума функции одной переменной $\phi(x)=f(x,\ y_0)$.

Следовательно, согласно необходимому условию экстремума функции одной переменной производная функции φ в точке x_0 равна нулю, т. е. $f'_x(x_0,\ y_0) = 0$. Аналогично устанавливается, что $f'_y(x_0,\ y_0) = 0$.

Определение: Точка $M(x,\ y)$, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x,y)$ равны нулю, т. е. $f'_x(x,\ y) = f'_y(x,\ y) = 0$, называется **стационарной точкой**. Стационарные точки и точки, в которых не существует хотя бы одна частная производная, называются критическими точками или точками, подозрительными на экстремум.

В критических точках функция может иметь, или не иметь экстремум. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума.

Например, для функции $f(x,\ y) = xy$ в точке $O(0,\ 0)$ имеют место равенства $f'_x(0,\ 0) = 0$, $f'_y(0,\ 0) = 0$, однако точка $O(0,\ 0)$ не является точкой экстремума функции, поскольку в любой окрестности этой точки имеются точки $A(\varepsilon,\ \varepsilon)$ и $B(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ такие, что $f(A) = \varepsilon^2 > 0 = f(O)$ и $f(B) = -\varepsilon^2 < 0 = f(O)$.

Теорема. (достаточное условие экстремума). Пусть $M_0(x_0,\ y_0)$ – стационарная точка, т. е. точка, в которой $df(x_0,\ y_0) = 0$. Тогда:

1) если $d^2f(x_0,\ y_0) < 0$, то $M_0(x_0,\ y_0)$ – точка максимума;
2) если $d^2f(x_0,\ y_0) > 0$, то $M_0(x_0,\ y_0)$ – точка минимума.

Эти условия можно переписать в следующем эквивалентном виде.

Пусть $A = f{'}'_{xx_{0_0}}$ $B = f{'}'_{xy_{0_0}}$ $C = f{'}'_{yy_{0_0}}$ $\Delta = AC - B^2$. Тогда:

1) если $\Delta > 0$ и $A < 0$, то $M_0(x_0,\ y_0)$ – точка максимума;
2) если $\Delta > 0$ и $A > 0$, то $M_0(x_0,\ y_0)$ – точка минимума;
3) если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ экстремума нет.

В случае $d^2f(x_0,\ y_0) = 0$ $(\Delta = 0)$ экстремум в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ может быть, а может и не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Пример. Найти экстремум функции

$$f(x,\ y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 8.$$

Решение. Сначала найдем стационарные точки. Поскольку

$$f'_x = 2x - 2, \quad f'_y = 2y + 4,$$

то, решая систему

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 2y + 4 = 0, \end{cases}$$

получим одну стационарную точку $M_0(1,\ -2)$. Находим частные производные второго порядка: f''_{xx} , f''_{yx}, f''_{yy} Поскольку $\Delta = AC - B^2 = 4 > 0$, $A > 0$, то $M_0(1,\ -2)$ – точка минимума функции $f(x,\ y)$, причем $min\, f\ (x,\ y) = f(1,\ -2) = 3$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого и второго порядков

Дифференциальные уравнения первого порядка

В математике дифференциальные уравнения занимают особое место. Математическое исследование самых разнообразных явлений, происходящих в природе, часто приводит к решению таких уравнений, поскольку сами законы, которым подчиняется то или иное явление, записываются в виде дифференциальных уравнений.

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение относительно неизвестной функции и ее производных различных порядков. Порядок старшей производной, входящей в данное дифференциальное уравнение, называется порядком этого уравнения.

Дифференциальные уравнения можно разделить на **обыкновенные дифференциальные уравнения,** в которых неизвестные функции являются функциями одной переменной, и на **дифференциальные уравнения в частных производных,** в которых неизвестные функции являются функциями двух и большего числа переменных. Будем рассматриваться обыкновенные дифференциальные уравнения.

Примером обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка может служить уравнение

$$y' + \frac{2}{x} y = \sin x;$$

второго порядка – уравнение

$$y'' + 4y' + 14y = 0;$$

третьего порядка – уравнение

$$y''' + yy' = 0.$$

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$\boldsymbol{F(x, y, y') = 0,} \qquad (25)$$

связывающее независимую переменную x, искомую функцию y и ее производную $\boldsymbol{y'}$**.**

Если уравнение (25) можно разрешить относительно y', то его записывают в виде

$$y' = f(x, y) \qquad (26)$$

и называют дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной. В некоторых случаях уравнение (26) удобно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

или

$$dy - f(x,y)dx = 0.$$

Последнее уравнение является частным случаем уравнения в дифференциальной форме вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (27)$$

где переменные x и y играют равноправную роль.

Уравнение $y' = f(x,y)$ устанавливает связь между координатами точки (x,y) и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, уравнение $y' = f(x,y)$ дает совокупность направление на плоскости оху – это геометрическое толкование ДУ 1 порядка.

Пример. Дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{x}{y}$$

является разрешенным относительно производной. Его можно записать в виде $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ или $xdx + ydy = 0.$

Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется его **интегрированием**, а график решения дифференциального уравнения – **интегральной кривой**. Интегральные кривые обладают тем свойством, что в каждой их точке $M(x,y)$ угол α наклона касательной удовлетворяет условию $\mathrm{tg}\,\alpha = f(x,y).$

Теорема. (о существовании и единственности решения) Если в уравнении (26) функция $f(x,y)$ определена в некоторой области G плоскости Oxy и удовлетворяет в ней двум условиям:

1) $f(x,y)$ непрерывна в области G;

2) $f(x,y)$ имеет в области G ограниченную частную производную по аргументу y, т. е.

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le K,$$

где K – некоторое постоянное положительное число, то какова бы ни была точка $M_0(x_0, y_0)$ области G, найдется интервал $(x_0 - h, x_0 + h),$ на котором существует единственное решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условию

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \qquad (28)$$

Замечание. Здесь под областью понимается множество точек плоскости Oxy, обладающее следующими свойствами:

1) каждая точка области принадлежит ей вместе с некоторой окрестностью этой точки (свойство открытости);

2) любые две точки области можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в этой области (свойство связности).

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что при выполнении ее условий через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ области G проходит единственная интегральная кривая.

Условие (28) называется начальным условием и обычно записывается в виде

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{или} \quad y\big|_{x=x_0} = y_0.$$

Отыскание решения уравнения (26), удовлетворяющего заданному начальному условию, является одной из важнейших задач теории дифференциальных уравнений. Эта задача называется **задачей Коши**.

С геометрической точки зрения решить задачу Коши – значит из множества интегральных кривых выделить ту, которая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости Oxy.

Определение. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка в некоторой области G плоскости $\boldsymbol{Oxy}$ называется функция $\boldsymbol{y = \varphi(x, C)},$ зависящая от x и произвольной постоянной C, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\boldsymbol{y = \varphi(x, C)}$ является решением рассматриваемого дифференциального уравнения при каждом фиксированном значении постоянной C;

2) каково бы ни было начальное условие (28), где $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0) \in G},$ можно найти такое значение постоянной $\boldsymbol{C = C_0},$ что функция $\boldsymbol{y = \varphi(x, C_0)}$ удовлетворяет данному начальному условию.

<u>Определение</u>. Частным решением дифференциального уравнения первого порядка в некоторой области G плоскости $\boldsymbol{Oxy}$ называется функция $\boldsymbol{y = \varphi(x, C_0)},$ которая получается из общего решения $\boldsymbol{y = \varphi(x, C)}$ этого уравнения при фиксированном значении произвольной постоянной $\boldsymbol{C = C_0}$.

Геометрически общее решение $y = \varphi(x, C)$ представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости Oxy, а частное решение $y = \varphi(x, C_0)$ – одну интегральную кривую этого семейства, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

<u>Следует отметить</u>, что общего метода решения дифференциальных уравнений первого порядка не существует. Рассматривают лишь некоторые отдельные типы таких уравнений, для каждого из которых есть свой особый способ решения. В настоящем учебном пособии будут рассмотрены следующие основные типы дифференциальных уравнений первого порядка:

- уравнения с разделяющимися переменными;
- однородные дифференциальные уравнения;
- линейные дифференциальные уравнения;

Уравнения с разделяющимися переменными

Будем считать, что дифференциальное уравнение первого порядка задано в виде $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$,

Рассмотрим частный случай, а именно, когда функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ представляют собой произведения функции, зависящей только от x и функции, зависящей только от y, т. е. $P(x, y) = M_1(x)N_1(y)$, $Q(x, y) = M_2(x)N_2(y)$. В этом случае уравнение принимает вид

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \qquad (29)$$

Дифференциальное уравнение первого порядка называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно привести к виду (1.5), где $M_1(x)$, $M_2(x)$ – функции, зависящие только от x; а $N_1(y)$, $N_2(y)$ – функции, зависящие только от y.

Разделив почленно уравнение (29) на $N_1(y)M_2(x)$ в предположении, что $N_1(y)M_2(x) \neq 0$, получим уравнение

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (30)$$

Уравнение (30) называется уравнением с разделенными переменными: при dx находится функция только от x, а при dy – функция только от y. Взяв неопределенные интегралы от обеих частей этого уравнения, получим

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Этим равенством выражается общий интеграл уравнения (29).

Замечание. При почленном делении уравнения (29) на выражение $N_1(y)M_2(x)$ могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0).$$

Решение. Приведем уравнение к виду $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, откуда

$$xdx + ydy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделенными переменными. Взяв неопределенные интегралы от обеих частей этого уравнения, имеем

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C,$$

или $x^2 + y^2 = 2C$ – общий интеграл дифференциального уравнения (семейство окружностей с центром в начале координат).

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

Решение. Приведем уравнение к виду $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, откуда

$$ydx + xdy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными вида (29), где $M_1(x) = 1,\quad N_1(y) = y,\quad M_2(x) = x,\quad N_2(y) = 1.$ Разделив обе части этого уравнения на $N_1(y)M_2(x) = yx \neq 0,$ имеем

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Проинтегрировав, получим

$$\ln|x| + \ln|y| = C_1.$$

Постоянную C_1 можно записать в виде $C_1 = \ln|C|\ \ (C \neq 0),$ поскольку любое число может быть представлено как логарифм другого, положительного числа. Таким образом,

$$\ln|x| + \ln|y| = \ln|C|,$$

откуда $y = \dfrac{C}{x}\ \ (C \neq 0)$ – общее решение дифференциального уравнения (семейство гипербол).

При разделении переменных было потеряно решение $y = 0,$ которое может быть получено из общего решения при $C = 0.$ Поэтому окончательно получаем, что общим решением дифференциального уравнения является $y = \dfrac{C}{x},$ где $C \in \boldsymbol{R}.$

Рассмотрим несколько задач, приводящих к дифференциальным уравнениям первого порядка с разделяющимися переменными.

Однородные дифференциальные уравнения

Функция $F(x, y)$ называется однородной степени n, если при любом $t \in \boldsymbol{R}$ имеет место равенство, (т.е. если при умножении каждого ее аргумента на произ множитель t вся функция умножается на t^n

$$F(tx, ty) = t^n F(x, y).$$

Например, функция $F(x, y) = x + 2y$ является однородной функцией первой степени, а функция $F(x, y) = 2x^2 - 3xy - 5y^2$ является однородной функцией второй степени.

Определение: Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{31}$$

называется однородным, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одной и той же степени n, т. е. при любом $t \in \boldsymbol{R}$

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y), \quad Q(tx, ty) = t^n Q(x, y). \tag{32}$$

С помощью новой переменной $u = u(x),$ вводимой по формуле $u = \dfrac{y}{x},$

однородное дифференциальное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, положив в равенствах (32) $t = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, получаем

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n} P(x, y), \quad Q\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n} Q(x, y),$$

откуда

$$P(x, y) = x^n P\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad Q(x, y) = x^n Q\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Подставив эти выражения в уравнение (1.7), получим

$$x^n P\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + x^n Q\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0,$$

или

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + Q\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

Из равенства следует, что $y = ux$ и $dy = udx + xdu$, в силу чего последнее уравнение примет вид

$$P(1, u)dx + Q(1, u)(udx + xdu) = 0,$$

или

$$[P(1, u) + uQ(1, u)]dx + xQ(1, u)du = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными x и u; найдя его общее решение (или общий интеграл), $\boxed{\text{следует заменить u на } \frac{y}{x}}$ для получения общего решения (интеграла) исходного уравнения.

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$(x + y)dx + xdy = 0.$$

Решение. Данное уравнение является однородным, поскольку $P(x, y) = x + y$ и $Q(x, y) = x$ – однородные функции первой степени.

Положим $u = \frac{y}{x}$, $u = u(x)$. Тогда $y = ux$ и $dy = udx + xdu$. Подставляем в исходное уравнение:

$$(x + ux)dx + x(udx + xdu) = 0,$$

$$xdx + 2xudx + x^2 du = 0,$$

$$x(1 + 2u)dx + x^2 du = 0.$$

Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Делим на $(1 + 2u)x^2 \neq 0$:

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{1 + 2u} = 0,$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{du}{1+2u}=C_1,$$

$$\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|1+2u|=\frac{1}{2}\ln|C|,\quad \text{где}\ \ \frac{1}{2}\ln|C|=C_1,\ C\neq 0,$$

$$2\ln|x|+\ln|1+2u|=\ln|C|,$$

$$x^2(1+2u)=C.$$

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получаем $x^2\left(1+2\cdot\frac{y}{x}\right)=C$, или $x^2+2xy=C$ – общий интеграл исходного уравнения, откуда $y=\frac{C}{2x}-\frac{x}{2}$ – общее решение исходного уравнения.

В процессе решения мы полагали $(1+2u)x^2\neq 0.$ Если $1+2u=0,$ то $y=-\frac{x}{2}.$ Обе функции $y=-\frac{x}{2}$ и $x=0$ являются решениями исходного уравнения, причем первое решение находится из общего при $C=0.$ Таким образом, ответ задачи

$$y=\frac{C}{2x}-\frac{x}{2},\ C\in\boldsymbol{R},\quad x=0.$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}\quad (x\neq 0).$$

Решение. Поскольку $y'=\frac{dy}{dx},$ имеем

$$x\frac{dy}{dx}=y-xe^{\frac{y}{x}},$$

$$(xe^{\frac{y}{x}}-y)dx+xdy=0.$$

Полученное уравнение является однородным, так как $P(x,y)=xe^{\frac{y}{x}}-y$ и $Q(x,y)=x$ – однородные функции первой степени.

Положим $u=\frac{y}{x},\ u=u(x).$ Тогда $y=ux,\ dy=udx+xdu,$

$$(xe^u-ux)dx+x(udx+xdu)=0,$$

$$xe^u dx+x^2du=0.$$

Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Делим на $e^u x^2\neq 0$:

$$\frac{dx}{x}+\frac{du}{e^u}=0,$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int e^{-u}du=C,$$

$$\ln|x|-e^{-u}=C.$$

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получаем $\ln|x| - e^{-\frac{y}{x}} = C \quad (C \in \boldsymbol{R})$ – общий интеграл исходного уравнения.

Линейные дифференциальные уравнения.

Определение: Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \tag{33}$$

где $y = y(x)$ – искомая функция; $a(x), b(x), c(x)$ – заданные функции. Если $a(x) \neq 0$ на некотором промежутке I, то уравнение (8.10) можно переписать в приведенном виде

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{34}$$

Будем предполагать, что функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на промежутке I.

Уравнение (34) сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными путем следующего приема.

Метод Бернулли

Заменим функцию у произведением двух функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$:

$$y = uv.$$

Одной из них можно распорядиться совершенно произвольно, в то время как вторая должна быть определена таким образом, чтобы произведение uv удовлетворяло заданному дифференциальному уравнению.

Поскольку $y' = u'v + uv'$, то подстановка выражений для y и y' в уравнение (34) приводит его к виду

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

или

$$u'v + u[v' + p(x)v] = q(x).$$

Выберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в квадратных скобках было равно нулю, т. е. решим дифференциальное уравнение

$$v' + p(x)v = 0. \tag{35}$$

Имеем:

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0,$$

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx,$$

$$\ln|v| = -\int p(x)dx + C.$$

В силу произвольности выбора функции v можно положить $C = 0$. Тогда

$$v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Для нахождения функции u имеем с учетом (35) уравнение

$$u'v = q(x).$$

Подставляя найденную функцию v в это уравнение, получаем:

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$\frac{du}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

$$u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right). \qquad (36)$$

Непрерывность коэффициентов уравнения гарантирует существование всех указанных интегралов.

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$xy' + 2y = x^2.$$

Решение. Рассматриваемое уравнение является линейным: $a(x) = x$, $b(x) = 2$, $c(x) = x^2$. Полагаем $y = uv$. Тогда $y' = u'v + uv'$,

$$x(u'v + uv') + 2uv = x^2,$$

$$xu'v + u(xv' + 2v) = x^2.$$

Выберем функцию v так, чтобы $xv' + 2v = 0$. Имеем:

$$x\frac{dv}{dx} = -2v,$$

$$\frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -2\ln|x| + C.$$

Положив $C = 0$, получим $v = \frac{1}{x^2}$. Подставляя функцию $v = \frac{1}{x^2}$ в уравнение $xu'v = x^2$, имеем:

$$x \cdot \frac{1}{x^2}u' = x^2,$$

$$\frac{du}{dx} = x^3,$$

$$u = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C,$$

откуда $y = uv = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{4} + C\right) = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2} \quad (C \in \boldsymbol{R}).$

Дифференциальные уравнения второго порядка

Определение. Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$\boldsymbol{F(x,\, y,\, y',\, y'') = 0,} \tag{37}$$

связывающее независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные $\boldsymbol{y'}$ и $\boldsymbol{y''}$**.**

Обычно изучают уравнения, которые могут быть разрешены относительно второй производной:

$$y'' = f(x,\, y,\, y'). \tag{38}$$

Так же как и для дифференциального уравнения первого порядка, определенная на промежутке I функция $y = \varphi(x)$ называется решением уравнения (37) (или (38)), если она дважды дифференцируема во всех точках $x \in I$ и при подстановке в данное уравнение обращает его в тождество. **График решения дифференциального уравнения второго порядка называется интегральной кривой**.

Для уравнения второго порядка имеет место теорема существования и единственности решения, аналогичная соответствующей теореме для уравнения первого порядка.

Теорема 2.1. Если в уравнении (38) функция $f(x,\, y,\, y')$:

1) непрерывна по всем своим аргументам в некоторой области G их изменения;

2) имеет в области G ограниченные частные производные по аргументам y и y', т. е.

$$\left|\frac{\partial f(x,\, y,\, y')}{\partial y}\right| \le K, \quad \left|\frac{\partial f(x,\, y,\, y')}{\partial y'}\right| \le K_1,$$

где K и K_1 – некоторые постоянные положительные числа, то какова бы ни была точка $M_0(x_0,\, y_0,\, y_0')$ области G, найдется интервал $(x_0 - h,\, x_0 + h)$, на котором существует единственное решение уравнения (38), удовлетворяющее условиям

$$y = y_0, \quad y' = y_0' \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{39}$$

Общим решением дифференциального уравнения (37) в некоторой области G изменения переменных x, y и y' называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, зависящая от x и двух произвольных постоянных C_1, C_2, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ является решением рассматриваемого дифференциального уравнения при любых фиксированных значениях произвольных постоянных C_1 и C_2;

2) каковы бы ни были начальные условия (39), где $M_0(x_0,\, y_0,\, y_0') \in G$, существуют такие значения постоянных $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ удовлетворяет данным начальным условиям.

Всякое решение $y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0)$ уравнения (37), полученное из общего решения $y=\varphi(x,C_1,C_2)$ при фиксированных значениях произвольных постоянных $C_1=C_1^0$ и $C_2=C_2^0$, называется **частным решением** данного уравнения.

Если общее решение уравнения (37) задано в неявном виде

$$\Phi(x,y,C_1,C_2)=0,$$

то оно называется **общим интегралом** этого уравнения. Соотношение $\Phi(x,y,C_1^0,C_2^0)=0$, полученное из общего интеграла путем фиксирования значений постоянных C_1 и C_2, называется **частным интегралом** дифференциального уравнения (37).

Геометрически общее решение представляет собой бесконечную совокупность интегральных кривых, зависящую от двух неизвестных параметров C_1 и C_2. Через каждую точку $M_0(x_0,y_0)$ плоскости Oxy проходит пучок интегральных кривых.

Как и в случае уравнения первого порядка, задача нахождения решения дифференциального уравнения (37), удовлетворяющего заданным начальным условиям (39), называется **задачей Коши**.

Рассмотрим**, например**, уравнение $y''=2$. Это уравнение второго порядка. Общее решение найдем двукратным последовательным интегрированием. Последовательно интегрируя, находим сначала первую производную $y'=2x+C_1$, а затем и общее решение $y=x^2+C_1x+C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Геометрически общее решение представляет собой семейство парабол, причем так как оно зависит от двух произвольных постоянных, то через каждую точку плоскости проходит бесконечное множество парабол, имеющих различные касательные в этой точке. Поэтому для выделения одной параболы из полученного семейства, кроме точки (x_0,y_0), через которую проходит парабола, нужно задать еще угловой коэффициент y_0' касательной к параболе в этой точке.

Зададим начальные условия $y=1$, $y'=1$ при $x=1$. Подставляя эти значения в выражения для общего решения $y=x^2+C_1x+C_2$ и его производной $y'=2x+C_1$, для определения C_1 и C_2 получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1=1+C_1+C_2, \\ 1=2+C_1, \end{cases}$$

откуда находим $C_1=-1$ и $C_2=1$. Следовательно, искомым частным решением является функция $y=x^2-x+1$, график которой – парабола, проходящая через точку $(1,1)$ с угловым коэффициентом в этой точке, равным единице.

К **простейшим интегрируемым дифференциальным уравнениям второго порядка** относятся уравнения, для которых функция, стоящая в правой части равенства (37), зависит только от одного из трех аргументов, т. е. уравнения вида

$$y'' = f(x), \tag{40}$$

$$y'' = f(y), \tag{41}$$

$$y'' = f(y'). \tag{42}$$

1. Общее решение уравнения $y'' = f(x)$, находится **двукратным интегрированием**:

$$dy' = f(x)dx,$$

$$y' = \int f(x)dx = F_1(x) + C_1,$$

$$dy = (F_1(x) + C_1)dx,$$

$$y = \int (F_1(x) + C_1)dx = F_2(x) + C_1x + C_2,$$

где $F_1'(x) = f(x),\ F_2'(x) = F_1(x),\ C_1$ и C_2 – произвольные постоянные.

2. Уравнение $y'' = f(y)$, с помощью подстановки

$$y' = p,$$

где $p = p(y)$ – новая неизвестная функция, сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно,

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot y' = \frac{dp}{dy} \cdot p,$$

$$p\frac{dp}{dy} = f(y),$$

$$pdp = f(y)dy.$$

Здесь роль независимой переменной играет переменная y.

3. Уравнение $y'' = f(y')$. с помощью подстановки

$$y' = p,$$

где $p = p(x)$ – новая неизвестная функция, также сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно,

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx},$$

$$\frac{dp}{dx} = f(p),$$

$$\frac{dp}{f(p)} = dx.$$

Пример. Найти решение дифференциального уравнения

$$2y'y'' = 1,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y = 0,\ y' = 2$ при $x = 1.$

Решение. Полагая $y' = p$, где $p = p(x)$, имеем $2p\dfrac{dp}{dx} = 1.$ Разделяя переменные, получаем

$$2pdp = dx,$$

откуда

$$p^2 = x + C_1.$$

Для определения постоянной C_1 используем начальное условие $p = y' = 1$ при $x = 1$. Имеем $1 = 1 + C_1$, откуда $C_1 = 0$. Следовательно, $p^2 = x$ и $\dfrac{dy}{dx} = p = \sqrt{x}$ (корень берем со знаком «+», так как при $x = 1 \quad p = 1$). Отсюда

$$dy = \sqrt{x}dx,$$

$$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_2.$$

С учетом условия $y = 0$ при $x = 1$, получаем $0 = \dfrac{2}{3} + C_2$, откуда $C_2 = -\dfrac{2}{3}$ и $y = \dfrac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} - 1).$

Укажем еще два случая, когда дифференциальное уравнение второго порядка (1.17) сводится к дифференциальному уравнению первого порядка.

I. Пусть правая часть уравнения (38) не содержит явно независимой переменной x, т. е. уравнение имеет вид

$$y'' = f(y, y').$$

Полагая $y' = p$, где $p = p(y)$, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

где роль независимой переменной играет переменная y.

II. Пусть правая часть уравнения (38) не содержит явно искомой функции y, т. е. уравнение имеет вид

$$y'' = f(x, y').$$

Полагая $y' = p$, где $p = p(x)$, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

с неизвестной функцией p.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$yy'' - (y')^2 = 0.$$

Решение. Данное уравнение не содержит явно независимой переменной x, поэтому полагаем $y' = p$, где $p = p(y)$. Имеем:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot y' = \frac{dp}{dy}\cdot p,$$

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0,$$

$$ypdp - p^2dy = 0,$$

$$\frac{dp}{p}-\frac{dy}{y}=0 \quad (yp^2\neq 0),$$
$$\ln|p|=\ln|y|+\ln|C_1| \quad (C_1\neq 0),$$
$$p=C_1y,$$
$$\frac{dy}{dx}=C_1y,\ \frac{dy}{y}=C_1dx,\ \ln|y|=C_1x+\ln|C_2| \quad (C_2\neq 0),\ \ y=C_2e^{C_1x}.$$

Решения $y=0$ и $y=C$ $(y'=0)$ получаются из общего решения при $C_2=0$ и $C_1=0$ соответственно. Таким образом, ответом задачи является $y=C_2e^{C_1x}$, где $C_1, C_2\in \boldsymbol{R}$.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

1.4.1. Элементы теории множеств и элементы комбинаторики

Элементы теории множеств

В математике под **множеством** понимается совокупность некоторых объектов, объединяемых по общим характеристическим свойствам и мыслимых в качестве единого.

Для обозначения множеств используются прописные буквы латинского алфавита A, B, C, …, X, Y, Z, или какого-либо другого по соглашению.

Элементами множества называются объекты, составляющие множество. Например, если множество представляет собой совокупность студентов-географов конкретной группы, то его элементами будут фамилии студентов. Для **обозначения элементов** используются строчные буквы того же алфавита, например, a, b, c, … x, y, z.

Тот факт, что «x является элементом множества M» записывается в виде x ∈ M. Это высказывание можно также прочесть следующим образом: «x принадлежит множеству M» или «x содержится в множестве M». Символ ∈ называется **символом принадлежности**. Он происходит от первой буквы греческого слова εστι – быть. Если «x не является элементом множества M», то пишут x ∉ M и читают, как «x не принадлежит множеству M», «x не содержится в множестве M».

Множество считается **заданным**, если о каждом объекте можно сказать принадлежит он этому множеству или нет. Например, совокупность студентов-географов на потоке является множеством, так как про каждого студента можно сказать числится он на данном потоке или нет.

Упражнение. Определить, какие из следующих совокупностей задают множества, а какие нет:

1. Совокупность лиц, работающих в БГУ, имеющих высшее образование,

2. Совокупность произведений искусства,
3. Совокупность красивых девушек в аудитории,
4. Совокупность студентов-геологов в университете,
5. Совокупность зрителей в кинотеатрах города Минска.

Возможны различные способы задания множества. Один из них состоит в том, что дается полный список элементов, входящих во множество.

Множество, состоящие из конечного числа элементов, называется **конечным множеством**. Конечное множество можно задать, перечисляя его элементы. Элементы, принадлежащие конечному множеству, записывают между двумя фигурными скобками и разделяют их запятыми.

Например, множество букв алфавита белорусского языка – {а, б, в,…я}; множество студентов данной учебной группы определяется их списком в зачетной ведомости – {Баранкина О.В., Иванов А.П., …, Петрова И.Н.}; множество всех стран на земном шаре – их списком в последнем издании географического атласа;

Но этот способ задания множеств, т.е. способ перечисления элементов множества, применим лишь к конечным множествам, да и то не ко всем. Например, множество рыб в океане конечно, однако задать их списком, перечислить их трудно.

Замечание. В дальнейшем, для удобства, будем давать словесное описание множества в кавычках, например, множество А – «множество студентов-геологов».

Если число элементов бесконечное, то множество называется **бесконечным**. Примерами бесконечных множеств являются множество натуральных чисел, множество сценариев развития исторических событий в будущем, множество точек на отрезке. К бесконечным множествам способ перечисления элементов множества вовсе не применим. Множество всех целых чисел таким способом задать нельзя!

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется **пустым множеством** и обозначается символом $\varnothing$. Пустое множество единственно и оно является конечным. Например, множество динозавров в зоопарке города Минска является пустым, так как не содержит ни одного элемента, множество электронных баз данных в 19 веке, множество действительных корней уравнения $x^2+1=0$ также являются пустыми.

Замечание. Символ для пустого множества только один, потому что пустое множество единственно.

В общем случае множество задается с помощью указания характеристических свойств его элементов, при этом используются фигурные скобки, а внутри них приводятся характеристические свойства, описывающие элементы множества (появляется строгое математическое описание). Так запись

{x: x обладает свойством P}

задает множество, содержащее только те объекты, которые имеют свойство P. Двоеточие в этой записи можно читать как «такой, что».

Таким образом, множества задают либо перечислением его элементов, либо описанием характеристического свойства множества, которое четко определяет совокупность его элементов.

Пример. Множество $A = \{2, 4, 6, \ldots\} = \{x: x$ – четное натуральное число$\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ или множество $B = \{x: x$ – натуральное число, такое, что $x < 6\}$.

Диаграммы Эйлера-Венна

Определение подмножества. Множество A называется подмножеством множества B, обозначается $A \subset B$ (или $B \supset A$), если каждый элемент множества A является элементом множества B.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

В этой символической записи использованы логические обозначения: символ $\forall$ – **квантор всеобщности** («для всех», «для любого»), знак $\Rightarrow$ — **импликация** (т. е. $X \Rightarrow Y$ означает: «если X, то Y», «в случае X выполняется Y»), наконец, логическая связка $\Leftrightarrow$ – **эквивалентность** («если и только если», ритуальное выражение «тогда и только тогда, когда»), называемая иногда «двойной импликацией».

Например, множество A – «множество студентов–геологов БГУ» является подмножеством множества B – «множество студентов ФГиГ БГУ», т. е. $A \subset B$, и если рассмотреть множество C – «множество студентов БГУ», тогда $A \subset B \subset C$.

Замечание. В число «подмножеств» непустого множества A удобно включить само A и пустое множество $\varnothing$, т. е.

$$A \subset A \text{ и } \varnothing \subset A.$$

Таким образом, всякое множество есть подмножество самого себя. Второе включение можно мотивировать исходя из следующего рассуждения. Если бы пустое множество $\varnothing$ не было подмножеством множества A, то оно содержало бы элемент принадлежащий $\varnothing$, но не принадлежащий A, а поскольку пустое множество не содержит элементов, то это невозможно.

Эти два подмножество, т. е. $\varnothing$ и A, называются **несобственными подмножествами** множества A. Остальные подмножества, если таковые есть, называются **собственными подмножествами** множества A. Например, множество гласных букв является собственным подмножеством множества букв русского алфавита.

Пример. Выпишем все подмножества заданных конечных множеств.

а) Подмножествами двухэлементного множества $\{1, 2\}$ являются четыре множества: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$;

б) Подмножествами трехэлементного множества $\{0, 1, 3\}$ являются восемь множеств: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{0, 1, 3\}$.

У конечного множества, состоящего из n элементов, будет ровно 2^n подмножеств, включая пустое и его самого.

Обычно все множества, с которыми имеют дело в математическом рассуждении, являются подмножествами некоторого фиксированного множества. Поэтому будем предполагать, что множества, рассматриваемые в рамках какой-либо теории, являются подмножествами одного множества, называемого **универсальным множеством**. Будем обозначать его через **U**.

Существует очень удобный прием наглядного изображения взаимоотношений между множествами, позволяющий иллюстрировать операции над ними, – это, так называемые, **диаграммы Эйлера–Венна**. Это графический способ изображения множеств в виде кругов, которым активно пользовались Леонард Эйлер, а затем и Джон Венн. Существует очень удобный приём наглядного изображения множеств и операций над ними. Множества в этих диаграммах чаще всего изображаются кругами, точнее их внутренностью и получаемыми из них фигурами, а прямоугольник изображает универсальное множество **U.** В диаграммах Эйлера-Венна не имеет значения относительный размер кругов, важно только их взаимное расположение.

На рис. 37 два множества A и B изображены кругами, причем видно, что множество A включено в множество B, т. е. $A \subset B$, и A – собственное подмножество множества B, которое не совпадает с ним.

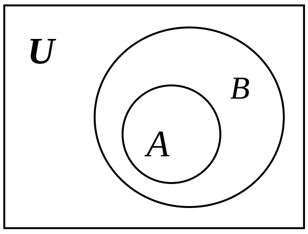


Рис. 37

Определение равенства множеств. Множества A и B **равны**, обозначается A = B, если все элементы множества A принадлежат также множеству B, а все элементы множества B принадлежат также множеству A:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A.$$

Согласно этому определению, A = B, если каждое из двух множеств есть подмножество другого множества, поэтому можно говорить, что множества A и B «состоят из одних и тех же элементов».

Пусть множество $X=\{2, 3\}$, а множество $Y = \{y\colon y^2 - 5\cdot y + 6 = 0\}$, тогда X = Y.

Определение неравенства множеств. Множества A и B **не равны**, обозначается $A \neq B$, если в одном из этих множеств есть хотя бы один элемент, которого нет в другом множестве.

Пример. Если $A = \{1,2,3\}$ и $B = \{1,2,4\}$, то множества A и B не равны, то есть $A \neq B$.

Замечание. Для неравных множеств не выполняется хотя бы одно из этих включений $A \subset B$, $B \subset A$.

Пример. Если $A = \{1,2\}$ и $B = \{1,2,4\}$, то $A \neq B$, так как множество B не является подмножеством множества A, то есть $B \not\subset A$.

Операции над множествами и их основные свойства

Над множествами можно производить различные операции, результатом которых будут являться новые множества. Задать операцию над множествами – это означает указать способ как по двум заданным множествам A и B строить третье.

Определение пересечения множеств. Пересечением двух множеств A и B, обозначается $A \cap B$, называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B:

$$A \cap B \overset{def}{=} \{x:\ x \in A \ \textbf{и} \ x \in B\}.$$

Символ «равенства с def, т.е. запись $\overset{def}{=}$ в этой формуле означает «равенство по определению», т. е. то, что стоит слева от этого символа, определяется через то, что стоит справа, а def — это сокращение от латинского слова definito — определение. Пересечение $A \cap B$ двух множеств A и B отражает степень близости этих множеств.

Примеры:

1. Пусть A – «множество студентов 1-го курса ФМО», а B – «множество девушек -логистов ФМО», то $A \cap B$ – «множество девушек–логисток 1-го курса ФМО»;
2. Пусть A – «множество нечетных чисел», а B – «множество двузначных чисел», то $A \cap B$ – «множество нечетных двузначных чисел»;

Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечение пусто, пишем $A \cap B = \varnothing$, и в таком случае говорят, что множества A и B **не пересекаются**. На рис.38 a),b) приведены диаграммы Эйлера–Венна для двух множеств A и B в случаях когда, соответственно $A \cap B \neq \varnothing$ и $A \subset B$. Множеству $A \cap B$ на этих рисунках соответствует заштрихованная часть диаграмм.

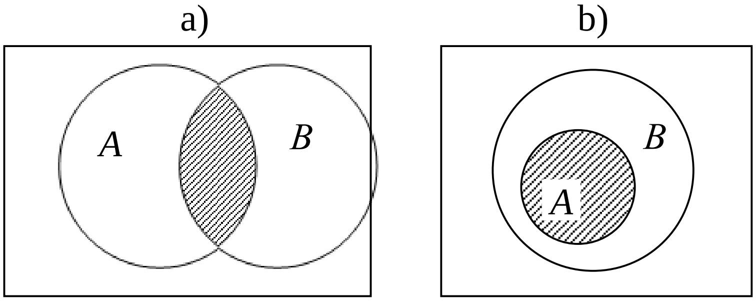


Рис. 38

Обратим внимание на то, что в описании пересечения множеств использована связка «и» вместе с символами принадлежности элемента «$\in$».

Операция пересечения множеств обладает рядом свойств, напоминающих свойства операции умножения чисел. Однако некоторые свойства пересечения множеств отличаются от соответствующих свойств умножения.

Если A подмножество множества B, т. е. $A \subset B$, то $A \cap B = A$ (см. рис.38 b)), поскольку общими для множеств A и B будут все элементы множества A, и только они.

Замечание. Отметим, свойства пересечения, справедливые для любых множеств А, В и С:

$$A \cap B \subset A \quad \text{и} \quad A \cap B \subset B.$$

Кроме того, из включения $A \subset B$ следует включение $A \cap C \subset B \cap C$. В частности, для любого множества А имеют место равенства:

$$A \cap \varnothing = \varnothing \text{ и } A \cap \mathbf{U} = A.$$

Также верно равенство $A \cap A = A$.

Замечание. Для любых двух множеств А и В выполняются **свойства коммутативности** операции пересечения:

$$A \cap B = B \cap A.$$

Коммутативный закон показывает, что можно как угодно менять порядок множеств в указанных операциях.

Замечание. Для любых трех множеств А, В и С выполняются **свойства ассоциативности** для операции пересечения:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Определение объединения множеств. Объединением двух множеств А и В, обозначается $A \cup B$, называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств А и В.

$$A \cup B \overset{def}{=} \{x\colon\ x \in A \ \textbf{или}\ x \in B\}.$$

Примеры:

1. Пусть А – «множество всех нечетных натуральных чисел», а В – «множество всех четных натуральных чисел», то $A \cup B$ – «множество всех натуральных чисел»;
2. Пусть А – «множество всех девушек, которые учатся на ФМО», а В – «множество всех юношей, которые учатся на ФМО», то $A \cup B$ – «множество всех студентов ФМО»;
3. Пусть $A=\{3,5,7\}$, $B=\{1,3,9\}$, $C=\{4,6\}$, тогда $A \cup B = \{1,3,5,7,9\}$; $A \cup C = \{3,4,5,6,7\}$.

Операция объединения множеств обладает рядом свойств, напоминающих свойства операции сложения чисел. Однако некоторые свойства объединения множеств отличаются от соответствующих свойств сложения чисел.

Если А подмножество множества В, т. е. $A \subset B$, то $A \cup B = B$, так как элементы из множества А принадлежат множеству В и второй раз включать их в объединение не надо.

На рис. 39 приведены диаграмма Эйлера–Венна для двух множеств А и В в случаях, когда $A \cap B \neq \varnothing$, когда $A \subset B$ и $A \cap B = \varnothing$. Множеству $A \cup B$ на рисунках соответствует заштрихованная часть диаграмм.

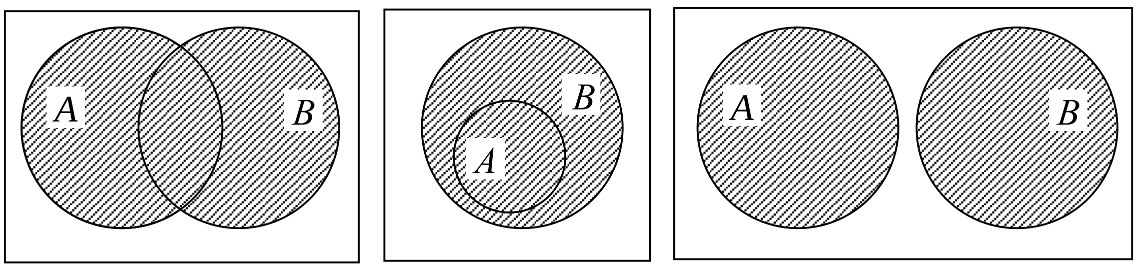


Рис. 39

Замечание. Отметим свойства объединения, справедливые для любых множеств A, B и C:

$$A \subset A \cup B \quad и \quad B \subset A \cup B.$$

Кроме того, из включения $A \subset B$ следует включение $A \cup C \subset B \cup C$. В частности, для любого множества A имеют место равенства:

$$A \cup \varnothing = A \text{ и } A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}.$$

Также верно равенство $A \cup A = A$.

Соотношение $A \cup B = \varnothing$ равносильно двум соотношениям $A = \varnothing$ и $B = \varnothing$.

Замечание. Для любых двух множеств A и B выполняются **свойства коммутативности** операции объединения:

$$A \cup B = B \cup A.$$

Замечание. Для любых трех множеств A, B и C выполняются **свойства ассоциативности** для операции объединения:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Замечание. При чередовании операций объединения и пересечения для любых трех множеств A, B, и C выполняются **свойства дистрибутивности** одной операции относительно другой:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Определение разности множеств. Разностью двух множеств A и B, обозначается $A \setminus B$ (или $A - B$), называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B:

$$A \setminus B \overset{def}{=} \{x:\ x \in A \ \textbf{и}\ x \notin B\}.$$

В определении разности множеств не предполагается, что множество B является подмножеством множества A.

Примеры:

1. Пусть A и B – «множества студентов специальности МЛ, изучающих английский и немецкий языки, соответственно», то $A \setminus B$ – «множество студентов специальности МЛ, которые изучают английский язык, но не изучают немецкий язык»;
2. Пусть $A=\{3,5,7\}$, $B=\{1,3,9\}$, $C=\{4,6\}$, тогда $A \setminus B =\{5,7\}$, $A \setminus C = \varnothing$;

Пусть $A = \{x: |x| \le 5\}$ и множество $B = \{x: x < 2\}$, то тогда разность $A \setminus B = \{x: 2 \le x \le 5\}$;

Замечание. Отметим свойство разности, справедливое для любых множеств A, B и C: $A \setminus B \subset A$. Кроме того, из включения $A \subset B$ следуют включения: $(A \setminus C) \subset (B \setminus C)$ и $(C \setminus B) \subset (C \setminus A)$. В частности, для любого множества A имеют место равенства: $A \setminus A = \varnothing$, $A \setminus \varnothing = A$ и $\varnothing \setminus A = \varnothing$.

Определение дополнения множеств. Если **U** — универсальное множество, содержащее множество А, то разность **U** \ А называется **дополнением** множества А и обозначается $\overline{A}$:

$$\overline{A} \overset{def}{=} \{x:\ x \in \mathbf{U}\ \textbf{и}\ x \notin A\} = \mathbf{U} \setminus A.$$

Заметим, что дополнение $\overline{A}$ множества А – это множество элементов фиксированного универсального множества **U**, не входящих в множество А.

Например, если **U** – множество всех действительных чисел **R**, то дополнением множества всех рациональных чисел будет множество всех иррациональных чисел.

Замечание. Отметим следующие свойства дополнения, справедливые для любого множества А и содержащего его универсального множества **U**:

$$A \cup \overline{A} = \mathbf{U} \quad \text{и} \quad A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

$$\overline{\overline{A}} = A \text{ – закон двойного дополнения, } \overline{\varnothing} = \mathbf{U},\ \overline{U} = \varnothing.$$

Замечание. Выделим также свойство дополнения для включения множеств, т. е. если $A \subset B$, то $\overline{B} \subset \overline{A}$ или $\mathbf{U} \setminus B \subset \mathbf{U} \setminus A$

Замечание. Разность множеств А и В можно выразить через пересечение множеств А и $\overline{B}$, а именно, $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, т. е. разность множеств А \ В есть пересечение множества А и дополнения множества В.

Элементы комбинаторики

Задачи, при решении которых приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и производить подсчет числа всех возможных таких комбинаций, относятся к разделу математики, который называется **комбинаторикой**. Этот раздел математики находит широкое применение в философии. Классической теории вероятностей предшествуют разделы комбинаторики.

Комбинаторный подсчет числа случаев, благоприятствующих тому или иному событию, служит хорошей психологической подготовкой к введению понятия вероятности. Лучший способ освоения комбинаторики – решение задач. О простых и типовых, но в тоже время важных, задачах пойдет речь ниже. Начнем с **основных принципов комбинаторики – принципа сложения и принципа умножения**, которые рассмотрим сначала на примерах.

Пример. Пусть в книжном магазине имеются 8 различных видов книг по «Логистике» и 5 различных книг по «Высшей математике». Сколькими способами можно выбрать в подарок книгу по « Логистике» или книгу по «Высшей математике»? Сколькими способами можно выбрать две книги, по «Высшей математике» и «Логистике»?

Ответ на первый вопрос очевиден. Книгу по «Логистике» можно выбрать 8 способами, по «Высшей математике» – 5 способами. Следовательно, книгу по «Логистике» или по «Высшей математике» можно выбрать 8+5=13 способами. Для ответа на второй вопрос заметим, что если мы выбираем две книги по «Высшей математике» и «Логистике», то к каждой из 8 различных книг по

«Логистике» можно подобрать книгу по «Высшей математике» 5 способами, а именно, к первой книге по «Логистике» подбираем 5 различных книг по «Высшей математике», ко второй книге по «Экономике» — опять 5 различных книг по «Высшей математике» и т.д. Таким образом, набор, состоящий из книги по «Высшей математике» и «Логистике» можно выбрать $5+5+5+5+5+5+5+5=8\cdot5=40$ способами.

На этом простейшем примере мы продемонстрировали применение принципов сложения и умножения. Отметим, что понятия теории множеств, как подмножество, объединение множеств, пересечение множеств, рассмотренные в первой главе, оказываются весьма полезными при решении комбинаторных задач. Сформулируем теперь основные принципы комбинаторики в общем виде.

Комбинаторный принцип сложения. Если множество A содержит n разных элементов, а множество B – m разных элементов и $A \cap B = \varnothing$, то множество $A \cup B$ содержит $n+m$ элементов.

Замечание. Если некоторый объект «A» можно выбрать n способами, а другой объект «B», отличный от «A», – m способами, то, согласно комбинаторному принципу сложения, объект «<u>A или B</u>» можно выбрать <u>n+m</u> способами.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий комбинаторный принцип умножения.

Пример. Из города Минска в Москву ведет n путей, а из города Москвы в город Орел ведет m путей. Скольким числом различных путей можно совершить путешествие из Минска в Орел через город Москву?

Выбрать один из n возможных путей из Минска в Москву, дальше можно продолжить путешествие m способами, поэтому общее число различных путей из города Минска в город Орел равно $n\cdot m$.

Комбинаторный принцип умножения. Если множество A содержит n различных элементов, т.е. $A = \{a_i : i=1,2,\ldots,n\}$, а множество B – m разных элементов, т.е. $B = \{b_j : j=1,2,\ldots,m\}$, то тогда множество C, составленное из всех возможных пар, т.е. $C = \{(a_i, b_j): i=1,2, \ldots, n; j=1,2, \ldots, m\}$, содержит $n\cdot m$ элементов.

Замечание. Если некоторый объект «A» можно выбрать n способами, а после каждого такого выбора другой объект «B» можно, независимо от выбора «A», выбрать m способами, то, согласно комбинаторному принципу умножения, объект «<u>A и B</u>» можно выбрать <u>n·m</u> способами.

Пример. Рассмотрим сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова ПРОЦЕНТ.

Гласную букву можно выбрать двумя способами (О или Е), а согласную — пятью способами (П, Р, Ц, Н или Т). Следовательно, согласно комбинаторному принципу умножения и в силу сделанного замечания, гласную и согласную буквы можно выбрать $2\cdot5=10$ способами.

Основные комбинаторные формулы для подсчета числа упорядоченных и неупорядоченных наборов

Решение комбинаторных задач часто приводит к понятиям перестановки, размещения и сочетания. Поэтому на начальном этапе знакомства с основами комбинаторики необходимо научиться определять вид соединения элементов конечного множества, а также подсчитать количество таких соединений.

Для построения соответствующих математических моделей комбинаторных задач будем использовать математический аппарат теории множеств. Если множество состоит из элементов a, b и c, то нам безразличен порядок, в котором указаны элементы, например:

$$\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{c, b, a\}.$$

Но есть задачи, в которых важен порядок следования элементов. При этом указывается, какой элемент считается первым, какой – вторым, какой – третьим и т.д.

Множество вместе с заданным в нем порядком расположения его элементов называют **упорядоченным множеством**.

Очевидно, что каждое множество, содержащее более одного элемента, можно упорядочить не единственным способом. Упорядоченные множества записывают, располагая по порядку их элементы в круглых скобках:

$$(a, b, c), (b, a, c), (c, b, a).$$

Например, из двух букв А и Б можно построить упорядоченное множество двумя различными способами:

(А, Б), (Б, А).

Три буквы А, Б и В можно расположить в виде последовательности уже шестью способами. Разумеется, когда мы говорим о последовательности, то имеем в виду упорядоченное множество элементов, так что перестановки элементов не допускаются. Например, АБ и БА – это разные последовательности. К каждой последовательности вида АБ и БА можно подставить букву В тремя различными способами: поставить его спереди, между буквами или сзади. Тогда из АБ получим: ВАБ, АВБ, АБВ, а из БА получим: ВБА, БВА и БАВ. Все получившиеся последовательности разные и их можно записать в виде следующих упорядоченных множеств:

(А,Б,В), (А,В,Б), (Б,А,В), (Б,В,А), (В, А, Б), (В,Б,А).

Определение перестановки. Установленный в конечном множестве порядок называют перестановкой его элементов.

Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком.

Замечание. Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов, т.е. могут быть получены из того же самого множества, называются перестановками этого множества.

Для сокращения записи произведения всех натуральных чисел от 1 до n в математики используется n-факториал, обозначают n! (читают «эн-факториал»), т.е.

$$\mathbf{n!} \overset{def}{=} \mathbf{1\cdot 2\cdot 3\cdot (n-1)\cdot n.}$$

Число всевозможных перестановок в множестве из n элементов обозначают P_n (P – первая буква французского слова permutation − перестановка). Читается: «Число перестановок из эн элементов» или «Пэ из эн».

Утверждение. Число перестановок P_n можно вычислить по формуле:

$$\boxed{P_n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!}$$

Пусть n = 2, тогда число перестановок из двух элементов равно 2 – на первое место поставили любой из двух, а на второе – оставшийся элемент. P_2= 2. Если n = 3, тогда число перестановок из трех элементов вычисляется следующим образом: на первое место ставим любой один из трех элементов, вариантов в этом случае 3, на второе – любой один из двух оставшихся, вариантов 2 и на третье место – последний элемент, вариант один. Таким образом, в силу комбинаторного принципа умножения число всех таких перестановок равно P_3= $3\cdot 2\cdot 1$= 3! = 6.

Пример. Сколько существует вариантов проведения собрания учебной группы, если количество выступающих на собрании – 4?

Решение. Так как на собрании должны выступать всего четыре оратора, то число способов расположения их в списке выступающих и, соответственно, число способов проведения собрания равно числу перестановок из 4 элементов – P_4, т.е. P_4 = 4! = $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$=24.

При помощи формулы для P_n получаем:

1!=1, 2!=2, 3!=6, 4!= 24, 5!= 120, 6!=720,
7!= 5040, 8!=740320, 9!= 362880, 10!= 3628800.

Принято считать, что **0!=1**.

Замечание. Если рассматривать перестановки n предметов, расположенных не в ряд, а по кругу, и считать одинаковыми расположения, переходящие друг в друга при вращении, то число различных перестановок равно P_{n-1} = (n–1)!

Перестановки букв некоторого слова называют **анаграммами**. Например, среди анаграмм слова КРОТ, которых всего P_4 = 4! = 24, только одна, не считая самого слова КРОТ, имеет смысл в русском языке: КОРТ. Анаграмм слова ПРОЕКТ будет P_6 = 6! = 720.

При решении задач иногда необходимо из n имеющихся различных объектов отобрать произвольные m штук ($m \le n$) и расположить их в некотором порядке. Сколько существует упорядоченных расположений при заданных числах n и m?

Например, пусть даны четыре буквы А, Б, В, Г. Требуется выделить из них две буквы и эти две буквы расположить в определенном порядке. Таких способов 12. Действительно, первую букву можно выбрать четырьмя способами, а вторую придется выбирать из оставшихся трех, следовательно, в силу комбинаторного принципа умножения, всего получается $4\cdot 3$=12 способов. Запишем их в виде упорядоченных множеств:

(А, Б), (А, В), (А, Г), (Б, А), (Б, В), (Б, Г),
(В, А), (В, Б), (В, Г), (Г, А), (Г, Б), (Г, В).

В общем случае имеем n различных элементов, выберем из них m элементов. При этом выборки могут отличаться или составом элементов, или их порядком. Посчитаем число таких упорядоченных выборок. На первое место можно поставить любой из n элементов, на второе место – любой из оставшихся (n–1) элементов и т.д., на m-ое место – любой из оставшихся (n – (m–1)) элементов. Следовательно, в силу комбинаторного принципа умножения всего получается n·(n–1)·…·(n–(m–1)) упорядоченных выборок из n элементов по m элементов.

Определение размещения. Конечные упорядоченные подмножества заданного множества называются **размещениями**.

Число всевозможных размещений из n элементов по m обозначают A_n^m (A – первая буква французского слова arrangement – размещение). Читается: «число размещений из эн элементов по эм» или «А из эн по эм».

Утверждение. Число размещений A_n^m, где m ≤ n, можно вычислить по формуле:

$$\boxed{A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}}$$

Из формулы числа размещений следует:

$$A_n^1 = n,\ A_n^2 = n\cdot(n-1),\ A_n^3 = n\cdot(n-1)\cdot(n-2),$$

$$A_3^2 = 3\cdot 2 = 6,\ A_4^3 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24,\ A_5^4 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120.$$

Принято считать, что $A_n^0 = 1$. Это верно, поскольку существует только одно пустое множество ∅ и можно считать, что оно может быть упорядочено одним–единственным образом. Кроме того, это логично: есть единственный способ не выбирать ни одного объекта из n имеющихся – «ничего не делать».

Замечание. Перестановки – это частный случай размещения при m=n, т.е. $A_n^n = P_n = n!$ Кроме того, для m = n–1 в формуле для числа размещений имеем $A_n^{n-1} = A_n^n = n!$

Последнее равенство справедливо, так как если из n различных объектов выбраны n–1 и расположены в некотором порядке, то на оставшееся место может претендовать только один оставшийся элемент, который можно и не выбирать, т.е. $A_n^{n-1} = A_n^n$.

Пример. Сколько существует в n–буквенном алфавите m–буквенных слов, состоящих из различных букв?

Решение. По формуле для количества размещений искомое число равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Например, из 33 букв русского алфавита можно составить двухбуквенных слов $A_{33}^2 = \frac{33!}{(33-2)!}$ = 33·32 = 1056, не содержащих повторений букв.

Пример. Студенту-геологу необходимо срочно до отчисления пересдать 3 зачета на протяжении 4 дней. Посчитать, сколько вариантов теоретически существует для дней сдачи этих зачетов.

Решение. Искомое число способов равно числу 3–элементных упорядоченных подмножеств, т.е. дни сдачи зачетов, 4–элементного множества. По формуле числа размещений это число равно A_4^3 = 24.

В некоторых задачах по комбинаторике не имеет значения порядок расположения объектов в той или иной совокупности. Важно лишь то, какие именно элементы ее составляют. Вот интересующий нас сейчас вопрос: сколькими способами можно выбрать из n различных предметов m штук (m ≤ n)?

Например, пусть из четырех корзин обозначенных буквами А, Б, В и Г нужно выбрать две. Сколькими способами это можно сделать? Свяжем этот пример с примером, рассмотренным выше, а именно выбранные корзины будем отмечать тем, что положим в них шары. Однако можно заметить, что каждый выбор пары корзин встречается в списке 12 соответствующих размещений дважды, например, АБ и БА. Сейчас для нас не существенно, какой шар, первым или второй оказался в корзине, или, другими словами, в каком порядке осуществлялся выбор корзин. Поскольку в нашем случае, т.е. перемен мест, двух выбранных корзин, т.е. перестановок, всего две, то две корзины из четырех можно выбрать 12:2=6 способами.

Определение сочетания. Конечные неупорядоченные подмножества заданного множества называют **сочетаниями**.

Отметим, что перестановки и размещения – это упорядоченные множества, а сочетание – это неупорядоченные множества. **Сочетания –** это такая выборка элементов, при которой их порядок совершенно не важен.

Число всевозможных сочетаний из n элементов по m обозначают C_n^m (С – первая буква французского слова combinaison – сочетание). Читается: «число сочетаний из эн элементов по эм» или «С из эн по эм».

Утверждение. Число сочетаний C_n^m , где m ≤ n, можно вычислить по формуле:

$$\boxed{C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$$

Формула числа сочетаний интересна уже тем, что дробь, стоящая в ее правой части, равна целому числу, т.е. все числа, стоящие в знаменателе, сократятся с числами, стоящими в числителе. В частности, из формулы числа сочетаний следует, что

$$C_n^1 = \text{n},\ C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2},\ C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

$$C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{2!} = 3,\ C_4^3 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!} = 4,\ C_5^4 = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4!} = 5.$$

Если в этой формуле для C_n^m положить m=0, то получим, что $C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!}$ = 1, поэтому принято считать, что C_n^0 = 1. Это равенство имеет содержательный смысл, состоящий в том, что есть только один способ не выбирать ни один элемент (или выбрать 0 элементов) из n- элементного множества. В частности, отметим, что C_n^0 = 1.

Замечание. Обратим внимание на своеобразную симметричность формулы для числа сочетаний: если заменить m на m–n, то получится то же самое выражение, только факториалы в знаменателе поменяются местами:

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\cdot(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = C_n^m.$$

Например, пусть в группе из n студентов-геологов надо выбрать m студентов для участия в студенческой факультетской конференции. Выбор m участников конференции равносилен выбору n–m студентов группы, не участвующих в конференции. Поэтому число способов, которым можно выбрать m человек из n, равно числу способов, которым можно выбрать n–m человек из n. Это означает, что C_n^m = C_n^{n-m} или непосредственно $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ = $\frac{n!}{(n-m)!(n-n+m)!}$.

В частности, C_5^0 = C_5^5 = 1, C_4^1 = C_4^3 = 4.

Пример. Посчитаем, сколькими способами можно выбрать трех человек на три одинаковые должности из десяти кандидатов?

Решение. Поскольку должности одинаковые, то порядок в каждой выборке из трех человек не имеет значения. По формуле для числа сочетаний искомое количество способов выбора на три одинаковые должности из десяти кандидатов

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot(7)!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120.$$

Большинство задач этого раздела содержит слова «сколько». Одна из причин, по которой мы затрудняемся ответить на вопросы, начинающиеся с этого слова, состоит в отсутствии универсальной схемы, с помощью которой на них можно было бы ответить. В этом разделе были рассмотрены некоторые общие формулы для подсчета вариантов, использованные при решении отдельных задач.

<u>При решении комбинаторных задач следует ответить на следующие вопросы:</u>

1. Из какого конкретного множества осуществляется выбор, т.е. надо найти n – число элементов этого множества.
2. Что требуется сделать: расставить все в ряд (перестановки), или выбрать часть упорядоченного подмножества?
3. Важен ли при выборе порядок? Если порядок важен, то применяем формулу для размещений, если порядок не важен – формулу для сочетаний.

Комбинаторика: Выбор с повторениями

Одна из важных особенностей комбинаторики заключается в том, что в ней большую роль играет точная формулировка задачи. Большинство ошибок связано с некорректными постановками задач из-за неопределенности формулировок. Когда речь идет о подсчете числа студентов в группе никакой неопределенности не возникает. Менее определенная ситуация возникает, когда посчитать нужно число вариантов или способов. Рассмотрим следующие **задачи**:

Пример. Сколько различных «слов» (анаграмм) можно составить из букв, входящих в слово АНКЕТА?

Решение. Слово АНКЕТА состоит из шести букв, которые можно переставить $P_6=6!$ способами. Однако заметим, что в данном слове буква А встречается два раза, и, меняя местами две буквы А, мы не получим новых слов. Так как две буквы А можно переставить $P_2=2!$ Способами, то все 6! перестановок букв, входящих в слово АНКЕТА, разбиваются на группы по 2! одинаковых перестановок в каждой группе. Количество таких групп равно $\frac{6!}{2!}$, значит, искомое число «слов» слова АНКЕТА равно: $\frac{P_6}{P_2} = \frac{6!}{2!} = \frac{(2!)\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2!} = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 360$.

Пример. Сколько различных «слов» (анаграмм) можно составить из букв, входящих в слово КАРАОКЕ.

Решение. Напомним, что комбинаторика позволяет считать словом любую комбинацию букв. Математики любят сводить новые задачи к уже решенным задачам. Для того чтобы воспользоваться способом подсчета числа перестановок, применим новый для нас **прием растождествления**. Он показывает, как можно переходить от одного понятия «различия» к другому. При точном понимании терминов, т.е. при соблюдении Главного правила комбинаторики, можно открыть дополнительные возможности решения комбинаторных задач. Слово «растождествление» вряд ли есть в словарях, но оно достаточно точно передает суть дела. Суть его в том, чтобы рассматривать одинаковые буквы слова как различные, например, с помощью их индексации.

После индексации букв слова КАРАОКЕ, в котором 2 буквы К, 2 буквы А и 1 буква О, 1 буква Е, 1 буква Р, получим 7=2+2+1+1+1 различных букв $К_1$, $А_1$, $Р_1$, $А_2$, $О_1$, $К_2$, $Е_1$. Из них можно составить $P_7 = 7!$ различных 7–буквенных слов, т.е. перестановок из 7 различных букв. Они образуют вспомогательный перечень.

Не трогая остальных букв и меняя местами лишь две буквы К всеми возможными способами, а их будет по числу перестановок из двух букв $К_1$, $К_2$, всего 2!, получим вроде бы новые перестановки, но без индексации букв они будут неразличимы. Поэтому общее число перестановок уменьшиться в 2! раз. Аналогичные рассуждения верны и для двух букв А, и лишь буквы О, Е и Р по одной. В итоге количество анаграмм слова КАРАОКЕ, без учета повторов слов пересчитанных с помощью комбинаторного принципа умножения, окажется равным числу $7!/(2!\cdot 2!) = 1260$. Чтобы не нарушать единообразия поделим указанное выражение на $1!=1$, соответствующее числу перестановок одной буквы О, Е и Р в указанных анаграммах, поскольку полученное число анаграмм принято записывать в виде

$$7!/(2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!) =1260.$$

Для того чтобы частный случай подсчета анаграмм не стал, как сказал бы Козьма Прутков «пустою забавою», рассмотрим эту задачу в более общей постановке.

Определение перестановок с повторениями. Перестановка элементов конечного набора, состоящего из n элементов таких, что элемент a_1 повторяется n_1 раз, элемент a_2 повторяется n_2 раз, …,элемент a_k повторяется n_k раз, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, называется **перестановкой с повторениями**.

Число всевозможных перестановок с повторениями, а именно, выборов n объектов $n_1, n_2, \ldots, n_k$ повторяющимися элементами, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, обозначают $\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots n_k}$. С помощью горизонтальной черты над буквой P отличают случай с повторениями от обычных перестановок. Читается: «Число перестановок с повторениями из эн-один, эн-два и т.д. до эн-ка» или «Пэ с чертой из эн-один, эн-два и т.д. до эн-ка».

Утверждение. Число перестановок с повторениями $\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots n_k}$, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, можно вычислить по формуле:

$$\boxed{\overline{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}}$$

С помощью формулы числа перестановок с повторениями число анаграмм слова КАРАОКЕ, подсчитанное выше, можно записать в виде

$$\overline{P}_{2,2,1,1,1} = 7!/(2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!) = 1260.$$

Пример. Сколько различных «слов» (анаграмм) можно составить из букв, входящих в слово МАТЕМАТИКА?

Решение. В слове МАТЕМАТИКА есть повторяющиеся буквы: две буквы М, три буквы А, две буквы Т, по одной букве Е, И, К. Следовательно, по формуле для числа перестановок с повторениями получим:

$$\overline{P}_{2,3.2,1,1,1} = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4} = 151200.$$

Таким образом, из букв, входящих в слово МАТЕМАТИКА, можно составить 151200 «слов».

Далее дадим обобщение понятия размещения, а именно рассмотрим задачи, решения которых приводят к понятию размещения с повторениями.

Пример. Сколько двухбуквенных «слов» можно составить из 33 букв алфавита русского языка?

Решение. Двухбуквенное «слово» может быть составлено либо из двух различных букв, либо из двух одинаковых букв. На первое место мы можем поставить любую из 33 букв алфавита русского языка. Независимо от этого, на второе место опять можно поставить любую из 33 букв. Значит, по комбинаторному принципу умножения количество двухбуквенных слов будет равно $33\cdot 33=33^2$.

Определение размещений с повторениями. Упорядоченный набор элементов, содержащий m элементов из данных n, причем один и тот же элемент может повторяться не более m раз, называется **размещениями с повторениями**.

Число всевозможных размещений с повторениями, а именно, выборов m объектов из повторяющихся n элементов, обозначают $\overline{A_n^m}$. С помощью горизонтальной черты над буквой А отличают случай с повторениями от обычных размещений. Читается: «Число размещений с повторениями из эн по эм» или «А с чертой из эн по эм». Первое название излишне длинное и «торжественное», но в ясности ему не откажешь.

Утверждение. Число размещений с повторениями $\overline{A_n^m}$ можно вычислить по формуле:

$$\boxed{\overline{A_n^m} = n^m}$$

Пример. Сколько существует пятизначных натуральных чисел, в записи которых используются цифры 1, 2, 3?

Решение. По условию задачи даны три цифры, из которых составляются пятизначные натуральные числа, значит, n=3. Заметим также, что цифры в записи числа будут повторяться. Пятизначное число представляет собой упорядоченный набор из пяти элементов-цифр, поэтому m=5. Тогда по формуле для числа размещений с повторениями количество пятизначных натуральных чисел, в записи которых используются цифры 1, 2 ,3 равно $\overline{A_3^5} = 3^5 = 243$.

Замечание. Обратим внимание на то, что в формуле числа размещений с повторениями $\overline{A_n^k} = n^k$ допустим случай, когда k > n.

Например, число размещений с повторениями четырехбуквенных слов, составленных из алфавита, содержащего всего две буквы А и М, равно $\overline{A_2^4} = 2^4 = 16$. Среди этих размещений с повторениями есть, например, слова: АААА, АААМ, АММА, МАМА, МААМ, МААА, ММММ.

Пример. Шестизначный велосипедный номер считается «счастливым» если в нем нет ни одной цифры 8, поскольку «восьмерка» — один из дефектов велосипедного колеса. Посчитаем, каких номеров больше «счастливых» или «несчастливых».

Решение. На первый взгляд кажется, что поскольку 8 — это лишь одна цифра из десяти возможных, то счастливых номеров должно быть в несколько раз больше. Счастливый номер — это шестибуквенное слово в «алфавите», содержащем девять цифр, т.е. все цифры, кроме восьмерки: 0,1,2,3,4,5,6,7,9. Число таких слов, по формуле числа размещений с повторениями, равно $\overline{A_9^6} = 9^6 = 531441$. Если отбросить слово «000000», непригодное в качестве велосипедного номера, то счастливых номеров будет 531440. Всего шестизначных номеров, за вычетом непригодного, равно $\overline{A_{10}^6} - 1 = 1000000 - 1 = 999999$. Поэтому несчастливых номеров 999999–531440=468559, т.е. ненамного меньше, чем счастливых.

Любопытно то, что если бы номера были бы семизначными, то тогда счастливых номеров было бы меньше, чем несчастливых.

Напомним, что перестановки – частный случай размещений и формула для числа перестановок – частный случай формулы для числа размещений. А как обстоит дело для перестановок и размещений с повторениями? Являются ли перестановки с повторениями частным случаем размещений с повторениями?

Замечание. Формула для числа перестановок с повторениями не является частным случаем формулы для числа размещений с повторениями.

Определение сочетаний с повторениями. Неупорядоченный набор элементов, содержащий m элементов из данных n, причем один и тот же элемент может повторяться не более m раз, называется **сочетанием с повторениями**.

Число всевозможных сочетаний с повторениями, а именно выборов m объектов из повторяющихся n элементов обозначают $\overline{C_n^m}$. Читается: «число сочетаний из эн по эм» или «С с чертой из эн по эм». Для нахождения числа $\overline{C_n^m}$ сочетаний с повторениями из n элементов по m приходится проявить определенную избирательность.

Утверждение. Число сочетаний с повторениями $\overline{C_n^m}$ можно вычислить по формуле:

$$\boxed{\overline{C_n^m} = C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{m} = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}}$$

Рассмотрим модельную задачу о голосовании.

Пример. При принятии решения члены комитета из 7 человек голосуют: «за», «против», «воздержался». Посчитаем, сколько может быть возможных исходов голосования по данному решению.

Если нас интересует, кто и как голосовал, т.е. поименное открытое голосование, то тогда речь идет о размещениях с повторениями, что даст $\overline{A_3^7}$ = 3^7 = 2187 возможных исходов голосования.

Если нас не интересует, кто и как голосовал, а только общий результат голосования, или, например, голосование тайное, то тогда речь идет о сочетаниях с повторениями. В этом случае подсчитывается число всевозможных сочетаний m=7 голосований членов комитета из повторяющихся n=3 видов голосования: «за», «против», «воздержался», что даст $\overline{C_n^m}$ = $\overline{C_3^7}$ = C_{7+3-1}^7 = C_9^7 = 9!/(7!2!) = (9·8)/2 = 36 возможных исходов голосования.

Замечание. Сочетания с повторениями и размещения с повторениями объединяет то, что нет никаких ограничений на число повторений элементов, кроме общего их числа в наборе, поэтому в формуле числа сочетаний с повторениями $\overline{C_n^m}$ = $\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$ допустим случай, когда m>n.

Отличаются сочетания (с повторениями или без) от размещений (с повторениями или без) тем, что первые – неупорядоченные наборы, а вторые – упорядоченные.

1.4.2. Случайные события

Основой всех точных исследований является наблюдение за поведением и признаками изучаемых объектов, которое может осуществляться с помощью соответствующего опыта или эксперимента.

Под **опытом** будем подразумевать однократное или многократное повторение некоторого действия. Осуществление такого опыта или эксперимента называется **испытанием**. Различные результаты опыта назовем **исходами**.

Игровые модели очень удобны для первоначального рассмотрения элементов теории вероятностей.

Пусть опыт состоит в многократном бросании игральной кости. Каждое отдельное бросание представляет собой испытание, а его результат (выпавшее число очков) – исход этого испытания. В этом случае исходами являются числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6. При бросании монеты могут быть два исхода: **О** – выпадение «орла» (герба) и **Р** – выпадение «решки» (цифры).

Определение события. Множество всех исходов испытания называется **множеством (пространством) элементарных событий**, а **событием** – подмножество множества элементарных событий.

Определение случайного события. Событие, наступление или ненаступление которого в некотором испытании зависит от ряда случайных факторов, называется **случайным событием**.

Пример. Испытание - студент сдает экзамен. Случайное событие - он получил оценку 10. Испытание - бросание монеты. Случайное событие - выпадение герба или цифры.

Множество (пространство) элементарных событий обозначается буквой Ω.

Рассмотрим испытание, которое может окончиться одним из n различных исходов $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$, тогда

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n\}.$$

Таким образом, любое подмножество пространства элементарных событий Ω будем называть случайным событием.

Замечание. В теории множеств аналогом пространства элементарных событий Ω является универсальное множество **U**, а аналогом событий **–** множества, которые являются подмножествами **U**.

Пример. Записать множество (пространство) элементарных событий испытания, состоящего в бросании двух монет.

Решение. Множество элементарных событий данного испытания образуют исходы: (00) – на первой монете выпал «орел» и на второй тоже; (0Р) – на первой монете выпал «орел», а на второй «решка», (Р0) – на первой монете «решка», а на второй «орел», (РР) – на первой и на второй монетах «решки». Таким образом $\Omega = \{(00);(0P);(P0);(PP)\}$.

В дальнейшем случайные события будем называть просто событиями. События обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C и т.д. или когда их много $A_1, A_2, \dots, A_n$.

В жизни мы постоянно встречаемся со случайными событиями. При многократном наблюдении случайных явлений в них самих можно заметить определенные закономерности.

Теория вероятностей – раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений. Это математическая наука, которая применяется к реальным явлениям, обладающим двумя свойствами – случайностью и массовостью.

Событие, которое всегда произойдет в данном опыте, называется **достоверным.** Достоверное событие совпадает со всем пространством элементарных событий, поэтому обозначается символом Ω.

Пример. Пусть в ящике находятся 5 красных шаров. Тогда событие А – «из ящика извлекли красный шар» будет достоверным, так как в ящике были только красные шары.

Событие, называется **невозможным,** если в данном опыте оно заведомо не может произойти ни при одном испытании и обозначается Ø.

Пример. Пусть в ящике находятся 5 красных шаров. Тогда событие В – «из ящика извлекли синий шар» будет невозможным, так как в ящике нет шаров синего цвета.

События, которые не могут произойти одновременно в рассматриваемом опыте, называются **несовместными**.

Пример. При выборе 9 человек из 45 для социологического опроса события А – «выбрали 9 женщин» и В – «выбрали 9 мужчин» являются несовместными событиями.

Замечание. В терминах теории множеств события А и В являются несовместными в данном опыте, если $A \cap B = \varnothing$.

Два события называются **противоположными**, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Событие, противоположное событию А, обозначают $\overline{A}$.

Замечание. В терминах теории множеств для события А и противоположного ему событию $\overline{A}$, верно равенство $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Пример. Пусть испытанием является бросок баскетболиста в корзину, событие А – «баскетболист попал». Тогда $\overline{A}$ - «баскетболист не попал».

Заметим, что достоверное и невозможное события в данном испытании являются противоположными.

Операции над событиями

Суммой двух событий А и В называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одно из событий А, В и обозначается $A+B$ или $A \cup B$.

Аналогично суммой конечного числа событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A_i, $i = 1,2,\ldots,n$ и обозначается $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Пример. Пусть событие А – «светит солнце», а событие В – «дует ветер», тогда событие А+В состоит из следующих явлений погоды: или светит солнце, но нет ветра; или дует ветер, но не светит солнце; или и светит солнце и дует ветер.

Произведением двух событий A и B называется событие, состоящее в одновременном наступлении двух событий и А и В, и обозначается АВ или $A \cap B$.

Аналогично произведением конечного числа событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события и обозначается $A_1A_2\ldots A_n$.

Пример. Пусть событие А – «в аудиторию вошел студент», событие В – «в аудиторию вошел человек в очках». Тогда событие АВ – «в аудиторию вошел студент в очках».

Разностью событий А и В называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие А, но не происходит событие В и обозначается А\В.

Пример. Пусть подбрасывается игральная кость. Событие А – «выпадет чётное число очков», то есть А={2,4,6}, событие В – «выпадет число очков, меньшее трёх», то есть В={1,2}, тогда событие А\В – «выпадет чётное число очков, не меньшее трёх», то есть А\В={4,6}.

Как показывают приведённые примеры, операции над событиями подобны операциям над множествами.

Элементарные события, входящие в подмножество А множества Ω, называют событиями, **благоприятствующими наступлению событию А.**

Пример. Пусть подбрасывается игральная кость. Событие А – «выпадет нечётное число очков». Этому событию благоприятствуют элементарные события из подмножества {1,3,5} множества {1,2,3,4,5,6}.

Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют **полную группу событий**, если они попарно несовместны и их сумма является достоверным событием:

1) $A_iA_j = \varnothing \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j$;

2) $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$.

Заметим, что события А и $\overline{A}$ образуют полную группу событий.

Пример. Примеры полных групп событий: выпадение герба и выпадение цифры при одном бросании монеты; попадание в цель и промах при одном выстреле; выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти, шести очков при одном бросании игральной кости.

Классическое определение вероятности

Каждому случайному событию А ставится в соответствие характеризующее возможность его появления в данном опыте число Р(А) (от первой буквы французского слова probabilite – вероятность), которое и называется **вероятностью события** А.

Вероятность – числовая характеристика степени возможности наступления какого-либо определенного случайного события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз испытаниях.

Для определения классической вероятности нам потребуется понятие равновозможных исходов элементарных событий. Понятие **равновозможных** событий в математике не определяется, оно считается интуитивно ясным. Элементарные события, шансы появления которых одинаковы в данном испытании, будем называть равновозможными.

Обычно понятие классической вероятности иллюстрируется на азартных играх потому, что здесь равновозможность прямо задана внешней или геометрической симметрией объекта – монеты, игральной кости, колоды карт и т.д.

Если монета ровная, неизогнутая, то можно ожидать, что при ее многократном бросании орел и решка будут выпадать одинаково часто, т. е. примерно в половине случаев будет выпадать орел, а в половине случаев – решка. Поэтому в условиях этого опыта, принято считать, что для такой монеты вероятность выпадения орла или решки равна $\frac{1}{2}$.

При многократном бросании идеально правильной игральной кости на долю каждого из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 будет приходиться примерно шестая часть общего числа испытаний, т. е. бросаний кости. Поэтому считают, что вероятность выпадения каждой грани, соответствующей числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, равна $\frac{1}{6}$. Какова в таком случае вероятность события А – «выпадение нечетного числа очков»? Поскольку имеется шесть одинаково возможных исходов, причем три из них (выпадение чисел 1, 3, 5) «благоприятствуют» событию А, то вероятность Р(А) можно считать равной $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Пусть пространство Ω состоит из конечного числа n равновозможных элементарных событий: $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\}$.

Под вероятностью Р(А) события A понимается отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению события A, к общему числу всех равновозможных исходов.

Если n – общее число всех равновозможных исходов испытания, а m – число исходов благоприятствующих наступлению события A, то по определению

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Это определение вероятности называется классическим.

Из определения вероятности события следуют её простейшие свойства.

1) Вероятность достоверного события Ω равна 1, так как все элементарные события являются благоприятствующими Ω, т. е. m = n:

$$P(\Omega)=1.$$

2) Вероятность невозможного события Ø равна 0, так как для невозможного события нет ни одного элементарного события, ему благоприятствующего, т. е. m = 0:

$$P(\varnothing)=0.$$

3) Вероятность любого события удовлетворяет неравенствам:

$$0 \le P(A) \le 1$$

так как $0 \le m \le n$.

При использовании формулы классической вероятности в решении конкретных задач числовые значения m и n, входящих в эту формулу, не всегда очевидны. Их нахождение требует применения основных правил и формул комбинаторики.

В теории вероятностей классическим является эксперимент с урной, из которой надо не глядя извлекать одинаковые шары разных окрасок. Вероятность при этом вводится просто: если в урне находится 30 шаров, 10 из которых – белые, то вероятность извлечь белый шар равна $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.

Пример. В урне находятся 10 одинаковых по размеру шаров, из которых 4 красных и 6 синих. Наудачу извлекается шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется синим?

Решение. Обозначим через А событие «извлеченный шар синий». Имеем 10 равновозможных исходов из которых 6 благоприятствуют событию А. Следовательно, Р(А)=$\frac{m}{n}=\frac{6}{10}=0{,}6$.

Пример. Найдите вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет четное число очков.

Решение. Для данного примера имеем: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, А=$\{2,4,6\}$. Поэтому $m=3$, $n=6$ и $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Пример. Подбрасываются две симметричные монеты. Чему равна вероятность того, что на верхних сторонах обеих монет оказались «решки»?

Решение. Обозначим через А – «на верхних сторонах обеих монет оказались “решки”». В этом испытании 4 равновозможных элементарных исхода: (О;О); (О;Р); (Р;О); (Р;Р). Событию А благоприятствует один элементарный исход (Р;Р). Следовательно, Р(А)=$\frac{m}{n}=\frac{1}{4}=0{,}25$.

Основные теоремы теории вероятностей

Теорема сложения вероятностей двух событий. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Пример. Подбрасывается игральный кубик. Найдите вероятность того, что на верхней грани выпадет четное или кратное трем число.

Решение. Введем обозначения событий: А – «выпало четное число»; В – «выпало число, кратное трем». Тогда АВ – событие, состоящее в том, что выпало четное число, кратное трем.

$P(A)=\frac{3}{6}$ (всего исходов в этом испытании 6, исходов благоприятствующих событию А три: выпало либо 2, либо 4, либо 6 очков).

$P(B)=\frac{2}{6}$ (исходов благоприятствующих событию В два: может выпасть либо 3, либо 6 очков).

$P(AB)=\frac{1}{6}$ (имеем один благоприятствующий событию АВ исход: так как четное число, кратное трем, то это 6).

По теореме сложения вероятностей двух событий P(A+B)=P(A)+P(B)–P(AB) имеем:

$$P(A+B)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Если события А и В являются несовместными, то $AB=\varnothing,$ и тогда P(AB)=0, и имеет место следующая теорема.

Теорема сложения вероятностей двух несовместных событий. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

P(A+B)=P(A)+P(B).

Пример. Вероятность того, что приобретенный товар произведен в Италии P(A)=0,4, а того, что он произведен в Турции P(B)=0,3. Какова вероятность того, что товар произведен в одной из этих стран: или в Италии, или в Турции?

Решение. События А – «товар произведен в Италии» и В – «товар произведен в Турции» несовместны, т.к. появление одного исключает другое. По теореме сложения двух несовместных событий имеем:

P(A+B)=P(A)+P(B)=0,4+0,3=0,7.

Пример. При бросании двух игральных костей событие А – «выпало 5 очков» и событие В – «выпало 10 очков» несовместны. Событие А+В – «выпало число очков, кратное 5» можно вычислить, по теореме сложения двух несовместных событий.

Решение. Всего исходов в этом испытании по комбинаторному правилу умножения равно 6 · 6 = 36. Благоприятных исходов для события А четыре – это выпадение в двух бросаниях очков (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), а для события В три благоприятных исхода – это (4, 6), (6, 4), (5, 5). Поэтому

P(A+B)=P(A)+P(B)= $\frac{4}{36}+\frac{3}{36}=\frac{7}{36}$.

Теорема сложения вероятностей n несовместных событий. Вероятность суммы n попарно несовместных событий (т.е. никакие два из них не могут произойти одновременно) $A_1,A_2,\ldots,A_n$ равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Следствие. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n,$ образующих полную группу, равна единице.

Действительно, по теореме сложения вероятностей n несовместных событий имеем:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(\Omega)=1.$$

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Действительно, события A и $\overline{A}$ образуют полную группу событий, откуда в силу предыдущего следствия и вытекает равенство $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Замечание. Вероятность противоположного события равна разности между единицей и вероятностью события A:

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

Пример. Вероятность бесперебойной работы компьютера равна 0,9. Какова вероятность того, что при работе компьютер даст сбой?

Решение. Событие A – «компьютер работает бесперебойно», тогда противоположное ему событие $\bar{A}$ – «при работе компьютер даст сбой». По формуле $P(\overline{A})=1-P(A)$, где P(A) = 0,9. Тогда $P(\bar{A})$= 1 – 0,9 = 0,1.

Теоремы умножения вероятностей

В ряде случаев приходится рассматривать вероятность некоторого события A, которая зависит от того, произошло или не произошло другое случайное событие B.

Прежде чем давать точное определение условной вероятности, рассмотрим следующий пример.

Пример. Пусть в корзине находится 8 белых и 4 черных шара, вынимается наудачу один за другим 2 шара. B – «первый вынутый шар белый», A – «второй вынутый шар белый».

Решение. Очевидно, что P(B) = $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$. Вероятность события A в этом испытании зависит от того, произошло событие B или противоположное событие $\overline{B}$. Если событие B произошло, то среди оставшихся 11 шаров только 7 белых и поэтому вероятность события A будет равна P(A) = $\frac{7}{11}$. Если событие B не произошло, а произошло противоположное событие $\overline{B}$, т. е. первый шар оказался черный, то среди оставшихся 11 шаров будет 8 белых и поэтому вероятность события A, в этом случае, равна P(A) = $\frac{8}{11}$.

Таким образом, вероятность события A зависит от того, произошло или не произошло событие B, это условная вероятность.

Определение условной вероятности. Пусть вероятность события B – положительная величина, т. е. P(B) > 0. Вероятность события A при условии, что произошло событие В, называется **условной вероятностью события А** и обозначается P(A|B).

Пусть вероятность события В – положительная величина, т. е. P(B) > 0. Условной вероятностью события А, при условии, что произошло событие В, называют число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Аналогично, если $P(A) > 0$, то условной вероятностью события В, при условии, что произошло событие А, называют число

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Теорема умножения вероятностей. Пусть P(A) > 0, P(B) > 0, тогда вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло

$$P(AB)=P(A)P(B|A);$$
$$P(AB)=P(B)P(A|B).$$

Пример. В читальном зале имеется 6 учебников по географии, из которых 3 учебника в переплёте. Библиотекарь берёт наудачу последовательно 2 учебника. Найдите вероятность того, что оба взятых библиотекарем учебника окажутся в переплёте.

Решение. Введём обозначение событий: А – «первый учебник в переплёте», В – «второй учебник в переплёте», так как события зависимые, то по теореме умножения вероятностей вероятность того, что оба учебника в переплёте

$$P(AB)=P(A)P(B|A)= \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Теорема умножения вероятностей n событий. Пусть $P(A_1A_2\ldots A_{n-1}) > 0$, тогда справедлива формула:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}),$$

то есть вероятность произведения n событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что все предыдущие события имели место.

Если P(B|A)=P(B), то событие В называется **независимым от события** А, то есть вероятность события В не зависит от того, произошло или нет событие А.

Независимость является свойством взаимным, то есть если справедливо P(B|A)=P(B), то справедливо и P(A|B)=P(A), поэтому можно говорить просто о независимых событиях А и В.

Замечание: Если события А и В независимы, то независимы также будут события А и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и В, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Теорема умножения вероятностей двух независимых событий. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Пример. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. После первого вынимания шар возвращается в урну, и шары в урне перемешиваются. Найдите вероятность того, что оба шара белые.

Решение. В данном случае события А – «первый шар белый» и В – «второй шар белый» независимы, а тогда искомая вероятность равна:

$$P(AB)=P(A)\,P(B)= \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}=0{,}16.$$

Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Пусть события H_1, H_2, …, H_n образуют полную группу событий и $A \subseteq \Omega$. Вероятности событий H_i, известны, причем $P(H_i)>0$ для всех $i=1,2,\ldots,n$; известны также условные вероятности $P(A|H_i)$. Требуется найти вероятность события А.

Формула полной вероятности. Пусть события H_1, H_2, …, H_n образуют полную группу событий и $P(H_i)>0$ для всех $i=1,2,\ldots,n$. Тогда вероятность произвольного события А может быть найдена по формуле

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i).$$

Доказательство. Представим событие А в виде

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n.$$

Поскольку события H_1, H_2, …, H_n попарно несовместны, то события AH_1, AH_2, …, AH_n также попарно несовместны. Пользуясь равенством

$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$ и теоремой умножения вероятностей, получим:

$$P(A) = P(AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n) =$$

$$= P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1) + P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2) + \ldots + P(H_n)\cdot P(A\,|\,H_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i).$$

Теорема доказана.

События H_1, H_2, …, H_n иногда называют **гипотезами**. Заметим, что должно выполняться условие $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$

Пример. Грибник, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело 5 дорог. Известно, что вероятности выхода из леса за час для различных дорог соответственно равны 0,4; 0,8; 0,3; 0,2; 0,1. Какова вероятность того, что этот грибник вышел из леса через час?

Решение. Обозначим через А событие, состоящее в том, что «грибник вышел из леса через час», а через H_i, i=1,2,3,4,5 – событие, состоящее в том, что «грибник пошел по i-ой дороге». Из условия задачи следует, что $P(A|H_1)=0{,}4$; $P(A|H_2)=0{,}8$; $P(A|H_3)=0{,}3$; $P(A|H_4)=0{,}24$; $P(A|H_5)=0{,}1$.

Далее, $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=P(H_4)=P(H_5)=\frac{1}{5}$.

По формуле полной вероятности имеем:

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)+P(H_4)P(A|H_4)+P(H_5)P(A|H_5)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 0{,}4+\frac{1}{5}\cdot 0{,}8+\frac{1}{5}\cdot 0{,}3+\frac{1}{5}\cdot 0{,}2+\frac{1}{5}\cdot 0{,}1=0{,}36.$$

Пример. Пусть в коробке есть 3 новых и 3 уже использованных теннисных мяча. Для первой игры берут из коробки любые 2 мяча и после игры возвращают их в коробку. Какова вероятность наудачу вынуть из коробки два новых мяча?

Решение. Обозначим через А событие, состоящее в том, что «извлечены два новых мяча для второй игры». Ситуация перед второй игрой описывается следующими взаимоисключающими возможностями:

H_1 – «в коробке один новый мяч», если первую игру играли двумя новыми мячами;

H_2 – «в коробке два новых мяча», если играли одним новым и одним старым мячами;

H_3 – «в коробке три новых мяча», если в первый раз играли двумя старыми мячами.

События H_1, H_2, H_3 составляют полную группу событий, так как они несовместны и в сумме составляют все возможные исходы. Находим вероятности этих событий:

$$P(H_1)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5},\quad P(H_2)=\frac{3\cdot 3}{C_6^2}=\frac{3}{5},\quad P(H_3)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}.$$

Вычисляем условные вероятности:

$$P(A\,|\,H_1)=0,\quad P(A\,|\,H_2)=\frac{1}{C_6^2}=\frac{1}{15},\quad P(A\,|\,H_3)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{15}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{25}.$$

Формулы Байеса. Пусть события $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу и их вероятности $P(H_i)$, $i=1,2,\dots,n$, известны до проведения опыта (так называемые априорные вероятности). П роизводится опыт, в результате которого происходит событие А. Каковы будут вероятности событий H_i после опыта, т. е. после того как событие А уже наступило?

Искомые вероятности $P(H_i\,|\,A)$ носят название апостериорных и находятся путем использования теоремы умножения вероятностей и формулы полной вероятности.

Имеем

$$P(AH_i)=P(A)\cdot P(H_i\mid A)=P(H_i)\cdot P(A\mid H_i)$$

(здесь предполагается, что $P(A)>0$ и $P(H_i)>0$ для всех $i=1,2,\ldots,n$), откуда

$$P(H_i\mid A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A\mid H_i)}{P(A)}.$$

Подставляя в последнее равенство выражение для $P(A)$ из формулы полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A\mid H_i).$$

получим

$$P(H_i\mid A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A\mid H_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(H_k)\cdot P(A\mid H_k)},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Эти формулы называют **формулами Байеса**. Они отвечают на вопрос каковы будут вероятности событий H_i после опыта, т. е. после того как событие А уже наступило?

Пример. Грибник, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело 5 дорог. Известно, что вероятности выхода из леса за час для различных дорог соответственно равны 0,4; 0,8; 0,3; 0,2; 0,1. Грибник вышел из леса через час. Какова вероятность того, что грибник вышел по первой дороге?

Решение. Искомую вероятность найдём по формуле Байеса

$$P(H_i\mid A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A\mid H_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(H_k)\cdot P(A\mid H_k)},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

$P(H_1|A)=$

$$\frac{P(H_1)P(A\mid H_1)}{P(H_1)P(A\mid H_1)+P(H_2)P(A\mid H_2)+P(H_3)P(A\mid H_3)+P(H_4)P(A\mid H_4)+P(H_5)P(A\mid H_5)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{5}\cdot 0{,}4}{0{,}36}\approx 0{,}222.$$

Пример. Социолог проводил исследование психологического климата в разных отделах фирмы. При этом было установлено, что мужчины и женщины по-разному реагируют на некоторые жизненные обстоятельства. Результаты исследования показали, что 68 % женщин позитивно реагируют на эти ситуации, в то время как 37 % мужчин реагируют на них негативно. 15 женщин и 5 мужчин заполнили анкету, в которой отразили свое отношение к предлагаемым ситуациям. Случайно извлеченная анкета содержит негативную реакцию. Чему равна вероятность, что ее заполнял мужчина?

Решение. Обозначим через А событие, состоящее в том, что «случайно извлеченная анкета будет содержать негативную реакцию», а через H_1, –

событие, состоящее в том, что «анкету заполнял мужчина», через H_2, – событие, состоящее в том, что «анкету заполняла женщина». Из условия задачи следует, что $P(A|H_1)=0{,}37$; $P(A|H_2)=1–0{,}68=0{,}32$.

Далее, $P(H_1)=\frac{5}{15+5}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$, $P(H_2)=\frac{15}{15+5}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.

По формуле полной вероятности вероятность того, что случайно извлеченная анкета будет содержать негативную реакцию

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=0{,}37\cdot\frac{1}{4}+0{,}32\cdot\frac{3}{4}=0{,}093+0{,}24=0{,}333.$$

Случайно извлеченная анкета содержит негативную реакцию. Вероятность того, что ее заполнял мужчина, найдём по формуле Байеса

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)}=0{,}278.$$

Пример. Запросы на кредиты банка распределены следующим образом: 10 % – государственные органы, 30 % – другие банки, 60 % – физические лица. Вероятности невозврата кредита соответственно равны 0,01, 0,05 и 0,2. Найдите вероятность невозврата кредита. Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но факс плохо пропечатал данные клиента. Найдите вероятность того, что это был другой банк.

Решение. Обозначим событие A – «произойдет невозврат кредита». В качестве гипотез возьмем H1– «кредит взят государственными органами», H2 – «кредит предоставлен другому банку», H3 – «кредит взят физическим лицом». Тогда, согласно условию задачи,

$$P(H_1)=\frac{10}{100}=0{,}1,\quad P(H_2)=\frac{30}{100}=0{,}3,\quad P(H_3)=\frac{60}{100}=0{,}6.$$

Проверяем условие $\sum_{i=1}^{3}P(H_i)=1$.

Имеем $\sum_{i=1}^{3}P(H_i)=0{,}1+0{,}3+0{,}6=1$.

По формуле полной вероятности при n = 3 получаем

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A|H_i)=0{,}1\cdot 0{,}01+0{,}3\cdot 0{,}05+0{,}6\cdot 0{,}2=0{,}136.$$

Чтобы найти вторую вероятность, надо найти $P(H_2|A)$. Для этого воспользуемся формулами Байеса:

$$P(H_2|A)=\frac{P(H_2)\cdot P(\mathrm{A}_2|H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}05}{0{,}136}=\frac{15}{136}\approx 0{,}1103.$$

Повторение событий. Схема Бернулли

Пусть независимо друг от друга проводятся n испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода: либо происходит событие A («успех»), либо противоположное ему событие $\overline{A}$ («неудача»). Будем считать, что испытания проводятся в одинаковых условиях и вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же. Обозначим эту вероятность через p, а вероятность появления противоположного события $\overline{A}$ через q (q=1–p). Данная схема носит название **схемы Бернулли**.

Поставим вопрос о вероятности того, что в данной серии из n испытаний событие A наступило ровно m раз $(0 \le m \le n)$. Искомую вероятность обозначим через $P_n(m)$.

Теорема. Вероятность $P_n(m)$ наступления события A ровно m раз в последовательности из n испытаний схемы Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Доказательство. Событие A в проведенных n испытаниях может наступить m раз в разных вариантах, например в варианте

$$\underbrace{A\ldots A}_{m}\underbrace{\overline{A}\ldots\overline{A}}_{n-m},$$

где событие A занимает m первых мест (произошло в первых m испытаниях), а событие $\overline{A}$ занимает последующие n-m мест (произошло в последующих n-m испытаниях). Всего таких вариантов существует C_n^m, причем все составленные таким образом сложные события являются несовместными. Поскольку все события в каждом из вариантов независимы, то по теореме умножения вероятностей независимых событий вероятность каждого варианта равна $p^m q^{n-m}$. Так как все варианты-события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных событий, т. е. $C_n^m p^m q^{n-m}$, что и доказывает теорему.

Вероятности $P_n(m)$ называются **биномиальными вероятностями**, а формула $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ – **формулой Бернулли**.

Рассмотрим частные случаи: $P_n(0) = q^n, P_n(1) = npq^{n-1}, \ldots, \; P_n(n) = p^n$.

Вероятности того, что в n испытаниях событие наступит

- менее m раз, находят по формуле: $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m-1)$;
- более m раз, находят по формуле: $P_n(m+1) + P_n(m+2) + \ldots + P_n(n)$;
- не менее m раз, находят по формуле: $P_n(m) + P_n(m+1) + \ldots + P_n(n)$;
- не более m раз, находят по формуле: $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m)$.

Пример. В магазин вошли 9 покупателей. Вероятность сделать покупку для каждого вошедшего одна и та же и равна 0,2. Найдите вероятность того, что 2 покупателя совершат покупку.

Решение. Из условия n=9; m=2; p=0,2; q=1–0,2=0,8. По формуле Бернулли искомая вероятность $P_9(2) = C_9^2 p^2 q^7 = 36 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^7 \approx 0{,}302$.

Пример. Найдите вероятность того, что при десятикратном бросании монеты «орел» выпадет ровно 5 раз.

Решение. В данном случае p=q=$\frac{1}{2}$, n=10, m=5. Отсюда находим

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{252}{1024} \approx 0{,}246.$$

Пример. В результате наблюдений на некоторой реке установлено, что в течение 20 лет имело место четыре случая пересыхания реки. Найдите вероятность того, что за двадцатилетний период будет наблюдаться:

1) от трех до пяти случаев пересыхания реки (включительно);
2) не более пяти случаев пересыхания реки;

3) более пяти случаев пересыхания реки.

Решение. Вероятность того, что за 20 лет произойдет m случаев пересыхания реки $(0 \le m \le 20)$, равна $P_{20}(m) = C_{20}^m p^m q^{20-m}$, где $p = \frac{4}{20} = 0{,}2$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Тогда искомая вероятность составит:

1) $P_{20}(3) + P_{20}(4) + P_{20}(5) =$

$$= C_{20}^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{17} + C_{20}^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^{16} + C_{20}^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^{15}$$
$$\approx 0{,}2054 + 0{,}2182 + 0{,}1746 \approx 0{,}5982.$$

2) $P(m \le 5) = \sum_{m=0}^{5} P_{20}(m) =$

$$= C_{20}^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{20} + C_{20}^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{19} + C_{20}^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{18} + C_{20}^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{17}$$
$$+ C_{20}^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^{16} + C_{20}^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^{15} \approx$$
$$\approx 0{,}0115 + 0{,}0576 + 0{,}1369 + 0{,}2054 + 0{,}2182 + 0{,}1746$$
$$= 0{,}8042.$$

3) $P(m > 5) = 1 - P(m \le 5) = 1 - 0{,}8042 = 0{,}1958.$

Следует отметить, что при больших m и n пользоваться формулой Бернулли практически невозможно. В таких случаях пользуются локальной теоремой Лапласа или теоремой Пуассона. Эти формулы тем будут точнее, чем n больше.

Локальная теорема Лапласа

Теорема: Если вероятность наступления события А в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p $(0 < p < 1)$, а n является достаточно большим то вероятность $P_n(m)$ того, что во всех этих испытаниях событие А появится ровно m раз, приближенно выражается формулой

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ и $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Значения функции Гаусса $\varphi(x)$ находятся из таблицы (прил.1), пользуясь следующими свойствами функции $\varphi(x)$:

1) функция $\varphi(x)$ четная, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Поэтому в таблице приведены значения функции лишь для положительных значений аргумента;
2) функция $\varphi(x)$ монотонно убывает, а ее предел при $x \to \infty$ равен нулю;
3) если $x > 4$, то можно считать, что $\varphi(x) \approx 0$.

Пример. Вероятность найти белый гриб среди прочих равна 0,25. Какова вероятность того, что среди 80 грибов белых будет 20?

Решение. По условию $n = 80$, $m = 20$. Следовательно, $x = \frac{20-80\cdot0{,}25}{\sqrt{80\cdot0{,}25\cdot0{,}75}} = 0$ и $\varphi(0) = 0{,}3989$. Тогда искомая вероятность: $P_{80}(20) \approx \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot 0{,}3989 \approx 0{,}103$.

Интегральная теорема Лапласа

Теорема: Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p (0 < p < 1), то вероятность $P_n(k_1,k_2)$ того, во всех этих испытаниях событие A появится не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно определяется формулой

$$P_n(k_1,k_2) = P_n(k_1 \le m \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\quad x_1 = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\quad x_2 = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\Phi(x)$ называется **функцией Лапласа**. Её значения приведены в таблице (прил.2). При использовании этой таблицы необходимо знать свойства функции $\Phi(x)$:

1) функция $\Phi(x)$ нечетная, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, и поэтому приведены ее значения только для положительного аргумента;

2) предел функции при $x \to \infty$ равен $\frac{1}{2}$, и $\Phi(0) = 0$;

3) Для всех значений x > 5 (x < –5) можно считать, что $\Phi(x) \approx \frac{1}{2}$, $(\Phi(-x) \approx -\frac{1}{2})$. Поэтому в таблице (см. прил. 2) приведены значения функции только для 0≤x≤5.

Пример. Вероятность реализации одной акции некоторой компании равна 0,8. Брокерская фирма предлагает 100 акций этой кампании. Какова вероятность того, что будет продано: а) не менее 70 и не более 85 акций; б) не менее 70; в) не более 69 акций?

Решение. Событие А – «акция продана», $P(A) = p$:

а) по условию n=100, p=0,8, q=0,2, $k_1 = 70$, $k_2 = 80$. Воспользуемся формулой

$$P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),\ \text{где}\ x_1 = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\quad x_2 = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

По условию

$$P_{100}(70{,}80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{70 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{70-80}{\sqrt{16}} = -\frac{10}{4} = -2{,}5,$$

$$x_2 = \frac{85 - 80}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{5}{4} = 1{,}25,$$

$$P_{400}(70{,}85) \approx \Phi(1{,}25) - \Phi(-2{,}5).$$

По таблице значений функции Лапласа (см. прил. 2) и учитывая нечетность этой функции, находим $\Phi(1{,}25) = 0{,}3944$, $\Phi(-2{,}5) = -\Phi(2{,}5) = -0{,}4938$.

Тогда $P_{400}(70{,}85) \approx \Phi(1{,}25) - \Phi(-2{,}5) = 0{,}3944 + 0{,}4938 = 0{,}8882$;

б) требование того, что фирма продает не менее (больше либо равно) 70 акций, означает, что будет продано либо 70, либо 71, либо 72, и т.д., либо 100 акций. Значит, в данном случае $k_1 = 70$, а $k_2 = 100$. Тогда

$$P_{400}(70{,}100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \frac{70-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = -\frac{10}{4} = -2{,}5$, $x_2 = \frac{100-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = \frac{20}{4} = 5$.

По таблице значений $\Phi(x)$ (см. прил. 2) находим

$\Phi(-2{,}5) = -\Phi(2{,}5) = -0{,}4938$, $\Phi(1{,}25) = 0{,}5$, тогда

$$P_{400}(70{,}100) \approx \Phi(5) - \Phi(-2{,}5) = 0{,}5 + 0{,}4938 = 0{,}9938;$$

в) событие А – «появилось не менее 70 раз» противоположно событию В – «появилось не более 69 раз», потому $P_{100}(0{,}69) \approx 1 - P_{100}(70{,}100) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$.

Значит, вероятность того, что будет продано либо 69, либо 68, либо 67, и т.д., либо ноль (ни одной) акции $P_{100}(0{,}69) \approx 0{,}0062$.

Формула Пуассона

Теорема: Если вероятность наступления события А в каждом из n независимых испытаний постоянна, но близка к нулю, а число независимых испытаний n достаточно велико и произведение np=λ = const, то вероятность того, что во всех этих испытаниях событие А появится ровно m раз, приближенно выражается формулой

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Обычно формулу используют, если p < 0,01, а n > 100 и np ≤ 10.

Пример. На базу отдыха прибыло 1000 подростков. Какова вероятность того, что среди этих отдыхающих окажется 5 детей, страдающих клаустрофобией, если в среднем 0,1 % подростков страдают данной болезнью?

Решение. Имеем n=1000, m=5, p=$\frac{0{,}1\%}{100\%} = 0{,}001$.

Так как n велико, а p мало, то воспользуемся формулой Пуассона:

$$\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1,\ P_{1000}(5) \approx \frac{1^5 \cdot e^{-1}}{5!} = \frac{1}{120 \cdot e} \approx 0{,}003\ 086 \approx 0{,}0031.$$

Пример. Вероятность появления фальшивой банкноты в банке равна 0,002. В течение дня банк оперирует с 500 банкнотами. Найдите вероятность того, что в течение дня в ходе обработки встретится менее трех фальшивых банкнот.

Решение. Из условия следует, что n=500, p=0,002. Так как n велико, а p мало, то воспользуемся формулой Пуассона. Имеем λ=np = 500·0,002 = 1.

Тогда $P_{500}(m < 3) = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = \frac{1^0 \cdot e^{-1}}{0!} + \frac{1^1 \cdot e^{-1}}{1!} + \frac{1^2 \cdot e^{-1}}{2!} = 2{,}5 \cdot e^{-1} \approx 0{,}919$.

1.4.3. Случайные величины

Рассматривая простейшие примеры, например, при бросании игральной кости мы случайным образом получаем одно из чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6 или при каких либо измерениях получаются случайные ошибки и т. п. В таких случаях мы имеем дело со случайными величинами. На примере с бросанием игральной кости мы видим, что каждому исходу опыта ставится в соответствие единственное число $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – значение случайной величины. Поэтому естественно рассматривать случайную величину как функцию, заданную на множестве исходов данного опыта. Следует заметить, что значения случайной величины могут быть достаточно общей природы.

Определение случайной величины. Пусть Ω – пространство элементарных событий. Числовую функцию от элементарного события $\omega \in \Omega$ назовем **случайной величиной**.

Таким образом, если каждому элементарному событию ω можно поставить в соответствие некоторое число, то говорят, что задана случайная величина.

Случайные величины будем обозначать прописными латинскими буквами X, Y, Z и т. д., а их возможные значения – соответствующими строчными латинскими буквами x, y, z и т. д. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены x_1, x_2, x_3.

Определение дискретной случайной величины. Случайная величина, принимающая значения, которые можно записать в виде конечного набора или счетной последовательности чисел, называется **дискретной**, т. е. дискретная случайная величина принимает отдельные, изолированные возможные значения, число которых конечно или счетное.

Примеры дискретных случайных величин:

– оценка, которую студент может получить на экзамене;
– число несчастных случаев на улицах города Минска;
– число вызовов, поступивших на телефонную станцию за сутки;
– число родившихся мальчиков среди десяти новорожденных (0,1,…,10).

Определение непрерывной случайной величины. Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого числового промежутка, называется **непрерывной случайной величиной**.

Примеры непрерывных случайных величин:

– рост человека от 150 до 200 см;
– температура воздуха в случайно выбранный день;
– скорость самолета в момент выхода на заданную высоту.
– время ожидания транспорта.

Каждому значению $\mathbf{x_n}$ дискретной случайной величины отвечает определенная вероятность $\mathbf{p}_n$, каждому промежутку (a,b) из области значений непрерывной случайной величины также отвечает определенная вероятность **P** того, что значение x, принятое случайной величиной, попадет в этот промежуток.

Определение закона распределения случайной величины. Соотношение, устанавливающее тем или иным способом связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется **законом распределения случайной величины**.

Закон распределения дискретной случайной величины обычно задается в виде таблицы:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_{n-1}	x_n	…
P	p_1	p_2	p_3	…	p_{n-1}	p_n	…

В верхней строке записывают возможные значения x_i случайной величины X, а в нижней – их вероятности $p_i = P(X=x_i)$. Так как события $A_i = \{X=x_i\}$, i=1,2,…, образуют полную группу событий, то $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$ В случае конечного числа значений случайной величины, равного n, справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Следует отметить, что закон распределения случайной величины полностью задает дискретную случайную величину. Однако, случайную величину изучают по ее числовым характеристикам, основными из которых являются математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Далее рассмотрим эти числовые характеристики.

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Определение математического ожидания. **Математическим ожиданием** M (X) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности.

Если дискретная случайная величина X принимает конечное число значений $x_1, x_2, \ldots x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ соответственно, то по определению

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

Пример. Подбрасывается игральная кость. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины X, равной числу выпавших очков.

Решение. Закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Следовательно, по определению математического ожидания имеем:

$$M(X) = (1+2+3+4+5+6) \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Замечание. Отметим, что постоянную величину C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую лишь одно значение X = C с вероятностью P = 1. Поэтому M(C) = C·1 = C, т. е. **математическое ожидание постоянной величины равно самой этой величине**.

Далее рассмотрим без доказательства важнейшие свойства математического ожидания для дискретных случайных величин.

Свойства математического ожидания дискретных случайных величин:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т. е.

$$M(CX) = C\,M(X).$$

2. Математическое ожидание суммы двух случайных величин X и Y равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

Определение независимых случайных величин. Две случайные величины X и Y называют **независимыми**, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. Несколько случайных величин независимы, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие возможные значения приняли остальные случайные величины.

Критерием независимости двух случайных величин X и Y служит выполнение равенства

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)$$

для любых x, y$\in$**R**.

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Замечание. Свойства 2 и 3 имеют место для любого конечного числа случайных величин.

Пример. Найдите математическое ожидание случайной величины Z = 2X+3Y+7, если M(X) = 4, M(Y)=1.

Решение. Используя свойства математического ожидания, имеем:

$$M(Z) = M(2X + 3Y + 7) = M(2X) + M(3Y) + M(7) =$$
$$= 2M(X) + 3M(Y) + 7 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 7 = 18.$$

Пример. Независимые случайные величины заданы законами распределения:

X	1	2
P	0,6	0,4

Y	4	6
P	0,2	0,8

Найдите математическое ожидание случайной величины XY.

Решение. Найдем математические ожидания каждой из данных случайных величин:

$$M(X) = 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,4 = 1,4, \quad M(Y) = 4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,8 = 5,6.$$

В силу независимости случайных величин X и Y искомое математическое ожидание

$$M(XY) = M(X)M(Y) = 1,4 \cdot 5,6 = 7,84.$$

Замечание. Математическое ожидание случайной величины называют также ее **средним значением**.

Определение дисперсии. **Дисперсией** D(X) дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$\boldsymbol{D(X) = M((X - M(X))^2).}$$

Дисперсия случайной величины постоянна, т. е. является числовой характеристикой этой величины.

Если дискретная случайная величина X принимает конечное число значений $x_1, x_2, \ldots x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ соответственно, то закон распределения случайной величины $(X – M(X))^2$ имеет вид:

$(X - M(X))^2$	$(x_1 - M(X))^2$	$(x_2 - M(X))^2$	…	$(x_n - M(X))^2$
P	p_1	p_2	…	p_n

Исходя из определения математического ожидания, получаем

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i.$$

Дисперсия дискретной случайной величины обладает следующими свойствами:

1. Дисперсия – величина неотрицательная, т. е. D(X) ≥0.

2. Дисперсия случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.$$

Покажем это:

$$D(X)=M((X-M(X))^2)=M(X^2-2XM(X)+(M(X))^2)=$$
$$=M(X^2)-2M(X)M(X)+(M(X))^2=$$
$$=M(X^2)-2(M(X))^2+(M(X))^2=M(X^2)-(M(X))^2.$$

3. Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D(C)=0.$$

Покажем это:

$$D(C)=M((C-M(C))^2)=M((C-C)^2)=M(0)=0.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX)=C^2D(X).$$

Покажем это:

Из определения дисперсии и свойств математического ожидания следует, что

$$D(CX)=M((CX-M(CX))^2)=M((CX-CM(X))^2)=$$
$$=M(C^2(X-M(X))^2)=C^2M((X-M(X))^2)=C^2D(X).$$

5. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин X и Y равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Покажем это:

Применяя свойство дисперсии 2 и свойства математического ожидания, имеем:

$$D(X+Y)=M((X+Y)^2)-(M(X+Y))^2=$$
$$=M(X^2+2XY+Y^2)-(M(X)+M(Y))^2=$$
$$=M(X^2)+2M(XY)+M(Y^2)-((M(X))^2+2M(X)M(Y)+(M(Y))^2)=$$
$$=M(X^2)+2M(X)M(Y)+M(Y^2)-(M(X))^2-2M(X)M(Y)-(M(Y))^2=$$
$$=M(X^2)-(M(X))^2+M(Y^2)-(M(Y))^2=D(X)+D(Y).$$

Замечание. Отметим, что свойство 5 распространяется на случай любого конечного числа случайных величин.

6. Если C – постоянная, то

$$D(X+C)=D(X).$$

Покажем это:

$$D(X+C)=M(((X+C)-M(X+C))^2)=$$
$$=M((X+C-(M(X)+C))^2)=M((X-M(X))^2)=D(X).$$

Определение среднего квадратического отклонения. Квадратный корень из дисперсии случайной величины X называется ее **средним квадратическим отклонением** и обозначается **σ**(X):

$$\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.}$$

Введение среднего квадратического отклонения объясняется тем, что дисперсия измеряется в квадратных единицах относительно размерности самой случайной величины. Например, если возможные значения некоторой случайной величины измеряются в метрах, то ее дисперсия – в квадратных метрах. В тех случаях, когда нужно иметь числовую характеристику рассеяния возможных значений той же размерности, что и сама случайная величина, используется среднее квадратическое отклонение.

Пример. Дисперсия случайной величины X равна 2. Найдите дисперсию случайной величины Y = 5X +3.

Решение. Согласно свойствам дисперсии имеем

$$D(Y)=D(5X+3)=D(5X)=5^2\cdot D(X)=25\cdot 2=50.$$

Пример. Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

Решение. Находим:

$$M(X)=0\cdot 0,3+1\cdot 0,5+2\cdot 0,2=0,9.$$

Запишем закон распределения квадрата отклонения случайной величины X, т. е. величины $(X – M(X))^2$:

$(X-M(X))^2$	$(0-0,9)^2$	$(1-0,9)^2$	$(2-0,9)^2$
P	0,3	0,5	0,2

По формуле для дисперсии дискретной случайной величины, принимающей конечное число значений, находим

$$D(X)=(0-0,9)^2\cdot 0,3+(1-0,9)^2\cdot 0,5+(2-0,9)^2\cdot 0,2=$$
$$=0,81\cdot 0,3+0,01\cdot 0,5+1,21\cdot 0,2=0,49.$$

Отсюда

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,49}=0,7.$$

Отметим, что дисперсию случайной величины X можно было найти и по формуле $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.$

Запишем закон распределения случайной величины X^2:

X^2	0	1	4
P	0,3	0,5	0,2

Находим:

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2 = 1,3,$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1,3 - 0,9^2 = 1,3 - 0,81 = 0,49.$$

Функция распределения вероятностей случайной величины

Заметим, как говорилось ранее, дискретная случайная величина может быть задана законом распределения, представляющим собой перечень всех возможных значений этой случайной величины и их вероятностей. Однако такой способ задания не является общим: он неприменим, например, для непрерывных случайных величин. Введение понятия функции распределения вероятностей случайной величины устраняет этот недостаток.

Введем следующие обозначения. Пусть x – действительное число, т.е. $x \in \mathbf{R}$. Обозначим через F(x) – вероятность события A, состоящего в том, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т. е. A = {X < x}. Очевидно, что мы получили функцию F(x) от переменной x.

Определение функции распределения. **Функцией распределения** вероятностей случайной величины X называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что X примет значение, меньшее x: F(x) = P(X < x).

Функция распределения содержит в себе всю информацию, заложенную в случайной величине. Поэтому считается, что случайная величина (дискретная либо непрерывная) задана, если задана ее функция распределения.

Свойства функции распределения любой случайной величины:

1. $0 \le F(x) \le 1$.

Это свойство следует из того факта, что функция F(x) есть вероятность.

2. Функция распределения F(x) – неубывающая функция, т. е. если $x_1<x_2$, то $F(x_1)\le F(x_2)$.

Покажем это:

Действительно, пусть $x_1 < x_2$. Событие «случайная величина X примет значение, меньшее x_2» можно представить в виде суммы двух несовместных событий: «X примет значение, меньшее x_1» и «X примет значение, удовлетворяющее неравенствам $x_1<X<x_2$». Обозначим вероятности последних двух событий через $P(X < x_1)$ и $P(x_1 \le X < x_2)$ соответственно. По теореме о вероятности суммы двух несовместных событий имеем:

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2),$$

откуда

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Поскольку вероятность любого события – число неотрицательное, то $P(x_1\le X<x_2)\ge 0$ и, следовательно, $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. Вероятность попадания значений случайной величины X в полуинтервал [a,b) равна разности между значениями функции распределения в правом и левом концах этого интервала:

$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$

4. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b), то $F(x) = \begin{cases} 0, \ при \ x \le a, \\ 1, \ при \ \ x \ge b. \end{cases}$

Покажем это:

Действительно, если $x \le a,$ то событие A={X < x} является невозможным (случайная величина X таких значений не принимает) и, следовательно, его вероятность равна нулю. Если $x \ge b,$ то событие A={X < x} является достоверным и, следовательно, его вероятность равна единице.

5.

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0, \ \lim_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1.$$

6. Функция распределения F(x) – непрерывна слева для любого $x_0 \in \mathbf{R}$, т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0).$$

Последние два свойства 5 и 6 рассмотрены без доказательства.

Пример. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \ x \le -1, \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3} & \text{при } \ -1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } \ x > 2. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания случайная величина X принимает значения из полуинтервала [0,1).

Решение. Так как на полуинтервале [0,1) функция распределения задается формулой F(x) = $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, то

$$P(0 \le X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Определение функции распределения. Функция распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k),$$

где суммируются вероятности тех значений случайной величины X, которые меньше x. График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид.

Пример. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей:

X	0	1	2
P	0,1	0,4	0,5

Найдите функцию распределения случайной величины X и построить график функции распределения.

Решение. Если $x \le 0$, то событие A = {X < x} является невозможным (случайная величина не принимает значений, строго меньших нуля) и, следовательно, F(x) = 0.

Если 0 < x ≤ 1, то F(x) = P(X) = 0,1. Действительно, в данной ситуации случайная величина X может принять только одно значение, находящееся левее 1, – значение 0 с вероятностью 0,1.

Если 1 < x ≤ 2, то F(x) = P(X=0) + P(X=1) =0,1+0,5=0,5. Действительно, F(x) равно вероятности события A = {X < x}, которое может быть осуществлено, когда случайная величина X примет значение 0 или значение 1. Поскольку два этих события несовместны, то по теореме сложения вероятность события A = {X < x} равна сумме вероятностей событий A_1 = {X =0} и A_2 = {X =1}.

Если x > 2, то F(x) = 1, так как событие A = {X < x} является достоверным.

Таким образом, получаем функцию распределения вида:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ 0{,}1 & \text{при } 0<x\le 1,\\ 0{,}5 & \text{при } 1<x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

График функции F(x) приведен на рис.40 ниже.

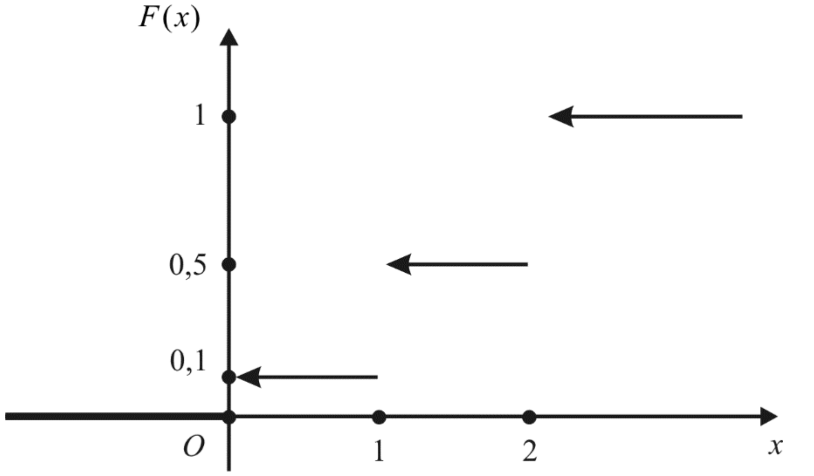


Рис. 40

Как видно из рисунка, функция F(x) является разрывной, причем точками разрыва являются значения x_k, принимаемые случайной величиной X. Величины скачков функции равны вероятностям $p_k = P(X = x_k)$.

Непрерывные случайные величины

Используя понятие функции распределения вероятностей, можно дать более точное определение непрерывной случайной величины.

Определение непрерывной случайной величины. Случайная величина X называется **непрерывной**, если существует функция **p(x)** такая, что при любом $x \in \mathbf{R}$

$$\boldsymbol{F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt.}$$

Функция **p(x)** входящая в последнее равенство, называется **плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины** X. График функции **p(x)** называется **кривой распределения**.

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее полуинтервалу [a,b).

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее полуинтервалу [a,b) равна определенному интегралу от ее плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

$$P(a \le X < b) = \int_{a}^{b} p(x)\,dx.$$

Замечание. Доказанная формула геометрически означает тот факт, что вероятность попадания значений непрерывной случайной величины X в полуинтервал [a,b) равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения, осью Ox и отрезками прямых x=a, x=b.

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. p(x)≥0 (следует из того, что функция F(x) – неубывающая функция).
2. В точках дифференцируемости функции распределения F(x) ее производная равна плотности распределения: F′ (x) = p(x)
3. Интеграл по бесконечному промежутку (–∞,+∞) от плотности распределения p(x) равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$$

Это следует из того, что F(+∞)=1. Это свойство имеет следующую геометрическую интерпретацию: площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения и осью Ox, равна единице.

В частности, если все возможные значения непрерывной случайной величины принадлежат отрезку [a,b], то

$$\int_{a}^{b} p(x)\,dx = 1.$$

так как p(x) = 0 вне этого отрезка.

Пример. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{1}{2}\sin x & \text{при } 0 < x \le \pi, \\ 0 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Найдите функцию распределения F(x) и вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу $(0, \frac{\pi}{4})$.

Решение. Если x≤ 0, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt=0.$$

Если 0 < x ≤ π, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{0} p(t)\,dt+\int\limits_{0}^{x} p(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int\limits_{0}^{x}\frac{1}{2}\sin t\,dt=$$

$$=0-\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x.$$

Если x > π, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{0} p(t)\,dt+\int\limits_{0}^{\pi} p(t)\,dt+\int\limits_{\pi}^{x} p(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\sin t\,dt+\int\limits_{\pi}^{x}0\,dt=0-\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\pi}+0=1.$$

Таким образом, $F(x)=\begin{cases}0, \ \textit{при}\ x\le 0,\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x, \ \textit{при}\ \ 0<x\le\pi,\\ 1, \ \textit{при}\ \ x>\pi.\end{cases}$

$$P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right)=\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{1}{2}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\pi/4}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Определение математического ожидания. **Математическим ожиданием непрерывной случайной величины** X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a, b], а плотностью распределения вероятностей является функция **p(x)** называют определенный интеграл

$$M(X)=\int\limits_{a}^{b} xp(x)\,dx.$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат всей оси Ox, то

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx$$

при условии, что несобственный интеграл сходится абсолютно, т. е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, p(x)\, dx.$$

Определение дисперсии. **Дисперсией непрерывной случайной величины** X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X) = M((X - M(X))^2).$$

Если возможные значения X принадлежат отрезку [a, b], а плотностью распределения вероятностей является функция **p(x)**, то

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2\, p(x)\, dx.$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат всей оси Ox, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2\, p(x)\, dx$$

при условии, что интеграл сходится.

Для вычисления дисперсии можно получить более удобные формулы:

$$D(X) = \int_a^b x^2 p(x)\, dx - (M(X))^2,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\, dx - (M(X))^2.$$

Замечание. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины обладают теми же свойствами, что и математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.

Для непрерывной случайной величины X среднее квадратическое отклонение σ(X) определяется, как и для дискретной величины, формулой

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x}{2} & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. Имеем

$$M(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}\, dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2 = \frac{4}{3},$$

$$D(X)=\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{16}{9}x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{8}x^4-\frac{4}{9}x^3+\frac{4}{9}x^2\right)\Bigg|_0^2=2-\frac{32}{9}+\frac{16}{9}=\frac{2}{9},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Биномиальное распределение

Случайная величина X, которая принимает значение m с вероятностью $C_n^m p^m q^{n-m}$, где $m=0,1,2,\dots,n;$ $0\le p\le 1,$ $q=1-p,$ называется распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p.

Рассмотрим n независимых испытаний, в каждом из которых наступает либо событие A с вероятностью p, либо противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $q=1-p$. Пусть X – случайная величина, равная числу появлений события A в n испытаниях.

Понятно, что событие A может не наступить вообще, наступить один раз, два раза, …, n раз. Следовательно, возможными значениями случайной величины X будут числа $0,1,2,\dots,n$ (дискретная случайная величина с конечным числом значений). По формуле Бернулли можно найти вероятности этих значений:

$$P_n(0)=C_n^0p^0q^n=q^n,\ \dots,\ P_n(1)=C_n^1p^1q^{n-1},$$
$$P_n(2)=C_n^2p^2q^{n-2},\ \dots\ ,P_n(n)=C_n^np^nq^0=p^n.$$

Биномиальный закон распределения может быть представлен в следующем виде.

X	0	1	2	…	M	…	n
P	q^n	$C_n^1p^1q^{n-1}$	$C_n^2p^2q^{n-2}$	…	$C_n^mp^mq^{n-m}$	…	p^n

Замечание. Для случайной величины X, имеющей биномиальное распределение, имеем

$$M(X)=np,\quad D(X)=npq.$$

Пример. Производится 3 независимых социологических испытания. При каждом испытании событие A появляется с одной и той же вероятностью p=0,6. Запишите в виде таблицы закон распределения случайной величины X – числа появлений события A при этих испытаниях.

Решение. Это биномиальное распределение, для которого закон распределения имеет вид

X	0	1	2	3
P	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Тогда

X	0	1	2	3
P	0,064	0,288	0,432	0,216

Контроль: 0,064+0,288+0,432+0,216=1.

Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина X называется **равномерно распределенной** с параметрами a и b, если плотность распределения этой случайной величины постоянна на отрезке $[a;b]$ и равна нулю вне этого отрезка.

Функция плотности распределения определяется равенством

$$p(x)=\begin{cases} c, & \text{если } a\le x\le b,\\ 0, & \text{если } x<a \text{ или } x>b.\end{cases}$$

Поскольку $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_a^b cdx=\ c\cdot(b-a)=1$, то $c=\frac{1}{b-a}$.

Следовательно, $p(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } a\le x\le b,\\ 0, & \text{если } x<a \text{ или } x>b.\end{cases}$

Вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (α;β) принадлежащий отрезку $[a;b]$, пропорциональна длине этого интервала:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_\alpha^\beta p(x)dx=\int_\alpha^\beta\frac{dx}{b-a}=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Непосредственно из определений находится функция распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a<x<b,\\ 1 & \text{при } x\ge b.\end{cases}$$

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример. Цена товара X может быть в равной степени любой в пределах от 15 до 25 тыс. ден. ед. Найдите $M(X),\ \ D(X),\ \ \sigma(X)$.

Решение. Случайная величина X распределена равномерно, следовательно,

$$M(X)=\frac{15+25}{2}=20,\quad D(X)=\frac{(25-15)^2}{12}=\frac{100}{12}=8{,}33,\quad \sigma(X)=\sqrt{8{,}33}=2{,}89.$$

Нормальное распределение

Непрерывная случайная величина X называется **распределённой по нормальному закону**, если плотность её распределения определяется по формуле

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где а и σ – параметры распределения, $\sigma > 0$ (положительное действительное число), а – любое действительное число. Записывается это так: N(a, σ).

Рассмотрим вероятностный смысл параметров случайной величины X. Параметр a совпадает с математическим ожиданием случайной величины X: $a = M(X)$, а параметр σ является средним квадратическим отклонением случайной величины X: $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Нормальное распределение с параметрами a=0 и $\sigma = 1$ называется **нормированным** или **стандартным**.

График плотности распределения вероятностей нормального распределения называют **нормальной кривой** или кривой Гаусса. Он симметричен относительно прямой x=a, имеет асимптоту – ось Ox и схематически изображен на рис. 41

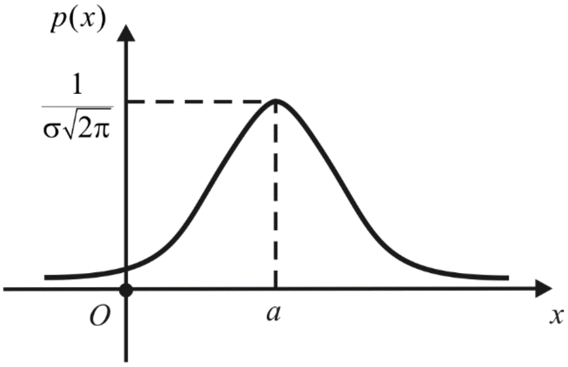


Рис. 41

На рис. 42 показаны нормальные кривые при различных σ. На рис. 43 показаны нормальные кривые для различных a.

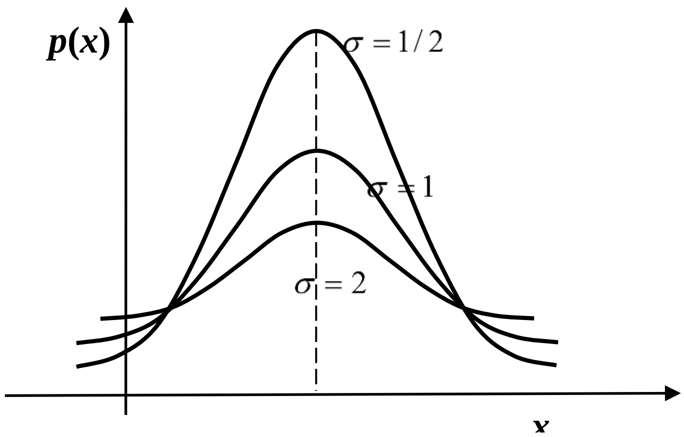


Рис. 42

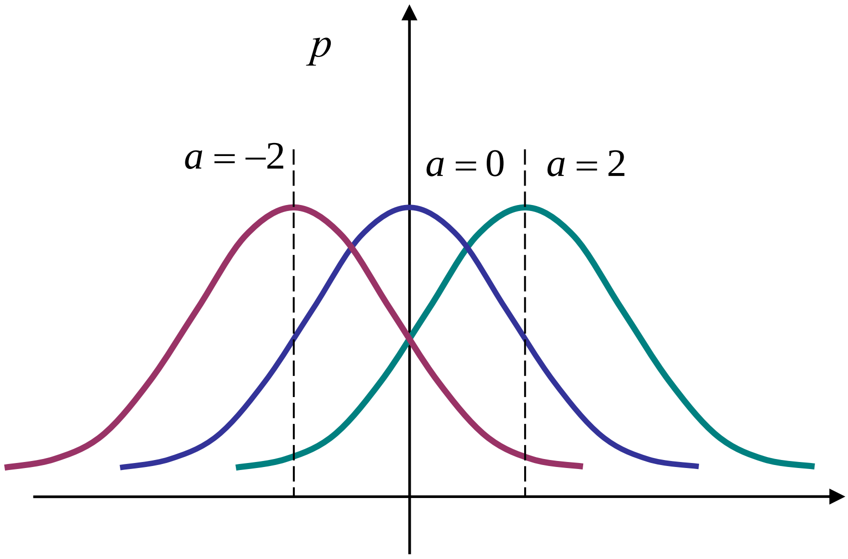


Рис. 43

Вероятность попадания непрерывной случайная величина X, распределенной по нормальному закону с параметрами распределения a и σ, на промежуток (α;β) определяется по формуле $P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$,

где $\Phi(x)$– функция Лапласа, определяемая формулой

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt.$$

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше заданного положительного числа ε находится по формуле

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}).$$

Что же общего у всех нормальных кривых? Чтобы ответить на этот вопрос, положим в последнем равенстве ε=3σ, тогда поучим: $P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi(3) = 0{,}9973 \approx 1$.

Пример. Спортсмен каждое утро взвешивается на напольных весах. Случайные ошибки измерения X веса подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 10 мг. Найдите вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, меньше по абсолютной величине 15 мг, если известно, что математическое ожидание случайных ошибок X равно нулю.

Решение. По формуле $P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})$ находим

$$P(|X - 0| < 15) = 2\Phi(\frac{15}{10}) = 2\Phi(1{,}5).$$

По таблице функции Φ находим $\Phi(1{,}5) = 0{,}4332$. Тогда искомая вероятность равна

$$P(|X| < 15) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664.$$

Пример. Предположим, что в течение года цена на акции некоторой компании есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 30 ден. ед., и средним квадратическим отклонением, равным 10. Определить вероятность того, что в случайно выбранный день обслуживаемого периода цена за акцию была между 10 и 50 ден. ед.

Решение. Воспользуемся формулой $P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$. По условию $\alpha = 10,\ \beta = 50,\ a = 30,\ \sigma = 10,$ тогда

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = \Phi(2) + \Phi(2) = 2\Phi(2).$$

По таблице находим $\Phi(2) = 0{,}4772$. Отсюда, искомая вероятность равна:

$$P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Пример. Вес тропического грейпфрута, выращенного в Краснодарском крае, – случайная величина, подчиненного нормальному закону с математическим ожиданием 0,5 кг и средним квадратическим отклонением 0,09 кг. Установить: а) вероятность того, что наудачу взятый грейпфрут имеет вес в пределах от 0,4 до 0,7 кг; б) вероятность того, что вес наудачу взятого грейпфрута отличается от математического ожидания не более, чем на 0,2 кг; в) в каких границах следует ожидать вес грейпфрута, чтобы вероятность не выйти за эти границы была равна 0,95.

Решение.

а) $P(0{,}4 < X < 0{,}7) = \Phi\left(\frac{0{,}7-0{,}5}{0{,}09}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}4-0{,}5}{0{,}09}\right) = \Phi(2{,}22) + \Phi(1{,}11) = 0{,}4867 + 0{,}3664 = 0{,}8531;$

б) $P(|X - 0{,}5| < 0{,}2) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{0{,}2}{0{,}09}) = 2\Phi(2{,}22) = 2 \cdot 0{,}4867 = 0{,}9734;$

в) $P(|X - 0{,}5| < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{0{,}09}) = 0{,}95$, тогда $\Phi(\frac{\varepsilon}{0{,}09}) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475.$

По таблице имеем $\frac{\varepsilon}{0{,}09} = 1{,}96$, откуда $\varepsilon = 1{,}96 \cdot 0{,}09 = 0{,}1764$(кг).

Значит, границы, в которых следует ожидать вес грейпфрута, чтобы вероятность не выйти за эти границы была равна 0,95, будут

$$(a - \varepsilon; a + \varepsilon) = (0{,}5 - 0{,}1764;\ 0{,}5 + 0{,}1764) = (0{,}3236;\ 0{,}6764).$$

Пример. Время прохождения таможенного оформления подчиняется нормальному закону с a=2 дня и σ=0,5 дня. Какова вероятность, что оформление займёт более 3 дней?

Решение:

P(X>3)=1−P(X≤3)=1−Φ((3−2)/0,5)=1−Φ(2)≈1−0,9772=0, 0228 (2.3%)

Пример. Поставщик соблюдает сроки в 90% случаев. Какова вероятность, что из 50 поставок минимум 45 будут выполнены вовремя?

Решение. При больших n биномиальное распределение можно аппроксимировать нормальным с параметрами:

Среднее: a=n·p=50·0,9=45

Стандартное отклонение:

σ=$\sqrt{npq}$n·=50·0.9·0.1≈2,12.

P(k≥45)≈P(X≥44.5), Z = 44,5−452,12 ≈ −0,236

По таблице стандартного нормального распределения:

P(X≥44.5)=1−Φ(−0,236)≈1−0,4066=0,5934(59,3%)

2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

ПРИМЕРНАЯ ТЕМАТИКА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Занятие № 1-2 Аналитическая геометрия на плоскости.

I.1. Найти длину медианы CK в треугольнике ABC, где A(2;–4), B(–6;8), C(4;6).

Решение. Для того чтобы найти длину медианы CK, нужно знать координаты x и y точки K – середины отрезка AB:

$$x = \frac{2-6}{2} = -2, \quad y = \frac{-4+8}{2} = 2.$$

Мы нашли их по формулам $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Зная координаты точек $C(4;6)$ и $K(-2;2)$, найдем $|CK|$:

$$|CK| = \sqrt{(4+2)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}.$$

Ответ. $|CK| = \sqrt{52}.$

2. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(2; –1), B(8;7), C(–10; 5). Найти: 1) длину стороны AB; 2) длину медианы AD; 3) площадь треугольника ABC; 4) длину высоты, проведенной из вершины C.

Решение.

1) Зная координаты точек A(2; –1) и B(8;7), найдем $|AB|$:

$$|AB| = \sqrt{(8-2)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{36+64} = 10.$$

2) найдем координаты точки D – середины отрезка BC:

$$x = \frac{8-10}{2} = -1, \quad y = \frac{7+5}{2} = 6.$$

Зная координаты точек A(2; –1) и $D(-1;6)$, найдем $|AD|$:

$$|AD| = \sqrt{(-1-2)^2 + (6+1)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}.$$

3) Найдем площадь треугольника ABC.

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -12 & 6 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|36+96| = 66.$$

4) Известно, что площадь треугольника ABC можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}|AB||CH|$.

Отсюда, $|CH| = \frac{2S}{|AB|} = \frac{132}{10} = 13{,}2$.

3. Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами А(–1;6), В(7;4), С(6; –1).

Решение. Найдем координаты точки М – середины отрезка АВ:

$$x = \frac{-1+7}{2} = 3, \quad y = \frac{4+6}{2} = 5.$$

Из курса школьной геометрии известно, что медианы треугольника пересекаются в одной точке О и эта точка делит медиану в отношении 2:1, считая от вершины. Рассмотрим медиану СМ. Известны координаты точек С(6; –1) и М(3; 5), а также то, что точка О делит отрезок СМ в отношении 2:1, считая от вершины С. Воспользуемся формулами $x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ деления отрезка в данном отношении. В нашем случае $\lambda = 2$. Имеем: $x = \frac{6+2\cdot 3}{1+2} = 4, \quad y = \frac{-1+2\cdot 5}{1+2} = 3$. Итак, координаты точки О (4; 3).

II.1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1; 2)$ параллельно прямой $3x + 2y - 8 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение заданной прямой в виде $y = -\frac{3}{2}x + 4$. Значит, угловой коэффициент данной прямой $k_1 = -\frac{3}{2}$. Угловые коэффициенты параллельных прямых равны $k_2 = k_1$. Следовательно, угловой коэффициент искомой прямой равен $k_2 = -\frac{3}{2}$. Уравнение искомой прямой находим по формуле $y - y_1 = k_2(x - x_1)$, где $(x_1; y_1)$ – координаты точки А. Получаем: $y - 2 = -\frac{3}{2}(x+1)$, или $3x + 2y - 1 = 0$.

Ответ. Уравнение прямой: $3x + 2y - 1 = 0$.

2. Найти уравнение высоты АК в треугольнике АВС, где А(2;–1), В (–1;–2), С (3;1).

Решение. Найдем сначала уравнение стороны ВС. Используя формулу

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

получаем: $\frac{y+2}{1+2} = \frac{x+1}{3+1}$, откуда $3x - 4y - 5 = 0$ – искомое уравнение. Переписав это уравнение в виде $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$, находим угловой коэффициент прямой ВС $k_1 = \frac{3}{4}$. Угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Следовательно, угловой коэффициент искомой прямой АК равен $k_2 = -\frac{4}{3}$. Уравнение прямой АК находим по формуле $y - y_1 = k_2(x - x_1)$, где $(x_1; y_1)$ – координаты точки А. Получаем: $y + 1 = -\frac{4}{3}(x - 2)$, или $4x + 3y - 5 = 0$.

3. Даны координаты вершин треугольника АВС А(2; –1), В(8;7), С(–10; 5). Найти: 1) уравнение стороны АВ; 2) уравнение высоты, проведенной из вершины С; 3) уравнение медианы АD.

Решение.

1) Зная координаты точек $A(2; -1)$ и $B(8; 7)$, найдем уравнение АВ: $\frac{y+1}{7+1} = \frac{x-2}{8-2}$, откуда $4x - 3y - 11 = 0$ – искомое уравнение. Переписав это уравнение в виде $y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$, находим угловой коэффициент прямой АВ: $k_1 = \frac{4}{3}$.

2) Основание высоты, выходящей из вершины С обозначим буквой Н. Поскольку высота СН перпендикулярна АВ, то угловой коэффициент прямой СН будет равен $-\frac{3}{4}$. Тогда уравнение этой прямой $y - 5 = -\frac{3}{4}(x + 10)$, или $3x + 4y + 10 = 0$.

3) Найдем середину отрезка ВС.

$$x = \frac{8 - 10}{2} = -1, \quad y = \frac{7 + 5}{2} = 6.$$

Таким образом, необходимо написать уравнение прямой проходящей через точки А(2; –1) и $D(-1; 6)$. Используя формулу

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

получаем: $\frac{y+1}{6+1} = \frac{x-2}{-1-2}$, откуда $7x + 3y - 11 = 0$ – искомое уравнение.

4. Вычислить высоту трапеции, основания которой лежат на прямых $3x + 4y - 10 = 0$, $6x + 8y - 45 = 0$.

Решение. Высота трапеции равна расстоянию между указанными прямыми, которое, в свою очередь равно расстоянию от пргоизвольной точки одной из них до другой. Выберем какую-нибудь точку первой прямой. Положив, например, $x=0$, из уравнения $3x+4y-10=0$ найдем $y=\frac{5}{2}$; получим точку $M\left(0;\frac{5}{2}\right)$. Далее, по формуле $d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ вычисляем расстояние от точки $M\left(0;\frac{5}{2}\right)$ до прямой $6x+8y-45=0$. Получаем:

$$d=\frac{|6\cdot 0+8\cdot\frac{5}{2}-45|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{|20-45|}{10}=2{,}5.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что треугольник с вершинами A(–3; –3), B(–1;3), C(11;–1) – прямоугольный.

2. Даны три вершины A(–3; –2), B(–1;3), C(5; 4) параллелограмма ABCD. Найти четвертую вершину D и центр симметрии параллелограмма O.

3. Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами A(–4; 3), B(5;6), C(8; –3).

4. Отрезок, определяемый точками $M_1(-8;-9)$ и $M_2(-3;-4)$, разделен на пять равных частей. Найти координаты точек деления.

5. Вычислить площадь параллелограмма, три вершины которого находятся в точках A(–3; 1), B(–3;4), C(1; 7).

6. Вычислить длину высоты BH в треугольнике ABC, где A(–9;–5), B(4;1), C(3;4).

7. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(4; –3), B(6;5), C(–10; 7). Найти: 1) длину стороны AB; 2) длину высоты, проведенной из вершины C; 3) длину медианы AD; 4) площадь треугольника ABC.

8. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $b=-3$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол $\varphi=\pi/6$.

9. Дано общее уравнение прямой $12x-5y-45=0$. Написать: уравнение с угловым коэффициентом.

10. Какой угол образует с положительным направлением оси абсцисс прямая $2x+2y-5=0$?

11. Найти уравнение медианы CK в треугольнике ABC, где A(2;–4), B(–6;8), C(4;6).

12. Найти площадь треугольника АВС, заключенного между осями координат и прямой $3x-5y-45=0$.

13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку М(2;–3), параллельно прямой 2х – 5у + 7 = 0.

14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку М(–2;5), перпендикулярно к прямой 4х + 7у – 3 = 0.

15. Найти уравнение и длину высоты АК в треугольнике АВС, где А(2;–1), В (–1;–2), С (3;1).

16. Даны координаты вершин треугольника АВС: А(–5;7), В(4;–5), С(9;5). Найти: 1) уравнение стороны АВ; 2) уравнение высоты, проведенной из вершины С; 3) расстояние от вершины С до прямой АВ; 4) уравнение медианы AD.

17. Даны уравнения высот треугольника АВС: $x+y-2=0,\ 9x-3y-4=0$ и координаты вершины А(2;2). Составить уравнения сторон треугольника.

18. Даны координаты вершин треугольника АВС. Найти: 1) длину стороны АВ; 2) уравнение стороны АВ; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины С; 4) расстояние от вершины В до стороны АС; 5) уравнение медианы AD; 6) площадь треугольника АВС.

a) А(8; –1), В(–8;11), С(–1; –13). *b)* А(5; –3), В(1;0), С(17; 2).

Занятие № 3-4. Понятие матрицы. Действия над матрицами. Определители и их свойства. Вычисление определителей. Обратная матрица.

Примеры решения задач

1. Найдите матрицу С=3А–4В, где $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$

Решение.

С=3А–4В=$3\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 9 & 15\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & -8 & 16\\ 0 & 12 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 17 & -1\\ 0 & -9 & -11\end{pmatrix}$.

2. Найдите матрицу С= $4A+2A^T$, если А=$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$.

Решение. 4A=$\begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 20 \end{pmatrix}$, $2A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$, C=4$A$ + $2A^T$=$\begin{pmatrix} 6 & 12 & -2 \\ 12 & 6 & 8 \\ 2 & 10 & 30 \end{pmatrix}$.

3. Найдите AB, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,· $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}.$$

4. Проверить выполняется ли равенство AB=BA, если A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+15 & 0-6 \\ 4-5 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+0 \\ 10-8 & 15+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, AB ≠ BA.

5. Найдите A^3, если A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. A^3 =A·A·A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Найдите матрицу X из уравнения 2A+2X=3B, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. 2X=3B–2A=

$$= 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 9 & -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 19 & -12 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -13 & 18 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & -6{,}5 & 9 \end{pmatrix}.$$

7. Вычислите определитель матрицы А=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - ((-1) \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 2) = = 20 + 12 - 2 - (-15 + 16 + 2) = 27$.

8. Вычислите определитель матрицы А=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Применим правило треугольников вычисления определителя.

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - ((-1) \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 2) = = 20 + 12 - 2 - (-15 + 16 + 2) = 27$.

9. Вычислите определитель матрицы А=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

Для вычисления определителя данной матрицы воспользуемся свойством: определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю – и получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Вычислите определитель матрицы А=$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение.

В данной матрице вторая и третья строки пропорциональны, воспользуемся свойством определителя – определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

11. Вычислить определитель матрицы третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим данный определитель тремя разными способами.

1) разложением по первой строке:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot (10 - 0) - 3 \cdot (30 - 0) + 7 \cdot (24 - 10) = 10 - 90 + 98 = 18.$$

2) разложением по второй строке:

$$|A| = 6 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= -6 \cdot (15 - 28) + 2 \cdot (5 - 35) - 0 \cdot (4 - 15) = 78 - 60 + 0 = 18.$$

Отметим, что последнее третье слагаемое в сумме можно было и не вычислять, так как оно равно нулю.

3) От второй строки отнимем первую, умноженную на 6, а из третьей строки отнимем первую, умноженную на 5. Тем самым, мы получим два нуля в первом столбце и , затем разложим по первому столбцу.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -16 & -42 \\ 0 & -11 & -30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16 & -42 \\ -11 & -30 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} -16 & -7 \\ -11 & -5 \end{vmatrix} = 6(80 - 77) = 18.$$

Ответ. $|A| = 18$.

12. Вычислите определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Вычитая из четвертой строки первую, из третьей – удвоенную первую и прибавляя первую строку ко второй, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам третьего столбца, поскольку третий столбец содержит наибольшее количество нулей:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из первой строки последнего определителя удвоенную вторую и затем разложим полученный определитель по первой строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 3 = -9.$$

Значение определителя равно –9.

13. Найдите матрицу, обратную к матрице А: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{pmatrix}$.

Решение.

1. Находим определитель матрицы А:

$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{vmatrix}=14\neq 0$, следовательно, существует A^{-1}.

Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы А:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 7\end{vmatrix}=-7,\quad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 7\end{vmatrix}=-14,\quad A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 7\end{vmatrix}=6,\quad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix}=-2,\quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=3,\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=6,\quad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1.$$

Определяем A^{-1} по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-7 & -14 & 7\\ 6 & -2 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14}\\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14}\\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14}\end{pmatrix}.$$

2. Проверяем правильность вычислений, используя равенства $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14}\\ \frac{6}{14} & \frac{-2}{14} & \frac{-2}{14}\\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & \frac{-1}{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Аналогично проверяем равенство $A^{-1}A=E$.

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$.

14. Найдите матрицу X из уравнения: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Воспользуемся формулами AX=B, X=A^{-1}B.

1. Сначала найдём определитель матрицы

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}=1\neq 0,$$

следовательно, существует обратная матрица A^{-1}.

2. Найдём эту обратную матрицу A^{-1}:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-2,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-3,\quad A_{31}=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=0,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-3,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=-4.$$

Итак,

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. В итоге найдём искомую матрицу:

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. Вычислите C=A^2+2B, D=3A^T – B^2, K=2A$^T\cdot$B^T.

2. Найдите произведения матриц A и B, где:

а) $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&2&0\\-1&4&-4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&2&-1\\-5&3&5\end{pmatrix}$; г) A=$\begin{pmatrix}1&-2&3\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix}7\\-8\\5\end{pmatrix}$.

б) A=$\begin{pmatrix}3&2&0&-5\\4&3&-5&0\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\\3&2\\2&3\end{pmatrix}$; д) A=$\begin{pmatrix}7\\-8\\5\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix}1&-2&3\end{pmatrix}$.

в) A=$\begin{pmatrix}2&-1&3\\3&-5&0\\4&-7&2\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$;

3. Проверьте, выполняется ли равенство AB=BA, если $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&0&1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\\1&0\end{pmatrix}$.

4. Даны матрицы A и B. Найдите A+B, A–B, AB, BA, 3A, $(BA)^T$, detA, detB.

а) $A=\begin{pmatrix}i&1\\2&3\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}0&2\\1&5\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&-i&0\\-1&0&i\\1&1&-1\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}3&0&i\\1&-1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&2&5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}i&0&3\\1+i&0&6i\\2i&0&1+2i\end{pmatrix}$.

5. Решите уравнение:

а) $\begin{vmatrix}x-1&1\\2&x\end{vmatrix}=0$;

б) $\begin{vmatrix}2&-1&2\\3&5&3\\1&6&5+x\end{vmatrix}=0$;

в) $\begin{vmatrix}2x-2&2x\\2&x^2\end{vmatrix}=0$;

г) $\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3-x&3\\1&2&5+x\end{vmatrix}=0$;

д) $\begin{vmatrix}x&x&x\\-1&0&2\\4&5&7\end{vmatrix}=0$.

6. Найдите матрицу X из уравнения 5A–3X=2B, где $A=\begin{pmatrix}3&0\\-5&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&-2\\0&4\end{pmatrix}$.

7. Предприятие производит продукцию двух видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей $A=\begin{bmatrix}2&3\\1&5\end{bmatrix}$, у которой по строкам указано количество сырья, расходуемого на производство единицы продукции видов 1 и 2. Стоимость единицы сырья каждого типа заданы матрицей B = [70   30]. Каковы общие затраты предприятия на производство 100 усл. ед. продукции первого вида и 150 усл. ед. второго вида?

8. Вычислите определители следующих матриц:

а) A=$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; C=$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

б) B=$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$; D=$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

9. Вычислите определитель матрицы A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, разложив его по элементам: а) четвертой строки; б) второго столбца.

10. Докажите, что $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$=44.

Занятие № 5-6. Форма записи линейных систем. Методы решения систем: матричный, Крамера, Гаусса.

Примеры решения задач

1. Решить систему линейных уравнений при помощи обратной матрицы:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 9, \\ 7x + 8y = -6. \end{cases}$$

Решение.

Запишем систему в матричном виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Сначала найдём определитель матрицы A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \quad .$$

Определитель не равен нулю, значит, данная матрица невырожденная, т.е. имеет обратную. Найдём алгебраические дополнения

$$A_{11}=\begin{vmatrix}5&6\\8&0\end{vmatrix}=-48,\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}2&3\\8&0\end{vmatrix}=24,\qquad A_{31}=\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}4&6\\7&0\end{vmatrix}=42,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1&3\\7&0\end{vmatrix}=-21,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix}=6,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}=-3,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix}=6,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}=-3.$$

Определяем A^{-1} по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}.$$

Итак

$$A^{-1}=\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}-48&24&-3\\42&-21&6\\-3&6&-3\end{pmatrix}=\frac{1}{27}\cdot3\cdot\begin{pmatrix}-16&8&-1\\14&-7&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-16&8&-1\\14&-7&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}.$$

Далее найдём искомую матрицу

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-16&8&-1\\14&-7&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\9\\-6\end{pmatrix}=\frac{3}{9}\begin{pmatrix}-16&8&-1\\14&-7&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}=$$

$\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-6\\3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, то есть: $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$.

2. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}5x_1-7x_2=1,\\3x_1+x_2=11.\end{cases}$$

Решение. Составим определитель системы и найдём его:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5&-7\\3&1\end{vmatrix}=5\cdot1-(-7)\cdot3=5+21=26.$$

Определитель отличен от нуля, следовательно, система имеет единственное решение. Вычислим определители

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1&-7\\11&1\end{vmatrix}=1\cdot1-(-7)\cdot11=1+77=78,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}5&1\\3&11\end{vmatrix}=5\cdot11-1\cdot3=55+3=52.$$

Воспользуемся формулами Крамера

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{78}{26}=3,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{52}{26}=2.$$

Система имеет единственное решение $x_1 = 3, x_2 = 2$.

3. В таблице приведены расценки на проведение работ для каждого вида услуг:

Виды работ	Нормативы по видам оборудования			Полные затраты на эксплуатацию
	Механическое	Тепловое	Энергетическое	
Техническое обслуживание	3	1	4	85
Текущие услуги	2	2	3	82
Капитальный ремонт	10	20	15	580

Найдите расчетные объемы работ (число часов использования оборудования), которые смогут окупить затраты на эксплуатацию.

Решение. Пусть x_1 – количество часов работы механического оборудования, x_2 – теплового оборудования и x_3 –энергетического оборудования, необходимое, чтобы окупить затраты на техническое обслуживание, текущие услуги и капитальный ремонт. Тогда из задачи получается система уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 85, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 82, \\ 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 = 580. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 15 \end{vmatrix} = -10, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 85 & 1 & 4 \\ 82 & 2 & 3 \\ 580 & 20 & 15 \end{vmatrix} = -120,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 85 & 4 \\ 2 & 82 & 3 \\ 10 & 580 & 15 \end{vmatrix} = -170, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 85 \\ 2 & 2 & 82 \\ 10 & 20 & 580 \end{vmatrix} = -80.$$

По формулам Крамера находим решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-120}{-10} = 12, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-170}{-10} = 17, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-80}{-10} = 8.$$

Тогда $X = \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \\ 8 \end{pmatrix}$. Чтобы окупить затраты на эксплуатацию, оборудование должно иметь следующий объем работ: механическое оборудование –12 часов работы; тепловое оборудование – 17 часов; энергетическое оборудование – 8 часов.

4. Решить следующую систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее: первую строку умножаем на (–2) и складываем со второй строкой, далее первую умножаем на (–3) и складываем с третьей, получаем эквивалентную матрицу, в которой работаем со второй и третьей строками:

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&5\\2&-3&2&-3\\3&-2&1&7\end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&5\\0&-5&8&-13\\0&-5&8&-8\end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&5\\0&-5&8&-13\\0&0&0&5\end{array}\right].$$

Последней матрице соответствует следующая система, равносильная исходной:

$$\begin{cases}x_1+\quad x_2-3x_3=\quad 5,\\ \qquad -5x_2+8x_3=-13,\\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=\quad 5.\end{cases}$$

Эта система уравнений решений не имеет, так как уравнение $0x_1+0x_2+0x_3=5$, не имеет решений.

5. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=3,\\2x_1+x_2+x_3=11,\\x_1+x_2+2x_3=8.\end{cases}$$

Решение. Представим систему в матричном виде AX=B, где

матрица A $=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}$, матрица X $=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$, матрица B $=\begin{bmatrix}3\\11\\8\end{bmatrix}$.

Вычислим определитель матрицы A, detA $=5\neq 0$ (проверить самостоятельно**)**, таким образом, матрица A невырожденная и существует обратная матрица A^{-1} вида (проверить самостоятельно):

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}1&3&-2\\-3&1&1\\1&-2&3\end{bmatrix}.$$

По формуле $X=A^{-1}B$ найдем марицу

$$X=\frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}1&3&-2\\-3&1&1\\1&-2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\11\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\\1\end{bmatrix}.$$

Таким образом $x_1=4$, $x_2=2$, $x_3=1$.

6. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases}x_1+x_2+4x_3-7x_4=1,\\2x_1-3x_2-3x_3-x_4=-5,\\-x_1+x_2+x_3-2x_4=12,\\3x_1-x_2+2x_3-10x_4=8.\end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&4&-7&1\\2&-3&-3&-1&-5\\-1&1&1&-2&12\\2&-1&2&-10&8\end{array}\right).$$

Прибавим к второй строке системы первую строку, умноженную на (–2), к третьей –первую строку, умноженную на 1, а к четвертой –первую строку, умноженную на (–2), и получим матрицу

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 4 & -7 & 1\\ 0 & -5 & -11 & 13 & -7\\ 0 & 2 & 5 & -9 & 13\\ 0 & -3 & -6 & 4 & 6\end{array}\right).$$

Сложим третью и четвертую строки системы:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 4 & -7 & 1\\ 0 & -5 & -11 & 13 & -7\\ 0 & 2 & 5 & -9 & 13\\ 0 & -1 & -1 & -5 & 19\end{array}\right).$$

Поменяем вторую и четвертую строки местами, и вторую строку разделим на (–1):

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 4 & -7 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 5 & -19\\ 0 & 2 & 5 & -9 & 13\\ 0 & -5 & -11 & 13 & -7\end{array}\right).$$

Прибавим к третьей и четвертой строкам системы вторую строку, умноженную на (–2) и 5 соответственно,и получим матрицу

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 4 & -7 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 5 & -19\\ 0 & 0 & 3 & -19 & 51\\ 0 & 0 & -6 & 38 & -102\end{array}\right).$$

Прибавим к четвертой строке системы третью строку, умноженную на 2, и получим матрицу

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 4 & -7 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 5 & -19\\ 0 & 0 & 3 & -19 & 51\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Данная система совместна и имеет бесконечное множество решений. Выразим переменные x_1, x_2, x_3 через переменную x_4:

$$\begin{cases}x_1+x_2+4x_3-7x_4=1,\\ x_2+x_3+5x_4=-19,\\ 3x_3-19x_4=51.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-(x_2+4x_3-7x_4)+1,\\ x_2=-(x_3+5x_4)-19,\\ x_3=\frac{19}{3}x_4+17.\end{cases}$$

Подставим выражение для переменной x_3 во второе уравнение и найдем x_2:

$$x_2=-19-(x_3+5x_4)=-19-\left(17+\frac{19}{3}x_4+5x_4\right)=-36-\frac{34}{3}x_4.$$

Из первого уравнения находим x_1:

$$x_1=1-(x_2+4x_3-7x_4)=1-\left(-36-\frac{34}{3}x_4+4\cdot\left(17+\frac{19}{3}x_4\right)-7x_4\right)=-31-7x_4.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} -31-7x_4 \\ -36-\frac{34}{3}x_4 \\ 17+\frac{19}{3}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

где x_4 может принимать любые действительные значения.

7. Средняя численность населения трех областей республики Беларусь составляет 4500 тыс. человек. Согласно наблюдениям население этих трех областей возрастает с ежегодным коэффициентом прироста в 4, 7 и 3% для 1-й, 2-й и 3-й областей соответственно. Установлено, что общий прирост населения за первый год составит 200 тыс. человек и что прирост населения в первой области равен приросту населения в третьей. Найдите начальные численности населения в каждой из трех областей.

Решение. Пусть x_1 – начальная численность населения в первой области, x_2 – во второй области, x_3 –в третьей области. Тогда

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4500, \\ 0{,}04x_1+0{,}07x_2+0{,}03x_3=200, \\ 0{,}04x_1-0{,}03x_3=0. \end{cases}$$

Решим полученную систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Для этого составим расширенную матрицу системы и выполним над ее строками следующие элементарные преобразования:

1) вторую и третью строки матрицы умножим на 100;

2) ко второй и третьей строкам матрицы прибавим первую, умноженную на (–4);

3) к третьей строке матрицы прибавим вторую, умноженную на $\frac{4}{3}$:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4500 \\ 0{,}04 & 0{,}07 & 0{,}03 & 200 \\ 0{,}04 & 0 & -0{,}03 & 0 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4500 \\ 4 & 7 & 3 & 20000 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)\approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4500 \\ 0 & 3 & -1 & 2000 \\ 0 & -4 & -7 & -18000 \end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4500 \\ 0 & 3 & -1 & 2000 \\ 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{46000}{3} \end{array}\right).$$

По полученной в результате проведенных преобразований матрице составим систему:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4500, \\ 3x_2-x_3=2000, \\ -\frac{25}{3}x_3=-\frac{46000}{3}. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы находим x_3=1840, второе уравнение дает

$$x_2 = \frac{1}{3}(2000 + x_3) = \frac{1}{3}(2000 + 1840) = 1280,$$

а из первого уравнения получим

$$x_1 = 4500 - (x_2 + x_3) = 4500 - (1280 + 1840) = 1380.$$

Таким образом, первоначальная численность населения составляет 1380 тыс. человек в первой области, 1280 тыс. человек во второй области и 1840 тыс. человек в третьей области.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить систему линейных уравнений при помощи обратной матрицы:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y - 6z = -1, \\ 3x - 2y = 8. \end{cases}$

2. Решите матричные уравнения:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; d) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений при помощи обратной матрицы:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y - 6z = -1, \\ 3x - 2y = 8. \end{cases}$

4. Решите матричные уравнения:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

5. Решите системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера, методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ x + y - z = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y - 6z = -1, \\ 3x - 2y = 8; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} -x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + z = 2, \\ 3x + y - 3z = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 9x+2y=3, \\ 7x-2y=13; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 4x-y+2z=7, \\ x+y+2z=3, \\ -x+3y-3z=1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x+9y=2, \\ 6x+7y=10; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x-2y+z=1, \\ 2x-y+z=4, \\ 3x+2y-3z=5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+2y-z=4, \\ 2x+y+z=5, \\ x-z=0; \end{cases}$

к) $\begin{cases} 3x-2y-z=-1, \\ x+2y+4z=11, \\ 2x+4y-3z=0. \end{cases}$

6. Решите системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 4x_1+x_2-x_4=-9, \\ x_1-3x_2+4x_3=-7, \\ 3x_2-2x_3+4x_4=12, \\ x_1+2x_2-x_3-3x_4=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x-y+2z=2, \\ 4x-3y+3z=3, \\ x+3y=0, \\ 5x+3z=3. \end{cases}$

7. Решите систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4-x_5=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4+2x_5=-3, \\ x_1+2x_2-4x_4=-3, \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22, \\ x_1-2x_2-x_3+x_5=2. \end{cases}$$

8. Предприятие выпускает три вида изделий, используя при этом сырье трех типов. Нормы расхода сырья по видам изделий указаны в таблице.

Тип сырья	Норма расхода сырья на одно изделие по видам		
	1-й вид	2-й вид	3-й вид
I	4	5	6
II	1	2	3
III	0	1	4

9. Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида, если известно, что запас сырья I типа составляет 5500 единиц, II типа – 2050 единиц, III – 1400 единиц. Указанные запасы сырья должны быть использованы полностью.

10. Иванов, Петров и Сидоров купили продукты трех видов соответственно 2, 5 и 4 кг; 6, 2 и 3 кг; 1, 4 и 7 кг. Иванов уплатил 27 ден. ед., Петров – 23,5 ден. ед. и Сидоров – 34 ден. ед. Найдите цены этих продуктов.

Занятие № 7-9. Функция одной переменной. Понятие о предельном значении функции. Геометрическая интерпретация. Вычисление пределов. Непрерывность (разрывность) функции в точке.

Примеры решения задач

1. Доказать по определению, что $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=7.$

Решение.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем δ=δ(ε)>0 такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-2|<\delta,$ выполняется неравенство $|f(x)-7|=|(3x+1)-7|=|3x-6|<\varepsilon,$ т. е. $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{3}.$ Положив $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3},$ видим, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $0<|x-2|<\delta\left(\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}\right),$ выполняется неравенство $|(3x+1)-7|<\varepsilon.$ Следовательно, $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=7.$

2. Доказать по определению, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

Решение.

При $x\neq 1$ $f(x)=x+1.$ Возьмем произвольное $\varepsilon>0.$ Неравенство $|(x+1)-2|<\varepsilon$ выполняется, если $0<|x-1|<\varepsilon,$ т. е. $\delta=\varepsilon$, и $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}.$

3. Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)=2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3=2\cdot 2+3=7.$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(9x^2-6x+8\right)=\lim\limits_{x\to 1}9x^2-\lim\limits_{x\to 1}6x+\lim\limits_{x\to 1}8=$

$=9\lim\limits_{x\to 1}x^2-6\lim\limits_{x\to 1}x+8==9\cdot 1^2-6\cdot 1+8=9-6+8=11.$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x}{2x+1}.$

Решение.

Пределы числителя и знаменателя существуют. Убедимся, что предел знаменателя отличен от 0: $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1=2\cdot 2+1=5.$ Тогда применимо свойство о пределе частного:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+3x\right)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^2+3\lim\limits_{x\to 2}x}{2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1}=\frac{2^2+3\cdot 2}{2\cdot 2+1}=\frac{10}{5}=2.$$

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{2}{3}.$

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, заданную отношением двух многочленов, необходимо разложить многочлены на множители, сократить на множитель, равный нулю при предельном значении x, а затем перейти к пределу.

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)=6\cdot 4=24.$$

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, в которой числитель (или знаменатель) содержит иррациональность, следует избавиться от иррациональности, домножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное к числителю (или знаменателю).

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+6x-3}{9x^3+8x^2-2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{7}{x}+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}{9+\dfrac{8}{x}-\dfrac{2}{x^3}}=\dfrac{0}{9}=0.$

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, заданную отношением двух многочленов, надо числитель и знаменатель разделить на самую высокую входящую в них степень x, а затем перейти к пределу.

7. При нахождении пределов могут встретиться неопределенности вида $[\infty-\infty]$ и $[0\cdot\infty]$. Эти случаи путем преобразования функции приводятся к неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

7.1. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

7.2. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right) = 1.$

8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-6x+8}$.

Решение.

Если $x\to\infty$, то числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности и мы имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Выносим за скобки старшую степень переменной x и сокращаем на общий множитель:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x+8} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2})}{x^2(\frac{2x^2}{x^2}-\frac{6x}{x^2}+\frac{8}{x^2})} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{2-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x^2}} = \frac{1-0+0}{2-0+0} = \frac{1}{2}.$$

9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{-x^2+3x-2}$.

Решение.

Предел числителя и знаменателя равен нулю, имеем неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{-x^2+3x-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x-2)}{-(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(1-x)} = \frac{2-3}{1-2} = 1.$$

8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-1}{2x+1}$.

Решение.

Так как пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя отличен от нуля, то воспользуемся теоремой о пределах частного:

$$\lim_{x\to 5}\frac{3x^2-1}{2x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 5}(3x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 5}(2x+1)} = \frac{3\lim\limits_{x\to 5}x^2-\lim\limits_{x\to 5}1}{2\lim\limits_{x\to 5}x+\lim\limits_{x\to 5}1} = \frac{3\cdot 5^2-1}{2\cdot 5+1} = \frac{74}{11}.$$

9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4}$.

Решение.

Предел числителя и знаменателя равен нулю, имеем неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+5}{x+2}=\frac{2+5}{2+2}=\frac{7}{4}.$$

10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 4x}$.

Решение.

Вычислим этот предел с помощью первого замечательного предела: (Известно, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}=1$).

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 4x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 4x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot x}{4\cdot\sin 4x}=\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}=$$

$$\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin 4x}{4x}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{4}.$$

11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$.

Решение.

Вычислим этот предел с помощью второго замечательного предела: ($\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e\approx 2{,}71$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$).

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{3}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{3}=e^3.$$

12. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{x}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x+2}{x-3}$ на x, сведем данный предел к частному пределов из предыдущего примера:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{3}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{3}=e^{3}.$$

13. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$.

Решение.

Воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot tgx\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1\cdot$$

14. Доказать, что функция $\frac{7}{2x+5}$ является бесконечно малой при x→∞.

Решение. Вычислим $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{2x+5}$. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+5)=\infty$, то (2x+5) есть бесконечно большая величина, а обратная ей величина есть бесконечно малая. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{2x+5}=7\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x+5}=7\cdot 0=0$, следовательно, функция $\frac{7}{2x+5}$ является бесконечно малой при x→∞.

15. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$.

Решение. Сделаем замену x=2t, и воспользуемся вторым замечательным пределом, тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{2}=e^{2}.$$

16. Функция $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ непрерывна в точке $x_0=0$, так как она определена в этой точке, имеет в ней предел и

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=f(0).$$

17. Функция $f(x)=\begin{cases}x, & x\leq 2,\\ x+2, & x>2\end{cases}$ определена в точке $x_0=2$, но не имеет предела в этой точке (рис. 3.13, а), поскольку

$$\lim_{x\to 2-0}f(x)=2\neq 4=\lim_{x\to 2+0}f(x).$$

Следовательно, она не является непрерывной в точке $x_0=2$.

18. Функция $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 2, \\ 1, & x=2 \end{cases}$ определена в точке $x_0=2$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$, но не является непрерывной в этой точке, поскольку $f(2)=1\neq \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ (см. рис. , 44б).

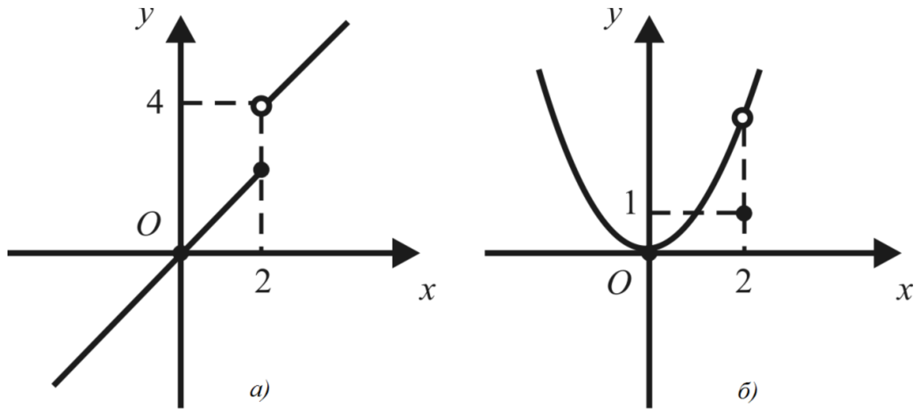


Рис. 44

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+6x-5x^2}{x^3+x^2+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{5x^3+2x^2-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3}{2x^3+3x+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{5x^3+2x^2-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3}{2x^3+3x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{3x^2-5}+\dfrac{x^2}{3x^2+1}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$.

2. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+6x-27}{x^2-2x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-x^2+x}{2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; 6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x}{x^2+4x-12}$; 8) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$; 9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-11x+28}{x^2-5x+4}$.

3. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-5x-6}{\sqrt{x-2}-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2+2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+x-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{64-x^2}{\sqrt{x+8}-4}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2-5x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{10-x}-3}{\sqrt{5-x}-2}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+8x}-3}{\sqrt{4x}-2}$.

4. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{\sin bx}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)}{x^2-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{5-\sqrt{x+25}}$; 7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^3-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+4}-2}$; 9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^3-8}$.

5. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+n}{x+m}\right)^x$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-4}\right)^x$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^x$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+3x}{3x}\right)^{x-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

Занятие № 10-11. Производная функции одной переменной. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций. Правило Лопиталя-Бернулли.

Примеры решения задач

1. Найдите по определению производную функции $f(x)=x^2$ в точке x.

Решение. Воспользуемся формулой $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Имеем:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+\left(\Delta x\right)^2-x^2=2x\Delta x+\left(\Delta x\right)^2;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+\left(\Delta x\right)^2}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}=2x+\Delta x;$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Таким образом, $f'(x)=\left(x^2\right)'=2x$.

2. Найдите производные следующих функций

1) $y=2x^3-4x^2+5x-3$; 2) $y=(2x+3)\sin x$; 3) $y=\dfrac{x^3}{\cos x}$;

4) $y=\dfrac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$; 5) $y=\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение. 1) $y'=\left(2x^3-4x^2+5x-3\right)'=\left(2x^3\right)'-\left(4x^2\right)'+\left(5x\right)'-\left(3\right)'=$

$=2\left(x^3\right)'-4\left(x^2\right)'+5\left(x\right)'=6x^2-8x+5;$

2) $y'=\left((2x+3)\sin x\right)'=\left(2x+3\right)'\sin x+\left(2x+3\right)\left(\sin x\right)'=2\sin x+\left(2x+3\right)\cos x$;

3) $y'=\left(\dfrac{x^3}{\cos x}\right)'=\dfrac{\left(x^3\right)'\cos x-x^3\left(\cos x\right)'}{\left(\cos x\right)^2}=\dfrac{3x^2\cos x-x^3\left(-\sin x\right)}{\left(\cos x\right)^2}=$

$=\dfrac{x^2(3\cos x+x\sin x)}{\cos^2 x}$;

4) Преобразуем исходную функцию к следующему виду:

$$y=\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2x\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}=2x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=2x^{\frac{7}{6}},$$

$$y'=\left(2x^{\frac{7}{6}}\right)'=2\cdot\frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}-1}=\frac{7}{3}x^{\frac{1}{6}}=\frac{7}{3}\sqrt[6]{x};$$

5) Преобразуем исходную функцию к следующему виду $y=\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}}=4\cdot x^{-\frac{2}{3}}$, тогда

$$y'=\left(4\cdot x^{-\frac{2}{3}}\right)'=4\cdot\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'=4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1}=-\frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{8}{3x^{\frac{5}{3}}}=-\frac{8}{3x\cdot\sqrt[3]{x^2}}.$$

4. Составьте уравнение касательной к параболе $y=x^2+x$ в точке x=2.

Решение. Уравнение касательной имеет вид $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Найдем ординату в точке $x_0=2$: $f(x_0)=f(2)=2^2+2=6$.

Далее найдём производную $y'=f'(x)=(x^2+x)'=2x+1$, и её значение в точке $f'(2)=2\cdot 2+1=5$. Таким образом, $y=5(x-2)+6$. Уравнение касательной: $y=5x-4$.

5. Найти производную функции $y=(2x+1)^5$.

Решение. Записываем: $y'=((2x+1)^5)'$. Многочлен $2x+1$ – это внутренняя функция, а степенная функция – это внешняя функция.

Согласно формуле $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$, сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. Разыскиваем в таблице нужную формулу: $((x)^n)' = nx^{n-1}$. Получаем:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2x+1)'.$$

Теперь осталось найти производную от внутренней функции:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2x+1)' =$$
$$= 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2+0) = 10(2x+1)^4.$$

6. Найти производную функции $y = -\dfrac{1}{\cos x}$.

Здесь можно использовать правило дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, но удобнее найти производную через правило дифференцирования сложной функции: $y' = \left(-\dfrac{1}{\cos x}\right)'$.

Сначала выполним несложные преобразования: $y' = \left(-\dfrac{1}{\cos x}\right)' = -(\cos^{-1} x)'$.

Косинус – внутренняя функция, возведение в степень – внешняя функция. Используем правило $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$y' = -(\cos^{-1} x)' = -(-1) \cdot (\cos^{-2} x) \cdot (\cos x)'.$$

Находим производную внутренней функции, косинус записываем обратно в знаменателе:

$$y' = -(\cos^{-1} x)' = -(-1) \cdot (\cos^{-2} x) \cdot (\cos x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

7. Найти четвертую производную функции

$$y = x^7 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 4.$$

Решение. Последовательным дифференцированием находим:

$$y' = 7x^6 - 15x^2 + 4x - 3, \quad y'' = 42x^5 - 30x + 4,$$
$$y''' = 210x^4 - 30, \quad y^{(4)} = 840x^3.$$

8. Найти производную n-го порядка функции $y = e^{2x}$.

Решение. Находим:

$$y' = 2e^{2x}, \quad y'' = 2^2 e^{2x}, \quad y''' = 2^3 e^{2x}, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = 2^n e^{2x}.$$

9. Найти производную 41-го порядка функции $y = \sin 3x$.

Решение. Находим:

$$y' = (\sin 3x)' = 3\cos 3x,$$

$$y'' = (3\cos 3x)' = -3^2 \sin 3x,$$

$$y''' = (-3^2 \sin 3x)' = -3^3 \cos 3x,$$

$$y^{(4)} = \left(-3^3 \cos 3x\right)' = 3^4 \sin 3x,$$

$$y^{(5)} = \left(3^4 \sin 3x\right)' = 3^5 \cos 3x.$$

$$\ldots$$

$$y^{(41)} = 3^{41} \cos 3x.$$

10. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \cos x - 1}{x^2 + 5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \sin 2x}{x^3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{\ln x}$.

Решение. Применяя правило Лопиталя-Бернулли, получаем.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \cos x - 1}{x^2 + 5x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(e^x \cos x - 1\right)'}{\left(x^2 + 5x\right)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \cos x - e^x \sin x}{2x + 5} = \dfrac{1}{5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \sin 2x}{x^3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - 2\cos 2x}{3x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\sin 2x}{6x} =$

$= \dfrac{4}{3} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} = \dfrac{4}{3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{\ln x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^3}{1} = 3.$

11. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \mathrm{ctg} x\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to +0} x^x$.

Решение.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = [\infty \cdot 0] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = 1$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \mathrm{ctg} x\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x \sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos x + x \sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{\sin x + x\cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + x\cos x}{2\cos x - x\sin x} =$

$\dfrac{0}{2} = 0$;

3) $\lim\limits_{x\to +0} x^x = [0^0] = \lim\limits_{x\to +0} e^{x \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to +0} x \ln x} = e^0 = 1.$

12. Найдите промежутки возрастания и убывания функции угол $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Решение. Данная функция определена на всей числовой прямой. Найдем ее производную:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Таким образом, $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$. Следовательно, функция возрастает на интервалах $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ и убывает на интервале $x \in (-1; 1)$.

13. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ на промежутке [0;2].

№	План нахождения $y_{наим}$ и $y_{наиб}$ на промежутке [a, b]	Применение плана
1	Находим производную функции, т.е. y'	$y'(x) = 4x^3 - 4x$.
2	Находим критические точки функции	$y'(x) = 0$, $4x^3 - 4x = 0$, $4x(x^2 - 1) = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ – критические точки функции.
3	Выбираем критические точки, лежащие внутри данного промежутка [a, b]	$0 \in [0,2]$, $1 \in [0,2]$, $-1 \notin [0,2]$.
4	Находим значения функции в критических точках (принадлежащих промежутку) и на концах промежутка	$y(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 - 3 = -3$, $y(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 - 3 = -4$, $y(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^2 - 3 = 5$.
5	Из найденных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее	$y_{наим} = y(1) = -4$, $y_{наиб} = y(2) = 5$.

14. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^2 + 3}$

Решение.

1) Поскольку знаменатель положителен, то функция непрерывна на всей числовой прямой, и вертикальные асимптоты отсутствуют.

2) Проверим наличие наклонных асимптот:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{2x^2+3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(2x^2+3)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2x^2+3} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{2x^2+3}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2 + \frac{3}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Первый предел конечен, поэтому вычисляем дальше. В ходе вычисления второго предела для устранения неопределённости «бесконечность минус бесконечность» приводим выражение к общему знаменателю:

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2+3}-\frac{1}{2}\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-x\cdot(2x^2+3)}{2(2x^2+3)}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-2x^3-3x}{2(2x^2+3)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x}{2x^2+3}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-3x}{x^2}}{\frac{2x^2+3}{x^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-3}{x}}{2+\frac{3}{x^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{2+0}=0.$$

Второй предел тоже конечен, следовательно, у графика рассматриваемой функции существует наклонная асимптота: $y=kx+b;\ y=\frac{1}{2}\cdot x+0;\ y=\frac{x}{2}.$

Таким образом, при $x\to\pm\infty$ график функции $f(x)=\frac{x^3}{2x^2+3}$ бесконечно близко приближается к прямой $y=\frac{x}{2}$ (см. рис.44):

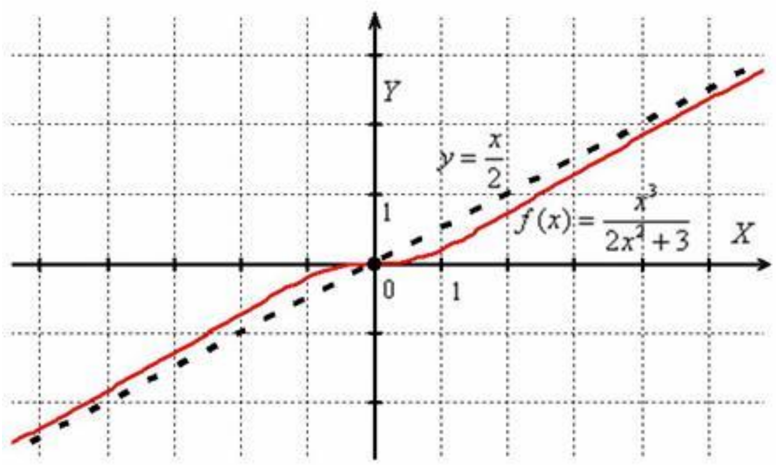


Рис.44

График функции пересекает свою наклонную асимптоту в начале координат, и такие точки пересечения вполне допустимы – важно, чтобы «всё было нормально» на бесконечности (собственно, речь об асимптотах и заходит именно там).

15. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\frac{x^2}{1-x}$

1) Вертикальные асимптоты. Исследуем точку $x=1$.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{1-x} = \lim_{x\to 1-0}\frac{(1-0)^2}{1-(1-0)} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{1-x} = \lim_{x\to 1+0}\frac{(1+0)^2}{1-(1+0)} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

Прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой для графика $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$ при $x\to 1$.

2) Наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{1-x}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{1-x}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-1}=-1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{x^2}{1-x}-(-1)\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x(1-x)}{1-x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-x^2}{1-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{1-x}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-1}=\frac{1}{-1}=-1.$$

Прямая $y=kx+b;\ y=(-1)\cdot x-1;\ y=-x-1$ является наклонной асимптотой для графика $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$ при $x\to\pm\infty$.

Ответ: $x=1;\ y=-x-1$.

16. Найти интервалы возрастания/убывания и экстремумы функции

$$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+3x^2-5x-1$$

Решение.

1) На первом шаге нужно найти область определения функции, а также точки разрыва (если они существуют). В данном случае функция непрерывна на всей числовой прямой.

2) Находим производную и решаем уравнение $f'(x_0)=0$:

$$f'(x)=(-\frac{1}{3}x^3+3x^2-5x-1)'=-\frac{1}{3}\cdot 3x^2+3\cdot 2x-5-0=-x^2+6x-5.$$

Получилось обычное квадратное уравнение:

$f'(x) = -x^2 + 6x - 5 = 0;\ D = 16 > 0$, $x = 1,\ x = 5$ – его корни. Итак, $x = 1,\ x = 5$ – критические точки.

3) На числовой прямой нужно отложить точки разрыва функции, критические точки и определить знаки производной на интервалах, которые входят в область определения функции.

В рассматриваемом примере функция непрерывна на **R**, поэтому рассматриваем только найденные критические точки.

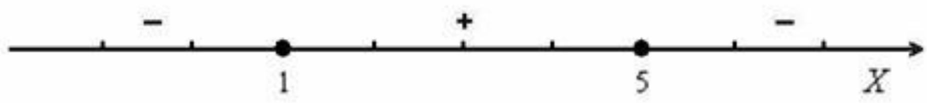
Перед нами парабола $f'(x) = -x^2 + 6x - 5 = -(x-1)(x-5)$, ветви которой направлены вниз. Отложим на числовой прямой найденные критические точки:

I) Берём какую-нибудь точку интервала $(-\infty;1)$ и находим значение производной в данной точке. Удобнее всего выбрать $x = 0$: $f'(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 - 5 < 0$, значит, производная отрицательна на всём интервале $(-\infty;1)$.

II) Выбираем точку $x = 2$, принадлежащую интервалу $(1;5)$, и проводим аналогичное действие: $f'(2) = -2^2 + 6 \cdot 2 - 5 = 3 > 0$, следовательно, $f'(x) > 0$ на всём интервале $(1;5)$.

III) Вычислим значение производной в наиболее удобной точке $x = 6$ последнего интервала: $f'(6) = -6^2 + 6 \cdot 6 - 5 = -5 < 0$, поэтому $f'(x) < 0$, в любой точке интервала $(5;+\infty)$.

В результате получены следующие знаки производной:



Итак, на интервалах $(-\infty;1)$, $(5;+\infty)$ производная отрицательна, значит, сама функция $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x - 1$ на данных интервалах убывает, и её график идёт «сверху вниз». На среднем интервале $f'(x) > 0$, значит, функция возрастает на $(1;5)$, и её график идёт «снизу вверх».

При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с «–» на «+», следовательно, в этой точке функция достигает минимума:

$$f(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 1 = -\frac{1}{3} + 3 - 5 - 1 = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}$$

При переходе же через точку $x = 5$ производная меняет знак с «+» на «–», и функция достигает максимума в данной точке:

$$f(5)=-\frac{1}{3}\cdot 5^3+3\cdot 5^2-5\cdot 5-1=-\frac{125}{3}+75-25-1=\frac{-125+49\cdot 3}{3}=\frac{22}{3}=7\frac{1}{3}$$

Ответ: функции возрастает на интервале $(1;5)$ и убывает на интервалах $(-\infty;1)$, $(5;+\infty)$. В точке $x=1$ функция достигает минимума: $f(1)=-3\frac{1}{3}$, а в точке $x=5$ – максимума: $f(5)=7\frac{1}{3}$ (см.рис.45).

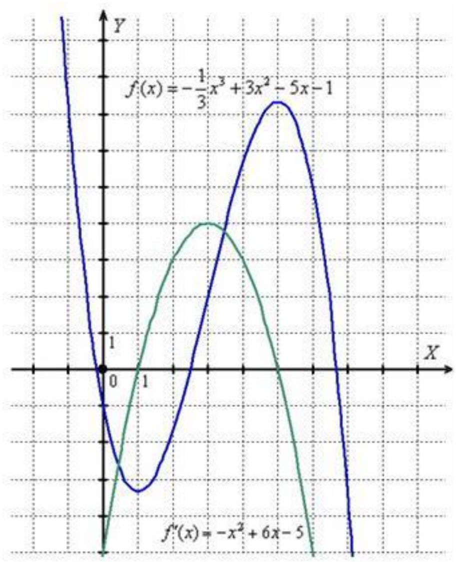


Рис.45

На первом этапе мы нашли производную $f'(x)=-x^2+6x-5$ и критические точки $x=1, x=5$ (в которых парабола пересекает ось абсцисс). Затем методом интервалов было установлено, где $f'(x)<0$ (парабола ниже оси) и $f'(x)>0$ (парабола выше оси). Таким образом, с помощью производной мы узнали интервалы возрастания/убывания и экстремумы «синей» функции.

17. Исследовать функцию с помощью первой производной $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$.

Решение.

1) Функция терпит бесконечные разрывы в точках $x=-1, x=1$.

2) Определяем критические точки. Найдём первую производную и приравняем её к нулю:

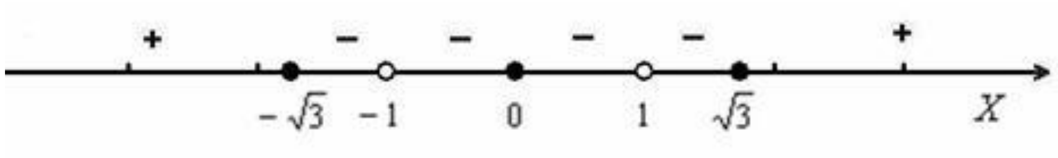
$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)'=\frac{(x^3)'(x^2-1)-(x^3)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=$$

$$\frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}=0.$$

Решим уравнение $f'(x)=0$. Дробь равна нулю, когда её числитель равен нулю: $x^2(x^2-3)=0$.

Таким образом, получаем три критические точки: $x=-\sqrt{3},\ x=0,\ x=\sqrt{3}$

1) Откладываем на числовой прямой все обнаруженные точки и методом интервалов определяем знаки производной:



Итак, знаки производной показывают нам, что сама функция $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ возрастает на $(-\infty;-\sqrt{3}),(\sqrt{3};+\infty)$ и убывает на $(-\sqrt{3};-1),(-1;1),(1;\sqrt{3})$.

В точке $x=-\sqrt{3}$ функция достигает максимума:

$$f(-\sqrt{3})=\frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2-1}=\frac{-3\sqrt{3}}{3-1}=\frac{-3\sqrt{3}}{2}\approx-2,6$$

В точке $x=\sqrt{3}$ функция достигает минимума:

$$f(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2,6$$

При переходе через точку $x=0$ производная не меняет знак, поэтому у функции там нет экстремума – она как убывала, так и осталась убывающей.

Точки $x=-1,\ x=1$ не считаются критическими – в них функция не определена. Соответственно, здесь экстремумов не может быть в принципе (даже если производная меняет знак).

Ответ: функция возрастает на $(-\infty;-\sqrt{3}),(\sqrt{3};+\infty)$ и убывает на $(-\sqrt{3};-1),(-1;1),(1;\sqrt{3})$. В точке $x=-\sqrt{3}$ достигается максимум функции: $f(-\sqrt{3})=\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$, а в точке $x=\sqrt{3}$ – минимум: $f(\sqrt{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

У графика функции $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ есть две вертикальные асимптоты $x=-1,\ x=1$ и наклонная асимптота $y=x$.

График данной функции изображен на рис. 46.

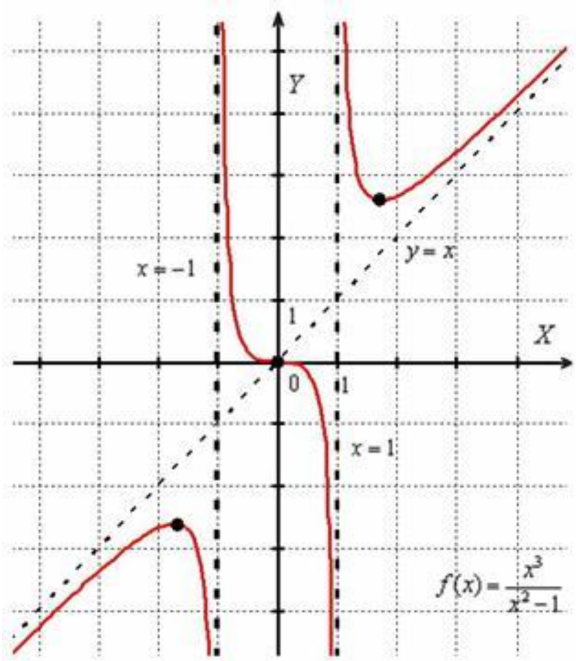


Рис.46

В критической точке $x = 0$ экстремума нет, но существует перегиб графика (что, как правило, и бывает в похожих случаях).

18. Найти интервалы выпуклости вверх, вниз и точки перегиба графика

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{4} + 2$$

Решение:

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой.

2) Найдём вторую производную. Можно предварительно выполнить возведение в куб, но удобнее использовать правило дифференцирования сложной функции:

$$f'(x) = \left(\frac{(x-1)^3}{4} + 2\right)' = \frac{1}{4}((x-1)^3)' + 2' = \frac{1}{4}3(x-1)^2(x-1)' + 0 = \frac{3}{4}(x-1)^2$$

Заметим, что $f'(x) = \frac{3}{4}(x-1)^2 \geq 0$, а значит, функция является неубывающей.

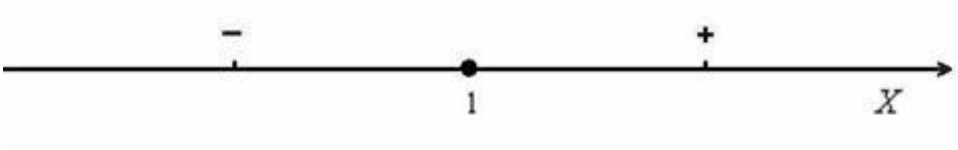
$$f''(x) = \left(\frac{3}{4}(x-1)^2\right)' = \frac{3}{4} \cdot 2(x-1)^1(x-1)' = \frac{3}{2}(x-1).$$

Найдём критические точки второй производной: $f''(x) = 0$; $\frac{3}{2}(x-1) = 0$; $x = 1$ – критическая точка.

3) Проверим выполнение достаточного условия перегиба. Определим знаки второй производной на полученных интервалах $(-\infty;1), (1;+\infty)$.

Используем метод интервалов. $f''(0)=\frac{3}{2}(0-1)=-\frac{3}{2}<0$, следовательно, $f''(0)<0$ в любой точке интервала $(-\infty;1)$. Из интервала $(1;+\infty)$ возьмём значение $x=2$ и проведём аналогичное действие: $f''(2)=\frac{3}{2}(2-1)=\frac{3}{2}>0$, а значит, $f''(2)>0$ и на всём интервале $(1;+\infty)$.

В результате получены следующие знаки второй производной:



Таким образом, график самой функции $f(x)=\frac{(x-1)^3}{4}+2$ является выпуклым вверх на интервале $(-\infty;1)$ и выпуклым вниз на $(1;+\infty)$.

При переходе через $x=1$ вторая производная меняет знак, поэтому в данной точке существует перегиб графика, причем $f(1)=\frac{(1-1)^3}{4}+2=2$.

Ответ: график функции является выпуклым вверх на интервале $(-\infty;1)$ и выпуклым вниз на $(1;+\infty)$, в точке $(1;2)$ существует перегиб графика.

19. Найти интервалы выпуклости вверх, вниз и точки перегиба графика $f(x)=x^2e^x$.

Решение.

1) Функция определена и непрерывна на **R**.

2) Найдём критические точки второй производной:

$$f'(x)=(x^2e^x)'=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'=2xe^x+x^2e^x=e^x(2x+x^2).$$

$$f''(x)=(e^x(2x+x^2))'=(e^x)'(2x+x^2)+e^x(2x+x^2)'=$$

$$=e^x(2x+x^2)+e^x(2+2x)=e^x(2x+x^2+2+2x)=e^x(4x+x^2+2).$$

Так как $e^x>0$, то корни могут появиться только из решения квадратного уравнения: $x^2+4x+2=0$, $D=16-8=8$.

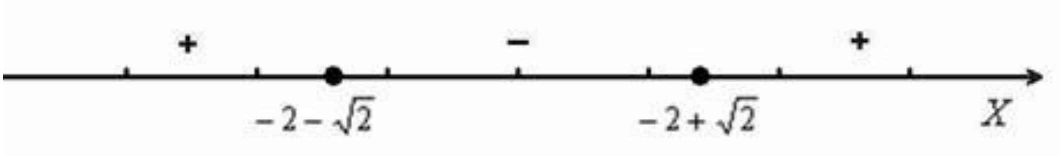
Дискриминант положителен, поэтому имеем две критические точки:

$\sqrt{D}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$;

$$x=\frac{-4-2\sqrt{2}}{2}=-2-\sqrt{2}\approx-3{,}41;$$

$$x=\frac{-4+2\sqrt{2}}{2}=-2+\sqrt{2}\approx-0{,}59$$

3) Определим знаки второй производной. Можно использовать стандартный метод интервалов, но здесь $e^x > 0$, и учитывая, что $y = x^2 + 4x + 2$ – парабола, ветви которой направлены вверх, получаем:



Таким образом, график функции $f(x) = x^2 e^x$ является выпуклым вверх на интервале $(-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2})$ и выпуклым вниз на $(-\infty; -2-\sqrt{2}) \cup (-2+\sqrt{2}; +\infty)$.

В обеих критических точках существуют перегибы графика (так как 2-я производная при переходе через них меняет знак).

Найдём ординаты данных точек: $f(-2-\sqrt{2}) = (-2-\sqrt{2})^2 e^{-2-\sqrt{2}} \approx 0{,}38$, $f(-2+\sqrt{2}) = (-2+\sqrt{2})^2 e^{-2+\sqrt{2}} \approx 0{,}19$.

Ответ: график функции является выпуклым вверх на интервале $(-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2})$ и выпуклым вниз на $(-\infty; -2-\sqrt{2}) \cup (-2+\sqrt{2}; +\infty)$. В точках $x = -2-\sqrt{2}; x = -2+\sqrt{2}$ существуют перегибы графика.

График изображен на рис. 47.

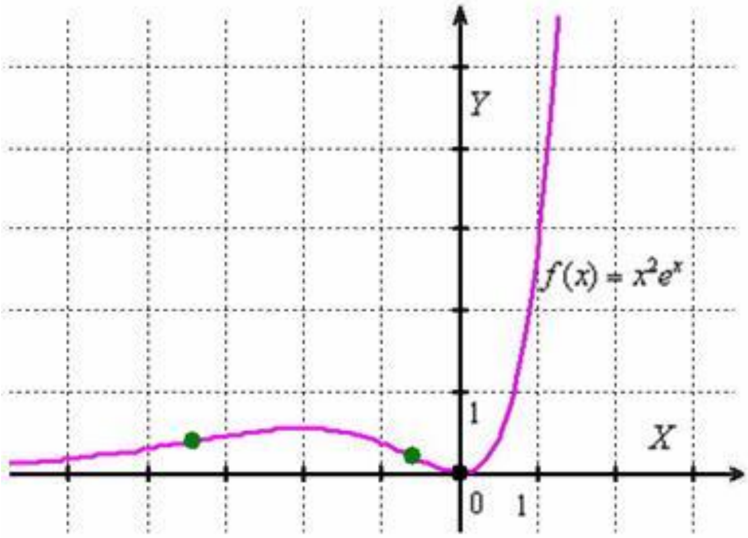


Рис. 47

При переходе через левую зелёную точку график начинает плавно выгибаться вверх – и до второй точки у нас интервал выпуклости вверх. Затем снова следует плавный прогиб вниз и на крайнем правом интервале имеет место выпуклость вниз графика.

20. Количество продукции Q(t), произведенной рабочим в течение дня, выражается функцией $Q(t) = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$, где t – время в часах, причём $1 \le t \le 8$. Необходимо вычислить производительность труда через 1 ч после начала работы и за 1 час до окончания рабочего дня.

Решение. Производительность труда u(t) выражается формулой $u(t) = Q'(t)$, тогда $u(t) = Q'(t) = -2{,}5t^2 + 15t + 100$. Производительность труда через 1 ч после начала работы определяется как u(1): $u(1) = -2{,}5 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 100 = 112{,}5$, т.е. через 1 ч после начала работы производительность труда равна 112,5 усл. ед. продукции в час. Производительность труда за 1 час до окончания рабочего дня определяется как u(7): $u(7) = -2{,}5 \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 100 = 82{,}5$ усл. ед. продукции в час.

21. Найдите эластичность спроса q относительно цены p, если $q(p) = -2p^2 + 3p + 8$, при p=1, p=2.

Решение. Эластичность спроса относительно цены найдём по формуле $E_p(q) = -\frac{p}{q} \cdot q'$. Найдём производную $q'(p) = (-2p^2 + 3p + 8)' = -4p + 3$. Получаем

$$E_p(q) = -\frac{p}{-2p^2 + 3p + 8} \cdot (-4p + 3) = -\frac{-4p^2 + 3p}{-2p^2 + 3p + 8}.$$

При p=1 получаем $E_1(q) = -\frac{-4+3}{-2+3+8} = \frac{1}{9}$, т.е. спрос неэластичен.

При p=2 получаем $E_2(q) = -\frac{-4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2}{-2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 8} = 1\frac{2}{3}$, т.е. спрос эластичен.

22. Правильное применение знаний об эластичности спроса на товары помогает правительству в оценке последствий введения новых налогов или акцизов. Пусть x – акцизы на табачные изделия, y – спрос на этот товар. Предположим, что государство предполагает повысить акцизы на табачные изделия на 10%. Если известно, что эластичность спроса составляет $E_x(y) = -0{,}2$, то следует ожидать, что это вызовет снижение спроса на данный товар на $0{,}2 \cdot 10 = 2\%$ и доходы государства по продаже табачных изделий повысятся на 8%.

23. Как изменится спрос на товар, если эластичность спроса относительно дохода равна $E_r(q) = 3{,}15$, а доход увеличится с 1000 до 1042 ден. ед.?

Решение. Величина $E_r(q) = 3{,}15$ показывает, что если доход r увеличится на 1 %, то спрос увеличится на 3,15 %.

Из условия задачи получаем, что доход увеличился на

$$\frac{1042 - 1000}{1000} \cdot 100\% = 4{,}2\%.$$

Следовательно, спрос при этом увеличится на 4,2·3,15 = 13,23 %.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите по определению производные функции в точках x_0=1, x_0=2:

a. $y = 3x^2 + x - 2;$

b. $y = x^2 - 2x + 10;$

c. $y = -5x^2 + 6x + 1.$

2. Найдите производные следующих функций:

1) $y = 4x^3 - 5x^2 - \frac{6}{x} + 10;$ 2) $y = x^7 - 4x^5 + 2x - 1;$

3) $y = \frac{1}{x^3} - \sqrt{x} - x^2;$ 4) $y = \sin x \cdot \ln x + x^3 - \sqrt{x} + 4;$

5) $y = (4x^3 - 5x^2 - 6) \cdot \cos x;$ 6) $y = x \sin x;$

7) $y = (x^2 + 1) \cdot \cos x;$ 8) $y = (x^3 + 2) \cdot \sqrt{x};$

9) $y = \frac{2x-1}{x+2};;$ 10) $y = \frac{\ln x}{x};$

11) $y = \dfrac{x+1}{x^2+2};$ 12) $y = \dfrac{e^x}{\cos x}.$

3. Напишите уравнения касательных к графикам функции в точке $x_0=2$:

a. $y = x^2 + 6x + 1;$

b. $y = -3x^2 - x + 2;$

c. $y = 2x^2 - 4x + 3.$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

✓ $f(x) = x^3 + 3x - 5$ на отрезке [-2;2];

✓ $f(x) = 2x - \sqrt{x}$ на отрезке [0;4].

5. Функция полных издержек производства имеет вид $K = K(x)$, где x – объем продукции в условных единицах для данного производства. Определите, при каком объеме производства продукции средние издержки $K_{\text{сред}} = \frac{K(x)}{x}$ имеют наименьшее значение:

$$K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x;$$
$$K(x) = x^3 - 3x + 5.$$

6. Найдите эластичность спроса q относительно цены p, если $q(p) = -3p^2 + 4p + 5$, при p=1, p=2.

7. Функция спроса имеет вид $q(p) = -p^2 + p + 2$. Оцените эластичность спроса по цене при цене p=1.

8. Функция q спроса относительно дохода r имеет вид $q(r) = 4 + 1{,}2r + 0{,}44r^2$. Как изменится спрос, если доход изменяется: 1) от 100 до 150; 2) от 100 до 90?

9. Дана функция $q = \frac{p^3}{2p^2+7}$, выражающая зависимость спроса q от цены p. Найдите эластичность спроса относительно цены. Вычислите частное значение эластичности при указанном значении цены $p_0=1$. Как увеличение цены повлияет на выручку?

10. Объем продукции u, выпускаемой рабочим в течение рабочего дня, выражается функцией $u(t) = -\frac{5}{48}t^3 + \frac{5}{4}t^2$, где t – время (ч). Вычислите производительность труда и скорость ее изменения в конце пятого часа работы.

11. Найти пределы, используя правило Лопиталя–Бернулли

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos 2x}{1-\cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{17x^3-5x^2-12}{3+2x-5x^5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-x\cos 3x}{\sin^3 x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\ln(x-1)$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{\ln(1+x^2)}$; 6) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x}\ln x$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\sin \pi x}$; 8) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}+\sin x}{\operatorname{tg} x}$; 10) $\lim\limits_{x\to \pi}\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x$;

11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{-2+7x^2-5x^4}$ 12) $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{x}\ln(x-1)$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{\sin x}$; 14) $\lim\limits_{x\to \pi}(x-\pi)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Занятие № 12-14. Первообразная, неопределенный интеграл и его свойства. Основные методы интегрирования: методы замены переменной, интегрирования по частям в неопределенном интеграле. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Геометрические и экономические приложения определенного интеграла.

Примеры решения задач

1. Найти неопределенный интеграл $\int x^3dx$.

Используем формулу таблицы интегралов $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq -1)$. В нашем случае $\alpha=3$. Степень «икса» α увеличиваем на единицу и делим на эту новую степень. Получаем:

$$\int x^3dx=\frac{x^{3+1}}{3+1}+C=\frac{x^4}{4}+C.$$

Сделаем проверку $(\frac{x^4}{4}+C)'=\frac{1}{4}(x^4)'+C'=\frac{1}{4}\cdot 4x^3+0=x^3$. Проверка показала, что интеграл вычислен верно.

2. Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку. $\int(x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3})dx$

Решение.

$$\int(x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3})dx=\int xdx+\int\sqrt{x}dx-\int 3x^5dx+\int\frac{2}{x^3}dx=$$

$$=\int xdx+\int x^{\frac{1}{2}}dx-3\int x^5dx+2\int x^{-3}dx=\frac{x^{1+1}}{1+1}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-3\frac{x^{5+1}}{5+1}+2\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-3\frac{x^6}{6}+2\frac{x^{-2}}{-2}=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^6}{2}-x^{-2}+C=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^6}{2}-\frac{1}{x^2}+C$$

(1) Применяем правило $\int(f\pm g)dx=\int f\,dx\pm\int g\,dx$. Не забываем записать значок дифференциала $\boldsymbol{dx}$ под каждым интегралом.

(2) Согласно правилу $\int kf\,dx=k\cdot\int f\,dx$, выносим все константы за знаки интегралов.

Точно так же, как и при дифференцировании, корни надо представить в виде $x^{\frac{a}{b}}$. Корни и степени, которые располагаются в знаменателе – перенести в числитель.

(3) Все интегралы у нас табличные. Осуществляем превращение с помощью таблицы, используя формулу $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq -1)$.

Константу С достаточно добавить один раз в конце выражения (а не ставить их после каждого интеграла).

(4) Записываем полученный результат в более компактном виде, все степени вида $x^{\frac{a}{b}}$ снова представляем в виде корней, степени с отрицательным показателем – переносим обратно в знаменатель.

Проверка. Для того чтобы выполнить проверку нужно продифференцировать полученный ответ:

$$(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^6}{2}-\frac{1}{x^2}+C)'=\frac{1}{2}(x^2)'+\frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}})'-\frac{1}{2}(x^6)'-(x^{-2})'+C'=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2x+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot 6x^5-(-2)x^{-3}+0=x+x^{\frac{1}{2}}-3x^5+2x^{-3}=x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3}$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найден правильно.

3. $\int\left(3\cos x+5-2x^3+\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2+1}\right)dx=$

$$=3\int\cos x\,dx+5\int dx-2\int x^3dx+\int\frac{1}{x}dx-7\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$=3\sin x+5x-\frac{1}{2}x^4+\ln|x|-7\operatorname{arctg}x+C.$$

Здесь мы пользовались свойствами интеграла о том, что интеграл от суммы функций равен сумме интегралов, а также тем, что константу можно выносить за знак интеграла. При этом интеграл, содержащий 5 слагаемых разбивается на 5 мелких интегралов от каждого слагаемого.

4. Найти неопределенный интеграл $\int x^2(3+4x)^2dx$. Выполнить проверку.

Решение. Анализируя интеграл, мы видим, что у нас произведение двух функций, да еще и возведение в степень целого выражения. К сожалению, нет хороших и удобных формул для интегрирования произведения и частного

$$\int(f\cdot g)dx\neq\int fdx\cdot\int g\,dx,\ \int(\frac{f}{g})dx\neq\frac{\int fdx}{\int g\,dx}.$$

А поэтому, когда дано произведение или частное, всегда имеет смысл посмотреть, а нельзя ли преобразовать подынтегральную функцию в сумму?

Рассматриваемый пример – тот случай, когда можно.

$$\int x^2(3+4x)^2dx=\int x^2(9+24x+16x^2)dx=\int(9x^2+24x^3+16x^4)dx=$$

$$=9\int x^2dx+24\int x^3dx+16\int x^4dx=9\frac{x^3}{3}+24\frac{x^4}{4}+16\frac{x^5}{5}+C=3x^3+6x^4+\frac{16}{5}x^5+C.$$

(1) Используем формулу квадрата суммы $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, избавляясь от степени.

(2) Вносим x^2 в скобку, избавляясь от произведения.

(3) Используем свойства линейности интеграла (оба правила сразу).

(4) Преобразуем интегралы по табличной формуле $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

(5) Упрощаем ответ.

Проверка:

$$(3x^3+6x^4+\frac{16}{5}x^5+C)'=(3x^3)'+(6x^4)'+(\frac{16}{5}x^5)'+C'=$$

$$3\cdot3x^2+6\cdot4x^3+\frac{16}{5}\cdot5x^4+0=9x^2+24x^3+16x^4=x^2(9+24x+16x^2)=x^2(3+4x)^2$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найден правильно.

5. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx$. Выполнить проверку.

Решение. В данном примере подынтегральная функция представляет собой дробь. Можно почленно разделить числитель на знаменатель:

$$= \int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{2x^3}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(\frac{2x^3}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right) dx =$$

$$\int \left(2x^{3-\frac{1}{2}} - x^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \int \left(2x^{\frac{5}{2}} - x^2 + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{7} \cdot 2x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^3}{3} + 2x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{4}{7}\sqrt{x^7} - \frac{x^3}{3} + 2\sqrt{x} + C$$

Здесь мы пользовались свойствами степеней $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}; \; x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.

Также обратите внимание, что в решении пропущен один шаг, а именно, применение правил $\int kf\,dx = k \cdot \int f\,dx$, $\int (f \pm g)\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$. Обычно уже при начальном опыте решения интегралов данные свойства считают само собой разумеющимися и не расписывают подробно.

Подведение функции под знак дифференциала в неопределенном интеграле.

6. Найти неопределенный интеграл $\int \cos 2x\,dx$. Выполнить проверку.

Решение. В таблице интегралов находим похожую формулу: $\int \cos x\,dx = \sin x + C$. Однако у нас под косинусом не просто буква «икс», а «два икс». Попробуем предположить, что $\int \cos 2x\,dx = \sin 2x + C$. Сделаем проверку $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$. Вспомним, что $\sin 2x$ сложная функция, поэтому при вычислении производной мы еще умножали на производную внутренней функции $2x$ равной 2. Получили $2\cos 2x$, а у нас просто $\cos 2x$. Значит нужно эту двойку как то сократить, т.е умножить на $\frac{1}{2}$. Получаем: $\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$. Проверка: $(\frac{1}{2}\sin 2x)' = \frac{1}{2} \cdot 2\cos 2x = \cos 2x$. Теперь все верно.

Фактически, этот интеграл легко посчитать, если воспользоваться следующей формулой:

$$\text{Если } \int f(t)\,dt = F(t) + C, \text{ то } \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

В нашем случае $f(x)=\cos x; a=2; b=0$.

7. Найти неопределенный интеграл $\int \sin(3x+1)\,dx.$.Выполнить проверку.

Решение. В таблице интегралов находим похожую формулу: $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$ Но проблема заключается в том, что у нас под синусом не просто буковка «икс», а сложное выражение. Подводим функцию $3x+1$ под знак дифференциала: $\int \sin(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\,d(3x+1)$.

Раскрывая дифференциал, легко проверить, что:

$$\frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\,d(3x+1) = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)(3x+1)'dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\cdot 3dx = \int \sin(3x+1)\,dx.$$

Фактически $\int \sin(3x+1)\,dx.$ и $\frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\,d(3x+1)$ – это запись одного и того же.

Формула $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$ (и все другие табличные формулы) справедливы и применимы не только для переменной х, но и для любого сложного выражения лишь бы аргумент функции ($3x+1$ – в нашем примере) и выражение под знаком дифференциала были одинаковыми.

Поэтому мысленное рассуждение при решении должно складываться примерно так: «Мне надо решить интеграл $\int \sin(3x+1)\,dx.$ Я посмотрел в таблицу и нашел похожую формулу $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$ Но у меня сложный аргумент $(3x+1)$ и формулой я сразу воспользоваться не могу. Однако если мне удастся получить $(3x+1)$ и под знаком дифференциала, то всё будет нормально. Если я запишу $d(3x+1)$, тогда $d(3x+1)=(3x+1)'dx=(3+0)dx=3dx$. Но в исходном интеграле $\int \sin(3x+1)\,dx$ множителя-тройки нет, поэтому, чтобы подынтегральная функция не изменилась, мне надо ее домножить на $\frac{1}{3}$ ». В ходе примерно таких мысленных рассуждений и рождается запись:

$$\int \sin(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\,d(3x+1) .$$

Теперь можно пользоваться табличной формулой $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$:

$$\int \sin(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\,d(3x+1) = -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C .$$

Единственное отличие, у нас не буква «икс», а сложное выражение $(3x+1)$.

Выполним проверку.

$$(-\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C)' = -\frac{1}{3}(\cos(3x+1))' + C' = -\frac{1}{3}(-\sin(3x+1))\cdot(3x+1)' + 0 =$$

$$= \frac{1}{3}\sin(3x+1)\cdot 3 = \sin(3x+1).$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найден правильно.

Обратите внимание, что в ходе проверки мы использовали правило дифференцирования сложной функции $(f(g))' = f' \cdot g'$. По сути дела подведение функции под знак дифференциала и $(f(g))' = f' \cdot g'$ – это два взаимно обратных правила.

Если воспользоваться формулой $\int f(ax+b)\,dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b)+C.$, то этот ответ можно получить сразу. Здесь $f(x)=\sin x; a=3; b=1$

8. Найти неопределенный интеграл. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}$.

Решение. Проведем замену: $t=(3-4x)$, $dt = d(3-4x)=(3-4x)'dx = -4dx$, $dx = -\dfrac{dt}{4}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\frac{1}{4}\int t^{-\frac{2}{3}}dt = -\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = -\frac{1}{4}\cdot 3t^{\frac{1}{3}} + C =$$

$$= -\frac{3}{4}\sqrt[3]{t} + C = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{3-4x} + C$$

В результате замены исходный интеграл значительно упростился – свёлся к обычной степенной функции. Это и есть цель замены – упростить интеграл.

Можно вычислить данный интеграл также методом подведения функции под знак дифференциала:

¶ $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} = -\frac{1}{4}\int (3-4x)^{-\frac{2}{3}} d(3-4x) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{(3-4x)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C =$$

$$= -\frac{3}{4}\sqrt[3]{3-4x} + C$$

Оформлять решение можно и так:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} = \left[\begin{matrix} t=(3-4x) & dx = -\frac{1}{4}dt \\ dt = d(3-4x) = -4dx & \end{matrix}\right] = \int \frac{-\frac{1}{4}dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\frac{1}{4}\int t^{-\frac{2}{3}}dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = -\frac{1}{4}\cdot 3t^{\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{t} + C = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{3-4x} + C.$$

9. Найти неопределенный интеграл $\int \dfrac{xdx}{(3x+2)^7}$.

Решение. Выполним замену: $t=(3x+2)$.

Далее, $dt = d(3x+2) = (3x+2)'dx = 3dx$; $dx = \dfrac{dt}{3}$. Выразим x из той же замены $t=(3x+2)$.

$$t=(3x+2)\Rightarrow 3x=t-2\Rightarrow x=\frac{t-2}{3}=\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}$$

$$\int\frac{xdx}{(3x+2)^7}=\begin{bmatrix} t=3x+2 & dx=\frac{1}{3}dt \\ x=\frac{1}{3}t-\frac{2}{3} & \end{bmatrix}=\int\frac{\left(\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{3}dt}{t^7}=\frac{1}{9}\int\frac{(t-2)dt}{t^7}=$$

$$=\frac{1}{9}\int\left(\frac{t}{t^7}-\frac{2}{t^7}\right)dt=\frac{1}{9}\int\left(t^{-6}-2t^{-7}\right)dt=\frac{1}{9}\left(\frac{t^{-5}}{-5}-2\frac{t^{-6}}{-6}\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{5t^5}-\frac{1}{3t^6}\right)+C=-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{5(3x+2)^5}-\frac{1}{3(3x+2)^6}\right)+C.$$

10. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{xdx}{4x^2+1}$.

Решение. Основная предпосылка использования метода замены переменной: в подынтегральном выражении должна находиться некоторая сложная функция $f(\varphi(x))$ и производная её внутренней функции $\varphi'(x)$.

Сделаем замену $t=\varphi(x)$. Тогда

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx=\int f(t)\,dt,$$

эта формула применяется как «слева направо», так и «справа налево». При этом в случае «удачной» замены переменной заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или сводящимся к табличному. Умение правильно подобрать замену переменной приобретается практикой.

В рассматриваемом примере замечаем, что степень числителя на единицу меньше степени знаменателя. В таблице производных находим формулу $(x^n)'=nx^{n-1}$, которая как раз понижает степень на единицу. А, значит, если обозначить за t знаменатель, то велики шансы, что числитель xdx превратится во что-нибудь хорошее.

$$\int\frac{xdx}{4x^2+1}=\begin{bmatrix} t=4x^2+1 & xdx=\frac{dt}{8} \\ dt=d(4x^2+1)=(4x^2+1)'dx=8xdx & \end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{\frac{dt}{8}}{t}=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{8}\ln|t|+C=\frac{1}{8}\ln\left|4x^2+1\right|+C$$

Замена: $t=(4x^2+1)$; $dt=d(4x^2+1)=(4x^2+1)'dx=8xdx$. Замечаем, что в последнем равенстве присутствует $8xdx$. Отсюда легко выразить просто xdx, а именно $xdx=\frac{dt}{8}$. Таким образом знаменатель превращается в t, числитель в $\frac{dt}{8}$

Можно также подвести функцию под знак дифференциала:

$$¶\int\frac{xdx}{4x^2+1}=\frac{1}{8}\int\frac{d(4x^2+1)}{4x^2+1}=\frac{1}{8}\ln\left|4x^2+1\right|+C.$$

11. Найти $\int e^{\frac{x}{3}}dx.$

Решение. Сделаем замену $x = 3t.$ Тогда $dx = 3dt$ и

$$\int e^{\frac{x}{3}}dx = \int e^t \cdot 3dt = 3\int e^t dt = 3e^t + C = 3e^{\frac{x}{3}} + C.$$

12. Найти $\int \sin^6 x \cos x\, dx.$

Решение. Под знаком интеграла есть сложная функция $\sin^6 x$ и рядом стоит производная внутренней функции $\sin x$, которая равна $\cos x$. Внутреннюю функцию $\sin x$ мы и заменяем новой переменной. Пусть $\sin x = t.$ Тогда $dt = (\sin x)' dx = \cos x\, dx$ и

$$\int \sin^6 x \cos x\, dx = \int t^6 dt = \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

В данном примере $\sin x$ мы заменили на t, а $\cos x\, dx$ превратился в dt.

13. Найти $\int x\sqrt{x-5}dx.$

Решение. Пусть $\sqrt{x-5} = t.$ Тогда $x = t^2 + 5,$ $dx = 2t\,dt$ и

$$\int x\sqrt{x-5}dx = \int (t^2+5)\cdot t \cdot 2t\,dt = 2\int (t^4 + 5t^2)\,dt = 2\int t^4 dt + 10\int t^2 dt =$$

$$= 2\cdot\frac{t^5}{5} + 10\cdot\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}} + C.$$

14. Вычислить следующие неопределенные интегралы, сделав соответствующие замены:

а) $\int \sin(3x+2)dx$; б) $\int tgxdx$; в) $\int e^{\frac{x}{4}}dx$.

Решение.

$$\text{а) } \int \sin(3x+2)dx = \left| \begin{array}{c} t = 3x+2, \\ dt = (3x+2)'dx = 3dx, \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \sin t \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \sin tdt =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(3x+2) + C;$$

$$\text{б) } \int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left| \begin{array}{l} \quad t = \cos x \\ dt = (\cos x)'dx = \\ = -\sin xdx \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C;$$

в) $\int e^{\frac{x}{4}}dx = \left| \begin{matrix} t = \dfrac{x}{4}, \\ x = 4t, \\ dx = 4dt, \end{matrix} \right| = 4\int e^t dt = 4e^t + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C.$

Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям решает очень важную задачу, он позволяет интегрировать некоторые функции, отсутствующие в таблице, произведение функций, а в ряде случаев – и частное. Как мы помним, нет удобной формулы: $\int (f \cdot g)\,dx \neq \int f dx \cdot \int g\,dx$. Зато есть такая:

$$\int \boldsymbol{u\,dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v\,du},$$ – формула интегрирования по частям.

По частям берутся интегралы следующих видов:

1) $\int \ln x\,dx,\ \int x^n \ln x\,dx,\ \int x^n \ln^m x\,dx,$ – логарифм, логарифм, умноженный на какой-нибудь многочлен.

2) $\int xe^{\alpha x}dx, \int x^n e^{\alpha x}dx,$ – экспоненциальная функция, умноженная на какой-нибудь многочлен.

3) $\int x\cos\alpha x\,dx,\ \int x\sin\alpha x\,dx$ – тригонометрические функции, умноженные на какой-нибудь многочлен.

4) $\int \arcsin x\,dx, \int x^n \arccos x\,dx$ – обратные тригонометрические функции («арки»), «арки», умноженные на какой-нибудь многочлен.

Так, при вычислении интегралов вида $\int x^n e^{\alpha x}dx,\ \int x^n \sin\alpha x\,dx,\ \int x^n \cos\alpha x\,dx,$ где α – число, полагают $u = x^n$, а за dv обозначают остальные сомножители.

При вычислении интегралов вида $\int x^n \arcsin x\,dx,\ \int x^n \arccos x\,dx,\ \int x^n \ln x\,dx,$ $\int x^n \mathrm{arctg}\, x\,dx,\ \int x^n \mathrm{arcctg}\, x\,dx,$ полагают $x^n dx = dv,$ а за u обозначают остальные сомножители.

15. Найти $\int x\cos x\,dx.$

Решение. Используем формулу интегрирования по частям: $\int \boldsymbol{u\,dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v\,du}$. Формула применяется слева направо.

Левая часть формулы: $\int u\,dv.$ В интегралах рассматриваемого типа за u всегда обозначается x.

Технически оформление решения реализуется следующим образом, в столбик записываем:

$$u = x,$$
$$dv = \cos x\,dx,$$

То есть, за u мы обозначили x, а за dv – оставшуюся часть подынтегрального выражения.

Следующий этап: находим дифференциал du: $du = (x)'dx = 1 \cdot dx = dx$.

Теперь находим функцию v. Для того чтобы найти функцию v необходимо проинтегрировать правую часть нижнего равенства $dv = \cos x\,dx$:

$$v = \int dv = \int \cos x\,dx = \sin x.$$

Теперь в правую часть формулы вместо u подставляем x, а вместо v подставляем $\sin x$. Имеем:

$$\int x\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = x, \quad du = (x)'dx = 1 \cdot dx = dx \\ dv = \cos x\,dx, \quad v = \int dv = \int \cos x\,dx = \sin x \end{bmatrix} =$$

$$= x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Отметим, что при проведении вспомогательных рассуждений, которые записаны в квадратных скобках, достаточно найти какое-либо одно выражение для функции v. Поэтому в неопределенном интеграле $\int dv = \int \cos x\,dx = \sin x$ произвольную постоянную считают равной нулю, т. е. фактически находят только одну из первообразных.

16. Найти неопределенный интеграл $\int \ln x\,dx.$

Решение. Используем формулу интегрирования по частям: $\int \boldsymbol{u\,dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v\,du}$. Формула применяется слева направо. Смотрим на левую часть: $\int u\,dv.$ В интегралах рассматриваемого типа за u всегда обозначается логарифм.

Технически оформление решения реализуется следующим образом, в столбик записываем:

$$u = \ln x$$

$$dv = dx$$

То есть, за u мы обозначили логарифм, а за dv – оставшуюся часть подынтегрального выражения.

Следующий этап: находим дифференциал du:

$$u = \ln x, \quad du = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx$$

Теперь находим функцию v. Для того чтобы найти функцию v необходимо проинтегрировать правую часть нижнего равенства $dv = dx$: $v = \int dx = x$

Теперь в правую часть формулы вместо u подставляем логарифм, а вместо v подставляем x. Имеем:

$$\int \ln x\,dx = \left[\begin{matrix} u = \ln x, & du = (\ln x)'dx = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx, & v = \int dx = x \end{matrix}\right] = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx =$$

$$= x\ln x - \int 1dx = x\ln x - x + C.$$

17. Вычислите интеграл $\int xe^x dx.$

Решение.

$$\int xe^x dx = \left|\begin{matrix} u = x, & dv = e^x dx \\ du = dx, & v = e^x \end{matrix}\right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

18. Вычислите интеграл $\int (2x+3)\sin x dx$.

Решение.

$$\int (2x+3)\sin x dx = \left|\begin{matrix} u = 2x+3, & dv = \sin x dx \\ du = 2dx, & v = -\cos x \end{matrix}\right| = (2x+3)\cdot(-\cos x) - \int (-\cos x)\cdot(2dx) =$$

$$= -(2x+3)\cdot\cos x + 2\int (\cos x dx) = -(2x+3)\cdot\cos x + 2\cdot\sin x + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите неопределённые интегралы

1) $\int (x^2 + 3 - 2x^3)dx$; 2) $\int (x^3 + 3\sqrt{x} - 2x)dx$;

3) $\int (3x + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2})dx$; 4) $\int (x + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4})dx$;

5) $\int \left(3\sin x + 2 + \frac{1}{x} - \frac{7}{\cos^2 x}\right)dx$; 6) $\int \frac{2x^4 - \sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt{x}}dx$;

7) $\int \cos(2x+5)dx$; 8) $\int \frac{dx}{3+7x}$.

2. Вычислите интегралы, применив метод замены переменной

1) $\int \sin(5x+2)dx$; 2) $\int \frac{dx}{2-3x}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-3x)^3}}$; 4) $\int \frac{3xdx}{(2x+5)^3}$;

5) $\int 5e^{5x}dx$; 6) $\int \cos^3 x \sin x\, dx$;

7) $\int \frac{cos\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}dx$; 8) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{5\sqrt{x}}dx$;

9) $\int \frac{x^3}{1+x^4}dx$; 10) $\int e^{x^4}x^3 dx$;

11) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; 12) $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$.

3. Вычислите интегралы, применив метод интегрирования по частям

1) $\int (x+3)e^x dx$; 2) $\int \ln 5x dx$;

3) $\int x \sin \frac{1}{2} x dx$; 4) $\int x \ln 7x dx$;

5) $\int x e^{5x} dx$; 6) $\int (x+4)\cos x dx$;

7) $\int x \arcsin 3x dx$; 8) $\int \arcsin 2x dx$.

1. Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^{2} 2x^2 dx.$

Решение.

$$\int_{-1}^{2} 2x^2 dx = 2\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{2} = \frac{2}{3}(2^3 - (-1)^3) = \frac{2}{3}(8+1) = 6.$$

Действия осуществлены в следующем порядке:

1) вынесли константу за знак интеграла;

2) интегрируем по таблице с помощью формулы $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ и получаем первообразную $\frac{x^3}{3}$ (появившуюся константу $\frac{1}{3}$ целесообразно вынести за скобку);

3) используем формулу Ньютона-Лейбница, при этом сначала подставляем в x^3 верхний предел интегрирования (число 2), затем нижний предел (число –1), вычисляем разность этих чисел и получаем окончательный ответ.

2. Вычислить определенный интеграл $\int_{1}^{2} x^2 dx$.

Решение.

$$\int_{1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

3. Вычислить интеграл $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx.$

Решение. Используем формулу из таблицы интегралов $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$ В первообразную $-\cos x$ мы подставляем вместо х сначала верхний предел интегрирования $\frac{\pi}{2}$, а затем нижний предел 0 и берем разность этих чисел. Получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1.$$

4. Вычислить определенный интеграл $\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx$

Решение.

$$\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx = 8\int_{-2}^{4}dx + 2\int_{-2}^{4}xdx - \int_{-2}^{4}x^2dx = 8(x)\Big|_{-2}^{4} + 2\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-2}^{4} - \frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-2}^{4} =$$

$$= 8(4-(-2)) + (4^2-(-2)^2) - \frac{1}{3}(4^3-(-2)^3) = 8\cdot 6 + (16-4) - \frac{1}{3}(64+8) =$$

$$= 48 + 12 - 24 = 36.$$

Действия осуществлены в следующем порядке:

1) использованы свойства линейности определенного интеграла;

2) интегрируем по таблице, при этом все константы выносим за скобки;

3) для каждого из трёх слагаемых применяем формулу Ньютона-Лейбница.

Решение можно оформить значительно короче:

$$\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx = \left(8x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{4} = (32+16-\frac{64}{3}) - (-16+4+\frac{8}{3}) = 36.$$

5. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2}\cos^2 xdx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, применяя свойства определенного интеграла и формулу Ньютона–Лейбница, получаем:

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2 xdx = \int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2xdx = \frac{1}{2}x\Bigg|_0^{\pi/2} +$$

$$+\frac{1}{4}\sin 2x\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-0) + \frac{1}{4}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{\pi}{4}.$$

6. Найти $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\, dx.$

Решение. Под знаком интеграла мы видим сложную функцию $e^{\sin x}$, производную функции $\sin x$ ($(\sin x)' = \cos x$). Поэтому функцию $\sin x$ мы заменяем новой переменной t, $t = \sin x$. Тогда $dt = \cos x\, dx$. Если $x = 0$, то $t = \sin 0 = 0$; если $x = \frac{\pi}{2}$, то $t = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Поэтому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\, dx = \begin{bmatrix} t = \sin x,\, dt = \cos x dx; \\ x = 0,\, t = \sin 0 = 0; \\ x = \frac{\pi}{2},\, t = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 e^t dt = e^t\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Отметим, что используя метод поднесения под знак дифференциала, решение можно оформить также следующим образом.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\, d\sin x = \begin{bmatrix} t = \sin x; \\ x = 0,\, t = 0; \\ x = \frac{\pi}{2},\, t = 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 e^t dt = e^t\Big|_0^1 = e - 1.$$

7. Найти $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx.$

Решение. Положим $x = 2\sin t$. Тогда $dx = 2\cos t\, dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = 2$, то $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) - 2\left(0 + \frac{1}{2}\sin 0\right) = \pi.$$

8. Найти $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Решение. Введем новую переменную t по формуле $\sqrt{1 + x^2} = t$, тогда $1 + x^2 = t^2$**,** 2xdx = 2tdt**.** Найдем новые пределы интегрирования: при x = 0 имеем t = 1; при x = $\sqrt{3}$, t =2. Таким образом, получаем:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{1+x^2} = t, 1+x^2 = t^2, 2xdx = 2tdt; \\ x = 0, t = 1; x = \sqrt{3}, t = 2 \end{array} \right] = \int_1^2 \frac{tdt}{t} = \int_1^2 dt =$$

$$= t\Big|_1^2 = 2 - 1 = 1.$$

Используя метод поднесения под знак дифференциала, решение можно оформить так:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{\sqrt{3}} d\sqrt{1+x^2} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{1+x^2} = t; \\ x = 0, t = 1; x = \sqrt{3}, t = 2 \end{array} \right] = \int_1^2 dt == t\Big|_1^2 = 2 - 1 = 1.$$

Здесь мы использовали следующее равенство:

$$d\sqrt{1+x^2} = \left(\sqrt{1+x^2}\right)' dx = \frac{\left(1+x^2\right)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

9. Найти $\int_{-1}^{3} xe^{x^2} dx.$

Решение. Под знаком интеграла мы видим сложную функцию e^{x^2} и «почти» производную функции x^2 (с точностью до константы) – это x ($(x^2)' = 2x$). Поэтому функцию x^2 мы заменяем новой переменной t. Находим пределы интегрирования: если $x = -1$, то t=1, а если x=3, то t=9. Получаем:

$$\int_{-1}^{3} xe^{x^2} dx = \left[\begin{array}{ll} x^2 = t,\ d(x^2) = dt,\ 2xdx = dt, & xdx = \frac{dt}{2}; \\ \qquad x = -1; t = 1 & x = 3; t = 9 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^9 e^t dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_1^9 = \frac{1}{2}(e^9 - e^1).$$

10. Найти $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx.$

Решение.

$$\int_0^{\pi} x \sin x\, dx = \left[\begin{array}{ll} u = x, & du = (x)' dx = 1 \cdot dx = dx \\ dv = \sin x\, dx, & v = \int dv = \int \sin x\, dx = -\cos x \end{array} \right] =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\, dx = -\pi \cdot (-1) + 0 + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

11. Найти $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x dx$.

Решение. Интегрируя по частям, находим

$$\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \mathrm{arctg}\,x d(x^2) = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2 d(\mathrm{arctg}\,x) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 +$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2$, $y = x$.

Решение. В этом примере часть фигуры находится под осью Ох, но на вычисление площади это не влияет. Построим графики, и выясним, какую площадь нам нужно найти (рис. 48). График первой функции – парабола (ветви вниз). График второй функции – прямая линия.

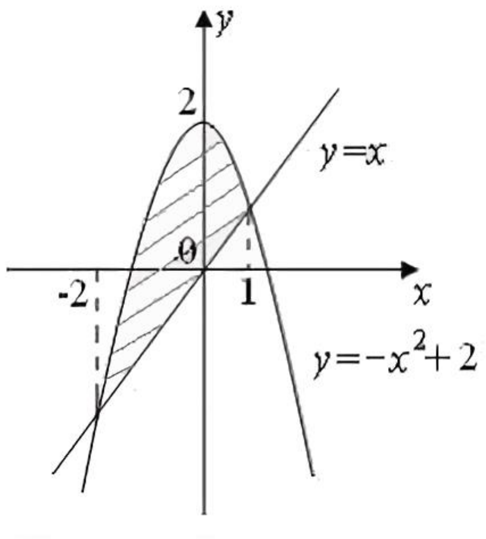


Рис. 48

Сначала найдем пределы интегрирования, решая следующую систему $\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = x \end{cases}$.

Приравниваем правые части $x = 2 - x^2$ и решаем квадратное уравнение $x^2 + x - 2 = 0$, откуда получаем корни $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Тогда

$$S=\int_{-2}^{1}\left(2-x^2-x\right)dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-2\cdot(-2)+\frac{1}{3}\cdot(-2)^3+\frac{1}{2}\cdot(-2)^2=$$

$$=2+4+2-\frac{1}{3}-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}=8-\frac{9}{3}-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}\left(ед.^2\right).$$

13. Найдите дневную выработку Q за рабочий день продолжительностью 8 ч., если производительность труда в течение дня меняется по эмпирической формуле $f(t)=-0{,}1t^2+0{,}8t+10$.

Решение. Воспользуемся формулой $Q=\int_a^b f(t)dt$. В нашем случае имеем $Q=\int_0^8 f(t)dt=\int_0^8(-0{,}1t^2+0{,}8t+10)dt=\left(-0{,}1\cdot\frac{t^3}{3}+0{,}8\cdot\frac{t^2}{2}+10t\right)\Big|_0^8=$ 88,53.

14. Найдите среднее значение затрат в денежных единицах на производство и реализацию продукции, имеющих вид $S(x)=3x^2+4x+2$, где x – объём продукции в усл.ед., если объём продукции меняется от 2 до 4 усл. ед.

Решение. В этом примере a=2, b =4, f (x) = S(x). Тогда среднее значение функции равно

$$S_{\text{ср}}=\frac{1}{4-2}\int_2^4(3x^2+4x+2)dx=\frac{1}{2}(x^3+2x^2+2x)|_2^4=\frac{1}{2}(104-20)=42.$$

Таким образом, средние издержки составляют 42 усл. ед.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить определенные интегралы:

1) $\int_{-2}^{3}(5x^4-3x^2+1)dx$;

2) $\int_{1}^{e}(x+\frac{1}{x})dx$;

3) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x+1}$;

4) $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}$;

5) $\int_{-1}^{2}(x^3-2x^2+5)dx$;

6) $\int_{1}^{4}(2x+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$;

2. Вычислить определенные интегралы методом замены переменной:

1) $\int\limits_0^1 x\cos x^2 dx$; 2) $\int\limits_3^{15} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} dx$;

3) $\int\limits_1^{\sqrt{2}} xe^{x^2} dx$; 4) $\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$;

5) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$; 6) $\int\limits_1^2 x\sqrt{2-x}dx$;

3. Вычислить определенные интегралы методом интегрирования по частям:

1) $\int\limits_0^1 xe^{2x} dx$; 2) $\int\limits_1^e \ln x dx$;

3) $\int\limits_0^{\pi/2} x\sin 4x dx$; 4) $\int\limits_0^1 \arcsin x dx$;

5) $\int\limits_0^{\pi} x\cos x dx$; 6) $\int\limits_1^e x\ln x dx$.

4. Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями.

1) $y = 4x - x^2,\ y = 0$; 2) $y = 2x - x^2 + 8,\ y = 0$;

3) $y = x^2 - 5x + 4,\ y = 0$; 4) $y = x^2$, $y = 2 - x$;

5) $y = x^2$, $y = 4$; 6) $y = 2x - x^2,\ y = -x$;

7) $x = y^2 - 5y + 4,\ x = 0$; 8) $xy = 5$, $x + y = 6$;

9) $y = x - 1,\ x = 1,\ y = \frac{4}{x^2}$; 10) $y = x^2 + 2,\ \ y + x = 4$;

11) $y = -x^2 - 3x + 6,\ y = x^2 - x - 6$.

Занятие № 15. Функции нескольких переменных. Частные производные функции нескольких переменных первого и высших порядков. Экстремум функции двух переменных.

Примеры решения задач

1. Найти предел функции: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}}(5x^2+2y-4)$.

Решение.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}}(5x^2+2y-4)=5\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}}x^2+2\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 3}}y-4=5\cdot 1+2\cdot 3-4=7.$

2. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{y}$.

Решение.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{y}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}x\cdot\frac{\sin xy}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}x\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{xy}=2\cdot 1=2.$

3. Областью определения функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ является множество точек, для которых определено выражение $\sqrt{1-x^2-y^2}$, т. е. множество точек, для которых $1-x^2-y^2\geq 0$ или $x^2+y^2\leq 1$. Множество всех таких точек образует круг с центром в начале координат и радиусом $R=1$.

4. Найти частные производные функции $z=x^2+2xy+y^3$, а также их значения в точке $M_0(4,\ 1)$.

Решение. Считая y постоянной и дифференцируя функцию по x, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2y+0=2(x+y).$$

Считая x постоянной и дифференцируя функцию по y, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial y}=0+2x+3y^2=2x+3y^2.$$

Значения частных производных в точке $M_0(4,\ 1)$, т. е. при $x=4,\ y=1$, равны

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}=2(4+1)=10,\qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}=2\cdot 4+3\cdot 1^2=11.$$

5. Найти частные производные второго порядка функции $z=x^3+4x^2y-6xy^2+y^3$.

Решение. Найдем сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+8xy-6y^2,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=4x^2-12xy+3y^2.$$

Отсюда по определению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2+8xy-6y^2)=6x+8y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 8xy - 6y^2) = 8x - 12y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4x^2 - 12xy + 3y^2) = 8x - 12y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^2 - 12xy + 3y^2) = -12x + 6y.$$

6. Найти полный дифференциал функции dz, если $z = ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{x^2 + y^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

откуда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}.$$

7. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^4 + 2xy - y^3$, $x = sin\,2\,t$, $y = \mathrm{arctg}t$.

Решение. Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 3y^2, \quad \frac{dx}{dt} = 2\cos 2t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2},$$

откуда

$$\frac{dz}{dt} = 4(2x^3 + y)\cos 2t + \frac{2x - 3y^2}{1+t^2}.$$

8. Найти экстремум функции

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 8.$$

Решение. Сначала найдем стационарные точки. Поскольку

$$f'_x = 2x - 2, \quad f'_y = 2y + 4,$$

то, решая систему

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 2y + 4 = 0, \end{cases}$$

получим одну стационарную точку $M_0(1,\ -2)$. Находим частные производные второго порядка:

$$f''_{xx} = 2 = A, \quad f''_{xy} = 0 = B, \quad f''_{yy} = 2 = C.$$

Поскольку $\Delta = AC - B^2 = 4 > 0,\ A > 0$, то $M_0(1,\ -2)$ – точка минимума функции $f(x,\ y)$, причем $min\,f\ (x,\ y) = f(1,\ -2) = 3$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{x^3-y}{x^2+y^2}$;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{x^3-y^3}{x-y}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{x^4+y^4}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}} \frac{\mathrm{tg}xy}{x}$.

2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = x^2 + y^2 - 3xy + 4x + 5y - 8$; 2) $z = x^2 \cos(x + 3y)$;

3) $z = \frac{x-y}{x+y}$; 4) $z = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

3. Найти значения частных производных первого порядка функции $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$ в точке $M_0(1,\ 1)$.

4. Найти полный дифференциал первого порядка функции $z = \ln(xy)$.

5. Найти частные производные второго порядка следующих функций:

1) $z = x^3 + y^3 - x^2y + xy^2$; 2) $z = e^x \ln y$;

3) $z = \sin(x^2 + y^2)$.

6. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = \ln(4 + x^2 + y^2)$, $x = t^2 + 1$, $y = t^3$.

7. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \frac{x^2}{y}$, $x = u - 2v$, $y = 2u + v$.

8. Найти частные производные функции $z = z(x,\ y)$, заданной уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

9. Исследовать на экстремум функции:

1) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$; 2) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

Занятие № 16. Дифференциальные уравнения 1 порядка, виды уравнений, основные способы решения дифференциальных уравнений.

Примеры решения задач

1. Решить дифференциальное уравнение (с разделяющимися переменными)

$$y' = -\frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

Решение. Приведем уравнение к виду $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, откуда

$$ydx + xdy = 0.$$

Разделив обе части этого уравнения на $yx \neq 0$, имеем

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Проинтегрировав, получим

$$\ln|x| + \ln|y| = C_1.$$

Постоянную C_1 можно записать в иде $C_1 = \ln|C|$ $(C \neq 0)$, поскольку любое число может быть представлено как логарифм другого, положительного числа. Таким образом,

$$\ln|x| + \ln|y| = \ln|C|,$$

откуда $y = \dfrac{C}{x}$ $(C \neq 0)$ – общее решение дифференциального уравнения (семейство гипербол).

При разделении переменных было потеряно решение $y = 0$, которое может быть получено из общего решения при $C = 0$. Поэтому окончательно получаем, что общим решением дифференциального уравнения является $y = \dfrac{C}{x}$, где $C \in \boldsymbol{R}$.

2. Решить дифференциальное уравнение.

$$\frac{dy}{dx} = xy.$$

Решение. Разделим переменные, получаем:

$$\frac{dy}{y} = xdx.$$

Проинтегрируем обе части равенства:

Ln|y|=$\frac{x^2}{2}$ + C, решим относительно y: y=$y = \pm C_1 e^{\frac{x^2}{2}}$, где $C_1 \in$**R**.

3. Решить дифференциальное уравнение

$$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}} \quad (x \neq 0).$$

Решение. Поскольку $y' = \dfrac{dy}{dx}$, имеем

$$x\frac{dy}{dx} = y - xe^{\frac{y}{x}},$$

$$(xe^{\frac{y}{x}} - y)dx + xdy = 0.$$

Полученное уравнение является однородным, так как

$P(x,\ y) = xe^{\frac{y}{x}} - y$ и $Q(x,\ y) = x$ – однородные функции первой степени.

Положим $u = \frac{y}{x}$, $u = u(x)$. Тогда $y = ux$, $dy = udx + xdu$,

$$(xe^u - ux)dx + x(udx + xdu) = 0,$$

$$xe^u dx + x^2 du = 0.$$

Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Делим на $e^u x^2 \neq 0$:

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{e^u} = 0,$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int e^{-u} du = C,$$

$\ln|x| - e^{-u} = C.$

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получаем $ln\,|\,x| - e^{-\frac{y}{x}} = C \quad (C \in \boldsymbol{R})$ – общий интеграл исходного уравнения.

4. Решить дифференциальное уравнение

$$xy' + 2y = x^2.$$

Решение. Рассматриваемое уравнение является линейным: $a(x) = x$, $b(x) = 2,\; c(x) = x^2.$ Полагаем $y = uv.$ Тогда $y' = u'v + uv',$

$$x(u'v + uv') + 2uv = x^2,$$

$$xu'v + u(xv' + 2v) = x^2.$$

Выберем функцию v так, чтобы $xv' + 2v = 0.$ Имеем:

$$x\frac{dv}{dx} = -2v,$$

$$\frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -2\ln|x| + C.$$

Положив $C = 0,$ получим $v = \frac{1}{x^2}.$ Подставляя функцию $v = \frac{1}{x^2}$ в уравнение $xu'v = x^2,$ имеем:

$$x \cdot \frac{1}{x^2}u' = x^2,$$

$$\frac{du}{dx} = x^3,$$

$$u = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C,$$

откуда $y = uv = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{4} + C\right) = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2} \quad (C \in \boldsymbol{R}).$

5. Решить дифференциальное уравнение

$$2x\sqrt{1 - y^2} = y'(1 + x^2)$$

Решение. Перепишем производную в более привычном виде:

$$2x\sqrt{1 - y^2} = \frac{dy}{dx}(1 + x^2)$$

Далее разделим переменные, то есть в одной части уравнения соберем все "x", а в другой – "y":

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2xdx}{1+x^2}$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int\frac{2xdx}{1+x^2}$$

Интегрируем и получаем общее решение данного уравнения:

$$\arcsin y=\ln\left(1+x^2\right)+C$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Установить тип дифференциального уравнения и найти его общее решение (общий интеграл):

1) $(1+y)dx-(1-x)dy=0;$

2) $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0;$

3) $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0;$

4) $xdy-\left(y-x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}\right)dx=0;$

5) $x(x+2y)dx+(x^2-y^2)dy=0;$

6) $(4xy+x^2)dy-2y^2dx=0;$

7) $xy'-4y=2x^2-3x;$

8) $y'-2xy=2xe^{x^2};$

9) $xy'-2y=x^3\cos x;$

10) $(2-9xy^2)xdx+(4y^2-6x^3)ydy=0;$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения:

1) $(1+y^2)dx=xydy;\quad y=1$ при $x=2;$

2) $x^2y'+xy+1=0;\quad y=3$ при $x=1;$

3) $y'-2y=e^{-x};\quad y=-1$ при $x=0;$

4) $xy'-2y=2x^4;\quad y=8$ при $x=1;$

Занятие № 17-18. Множества, отношения между ними и основные операции над ними. Комбинаторный принцип умножения, комбинаторный принцип сложения, перестановки, размещения, сочетания.

Примеры решения задач

1. Задайте множество способом перечисления его элементов:

а) Множество А – «множество дней недели».

б) Множество В – «множество основных арифметических действий».

Решение. а) Множество А = {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье}.

Решение. б) Множество В = {сложение, вычитание, умножение, деление}.

2. Задайте множества из задачи **1**, указывая только характеристические свойства его элементов.

Решение. Указанные множества А и В можно задать следующим образом:

а) А = {а: а – день недели};

б) В = {в: в – арифметические действия}.

3. Перечислите элементы множеств, заданных с помощью характеристического свойства:

а) Множество корней квадратного уравнения Х = { х: $x^2 - 2 \cdot x - 15 = 0$}.

б) Множество Х = { х – натуральное число: $-4 < x \leq 3$}}.

Решение. а) Множество Х = {– 3, 5};

б) Множество Х = {1, 2, 3}.

4. Перечислите элементы множества А = {а – натуральное число: $-5 < a \leq 5$} заданного с помощью характеристического свойства.

Решение. Имеем, множество А = {1, 2, 3,4,5}.

5. Выпишем все подмножества заданных конечных множеств.

а) Подмножествами двухэлементного множества {1, 3} являются четыре множества: ∅, {1}, {3}, {1, 3};

б) Подмножествами трехэлементного множества {0, 1, 4} являются восемь множеств: ∅, {0}, {1}, {4}, {0, 1}, {0, 4}, {1, 4}, {0, 1, 4};

в) Подмножествами двухэлементного множества {{0}, 1} являются четыре множества: ∅, {{0}}, {1}, {{0}, 1}.

6. Верны, ли следующие включения и вложения:

а) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$;

б) $\{2, 5\} \subset \{1, 2, 5, 7\}$.

Решение. а) Нет, не верно, так как в множестве А = {{1, 2, 3}, {1, 3}, 1, 2} нет элемента {1, 2}. Множество А содержит 4 элемента: {1, 2, 3}, {1, 3}, 1 и 2!

б) да, верно, так как множество {2, 5} – это подмножество множества {1, 2, 5, 7}.

7. Совпадают ли следующие множества: множество А = {{0, 1}, 2} и множество В = {0, 1, 2}?

Решение. Нет, не совпадают, так как множество А состоит из двух элементов {0, 1} и 2, а множество В – из трех элементов: 0, 1, 2.

8. Для каждых двух из следующих множеств указать, является ли одно из них подмножеством другого:

$A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{1,2,3\}$, $D = \{\{1\},2,3\}$, $E = \{3,2,1\}$, $F = \{\{1,2\},3\}$.

Решение. $A \subset B$, $A \subset C$, $A \subset E$; $B \subset C$, $B \subset E$; $C \subset E$.

9. Пусть заданы два множества A и B, где $A=\{3,4,5\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A\Delta B$.

Решение. $A \cup B=\{1,2,3,4,5\}$, $A \cap B =\{3,4\}$, $A \setminus B =\{5\}$, $B \setminus A =\{1,2\}$, $A\Delta B =\{5,1,2\}$.

10. По заданным промежуткам A и B на числовой прямой определите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, где $A=(0,2]$, $B=(2,9)$.

Решение. $A \cup B =(0,9)$; $A \cap B =\varnothing$, $A \setminus B =(0,2]$, $B \setminus A=(2,9)$.

11. Дано множество $A = \{1, 2, 3, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Укажите, какие из следующих выражений являются элементами заданного множества A, а какие его подмножествами: 2, $\{2\}$, $\{1, 2\}$,$\{1, 3\}$, $\{1, \{1\}\}$, $\{\{1\}\}$, $\{1, \{2\}\}$, $\{1, 2, \{1, 2\}\}$.

Решение. 2 – это элемент; $\{2\}$ – подмножество; $\{1, 2\}$ – это и элемент, и подмножество; $\{1, 3\}$ – подмножество; $\{1, \{1\}\}$ – это подмножество; $\{\{1\}\}$ – это тоже подмножество; $\{1, \{2\}\}$ – это ни элемент, ни подмножество; $\{1, 2, \{1, 2\}\}$ – подмножество.

12. Доказать, что $\varnothing\neq\{\varnothing\}$.

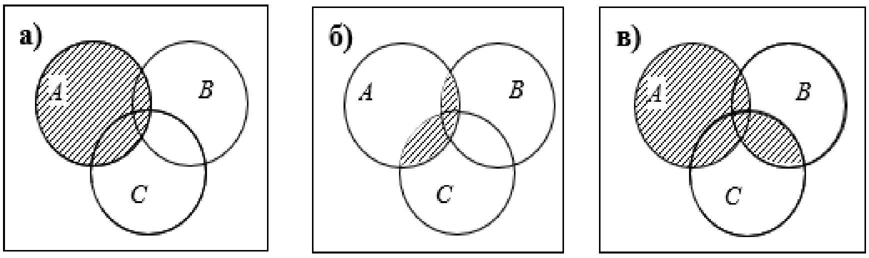
Решение. Множество $\{\varnothing\}$ имеет один элемент, а именно $\varnothing$, а множество $\varnothing$ не имеет элементов, следовательно, эти множества не равны, т.е. $\varnothing\neq\{\varnothing\}$.

13. Описать следующие множества: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, где A – «множество студентов-логистов – «отличников» группы», B – «множество студентов-логистов – «хорошистов» группы».

Решение. $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B$ – «множество «отличников» и «хорошистов» группы», $A \setminus B$ – «множество студентов-логистов «отличников» группы», $B \setminus A$ – «множество студентов-социологов «хорошистов» группы».

14. Заштриховать на кругах Эйлера-Венна ту часть диаграммы, которая соответствует следующему множеству: **а)** $(A \setminus B) \cup (A \cap B)$, **б)** $A \cap (B \cup C)$, **в)** $A \cup (B \cap C)$.

Решение.



15. Доказать равенство множеств.

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A).$$

Доказательство. По определению равенства множеств $A \cup B$ и $A \cup (B \setminus A)$ надо доказать справедливость следующих двух включений

$$A \cup B \subset A \cup (B \setminus A) \text{ и } A \cup (B \setminus A) \subset A \cup B.$$

а) Докажем первое включение $A \cup B \subset A \cup (B \setminus A)$. Пусть $x \in A \cup B$, тогда, по определению объединения множеств, $x \in A$ или $x \in B$.

Если $x \in A$, то по свойству объединения $x \in A \cup (B \setminus A)$.

Если $x \in B$, то тогда возможны два случая: $x \in A$ или $x \notin A$. Первый случай, т. е. $x \in A$, рассмотрен выше. Второй случай, т. е. $x \notin A$, по определению разности множеств означает, что $x \in B \setminus A$. Тогда по свойству объединения получим $x \in (B \setminus A) \cup A$, а по закону коммутативности операции объединения последнее соотношение означает, что $x \in A \cup (B \setminus A)$.

Таким образом, первое включение доказано.

б) Докажем второе включение $A \cup (B \setminus A) \subset A \cup B$. Пусть $x \in A \cup (B \setminus A)$, тогда по определению объединения множеств $x \in A$ или $x \in B \setminus A$.

Если $x \in A$, то по свойству объединения $x \in A \cup B$.

Если $x \in B \setminus A$, то по свойству разности $x \in B$ и по свойству объединения получим $x \in B \cup A$. Тогда по закону коммутативности операции объединения последнее соотношение означает, что $x \in A \cup B$.

Таким образом, второе включение тоже доказано, что означает справедливость равенства $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.

16. Социолог исследует способности у 300 студентов. Оказалось, что 120 студентов преуспевают в математике, 90 – в музыке, 80 – в спорте. Кроме того, было обнаружено, что 40 студентов преуспевают как в математике, так и в музыке, 30 – как в музыке, так и в спорте, 40 – как в математике, так и в спорте. И только 10 студентов преуспели сразу в трех областях. Сколько студентов вообще не преуспевает ни в одной области? Найдите количество студентов, которые преуспевают только в одной из областей?

Решение. Введем следующие обозначения: пусть A – «множество учащихся, преуспевающих в математике», B – «множество учащихся, преуспевающих в музыке», C – «множество учащихся, преуспевающих в спорте» и **U** – «множество всех студентов». По условию задачи $n(\mathbf{U})=300$, $n(A)=120$, $n(B)=90$, $n(C)=80$, $n(A \cap B)=40$, $n(A \cap C)=40$, $n(B \cap C)=30$, $n(A \cap B \cap C)=10$. По предыдущей формуле для числа элементов найдем количество студентов, преуспевающих хотя бы в одной из описанных областей $n(A \cup B \cup C)$:

$$n(A \cup B \cup C) = 120+90+80-40-40-30+10=190.$$

Таким образом, количество студентов, которые вообще не преуспевает ни в одной области, равно: $n(\mathbf{U} \setminus (A \cup B \cup C))= 300-190=110$.

Посчитаем количество студентов, преуспевающих только в математике:

$$n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)= 120 - 40 - 40 + 10 = 50.$$

Посчитаем количество студентов, преуспевающих только в музыке:

$$n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)= 90 - 40 - 30 + 10 = 30.$$

Посчитаем количество студентов, преуспевающих только в спорте:

$$n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)=80 - 40 - 30 + 10 = 20.$$

Таким образом, количество студентов, которые преуспевают только в одной из областей, 50+30+20=100.

17. Множество всех студентов отделения «МЛ» является объединением следующих трех множеств: А – «множество всех успевающих студентов», В – «множество всех девушек», С – «множество всех неуспевающих юношей». Опишем множества, входящие в равенства законов дистрибутивности:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Ясно, что каждый студент отделения «МЛ» принадлежит хотя бы одному из указанных множеств. Заметим, что множества А и В имеют общие элементы: успевающие девушки входят и в первое, и во второе множество.

Поскольку $B \cap C = \varnothing$, то $A \cup (B \cap C) = A \cup \varnothing = A$. С другой стороны, $A \cup B$ – «множество всех успевающих студентов и всех девушек», $A \cup C$ – «множество всех успевающих студентов и всех неуспевающих юношей», следовательно, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ – «множество всех успевающих студентов», т. е. это множество А. В этом примере для множеств А, В и С справедливы равенства

$$A \cup (B \cap C) = A = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Поскольку $B \cup C$ – «множество всех девушек и всех неуспевающих юношей», то $A \cap (B \cup C)$ – «множество всех успевающих девушек», с другой стороны, так как $A \cap C = \varnothing$, то $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap B$ – «множество всех успевающих девушек». В этом примере для множеств А, В и С справедливы равенства

$$A \cap (B \cup C) = A \cap B = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

18. В гуппе 25 человек изучают английский язык, 10 человек – немецкий язык, а 5 человек – одновременно английский и немецкий языки. Сколько студентов изучают английский или немецкий язык?

Решение. Пусть множество А – «множество студентов, изучающих английский язык», множество В – «множество студентов, изучающих немецкий язык». Тогда, в силу предыдущего утверждения, количество студентов, изучающих английский или немецкий языки,

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) – n(A \cap B) = 25 + 10 – 5 = 30.$

19. В группе из 40 студентов 25 человек изучают английский язык, 10 – немецкий язык, а 5 человек – одновременно английский и немецкий языки. Сколько студентов не изучают ни английский, ни немецкий язык?

Решение. Пусть А – «множество студентов, изучающих английский язык», В – «множество студентов, изучающих немецкий язык», а универсальное множество **U** – это группа из 40 студентов. Тогда множество студентов, не изучающих ни английский, ни немецкий язык, равно пересечению дополнений $\overline{A} \cap \overline{B}$ или $(U\backslash A) \cap (U\backslash \mathrm{B})$. В силу свойства дополнения для объединения множеств имеем

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} \quad \text{или } (U\backslash A) \cap (U\backslash \mathrm{B}) = U\backslash(A \cup B).$$

Напомним, что, по решению предыдущего примера, число студентов группы, изучающих английский или немецкий язык, равно n(A $\cup$ B) = 30. Поэтому, так как

$n((U\backslash A)\cap(U\backslash B)) = n(U\backslash(A\cup B))$ = 40 – 30 = 10

или n($\overline{A}\cap\overline{B}$) = n($\overline{A\cup B}$)= 40 – 30 = 10,

то всего 10 студентов группы не изучают эти иностранные языки.

Задачи для самостоятельного решения

1. Задайте множество X – «множество корней квадратного уравнения $x^2 - 5\cdot x + 6 = 0$» способом перечисления его элементов.

2. Задайте множество X – «множество корней квадратного уравнения $x^2 - 5\cdot x + 6 = 0$» с помощью указания характеристических свойств его элементов.

3. Составьте список элементов множества, заданного с помощью характеристического свойства элементов:

а) Множество X = {x – натуральное число: x < 7};

б) Множество X = {x – натуральное число: |x| < 4}.

4. Проверьте, совпадают ли множества A = {{1, 3}, 2} и B = {1, 2, 3}.

5. Выясните справедливо ли включение: {1, 2} $\subset$ {{1, 2, 3}, {1, 3}, 1, 2}.

6. Пусть A – множество студентов факультета философии и социальных наук, прогуливающих занятия по высшей математике, а B – множество студентов факультета философии и социальных наук, надеющихся сдать экзамен по высшей математике. Найдите A $\cap$ B, A $\cup$ B, A \ B, B \ A, AΔB.

7. Даны множества A={1,2,4,8,10}, B={2,3,8,12}. Найдите A $\cap$ B, A $\cup$ B, A \ B, B \ A.

8. Даны множества A={0,3,4,5,15}, B={1,3,8,10}, C={1,2,4,8,10,15}. Найдите максимальный элемент множества (A \ B) $\cup$ (B $\cap$ C).

9. По заданным промежуткам A=(-2;2] и B=[0;5) на числовой прямой определите A $\cap$ B, A $\cup$ B, A \ B, B \ A, A Δ B.

10. Существуют ли такие множества A, B, C, что A $\cap$ B $\neq \varnothing$, A $\cap$ C = $\varnothing$, (A $\cap$ B) \ C = $\varnothing$?

11. Опишите следующие множества: A $\cap$ B, A $\cup$ B, A \ B, B \ A:

а) A – «множество студентов-международников – отличников группы» и B – «множество студентов ФМО»;

б) A – «множество успевающих студентов-международников» и B – «множество юношей-международников»;

12. Даны следующие числовые множества: A = {1, 3, 5, 7, 9, 11}, B = {2, 5, 6, 11, 12}, C = {1, 2, 3, 5, 9, 12}. Найдите множества, которые будут получены в результате выполнения следующих операций:

а) (C \ B) $\cap$ A; **б)** B \ (A $\cap$ C); **в)** (C \ B) $\cap$ (A \ C).

13. Докажите равенство A \ (B $\cap$ C) = (A \ B) $\cup$ (A \ C).

14. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна множества $A \cap \overline{B}$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$.

15. Если $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, то могут ли выполняться следующие равенства $A \cup B = \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$?

16. Выпишите все подмножества множества: $A=\{1,\{2,\{3\}\}\}$.

17. Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая соответствует множеству: $C\backslash(\overline{B\backslash A})$, где A, B и C три произвольных пересекающихся множества.

18. На курсах иностранных языков учатся 600 человек, из них французский изучают 220 человек, английский – 270 человек, причем те, кто изучают английский, не изучают немецкий язык; только французский изучают 100 человек, только немецкий – 180 человек. Сколько человек изучают по два иностранных языка? Сколько человек изучает один иностранный язык?

19. Среди студентов первого курса проводилось анкетирование по любимым телесериалам. Самыми популярными оказались три сериала: «Звёздный путь», «Игра престолов», «Друзья». Всего в группе 38 человек. «Звёздный путь» выбрали 21 студент, среди которых трое назвали еще «Игра престолов», 6 – «Друзей», а один написал все три сериала. Сериал «Игра престолов» назвали 13 студентов, среди которых пятеро выбрали сразу два сериала. Сколько человек выбрали сериал «Друзья»?

20. Многие студенты любят футбол, баскетбол и волейбол. А некоторые - даже два или три из этих видов спорта. Была опрошена группа студентов. Известно, что 6 студентов играют только в волейбол, 2 – только в футбол, 5 – только в баскетбол. Только в волейбол и футбол умеют играть 3 студента, в футбол и баскетбол – 4, в волейбол и баскетбол – 2. Один студент умеет играть во все игры, 7 не умеют играть ни в одну игру. Найдите:

- ✓ сколько всего было опрошено студентов;
- ✓ сколько человек умеют играть в футбол;
- ✓ сколько человек умеют играть в волейбол.

21. В группе 30 человек. 20 из них каждый день пользуются метро, 15 – автобусом, 23 – троллейбусом, 10 – и метро, и троллейбусом, 12 – и метро, и автобусом, 9 – и троллейбусом, и автобусом. Сколько человек ежедневно пользуется всеми тремя видами транспорта?

22. В НИИ работает 67 человек. Из них 20 человек французский язык, 47 – английский язык, 35 человек – немецкий, 23 – немецкий и английский, 12 человек – английский и французский, 11 – немецкий и французский, а все три языка знают 5 человек. Сколько человек не знают ни английского, ни немецкого, ни французского?

23. Из 100 студентов изучают только немецкий 18 человек, немецкий и французский – 8 человек, немецкий – 26, французский – 48, французский и испанский – 8, все три языка – 5, никакого языка не изучают 24 человека. Сколько студентов изучают:

- ✓ только испанский язык;
- ✓ немецкий и испанский, но не французский;

✓ французский, в том и только том случае, если они не изучают испанский;

✓ испанский язык?

Примеры решения задач

1. Пусть в магазине имеются 7 различных видов коробок конфет и 5 различных коробок печенья. Сколькими способами можно выбрать в подарок коробку конфет или коробку печенья? Сколькими способами можно составить набор, состоящий из коробки конфет и коробки печенья?

Решение. Коробку конфет или коробки печенья можно выбрать согласно правилу суммы 7+5=12 способами. Составить набор из коробки конфет и коробки печенья можно согласно правилу произведения 7·5=35 способами.

2. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова МОСКВА?

Решение. Гласную букву можно выбрать двумя способами (О или А), а согласную – существует четыре варианта (М, С, К, В). Следовательно, согласно правилу произведения гласную и согласную буквы можно выбрать 2·4=8 способами.

3. Сколькими способами 6 студенток могут встать в столовой в очередь?

Решение. Необходимо пересчитать способы расположения шести девушек в последовательность, т.е. речь идет о всех перестановках из n элементов, где n=6. Число таких перестановок равно P_n= n! = 6! = 1·2·3·4·5·6 = 720.

4. Из группы студентов, состоящей из 25 человек, играющих в шахматы, надо выбрать шахматную команду из четырех человек играющих на I, II, III и IV доске. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как из 25 человек выбираются четверо и порядок важен при распределении их по доскам, то число способов есть число размещений из 25 по 4, т.е.:

$$A_{25}^{4} = 25!/(25–4)!=25!/21!=22·23·24·25=303600 \text{ способов.}$$

5. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числах не повторяются?

Решение. Выбираем 3 цифры из 7, порядок важен: $A_7^3 = 7!/4! = 5·6·7 = 210$ способов.

6. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг с полосами одинаковой ширины, если есть материал трех различных цветов и возможно как вертикальное, так и горизонтальное расположение полос?

Решение. При вертикальном расположении полос их можно расположить $P_3 = 3! = 6$ способами (число перестановок из трех элементов), и такое же количество способов – для горизонтального расположения полос. Так как на флагах возможно вертикальное или горизонтальное расположение полос, то согласно правилу суммы общее число таких флагов будет равно $6 + 6 = 12$.

7. Для занятий по информатике группа студентов факультета БГУ из 25 человек разбивается на две подгруппы А и Б по 13 и 12 человек соответственно. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Выбираем сначала подгруппу А. Выбор 13 человек из 25 можно осуществить C_{25}^{13} способами. Оставшиеся 12 человек составят подгруппу Б (ее можно выбрать $C_{12}^{12} = 1$ способом). Таким образом, данное разбиение можно осуществить $C_{25}^{13} = \frac{25!}{13!\cdot 12!} = 5\ 200\ 300$ способами.

8. Сколькими способами можно выбрать три человека на три различные должности из 10 кандидатов?

Решение. Искомое число способов равно числу размещений из 10 элементов по 3, т. е.

$$A_{10}^{3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

9. Сколькими способами можно выбрать три человека на три одинаковые должности из 10 кандидатов?

Решение. Число способов выбора трех человек на три одинаковые должности из 10 кандидатов равно числу сочетаний из 10 по 3, т. е.

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\ \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

10. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из пяти человек, можно образовать из 12 преподавателей?

Решение. Нужное число экзаменационных комиссий равно

$$C_{12}^{5} = \frac{12!}{5!\ \cdot 7!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В студенческой группе 20 человек изучают английский, 18 человек – французский язык. При этом 5 человек изучают оба эти языка, а 7 человек вообще не изучают иностранный язык. Сколько студентов в группе?

2. Сколькими способами 10 студентов могут встать в очередь друг за другом в университетской столовой?

3. Студенты изучают в каждом семестре восемь различных дисциплин. Расписание занятий на понедельник состоит из 4 различных дисциплин. Сколько различных расписаний на понедельник может составить методист факультета?

4. Сколько поединков по борьбе должны быть проведены между 15 спортсменами, если каждый из них должен встретиться с каждым?

5. В книжный магазин привезли новых 20 книг, из них по – 5, по экологистике, по экономике – 8, по высшей математике – 4 и по психологии – 3. Сколькими способами можно составить набор для университетской библиотеки, чтобы в него входило 3 книги по логистике, 5 по экономике, 3 по высшей математике и 2 по психологии?

6. Сколькими способами 3 награды (за I, II, III места) могут быть распределены между 10 участниками математической олимпиады?

7. В конкурсе участвовало 8 фирм, трем из которых жюри должно присудить 1-е, 2-е и 3-е места. Сколько вариантов решения жюри существует?

8. Перед выпуском группа студентов, состоящая из 19 человек, обменялась фотографиями. Сколько всего фотографий было роздано?

9. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в запись числа только один раз?

10. Собрание из 35 человек выбирает председателя, секретаря и помощника. Сколько существует способов это сделать?

11. Предположим, что в записи 7-значного номера телефона используются только две цифры: 2 и 5. Сколько может быть таких различных номеров телефонов?

12. Из девяти различных задач для контрольной работы выбирается пять. Сколько различных вариантов контрольной работы можно составить?

13. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы каждое из них начиналось с комбинации «45»?

14. Сколько среди трёхзначных чисел встречается таких, в записи которых не участвует число 6?

15. 5 групп занимаются в 5-ти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы №1 и №2 находились бы в соседних аудиториях?

16. В стране 20 городов, каждые 2 из которых соединены авиалиниями. Сколько авиалиний в этой стране?

17. Сколькими способами можно разбить 10 человек на 2 баскетбольные команды по 5 человек в каждой?

Занятие № 19-20. Операции над событиями. Вероятность события. Классическое, статистическое и геометрическое определения вероятности события, свойства вероятности. Основные теоремы теории вероятностей.

Примеры решения задач

1. Опыт состоит в извлечении шара из урны, в которой находятся шары трех цветов (черные, белые и красные). Рассмотрим события А – «извлечен шар белого цвета»; В – «извлечен шар красного цвета»; С – «извлечен шар черного цвета». Что представляют собой события: А+В, $\overline{A+C}$, АВ, АС+В?

Решение. Событие А+В – это событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий А или В. Следовательно, А+В – «извлечен шар белого или красного цвета». Так как событие А+С – «извлечен шар белого или черного цвета», то событие $\overline{A+C}$ – это событие, противоположное событию А+С, т.е. $\overline{A+C}$ – «извлечен шар не белого и не черного цвета», а значит он «красного цвета». Событие АВ – невозможное событие, поскольку шар одновременно не может быть белого и красного цвета. Событие АС+В – это сумма невозможного события АС и события В, равная событию В, т.е. АС+В – «извлечен шар красного цвета».

2. Некоторые клиенты банка приходят в банк брать проценты с вклада. Сейчас в банке ожидают своей очереди обслуживания 4 человека. Что собой представляют события – брать проценты будут: а) четыре человека; б) три человека; в) два человека; г) один человек; д) хотя бы два человека; е) хотя бы один человек?

Решение. Обозначим события:

A_1 – «первый клиент пришел брать проценты»;

A_2 – «второй клиент пришел брать проценты»;

A_3 – «третий клиент пришел брать проценты»;

A_4 – «четвертый клиент пришел брать проценты».

Тогда противоположными для каждого из них будут события:

$\overline{A_1}$ – «первый клиент не будет брать проценты»;

$\overline{A_2}$ – «второй клиент не будет брать проценты»;

$\overline{A_3}$ – «третий клиент не будет брать проценты»;

$\overline{A_4}$ – «четвертый клиент не будет брать проценты».

Обозначим также события:

B – «пришли брать проценты с вклада четыре человека», тогда $B = A_1A_2A_3A_4$;

C – «пришли брать проценты с вклада три человека», тогда $C = A_1A_2A_3\overline{A_4} + A_1A_2\overline{A_3}A_4 + A_1\overline{A_2}A_3A_4 + \overline{A_1}A_2A_3A_4$;

D – «пришли брать проценты с вклада два человека», тогда $D = A_1A_2\overline{A_3A_4} + A_1\overline{A_2A_3}A_4 + A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4} + \overline{A_1A_2}A_3A_4$;

E – «пришел брать проценты с вклада один человек» $E = A_1\overline{A_2A_3A_4} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3A_4} + \overline{A_1A_2}A_3\overline{A_4} + \overline{A_1A_2A_3}A_4$.

F– «хотя бы два человека пришли брать проценты с вклада». Событие F означает также, что пришли брать процент с вклада либо два, либо три, либо все четыре человека, т.е. F = D+C+B.

H– «хотя бы один человек пришел брать проценты с вклада». Событие H означает также, что пришли брать процент с вклада либо один, либо два, либо три, либо все четыре человека, т.е. H = B+C+D+E или H = F+E.

3. На трех одинаковых карточках написаны буквы И, М, Р. Карточки тщательно перемешивают, наудачу извлекают три карточки и выкладывают их в порядке появления. Найдите вероятность того, что составится слово МИР.

Решение. Обозначим через А событие, которое состоит в том, что в результате извлечения карточек получится слово МИР. У данного опыта шесть равновозможных исходов: «получено слово ИМР», «получено слово ИРМ», «получено слово МИР», «получено слово МРИ», «получено слово РМИ», «получено слово РИМ». Из них только один исход благоприятствует событию А. Следовательно, число n=6, число m=1. Вычисляем $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$.

4. Какова вероятность появления слова ДВА, если наугад выбираются три карточки из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д и располагаются в ряд в порядке появления?

Решение. Число всех исходов испытания состоит в выборе трёх букв из имеющихся пяти, при этом важен порядок появления букв, поэтому по формуле для числа размещений их всего $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Благоприятный исход для появления слова ДВА всего один исход. Следовательно, искомая вероятность равна $P(A) = \frac{1}{A_5^3} = \frac{1}{60} \approx 0{,}02$.

5. Для участия в лотерее на карточке, содержащей 49 чисел, нужно отметить 6 чисел. Затем эти числа сверяются с 6 числами, отобранными случайным образом. В зависимости от числа совпавших номеров выплачивается выигрыш. Какова вероятность угадать в лотерее 6 чисел из 49?

Решение. Число всех элементарных исходов – это число всех сочетаний из 49 чисел по 6. Столько существует различных вариантов заполнения карточки, и каждый из них имеет одинаковый шанс стать выигрышным. Благоприятствует выигрышу только одно событие: «номер на карточке совпал с отобранным номером». Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{C_{49}^6} \approx \frac{1}{14\ 000\ 000}$.

6. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Какова вероятность того, что среди 5 взятых наудачу деталей стандартных будет 4?

Решение. А – событие, состоящее в том, что «из 5 взятых наудачу деталей стандартных будет 4». Чтобы определить Р(А), надо воспользоваться формулой $P(A) = \frac{m}{n}$.

Опыт состоит в извлечении 5 деталей из 10 имеющихся, значит общее число n возможных элементарных исходов равно числу способов, которыми можно выбрать 5 элементов из 10, т.е. $n = C_{10}^5$.

Определим число m исходов, благоприятствующих событию А. 4 из 8 стандартных деталей можно извлечь $m_1 = C_8^4$ способами. Оставшиеся детали выборки должны быть нестандартными, их будет 5–4=1, тогда 1 нестандартная деталь из имеющихся 10–8=2 может быть извлечена $m_2 = C_2^1$ способами. Тогда по комбинаторному принципу умножения число m благоприятствующих исходов равно: $m = m_1 \cdot m_2 = C_8^4 \cdot C_2^1$.

Искомая вероятность равна отношению числа m исходов, благоприятствующих данному событию, к числу n всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n} = \frac{C_8^4 \cdot C_2^1}{C_{10}^5} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{5}{9} \approx 0{,}56.$$

7. На полке стоит 10 книг, из них 6 книг по высшей математике и 4 книги по экономике. Какова вероятность взять книгу по высшей математике, если наудачу берется только 1 книга?

Решение. В этой задаче n = 10 – это число всех равновозможных исходов испытания, а именно количество книг, m = 6 – это число исходов, благоприятствующих событию А – «выбрана книга по высшей математике». Поэтому по формуле классической вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

8. Брошены 2 игральные кости. Найдите вероятность следующих событий: а) сумма выпавших очков равна 7; б) сумма выпавших очков равна 8, а разность – 4.

Решение. Для случая а) n = 36, так как число равновозможных исходов испытания состоит из числа различных комбинаций очков на первой и второй игральных костях. Для первой кости возможны 6 вариантов от 1 до 6, для второй аналогично 6 вариантов, следовательно, для первой и второй костей, согласно комбинаторному принципу умножения будет 36 исходов. Число благоприятных исходов m, т. е. сумма выпавших очков равна 7, состоит из следующих вариантов: (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3), т. е. m = 6, и поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

Для случая б) как и для случае а), n = 36. Число благоприятных исходов m, т. е. сумма выпавших очков равна 8, а разность 4, состоит из следующих двух вариантов: (2, 6), (6, 2), т. е. m = 2, и поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

9. Из колоды, состоящей из 36 карт, наудачу вытаскивается 6 карт. Какова вероятность того, что среди вытянутых карт окажется 1 король и 2 дамы?

Решение. Для решения этой задачи можно применить общую схему задачи о выборке. Событие А – «среди вытянутых 6 карт окажется 1 король и 2 дамы». Число всех исходов равно числу сочетаний из 36 по 6, то есть C_{36}^{6}. Вытянуть 1 короля из 4 королей, имеющихся в колоде, можно C_4^1 способами, а 2 дам из 4 дам, соответственно, C_4^2 способами. Кроме того, вытягиваются еще 3 карты из 36 – 4 – 4 = 28 карт, не содержащих ни королей, ни дам, что можно сделать C_{28}^{3} способами. Таким образом, согласно комбинаторному принципу умножения, число благоприятных исходов для события А равно произведению $C_4^1\cdot C_4^2\cdot C_{28}^3$. Следовательно, искомая вероятность

$$P(A)=\frac{C_4^1\cdot C_4^2\cdot C_{28}^3}{C_{36}^6}=\left(\frac{4!}{1!}\cdot\frac{4\cdot 3}{2!}\cdot\frac{28\cdot 27\cdot 26}{3!}\right)\Big/\left(\frac{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31}{6!}\right)$$
$$\approx 0{,}04.$$

10. В урне 15 голубых, 10 зеленых и 25 белых шаров. Найдите вероятность того, что из урны наугад будет извлечен цветной шар.

Решение. Извлечение цветного шара означает появление либо голубого, либо зеленого шара. Пусть событие А означает «появление голубого шара», В – «появление зеленого шара». Тогда

$$P(A)=\frac{15}{15+10+25}=\frac{15}{50}=\frac{3}{10},\quad P(B)=\frac{10}{15+10+25}=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}.$$

Так как события А и В несовместны, то по теореме сложения вероятностей двух несовместных событий имеем

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}.$$

11. Бросают две игральные кости. Какова вероятность выпадения хотя бы одной шестерки?

Решение. Пусть событие А – «выпадение 6 на первой кости», событие В – «выпадение 6 на второй кости». Очевидно, что $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(AB)=\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}$, поэтому по теореме сложения вероятностей двух событий имеем

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{36}=\frac{11}{36}.$$

12. 30 экзаменационных билетов по курсу «Высшей математики» пронумерованы числами от 1 до 30. Билеты тщательно перемешаны. Какова вероятность вытянуть наудачу студенту–социологу билет с номером, кратным 2 или 3?

Решение. Обозначим события: А – «вытянут билет с четным номером», событие В – «вытянут билет с номером, кратным 3», событие АВ – «вытянут билет с четным номером, кратным 3». Найдем вероятность искомого события А+В. Поскольку события А и В – это совместные события, то вероятность события А+В находим по теореме сложения вероятностей двух событий $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Событию А благоприятствуют 15 исходов, событию В – всего 10 исходов, а событию АВ – только 5 исходов. Поэтому искомая вероятность

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{15}{30}+\frac{10}{30}-\frac{5}{30}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}\approx 0{,}667.$$

13. Из урны, в которой 10 черных и 5 белых шаров, вынимают 2 шара. Чему равна вероятность того, что; а) оба шара черные; б) оба шара белые; в) шары разного цвета?

Решение. Пусть событие A_1 – «первый шар черный», A_2 – «второй шар черный», B_1 – «первый шар белый», B_2 – «второй шар белый». Тогда

$$P(A_1)=\frac{10}{10+5}=\frac{2}{3},\ P(B_1)=\frac{5}{10+5}=\frac{1}{3}\ .$$

Найдем условные вероятности:

$P(A_2|A_1)=\frac{10-1}{15-1}=\frac{9}{14}$ (второй шар был черным, если первый был черным);

$P(B_2|B_1)=\frac{5-1}{15-1}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$ (второй шар был белым, если первый был белым);

$P(A_2|B_1)=\frac{10}{15-1}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$ (второй шар был черным, если первый был белым);

$P(B_2|A_1)=\frac{5}{15-1}=\frac{5}{14}$ (второй шар был белым, если первый был черным).

Отсюда находим искомые вероятности:

а) $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{14}=\frac{3}{7}$;

б) $P(B_1B_2)=P(B_1)P(B_2|B_1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}=\frac{2}{21}$;

в) $P(A_1B_2+B_1A_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{14}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{10}{21}$.

14. Брошены последовательно 3 монеты. Определить вероятности следующих событий: А – «выпадение герба на первой монете», В – «выпадение хотя бы одной решки». Проверить, выполняется ли равенство $P(AB)=P(A)P(B)$.

Решение. Найдем вероятности этих событий. Очевидно, что $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(\overline{B})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$. Далее воспользуемся формулой о том, что сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т.е. P(B) = 1– P($\overline{B}$). Тогда P(B)=1–$\frac{1}{8}$ = $\frac{7}{8}$. Найдем вероятность произведения событий A и B, т.е. P(AB) – вероятность события, состоящего в одновременном появлении герба на первой монете и выпадения хотя бы одной решки:

$$P(AB) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

Далее P(A) P(B) = $\frac{7}{16} \neq \frac{3}{8}$ =P(AB). Следовательно равенство P(AB)=P(A)P(B) не выполняется.

15. Вероятность попадания каждого из трех стрелков соответственно равна: 0,8; 0,7; 0,9. Стрелки произвели один залп. Найдите вероятность: а) только одного попадания; б) ровно двух попаданий; в) хотя бы одного попадания.

Решение. Пусть A_i – «попадание в мишень при i-м выстреле», $\overline{A_i}$ – «непопадание в мишень при i-м выстреле» i=1,2,3.

Так как $P(A_1)$=0,8; $P(A_2)$=0,7; $P(A_3)$=0,9, то $P(\overline{A}_1) = 1 - 0,8 = 0,2$; $P(\overline{A}_2) = 1 - 0,7 = 0,3$; $P(\overline{A}_3) = 1 - 0,9 = 0,1$.

а) обозначим событие A – «ровно одно попадание в мишень». Оно распадается на три несовместных события: может быть попадание при первом выстреле, промахи при втором и третьем; попадание при втором, промахи при первом и третьем; попадание при третьем, промахи при первом и втором. Тогда

$$A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

Учитывая, что события $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ – несовместные события (стрелки производят выстрелы независимо друг от друга), то из теорем сложения и умножения вероятностей следует

$$P(A) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) =$$
$$= 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}092;$$

б) обозначим событие B – «ровно два попадания в мишень». Оно распадается на три несовместных события: может быть попадание при первом и втором выстрелах, промах при третьем; попадание при первом и третьем, промах при втором; попадание при втором и третьем, промах при первом. Тогда

$$B = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3.$$

Учитывая, что $A_1A_2\overline{A}_3$, $A_1\overline{A}_2A_3$, $\overline{A}_1A_2A_3$ – несовместные события (стрелки производят выстрелы независимо друг от друга), из теорем сложения и умножения вероятностей следует

$$P(B) = P(A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3)$$
$$= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) =$$
$$= 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}398;$$

в) Обозначим событие C – «ровно три попадания в мишень»; событие D – «хотя бы одно попадание в мишень», тогда D=A+B+C.

Найдем вероятность события $C = A_1A_2A_3$:

$$P(C) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504.$$

Получаем

$$P(D) = P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}092 + 0{,}398 + 0{,}504 = 0{,}994.$$

Так как попадания каждого стрелка – независимые в совокупности события, то вероятность события D можем найти:

$$P(D) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994.$$

16. В течение года две фирмы имеют возможность, независимо друг от друга, обанкротиться с вероятностями 0,06 и 0,09. Найдите вероятность того, что:

а) обе фирмы будут работать успешно;

б) обанкротится только одна фирма;

в) хотя бы одна фирма будет успешно функционировать.

Решение. Пусть событие A_1 – «в течение года первая фирма обанкротится», A_2 – «в течение года вторая фирма обанкротится». Тогда событие $\overline{A_1}$, как противоположное событию A_1, состоит в следующем: «в течение года первая фирма не обанкротится» или «в течение года первая фирма будет работать успешно», $\overline{A_2}$ – «в течение года вторая фирма не обанкротится». В задаче дано: $P(A_1)=0{,}06$, $P(A_2)=0{,}09$. Тогда $P(\overline{A_1}) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$, $P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$.

а) рассмотрим событие A – «обе фирмы будут работать успешно», это возможно, когда и первая фирма будет работать успешно, и вторая, т.е. при одновременном появлении событий $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$, т.е. $A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$. Надо найти $P(A) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2})$. Так как события $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ независимые, то по формуле

$P(A) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 0{,}94 \cdot 0{,}91 = 0{,}8554$;

б) рассмотрим событие B – «обанкротится только одна фирма». Это возможно в одном из двух случаев: событие B_1 – «первая фирма обанкротится (событие A_1), а вторая при этом будет работать успешно ($\overline{A_2}$)», т.е. $B_1 = A_1$ и $\overline{A_2} = A_1 \cdot \overline{A_2}$;

B_2 – «вторая фирма обанкротится (событие A_2), а первая при этом будет работать успешно ($\overline{A_1}$)», т.е. $B_2 = A_2$ и $\overline{A_1} = A_2 \cdot \overline{A_1}$.

Тогда $B = B_1 + B_2$. Так как события B_1 и B_1 несовместны, то по формуле:

$P(B) = P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) = P(A_1 \cdot \overline{A_2}) + P(A_2 \cdot \overline{A_1}) =$

$= P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(A_2) \cdot P(\overline{A_1}) = 0{,}06 \cdot 0{,}91 + 0{,}09 \cdot 0{,}94 = 0{,}1392$.

в) пусть событие C – «хотя бы одна фирма будет успешно функционировать». Вероятность P(C) можно найти двумя способами.

1-й способ: $P(C) = P(B) + P(A) = P(A_1 \cdot \overline{A_2}) + P(A_2 \cdot \overline{A_1}) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) =$

$= 0{,}06 \cdot 0{,}91 + 0{,}09 \cdot 0{,}94 + 0{,}94 \cdot 0{,}91 = 0{,}9946$.

2-й способ: $\overline{C}$ – событие, противоположное C, – «ни одна фирма не будет работать успешно», т.е. «обе фирмы обанкротятся», или $\overline{A_1} = A_1$ и $A_2 = A_1 \cdot A_2$. По формуле

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}06 \cdot 0{,}09 = 0{,}9946.$$

17. Фирма по производству мебели претендует на 2 заказа от двух крупных мебельных магазинов A и B. Эксперты фирмы считают, что вероятность получения заказа от магазина A равна 0,5. Эксперты также полагают, что , если фирма получит заказ от магазина A, то вероятность того, что магазин B сделает заказ у них, равна 0,75. Какова вероятность, что фирма получит заказ от обоих магазинов?

Решение. Обозначим события: C – «получение заказа от магазина A», D – «получение заказа от магазина B». Из условия задачи очевидно, что события C и D зависимы, так как событие D зависит от того, произойдет или не произойдет событие C. Тогда имеем: $P(C) = 0{,}5$; $P(D|C) = 0{,}75$.

Надо найти вероятность совместного наступления двух зависимых событий C и D, т.е. $P(CD)$. По теореме умножения двух зависимых событий имеем

$$P(CD) = P(C)\cdot P(D|C) = 0{,}5\cdot 0{,}75 = 0{,}375.$$

18. На фабрике на машинах a, b, c производят соответственно 25, 35 и 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5%, 4% и 2%. Какова вероятность того, что случайно выбранное изделие фабрики дефектно?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что случайно выбранное изделие дефектно, а H_1, H_2, H_3 – изделие произведено на машинах a, b, c соответственно. Очевидно, события H_1, H_2, H_3 образуют полную группу событий.

По условию $P(H_1)=0{,}25$; $P(H_2)=0{,}35$; $P(H_3)=0{,}40$. Аналогично, $P(A|H_1)=0{,}05$; $P(A|H_2)=0{,}04$; $P(A|H_3)=0{,}02$ являются условными вероятностями события A при выполнении гипотез H_1, H_2, H_3 соответственно.

Применив формулу полной вероятности, найдем

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)=$$
$$=0{,}25\cdot 0{,}05+0{,}35\cdot 0{,}04+0{,}40\cdot 0{,}02=0{,}0345.$$

19. Пусть выполнены условия задачи **18** и пусть известно, что случайно выбранное изделие оказалось дефектным. Какова вероятность того, что оно было сделано на машинах a, b, c соответственно?

Решение. Пусть A, H_1, H_2, H_3 означают то же, что и в задаче **18**. Тогда задача состоит в нахождении условных вероятностей гипотез H_1, H_2, H_3 при условии, что событие A уже произошло. По условию $P(H_1)=0{,}25$; $P(H_2)=0{,}35$; $P(H_3)=0{,}40$. Аналогично, $P(A|H_1)=0{,}05$; $P(A|H_2)=0{,}04$; $P(A|H_3)=0{,}02$.

В задаче **18** найдено

$$P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)=0{,}0345.$$

Применяя формулу Байеса, имеем

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + P(H_3)\cdot P(A|H_3)} = \frac{0{,}25\cdot 0{,}05}{0{,}0345} = \frac{25}{69}.$$

Аналогично получаем $P(H_2|A) = \frac{28}{69}$, $P(H_3|A) = \frac{16}{69}$.

20. Партия транзисторов, среди которых 10% дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживается дефект (если он есть) и существует вероятность 0,03 того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Какова вероятность того, что случайно выбранный из партии транзистор будет признан дефектным?

Решение. Из условия задачи очевидно, что с рассматриваемым событием A – «случайно выбранный транзистор оказался дефектным» связаны две гипотезы:

H_1 – «поступивший на проверку транзистор исправный»,

H_2 – «поступивший на проверку транзистор неисправный».

Вероятности этих гипотез легко вычисляются по классической формуле определения вероятности: $P(H_1)=0,9$; $P(H_2)=0,1$. Условные вероятности определены в условии задачи: $P(A|H_2)=0,95$; $P(A|H_1)=0,03$. Применяя формулу полной вероятности, получим

$$P(A)=0,1\cdot 0,95+0,9\cdot 0,03=0,122.$$

21. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, для второго 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найдите вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

Решение. До опыта возможны следующие гипотезы: H_1 – «ни первый, ни второй стрелок не попадут»; H_2 – «оба стрелка попадут»; H_3 – «первый стрелок попадет, а второй не попадет»; H_4 – «первый стрелок не попадет, а второй попадет». Вероятности этих гипотез: $P(H_1)=0,2\cdot 0,6=0,12$, $P(H_2)=0,8\cdot 0,4=0,32$, $P(H_3)=0,8\cdot 0,6=0,48$, $P(H_4)=0,2\cdot 0,4=0,08$. Пусть A – событие, состоящее в том, что будет одна пробоина. Условные вероятности наблюдавшегося события A при этих гипотезах равны:

$$P(A|H_1)=P(A|H_2)=0;\ P(A|H_3)=1;\ P(A|H_4)=1.$$

После опыта вероятность гипотезы H_3 такова:

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)+P(H_3)\cdot P(A|H_3)+P(H_4)\cdot P(A|H_4)} = \frac{0,48}{0,56}\approx 0,857.$$

22. Медицинский тест даёт положительный результат, если пациент болен исследуемой болезнью, с вероятностью 0,99. Если пациент не болен, то с вероятностью 0,95 тест даст отрицательный результат. Данной болезнью страдает 0,1% населения. Какова вероятность того, что пациент с положительным результатом теста на самом деле не болен?

Решение. Обозначим событие A – «тест даст положительный результат». В качестве гипотез возьмём H_1 – «пациент болен», H_2– «пациент здоров». По условию задачи $P(H_1)=0,001$, $P(H_2)=0,999$. Условные вероятности

$$P(A|H_1)=0,99,\ P(A|H_2)=1–0,95=0,005.$$

Тогда по формуле полной вероятности найдём вероятность того, что пациент с положительным результатом теста:

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=0,001\cdot 0,99+0,999\cdot 0,05 = 0,05094.$$

Далее по формуле Байеса найдём вероятность того, что пациент с положительным результатом теста на самом деле не болен:

$$P(H_2|A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)}=\frac{0,999\cdot 0,05}{0,05094}\approx 0,981.$$

Как видно, вероятность получить ложноположительный результат в данном случае очень велика. Это связано с тем, что исследуемая болезнь крайне редкая. Выходом в данной ситуации является проведение повторного теста.

Если болезнь не очень редкая и $P(H_1)=0{,}7$, $P(H_2)=0{,}3$, то

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}05}{0{,}7\cdot 0{,}99 + 0{,}3\cdot 0{,}05} \approx 0{,}021.$$

23. На складе находятся детали, изготовленные на двух заводах, причем деталей первого завода 80 %, а второго – 20 % от общего количества. Вероятность брака на первом заводе равна 0,05, на втором заводе – 0,01. Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что эта деталь изготовлена первым заводом?

Решение. Пусть гипотеза H_1 – «взятая деталь изготовлена первым заводом», гипотеза H_2 – «взятая деталь изготовлена вторым заводом», событие A – «взятая деталь оказалась бракованной». Тогда, согласно условию задачи, $P(H_1)=0{,}8$; $P(H_2)=0{,}2$; $P(A|H_1)=0{,}05$; $P(A|H_2)=0{,}01$.

Вероятность того, что деталь бракованная:

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2) = 0{,}8\cdot 0{,}05+0{,}2\cdot 0{,}01=0{,}042.$$

Вероятность того, что бракованная деталь изготовлена первым заводом:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2)} = 0{,}952.$$

24. Студент пришел сдавать зачет, зная не все вопросы программы. Что для него выгоднее: идти отвечать первым или вторым?

Решение. Пусть событие A – «студент знает k из n вопросов программы». Если он идет отвечать первым, то вероятность ответить на предложенный ему вопрос равна $\frac{k}{n}$. Если он идет вторым, его успех зависит от того, какой вопрос был выбран перед ним. Рассмотрим две гипотезы: H_1 – «был выбран “хороший” для студента вопрос» (таких вопросов k); H_2 – «был выбран “плохой” для студента вопрос» (таких вопросов n–k). Тогда $P(H_1) = \frac{k}{n}$, $P(H_2) = \frac{n-k}{n}$. Вероятность ответить на предложенный студенту вопрос, если накануне был извлечен «хороший» для него вопрос, равна $P(A|H_1) = \frac{k-1}{n-1}$, так как «хороших» вопросов стало k–1 и число всех вопросов уменьшилось на 1.

Рассуждая аналогично, получаем $P(A|H_2) = \frac{k}{n-1}$.

По формуле полной вероятности находим

$$P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) =$$
$$= \frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1} + \frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n-1} = \frac{k(k-1+n-k)}{n(n-1)} = \frac{k(n-1)}{n(n-1)} = \frac{k}{n}.$$

Сравнивая найденную вероятность с вычисленной ранее, видим, что успех студента не зависит от того, пойдет он отвечать первым или вторым.

25. На город примерно 165 дней в году дует ветер с севера и 200 дней в году – с запада (считается, что год не високосный и с других направлений ветер дуть не может). Промышленные предприятия, расположенные на севере, производят выброс вредных веществ каждый третий день, а расположенные на западе – в последний день каждой недели. Определите, как часто город подвергается воздействию вредных выбросов. Иными словами, какова вероятность того, что в наугад выбранный день город будет накрыт промышленным смогом?

Решение. Пусть событие H_1 – «ветер дует с севера», событие H_2 – «ветер дует с запада», событие А – «город подвергается воздействию вредных выбросов». Тогда, согласно условию задачи,

$$P(H_1) = \frac{165}{365} = \frac{33}{73}, \quad P(H_2) = \frac{200}{365} = \frac{40}{73}, \quad P(A|H_1) = \frac{1}{3}, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{7}.$$

Отсюда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{33}{73} \cdot \frac{1}{3} + \frac{40}{73} \cdot \frac{1}{7} \approx 0{,}23.$$

Таким образом, около трех месяцев в году город накрыт промышленным смогом.

26. Эксперты считают, что вероятность роста стоимости акций компании в следующем году составит 0,75, если будет подъем в экономике, и 0,3, если будет спад в экономике. При этом считают, что вероятность экономического подъема равна 0,6. Найдите вероятность того, что в следующем году акции поднимутся в цене.

Решение. Обозначим через А событие, состоящее в том, что «в следующем году акции поднимутся в цене». Событие А может произойти с одной из следующих гипотез: H_1 – «будет подъем в экономике», H_2 – «будет спад в экономике».

Так как $P(H_1) = 0{,}6$, то $P(H_2) = 1 - P(H_1) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ (сумма вероятностей всех гипотез должна равняться 1). В задаче даны следующие условные вероятности: $P(A|H_1) = 0{,}7$ и $P(A|H_2) = 0{,}3$.

По формуле полной вероятности при n = 2 получаем

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}75 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}57$$

27. Запросы на кредиты банка распределены следующим образом: 10 % – государственные органы, 30 % – другие банки, 60 % – физические лица. Вероятности невозврата кредита соответственно равны 0,01, 0,05 и 0,2. Найдите вероятность невозврата кредита. Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но факс плохо пропечатал данные клиента. Найдите вероятность того, что это был другой банк.

Решение. Обозначим событие А – «произойдет невозврат кредита». В качестве гипотез возьмем H_1– «кредит взят государственными органами», H_2 – «кредит предоставлен другому банку», H_3 – «кредит взят физическим лицом». Тогда, согласно условию задачи,

$$P(H_1) = \frac{10}{100} = 0{,}1, \quad P(H_2) = \frac{30}{100} = 0{,}3, \quad P(H_3) = \frac{60}{100} = 0{,}6.$$

Проверяем условие $\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 1$.

Имеем $\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}6 = 1$.

По формуле полной вероятности при n = 3 получаем

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A|H_i)=0{,}1\cdot 0{,}01+0{,}3\cdot 0{,}05+0{,}6\cdot 0{,}2=0{,}136.$$

Чтобы найти вторую вероятность, надо найти $P(H_2|A)$. Для этого воспользуемся формулами Байеса:

$$P(H_2|A)=\frac{P(H_2)\cdot P(\mathrm{A}_2|H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}05}{0{,}136}=\frac{15}{136}\approx 0{,}1103.$$

28. В магазин вошли 9 покупателей. Вероятность сделать покупку для каждого вошедшего одна и та же и равна 0,2. Найдите вероятность того, что 2 покупателя совершат покупку.

Решение. Из условия n=9; m=2; p=0,2; q=1–0,2=0,8. По формуле Бернулли искомая вероятность $P_9(2)=C_9^2p^2q^7=36\cdot 0,2^2\cdot 0,8^7\approx 0{,}302$.

29. Найдите вероятность того, что при десятикратном бросании монеты «орел» выпадет ровно 5 раз.

Решение. В данном случае p=q=$\frac{1}{2}$, n=10, m=5. Отсюда находим

$$P_{10}(5)=C_{10}^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10!}{5!\cdot 5!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{252}{1024}\approx 0{,}246.$$

30. В результате наблюдений на некоторой реке установлено, что в течение 20 лет имело место четыре случая пересыхания реки. Найдите вероятность того, что за двадцатилетний период будет наблюдаться:

1) от трех до пяти случаев пересыхания реки (включительно);
2) не более пяти случаев пересыхания реки;
3) более пяти случаев пересыхания реки.

Решение. Вероятность того, что за 20 лет произойдет m случаев пересыхания реки $(0\le m\le 20)$, равна $P_{20}(m)=C_{20}^m p^m q^{20-m}$, где $p=\frac{4}{20}=0{,}2$, $q=1-p=1-0{,}2=0{,}8$. Тогда искомая вероятность составит:

1) $P_{20}(3)+P_{20}(4)+P_{20}(5)=$

$$=C_{20}^3\cdot 0,2^3\cdot 0,8^{17}+C_{20}^4\cdot 0,2^4\cdot 0,8^{16}+C_{20}^5\cdot 0,2^5\cdot 0,8^{15}$$
$$\approx 0{,}2054+0{,}2182+0{,}1746\approx 0{,}5982.$$

2) $P(m\le 5)=\sum_{m=0}^{5}P_{20}(m)=$

$$=C_{20}^0\cdot 0,2^0\cdot 0,8^{20}+C_{20}^1\cdot 0,2^1\cdot 0,8^{19}+C_{20}^2\cdot 0,2^2\cdot 0,8^{18}+C_{20}^3\cdot 0,2^3\cdot 0,8^{17}$$
$$+C_{20}^4\cdot 0,2^4\cdot 0,8^{16}+C_{20}^5\cdot 0,2^5\cdot 0,8^{15}\approx$$
$$\approx 0{,}0115+0{,}0576+0{,}1369+0{,}2054+0{,}2182+0{,}1746$$
$$=0{,}8042.$$

3) $P(m>5)=1-P(m\le 5)=1-0{,}8042=0{,}1958.$

31. Монета бросается 5 раз. Найдите вероятность того, что герб выпадет: а) 2 раза; б) менее 2 раз; в) не менее 2 раз; г) более 2 раз.

Решение. Обозначим через А событие «при однократном бросании монеты выпал герб». Тогда противоположным событием $\overline{A}$ будет событие «выпала цифра», при этом считаем, что монета симметрична, поэтому $p=P(A)=\frac{1}{2}$ и $q=P(\overline{A})=\frac{1}{2}$. Монета при неизменных условиях бросается 5 раз. Вероятность появления герба в каждом единичном испытании постоянна и равна $\frac{1}{2}$, поэтому здесь применима формула Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

а) при пяти бросках герб выпал два раза:

$$n = 5, \quad m = 2, \quad P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5!}{2!\,3!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = 10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16};$$

б) событие B – «при 5 бросках монеты герб выпадает менее 2 раз» – означает, что герб или выпадает один раз, или вообще не выпадает. Поэтому $P(B) = P_5(0) + P_5(1)$.

$$P_5(1) = C_5^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5!}{1!\,4!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = 5 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{32},$$

$$P_5(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{32},$$

$$P(B) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}.$$

в) событие C – «при 5 подбрасываниях монеты герб выпал не менее 2 раз» означает, что герб выпал или 2 раза, или 3 раза, или 4 раза, или 5 раз. Потому $P(C) = P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)$. Противоположное ему событие $\overline{C}$ означает, что герб выпал менее 2 раз, а это событие B. Тогда

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - (P_5(0) + P_5(1)) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}, \quad P(C) = \frac{13}{16}.$$

г) событие D – «при 5 подбрасываниях монеты герб выпал более 2 раз» – означает, что герб выпал либо 3, либо 4, либо 5 раз. Тогда $P(D) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)$. Противоположным событию D будет событие $\overline{D}$ – «герб выпал не более двух раз». $P(\overline{D}) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2)$. А так как эти вероятности нам уже известны, то $P(D)$ можно найти, используя вероятность события $\overline{D}$:

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - (P_5(0) + P_5(1) + P_5(2)) = 1 - \frac{1}{32} - \frac{5}{32} - \frac{10}{32} = 1 - \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Подбрасываются 2 игральных кубика, подсчитываются суммы выпавших очков. Запишите полную группу событий в этом опыте.

2. Являются ли несовместными следующие события: а) опыт – подбрасывание симметричной монеты, события: A – «появление герба», B – «появление цифры»; б) опыт – два выстрела по мишени, события: A – «хотя бы 1 попадание», B – «хотя бы 1 промах».

3. Пусть A, B и C – случайные события. Что означают события: $\overline{A}BC$; $\overline{ABC}$; $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$?

4. Пусть A, B и C – случайные события. Покажите, что:

а) $A + AB + BC + \overline{A}C = A + C$; б) $AB + \overline{A}B + A\overline{B} = A + B$.

5. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

6. Подбрасываются 2 игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее: получить в сумме 7 или 8 очков?

7. Подбрасываются 3 симметричные монеты. Чему равна вероятность того, что на верхних сторонах монет выпало 2 герба?

8. В урне имеется 7 черных и несколько белых шаров. Какова вероятность вытащить белый шар, если вероятность вытащить черный шар равна 1/6? Сколько белых шаров в урне?

9. Из колоды в 36 карт извлекаются наудачу 4 карты. Найдите вероятность следующих событий:

А – «в полученной выборке все карты бубновой масти»;

В – «среди выбранных 4 карт окажутся 2 туза»;

С – «среди выбранных 4 карт окажется бубновый туз».

10. В ящике находится 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу извлекают 6 шаров. Какова вероятность того, что извлечены 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара?

11. Из 30 экзаменационных билетов по дисциплине «Социология» студент может ответить на 24 билета. Какова вероятность его успешного ответа на экзамене при однократном извлечении билета?

12. Из карточек, из которых составлено слово ДИСПЛЕЙ, случайным образом выбраны 3 карточки и выложены в ряд в порядке их извлечения. Какова вероятность, что они образовали слово ЛЕС?

13. Студент из 30 вопросов к экзамену по дисциплине «Высшая математика» хорошо усвоил 24 вопроса. Какова вероятность того, что студент знает оба из доставшихся ему вопросов при ответе на экзамене?

14. В старинной игре в кости необходимо было для выигрыша получить при бросании 3 игральных костей сумму очков, превосходящую 10. Найдите вероятности: а) при бросании 3 игральных костей выбросить сумму очков равную 11; б) при бросании 3 игральных костей выбросить сумму очков равную 12.

15. В урне 15 шаров, из них 5 красных, 8 зеленых и 2 синих. Из урны наудачу извлекают шар. Какова вероятность того, что извлечённый шар будет зеленым?

16. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе все цифры будут одинаковые?

17. Все натуральные числа от 1 до 20 записаны на одинаковых карточках. Наугад вытаскивают одну карточку. Какова вероятность того, что: а) число на этой карточке будет кратно 5; б) число на этой карточке будет четным?

18. Участник лотереи «Спортлото» из 36 видов спорта должен назвать 5 видов спорта. Какова вероятность того, что будет угадано 3 вида спорта?

19. Из колоды в 52 карты наугад извлекаются 4 карты. Найдите вероятность того, что среди извлечённых карт окажется 2 туза.

20. В фирме 550 работников, 380 из них имеют высшее образование, а 412 – среднее специальное образование, у 357 – высшее и среднее специальное образование. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный работник имеет или среднее специальное образование, или высшее образование, или и то и другое?

21. Из 20 изделий первого сорта и 10 второго сорта, имеющихся на складе, наугад взято 2 изделия. Найдите вероятность того, что оба эти изделия: а) первого сорта; б) второго сорта.

22. На стеллажах библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь наудачу берет 3 учебника. Найдите вероятность того, что все они будут в переплете.

23. В урне 6 белых, 4 черных и 2 красных шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найдите вероятность того, что при первом испытании появится белый шар, при втором – черный шар и при третьем – красный шар.

24. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по каждому из 3 центральных телеканалов, равна 0,05. Предполагается, что эти события независимы в совокупности. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит рекламу: а) по всем 3 каналам; б) по 1 каналу?

25. Студент знает 20 из 25 вопросов программы дисциплины «Высшая математика». Найдите вероятность того, что студент знает предложенные экзаменатором 3 вопроса.

26. Имеются 3 одинаковые на вид урны. В первой урне 2 белых и 1 черный шар, во второй – 3 белых и 1 черный шар, в третьей – 2 белых и 2 черных шара. Выбирают наугад одну из урн и вынимают из нее шар. Найдите вероятность того, что этот шар белый.

27. Агент по недвижимости пытается продать участок земли под застройку. Он полагает, что участок будет продан в течение ближайших 6 месяцев с вероятностью 0,9, если экономическая ситуация в регионе не будет ухудшаться. Если же экономическая ситуация будет ухудшаться, то вероятность продажи участка составит 0,5. Экономист, консультирующий агента, полагает, что с вероятностью, равной 0,7 экономическая ситуация в регионе в течение следующих 6 месяцев будет ухудшаться. Чему равна вероятность того, что участок будет продан в течение ближайших 6 месяцев?

28. Прибор состоит из четырех узлов. Вероятность безотказной работы прибора в течение смены для каждого узла 0,8. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найдите вероятность того, что за смену откажут: а) два узла; б) не менее трех узлов; в) по крайней мере один узел.

29. Что более вероятно: выиграть у равносильного противника три партии из пяти или четыре партии из шести?

Занятие № 20-21. Дискретные и непрерывные случайные величины.

Примеры решения задач

1. Подбрасываются две монеты, и подсчитывается количество выпавших «орлов» на обеих верхних сторонах монет. Рассматривается дискретная случайная величина X – число выпадения «орлов» на обеих монетах. Записать закон распределения этой случайной величины.

Решение. В данном испытании пространство элементарных событий равно $\Omega = \{(О, О), (Р, Р), (О, Р), (Р, О)\}$, где О означает, что выпал «орел», Р – выпала «решка». «Орел» может выпасть 1 раз, 2 раза или не появиться ни разу. Следовательно, случайная величина X может принимать только три значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Вероятности этих значений равны соответственно

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad p_2 = P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad p_3 = P(X = 2) = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины X имеет вид.

X	0	1	2
P	¼	1/2	1/4

2. Стрелок производит по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Случайная величина X – число попаданий по мишени. Записать закон распределения случайной величины.

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли. В данном случае p=0,3; q = 0,7; n = 3, откуда получаем

$$P_3(0) = C_3^0 \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^3 = 0{,}343,$$
$$P_3(1) = C_3^1 \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^2 = 3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}49 = 0{,}441,$$
$$P_3(2) = C_3^2 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^1 = 3 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}7 = 0{,}189,$$
$$P_3(3) = C_3^3 \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^0 = 0{,}027.$$

Закон распределения случайной величины X имеет вид.

X	0	1	2	3
P	0,343	0,441	0,189	0,027

3. Двое студентов играют в интересную игру: первый студент загадывает число от 1 до 6, второй студент должен угадать это число. Пусть случайная величина X – число попыток, сделанных вторым игроком при угадывании числа:

a) Составить закон распределения случайной величины X;

b) Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. а) Дискретная случайная величина X может принимать значения 1,2,3,4,5,6 (студент угадает либо с первой, либо со второй и т.д. до шестой попытки), P(x=1)=1/6 (с первой попытки угадано нужное число, тогда число благоприятных исходов равно 1, а число всех исходов равно 6). Если x=2, то число угадано со второй попытки P(x=2)= $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$. Если событие состоит в том, что первые две попытки были неудачными и только третья оказалась удачной, то вероятность такого события $P(x = 3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$. Далее $P(x = 4) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Аналогично $P(x = 5) = \frac{1}{6}$, $P(x = 6) = \frac{1}{6}$.

Закон распределения числа сделанных попыток будет иметь вид.

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

б) $M(\text{X}) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6}$.

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулой

$$D(\text{X}) = M(X^2) - (MX)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = 15{,}17 - 12{,}25 \approx 2{,}92,$$

где

$$M(\text{X}^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{91}{6}.$$

Среднеквадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2{,}92} \approx 1{,}7$.

4. Найдите математическое ожидание случайной величины $Z = 3X - 4Y$, если $M(X) = 2$, $M(Y) = 3$.

Решение. Используем свойство – математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий; постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания – имеем

$$M(Z) = 3M(X) - 4M(Y) = 3\cdot 2 - 4\cdot 3 = 6 - 12 = -6.$$

5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения.

X	–1	0	2
P	p_1	p_2	p_3

Найдите p_1, p_2, p_3, если известны величины: математическое ожидание этой случайной величины $M(X)=0{,}1$ и математическое ожидание ее квадрата $M(X^2) = 0{,}9$.

Решение. Пользуясь тем, что сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна 1, имеем $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Принимая во внимание, что $M(X) = 0{,}1$, получаем соотношение

$$-1p_1 + 0p_2 + 2p_3 = 0{,}1.$$

$\frac{7}{128}$ Составим ряд распределения для случайной величины X^2.

X^2	1	0	4
P	p_1	p_2	p_3

и запишем выражение

$$M(X^2) = 1p_1 + 0p_2 + 4p_3.$$

Используя условие задачи $M(X^2) = 0{,}9$, имеем

$$1p_1 + 4p_3 = 0{,}9,$$

откуда получается система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$
$$-1p_1 + 0p_2 + 2p_3 = 0{,}1,$$
$$1p_1 + 4p_3 = 0{,}9.$$

Решив эту систему, найдем искомые вероятности:

$$p_1 = \frac{3}{5}, p_2 = \frac{7}{30}, p_3 = \frac{1}{6}.$$

6. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	–5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдите математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X) этой случайной величины.

Решение. Находим M(X) по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i$.

$$M(X) = -5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 = -0{,}3.$$

Дисперсию $D(X)$ будем искать по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$. Напишем закон распределения случайной величины X^2.

X^2	25	4	9	16
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдем $M(X^2) = 25 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}2 = 15{,}3$. Тогда

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}21.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9$.

7. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения.

X	2	3	5
P	0,5	0,2	0,3

Найдите функцию распределения F(x). Найдите вероятность попадания случайной величины X на полуинтервал [2;3).

Решение.

1) Если x ≤ 0, то F(x)=0. Действительно, значений меньше x=2 случайная величина не принимает. Значит, при x ≤ 2 функция F(x) = P(X < x) = 0.

2) Если 2 < x ≤ 3, то F(x) = P(X < x) = P(X=2)=0,5. Действительно, случайная величина X может принять только значение x=2 с вероятностью 0,5.

3) Если 3 < x ≤ 5, то F(x) = 0,7. Действительно, X может принять значение x=2 с вероятностью 0,5 и значение x=3 с вероятностью 0,2. Следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, случайная величина X может принять с вероятностью P(X=2)+P(X=3)=0,5+0,2=0,7 (по теореме сложения вероятностей несовместных событий), т.е. F(x) = P(X=2)+ P(X=3)=0,5+0,2 = 0,7.

4) Если x > 5, то F(x)=1. Действительно,

F(x) =P(X=2)+P(X=3)+P(X=5)=0,5+0,2+0,3=1.

Итак, искомая функция распределения принимает вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x \le 2, \\ 0{,}5 \text{ } при \text{ } 2 < x \le 3, \\ 0{,}7 \text{ } при \text{ } 3 < x \le 5, \\ 1 \text{ } при \text{ } x > 5. \end{cases}$$

Далее найдем вероятность P(2 ≤ X < 3) попадания случайной величины X на полуинтервал [2;3). По формуле P(a ≤ X < b) = F(a) – F(b) получаем

P(2≤ X <3) = F(3) – F(2) = 0,5 – 0 = 0,5.

8. Двое студентов играют в интересную игру: первый студент загадывает число от 1 до 6, второй студент должен угадать это число. Пусть случайная величина X – число попыток, сделанных вторым игроком при угадывании числа. Найдите функцию распределения случайной величины X и постройте ее график.

Решение. Закон распределения числа сделанных попыток будет иметь вид:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Построим функцию распределения F(x) этой случайной величины.

Так как x не принимает значений, меньших 1, то при $x \le 1,\ F(x) = 0$.

При $1 < x \le 2$ только одно значение случайной величины меньше x, а именно x=1 и вероятность этого значения равна 1/6, тогда $1 < x \le 2$, F(x)=1/6.

При $2 < x \le 3$ два значения случайной величины X, а именно x=1 и x=2, удовлетворяют неравенству X<x, тогда $F(x) = P(x = 1) + P(x = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$.

При $3 < x \le 4$ три значения случайной величины X удовлетворяют неравенству X < x, а именно x=1, x=2, x=3, следовательно

$$F(x) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}.$$

Аналогично, при $4 < x \le 5$, $F(x) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$.

При $5 < x \le 6$, $F(x) = \frac{5}{6}$; и наконец, если x>6, то $F(x) = \frac{6}{6} = 1$. Таким образом, аналитическое выражение функции распределения будет иметь вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ \frac{1}{6} \text{ при } 1 < x \le 2, \\ \frac{2}{6} \text{ при } 2 < x \le 3, \\ \frac{3}{6} \text{ при } 3 < x \le 4, \\ \frac{4}{6} \text{ при } 4 < x \le 5, \\ \frac{5}{6} \text{ при } 5 < x \le 6, \\ 1 \text{ при } x > 6. \end{cases}$$

Построим график функции распределения.

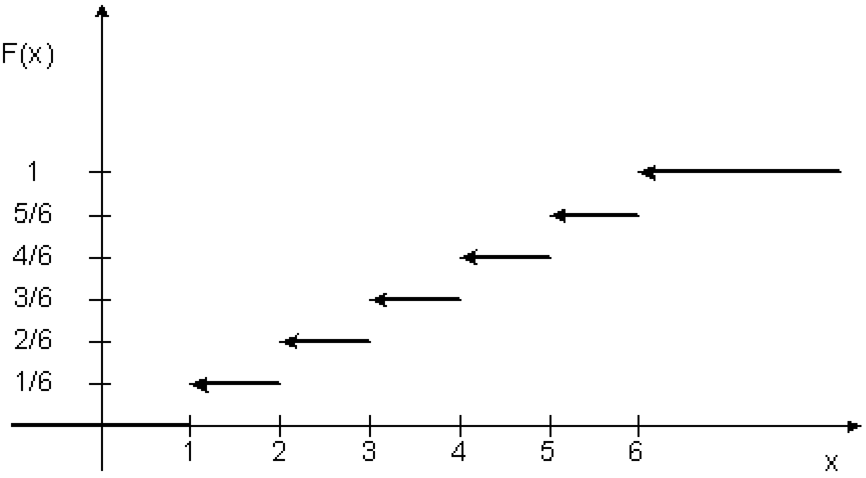


График функции распределения

9. Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{9} & \text{при} \quad 0 < x \le 3, \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найдите: а) плотность распределения вероятностей p(x); б) математическое ожидание $M(X)$; в) дисперсию $D(X)$; г) вероятность попадания случайной X на интервал [0;1); д) постройте графики p(x) и $F(x)$.

Решение. а) по определению p(x) = F ′(x), тогда

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{2x}{9} & \text{при} \quad 0 < x \le 3, \\ 0 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

б) найдем математическое ожидание по формуле: $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$,

$$M(X) = \int_0^3 \frac{2x}{9} \cdot xdx = \frac{2}{9}\int_0^3 x^2 dx = \frac{2}{9} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{2}{9} \cdot \frac{3^3}{3} = \frac{2 \cdot 27}{27} = 2;$$

в) вычислим дисперсию: $D(X) = M(X)^2 - (MX)^2$, где

$$M(X^2) = \int_0^3 \frac{2x}{9} \cdot x^2 dx = \frac{2}{9}\int_0^3 x^3 dx = \frac{2}{9} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^3 = \frac{x^4}{18}\Big|_0^3 = \frac{3^4}{18} = \frac{9}{2}.$$

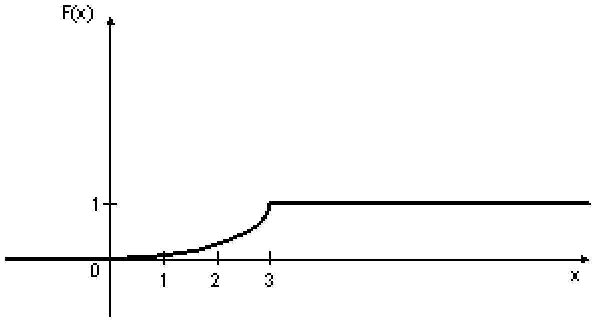
Тогда $D(X) = \frac{9}{2} - 2^2 = \frac{9}{2} - 4 = \frac{9-8}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5;$

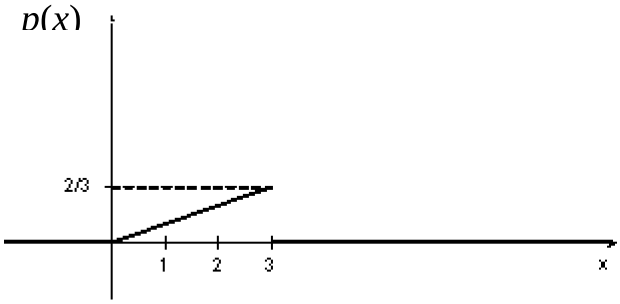
г) исходя из свойства функции распределения, имеем

$$P(\alpha \le x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha), \text{ тогда}$$

$$P(0 \le x < 1) = F(1) - F(0) = \frac{x^2}{9}\Big|_{x=1} - \frac{x^2}{9}\Big|_{x=0} = \frac{1}{9} = 0{,}111;$$

д) построим графики функций $F(x)$ и p(x):





10. Дана функция распределения непрерывной случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ при } \ x \le 0, \\ ax^2 \ \text{ при } \ 0 < x \le 2, \\ 1 \ \text{ при } \ x > 2. \end{cases}$$

Найдите коэффициент а.

Решение. Из непрерывности функции F(x) следует, что

$$\lim_{x \to 2-0} F(x) = \lim_{x \to 2-0} ax^2 = \lim_{x \to 2+0} F(x) = 1, \text{ т.е. } \lim_{x \to 2} ax^2 = 1,$$

таким образом,

$$a \cdot 2^2 = 1, a \cdot 4 = 1, a = \frac{1}{4}, \text{ тогда} F(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ при } \ x \le 0, \\ \frac{x^2}{4} \ \text{ при } \ 0 < x \le 2, \\ 1 \ \text{ при } \ x > 2. \end{cases}$$

11. Задана плотность распределения случайной величины X

$$p(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ при } \ x \le -1, \\ a(x+1) \ \text{ при } \ -1 < x \le 2, \\ 0 \ \text{ при } \ x > 2. \end{cases}$$

Найдите коэффициент а.

Решение. Из свойства плотности распределения вероятностей

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \text{ следует, что}$$

$$\int_{-1}^{2} a(x+1)dx = 1; a\int_{-1}^{2}(x+1)dx = 1; a\left(\int_{-1}^{2} xdx + \int_{-1}^{2} dx\right) = 1;$$

$$a\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} + x\Big|_{-1}^{2}\right) = 1; a\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} + 2 + 1\right) = 1; a\left(\frac{3}{2} + 3\right) = 1; a \cdot \frac{9}{2} = 1, a = \frac{2}{9}.$$

12. Спортсмен каждое утро взвешивается на напольных весах. Случайные ошибки измерения X веса подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 10 мг. Найдите вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, меньше по абсолютной величине 15 мг, если известно, что математическое ожидание случайных ошибок X равно нулю.

Решение. По формуле $P(|X-a| < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})$ находим

$$P(|X-0| < 15) = 2\Phi(\frac{15}{10}) = 2\Phi(1{,}5).$$

По таблице находим $\Phi(1{,}5) = 0{,}4332$. Тогда искомая вероятность равна

$$P(|X| < 15) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664.$$

13. Производится 3 независимых испытания. При каждом испытании событие А появляется с одной и той же вероятностью p=0,6. Запишите в виде таблицы закон распределения случайной величины Х – числа появлений события А при этих испытаниях.

Решение. Это биномиальное распределение, для которого закон распределения имеет вид

X	0	1	2	3
P	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Тогда

X	0	1	2	3
P	0,064	0,288	0,432	0,216

Контроль: 0,064+0,288+0,432+0,216=1.

14. Телевизионный канал рекламирует новый вид детского питания. Вероятность того, что телезритель увидит рекламу, оценивается в 0,002. В случайном порядке выбраны 500 телезрителей. Найдите вероятность того, что рекламу увидят: а) ровно три телезрителя; б) менее трех телезрителей.

Решение. По условию $p = 0{,}002,\ \ n = 500,\ \ k = 3$. Найдем $\lambda = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1$. Имеет место формула Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}:$$

а) найдем вероятность того, что рекламу увидят ровно 3 телезрителя:

$$P_{500}(3) = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} = 0{,}0613;$$

б) найдем вероятность того, что рекламу увидят менее 3 телезрителей:

$$P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} = \frac{5}{2}e^{-1} = \frac{5}{2e} \approx 0{,}9197.$$

15. Продолжительность жизни (в днях) растений данного вида в определенной среде представляет собой непрерывную случайную величину Х, имеющую показательное распределение с параметром $\lambda = \frac{1}{140}$. Определить, какая доля растений данного вида погибает за период 100 дней.

Решение. Находим

$$P(0 < X < 100) = \int_0^{100} \frac{1}{140} e^{-\frac{x}{140}} dx = -\ e^{-\frac{x}{140}}\Big|_0^{100} = 1 - e^{-\frac{5}{7}} \approx 0{,}51.$$

16. Известно, что температура водоема в течение месяца является равномерно распределенной случайной величиной на отрезке [6;10]. Найдите среднюю температуру водоема в данном месяце.

Решение. Пусть X – температура водоема в течение месяца. Тогда ее среднее значение равно $M(X) = \frac{6+10}{2} = 8$.

17. Предположим, что в течение года цена на акции некоторой компании есть случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 30 ден. ед., и средним квадратическим отклонением, равным 10. Определить вероятность того, что в случайно выбранный день обслуживаемого периода цена за акцию была между 10 и 50 ден. ед.

Решение. Воспользуемся формулой $P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma})$. По условию $\alpha = 10,\ \beta = 50,\ a = 30,\ \sigma = 10,$ тогда

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = \Phi(2) + \Phi(2) = 2\Phi(2).$$

По таблице находим $\Phi(2) = 0{,}4772$. Отсюда, искомая вероятность равна:

$$P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

18. Вес тропического грейпфрута, выращенного в Краснодарском крае, – случайная величина, подчиненного нормальному закону с математическим ожиданием 0,5 кг и средним квадратическим отклонением 0,09 кг. Установить: а) вероятность того, что наудачу взятый грейпфрут имеет вес в пределах от 0,4 до 0,7 кг; б) вероятность того, что вес наудачу взятого грейпфрута отличается от математического ожидания не более, чем на 0,2 кг; в) в каких границах следует ожидать вес грейпфрута, чтобы вероятность не выйти за эти границы была равна 0,95.

Решение.

а) $P(0{,}4 < X < 0{,}7) = \Phi\left(\frac{0{,}7-0{,}5}{0{,}09}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}4-0{,}5}{0{,}09}\right) = \Phi(2{,}22) + \Phi(1{,}11) = 0{,}4867 + 0{,}3664 = 0{,}8531;$

б) $P(|X - 0{,}5| < 0{,}2) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{0{,}2}{0{,}09}) = 2\Phi(2{,}22) = 2 \cdot 0{,}4867 = 0{,}9734;$

в) $P(|X - 0{,}5| < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{0{,}09}) = 0{,}95$, тогда $\Phi(\frac{\varepsilon}{0{,}09}) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475.$

По таблице имеем $\frac{\varepsilon}{0{,}09} = 1{,}96$, откуда $\varepsilon = 1{,}96 \cdot 0{,}09 = 0{,}1764$(кг).

Значит, границы, в которых следует ожидать вес грейпфрута, чтобы вероятность не выйти за эти границы была равна 0,95, будут

$$(a - \varepsilon; a + \varepsilon) = (0{,}5 - 0{,}1764;\ 0{,}5 + 0{,}1764) = (0{,}3236;\ 0{,}6764).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В коробке находится 50 лотерейных билетов, среди которых 12 выигрышных, причём 2 из них выигрывают по 100 рублей, а остальные – по 10 рублей. Составьте закон распределения случайной величины X – размера выигрыша, если из коробки наугад извлекается один билет.

2. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее последовательно вынимают шары до первого появления белого шара. Построить закон распределения случайной величины X – числа извлеченных шаров.

3. В урне 5 белых и 3 черных шара. Из нее наудачу извлекли три шара. Построить закон распределения случайной величины X – числа извлеченных белых шаров.

4. Дан ряд распределения случайной величины X. Найдите M(X).

а)

X	–1	5	6
P	0,2	0,4	0,4

б)

X	1,2	2,3	4,1
P	0,35	p_2	0,24

5. Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения:

а)

X	4,3	5,1	10,6
P	0,2	0,3	0,5

б)

X	131	140	160	180
P	0,05	0,1	0,25	0,6

6. Случайная величина X задана своим законом распределения.

X	–1	0	x_3	5
P	0,3	0,2	0,1	0,4

Найдите x_3, если известно, что M(X) = 1,9.

7. Организована беспроигрышная лотерея. Имеется 1000 выигрышей, из них 400 по 10 руб., 300 – по 20 руб., 200 – по 100 руб. и 100 – по 200 руб. Каков средний размер выигрыша для купившего один билет?

8. Найдите математическое ожидание случайной величины Z, если известны математические ожидания случайной величины X и случайной величины Y:

а) $Z = 3X + 2Y,\ M(X) = 5,\ M(Y) = 3;$ б) $Z = X - Y,\ M(X) = 2,\ M(Y) = 2{,}8.$

9. В партии из 15 телефонных аппаратов 5 неисправных аппаратов. Случайная величина X – число неисправных аппаратов среди 3, случайным образом отобранных. Записать закон распределения случайной величины X. Вычислите M(X), D(X) и σ(X). Найдите F(x) и постройте ее график.

10. Вероятность того, что необходимая студенту книга в библиотеке свободна, равна 0,3. В городе 4 библиотеки. Случайная величина X – число библиотек, которые посетит студент в поисках книги. Вычислите M(X), D(X) и σ(X). Найдите F(x) и постройте ее график.

11. Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при} x \leq 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, \text{при} 0 < x \leq 2, \\ 1, \text{при} x > 2. \end{cases}$$

Найдите плотность распределения вероятностей p(x), математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X).

15. По данной функции распределения F(x) случайной величины X найдите плотность распределения вероятностей p(x), математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) , вероятность попадания случайной величины X на интервал (0,5; 1,5) и постройте графики функций F(x) и p(x).

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при} x \leq 0, \\ \dfrac{x^3}{8}, \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1, \text{при} x > 2. \end{cases}$$

16. Задана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{при} \quad x < 0, \\ ax^2, \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 2, \\ 1, \quad \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найдите коэффициент a, плотность распределения вероятностей p(x), и вероятность попадания случайной величины X на отрезок [1; 2].

17. Монета подбрасывается 10 раз. Какова вероятность того, что герб при этом выпадет ровно 4 раза.

18. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин. равна 0,002. Найдите вероятность того, что в течение 1 мин. обрыв произойдет не более чем на трех веретенах.

19. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию, равна 0,01. Найдите вероятность следующих событий: а) «в течение часа 5 абонентов позвонят на станцию»; б) «в течение часа не более 4 абонентов позвонят на станцию»; в) «в течение часа не менее 3 абонентов позвонят на станцию».

20. Найдите среднее квадратическое отклонение случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке [-2; 7].

21. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найдите вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

22. Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час 300 вызовов. Найдите вероятность того, что за данную минуту она получит ровно два вызова.

23. Среди семян имеется 0,4% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 500 семян обнаружить 5 семян сорняков.

24. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найдите вероятность того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Матрицы. Основные понятия и определения. Примеры использования матриц в экономике и сфере международной логистики. Сложение матриц и умножение матрицы на число.
2. Умножение матриц. Транспонирование матрицы. Элементарные преобразования строк матрицы.
3. Определители второго и третьего порядков квадратных матриц. Правила их вычисления. Вычисление определителя n-го порядка $(n > 3)$.
4. Основные свойства определителей квадратных матриц.
5. Обратная матрица. Теорема о существовании обратной матрицы. Алгоритм ее вычисления.
6. Свойства обратной матрицы.
7. Система линейных алгебраических уравнений (ЛАУ), матричная форма ее записи. Совместные, несовместные, определенные и неопределенные системы. Общее и частное решения системы ЛАУ. Эквивалентные системы.
8. Матричный метод и метод Крамера решения системы ЛАУ.
9. Суть метода Гаусса решения систем ЛАУ.
10. Различные виды уравнения прямой на плоскости.
11. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.
12. Расстояние от точки до прямой. Геометрическое изображение на плоскости неравенств $Ax + By + C \geq 0,\ Ax + By + C \leq 0$.
13. Понятие функции. Способы задания функций. Основные характеристики функций (четность, нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность).
14. Элементарные функции. Примеры неэлементарных функций.
15. Числовая последовательность. Определение предела сходящейся последовательности и его геометрический смысл. Примеры сходящихся и расходящихся последовательностей.
16. Теорема о единственности предела сходящейся последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Определения, примеры.
17. Основные свойства пределов последовательностей. Число e
18. Теорема о существовании конечного предела функции в точке.
19. Основные свойства пределов функций.
20. Замечательные пределы.
21. Непрерывность функции в точке: различные определения. Разрывность функции в точке. Классификация точек разрыва функций.
22. Основные свойства непрерывных функций.
23. Определение производной функции одной переменной. Геометрический и экономический смысл производной.
24. Основные правила дифференцирования. Таблица производных.

25. Определение и геометрический смысл дифференциала функции одной переменной.

26. Свойства и правила нахождения дифференциалов.

27. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Формулировка, решение практических примеров. Решение практических примеров на раскрытие неопределенностей $[(+\infty)-(+\infty)], [0\cdot\infty]$, $[1^{\infty}], [0^{0}], [\infty^{0}]$ с применением правила Лопиталя.

28. Исследование функции при помощи первой производной: промежутки возрастания, убывания, стационарные и критические точки функции, формулировка необходимого условия локального экстремума функции в точке.

29. Достаточные условия локального экстремума функции в точке.

30. Выпуклость вверх (вниз) графика функции на интервале. Точки перегиба графика функции. Формулировка необходимого условия перегиба графика функции в точке. Достаточные условия перегиба графика функции в точке. Естественнонаучный смысл точек перегиба графика функции.

31. Определение и основные свойства неопределенного интеграла. Таблица простейших интегралов.

32. Метод замены переменных в неопределенном интеграле.

33. Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

34. Определение определенного интеграла и его геометрический смысл.

35. Основные свойства определенного интеграла.

36. Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования. Формула Ньютона-Лейбница.

37. Метод замены переменных для определенного интеграла, метод интегрирования по частям.

38. Примеры геометрических и естественнонаучных приложений определенного интеграла.

39. Геометрическая интерпретация функции двух переменных. Определение частных производных функции двух переменных и их геометрический смысл.

40. Частные производные второго порядка для функции двух переменных.

41. Полный дифференциал функции нескольких переменных.

42. Обыкновенные ДУ первого порядка. Определения общего и частного решения ОДУ первого порядка и их геометрический смысл. Понятие особого решения ОДУ.

43. Уравнения с разделяющимися переменными и однородные ОДУ первого порядка.

44. Обыкновенное ДУ 2–го порядка. ОДУ второго порядка, приводимые к ОДУ первого порядка.

45. Элементы комбинаторики: комбинаторные принципы сложения, умножения, перестановки, размещения, сочетания.

46. Опыт, событие. Основные определения. Операции над событиями.

47. Классическое определение вероятности. Свойства классической вероятности.

48. Противоположные события. Формула, связывающая вероятности противоположных событий. Совместные и несовместные, зависимые и независимые события.

49. Аксиомы теории вероятностей. Вероятностное пространство.

50. Основные свойства операций сложения и умножения событий.

51. Теорема сложения вероятностей для совместных (несовместных) событий.

52. События зависимые и независимые. Независимые в совокупности и попарно независимые события, связь между ними.

53. Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей для зависимых и для независимых событий. Теорема о вероятности появления хотя бы одного события из n событий, независимых в совокупности.

54. Полная группа событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

55. Определение классической схемы Бернулли. Формула Бернулли.

56. Понятие случайной величины (СВ). Дискретные и непрерывные СВ. Способы их задания (перечислить). Примеры.

57. Определение и основные свойства функции распределения F(x) произвольной СВ.

58. Основные свойства плотности вероятности непрерывной СВ.

59. Математическое ожидание дискретной и непрерывной СВ. Основные свойства.

60. Дисперсия дискретной и непрерывной СВ. Ее основные свойства.

61. Биномиальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое распределение. Равномерное распределение, показательное распределение: описание СВ, закон распределения, числовые характеристики. Нормальное распределение и его числовые характеристики.

62. Вероятность попадания возможного значения нормальной СВ в заданный интервал.

СРЕДСТВА ДИАГНОСТИКИ

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Перечень рекомендуемых средств диагностики:

1. Устный опрос. 2. Контрольные работы.

Оценка за ответы на практических занятиях включает в себя полноту ответа, наличие аргументов, примеров из практики, правильности решения практических примеров и задач и т.д.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Высшая математика» учебным планом предусмотрен **экзамен** в I семестре.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации.

Формирование отметки за текущую аттестацию:

- устный опрос – 40 %;
- контрольная работа – 60 %;

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки по текущей аттестации составляет 40 %, отметки на экзамене – 60 %.

Для успешной сдачи экзамена итоговая отметка по дисциплине должна находиться в интервале от 4 до 10 баллов.

ПРИМЕРНЫЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа 1. Основы алгебры и аналитическая геометрия (2ч.).

Примерный перечень заданий.

1. Найти обратную матрицу A^{-1}, где А = $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$**.** Вычислить произведение AA^{-1}.

2. Определение обратной матрицы. У каких матриц обратная не существует? Привести пример такой матрицы. Существует ли обратная у единичной, нулевой матрицы? Определение минора элемента определителя матрицы.

3. Решить систему методом Гаусса, Крамера: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 18 \end{cases}$.

4. Найти произведения матриц АВ и ВА. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

5. Даны координаты вершин треугольника АВС: А(8; –1), В(–8;11), С(–1; –13). Найдите: 1) длину стороны АС; 2) уравнение высоты, проведенной из вершины С; 3) расстояние от вершины С до прямой АВ; 4) длину медианы AD.

Форма контроля – контрольная работа.

Контрольная работа 2. Элементы математического анализа (2ч.).

Примерный перечень заданий.

1. Вычислить производные y' функций а) $y=\sqrt{x^2+3x+1}$; б) $y=x^2\cos\sqrt{x}$.

2. Исследовать функции и построить их графики: а) $y=12x-2x^3-3x^2+2$; б) $y=\dfrac{x^2+2x+1}{2-x}$.

3. Вычислите пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+9}-3}; \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{2+3x-5x^2};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\sin x} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}$$

4. Вычислить неопределенный интеграл $\int(\sin 2x+e^{-3x}+\dfrac{2}{\cos^2 3x})dx$. Результат проверить дифференцированием.

5. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^2(x^2-2x+3)dx$, в) $\int\limits_1^e\dfrac{\cos(\ln x)}{x}dx$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x-1,\ x=1,\ y=\dfrac{4}{x^2}$.

Форма контроля – контрольная работа.

Контрольная работа 3. Элементы теории вероятностей и математической статистики (2ч.).

Примерный перечень заданий.

1. В туристической группе из 25 человек 8 человек владеет английским языком, 11 – немецким, 3-е владеют обоими языками. Сколько человек в группе не владеет ни одним из этих языков?

2. Предположим, что в записи 6-значного номера телефона используются только две цифры: 2 и 7. Сколько может быть таких различных номеров телефонов?

3. В группе из 20 студентов 4 не сдали сессию. По списку отобрали 16 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов нет должников.

4. Монета подбрасывают пять раз. Найти вероятность того, что герб выпадет не более трех раз.

5. Вероятность реализации одной акции некоторой компании равна 0,8. Брокерская фирма предлагает 100 акций этой кампании. Какова вероятность того, что будет продано: а) не менее 70 и не более 85 акций; б) не менее 70; в) не более 69 акций.

6. Двое студентов играют в интересную игру: первый студент загадывает число от 1 до 6, второй студент должен угадать это число. Пусть случайная величина X – число попыток, сделанных вторым игроком при угадывании числа. Составить закон распределения случайной величины X; Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

7. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}\sin x & \text{при } 0 < x \leq \pi, \\ 0 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Найдите функцию распределения F(x) и вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу $(0; \frac{\pi}{4})$.

Форма контроля – контрольная работа.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

4.1. Содержание учебного материала

1. ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тема 1.1. Элементы матричного анализа

Матрицы и определители квадратных матриц. Основные определения. Основные операции над матрицами и их свойства. Обратная матрица.

Тема 1.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Системы линейных алгебраических уравнений. Основные определения. Формы записи линейных систем. Методы решения систем: матричный, Крамера, Гаусса.

Тема 1.3. Аналитическая геометрия на плоскости.

Действительные числа как координаты точек на числовой прямой. Прямоугольные координаты на плоскости. Деление отрезка в заданном отношении. Прямая на плоскости: различные виды уравнения прямой на плоскости; взаимное расположение двух прямых; расстояние от точки до прямой. Построение на плоскости областей, ограниченных линейными неравенствами.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Тема 2.1. Функция одной действительной переменной. Концепция предела

Функции: основные понятия и определения, способы задания, характеристики функций. Числовые последовательности как функции натурального аргумента. Предел последовательности. Основные свойства пределов последовательностей. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Число е как предел последовательности. Предел функции. Основные свойства пределов функций. Замечательные пределы. Непрерывность (разрывность) функции в точке. Классификация точек разрыва. Свойства непрерывных функций.

Тема 2.2. Производная и дифференциал функции одной переменной и их приложения

Производная функции одной переменной: определение, геометрический смысл, смысл производной в задачах естествознания. Таблица производных элементарных функций. Основные правила дифференцирования. Дифференциал функции одной переменной: определение, геометрический смысл, свойства и правила нахождения дифференциалов, приложения в приближенных вычислениях. Исследование функций и построение их графиков: возрастание (убывание) функций, экстремумы, выпуклость вверх (выпуклость вниз) графика функции, точки перегиба графика функции. Правило Лопиталя-Бернулли.

Тема 2.3. Интегрирование функции одной переменной. Приложения

Первообразная, неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных неопределенных интегралов. Метод замены переменной. Формула интегрирования по частям. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона–Лейбница. Методы вычисления определенных интегралов. Геометрические и экономические приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы: интегралы по бесконечным промежуткам интегрирования, интегралы от неограниченных функций.

Тема 2.4. Функции нескольких действительных переменных

Определение функции нескольких действительных переменных, примеры использования таких функций в естествознании. Область определения функции нескольких переменных, график функции двух переменных, основные понятия и определения. Предел функции двух переменных в точке. Непрерывность функции двух переменных. Частные производные функции нескольких переменных первого и высших порядков. Смысл частных производных функции двух переменных в задачах естествознания, их геометрический смысл. Частные дифференциалы и полный дифференциал функции нескольких переменных, Экстремум функции двух переменных: необходимые и достаточные условия существования локального экстремума. Метод наименьших квадратов и его практическое применение.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Тема 3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого и второго порядков.

Основные понятия и определения. Задача Коши. Общее решение. Частное решение. Особое решение. Существование и единственность решения. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

4. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Тема 4.1. Элементы теории множеств и элементы комбинаторики

Множества, отношения между ними и основные операции над ними. Комбинаторный принцип умножения, комбинаторный принцип сложения, перестановки, размещения, сочетания.

Тема 4.2. Случайные события

Предмет теории вероятностей. Математические модели случайных процессов на практике. Эксперимент, событие, пространство элементарных исходов эксперимента: основные понятия и определения. Операции над событиями. Вероятность события. Классическое, статистическое и геометрическое определения вероятности события, свойства вероятности. Аксиомы теории вероятностей, вероятностное пространство. Свойства операций сложения и умножения событий. Теоремы сложения вероятностей. Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Повторение испытаний: классическая схема Бернулли и ее предельные случаи [интегральная и локальная теоремы Муавра–Лапласа, теорема Пуассона].

Тема 4.3. Случайные величины

Основные понятия и определения. Типы случайных величин и способы их задания. Функция распределения случайной величины и ее свойства. Дискретные случайные величины. Непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины и ее основные свойства, их геометрическая интерпретация. Числовые характеристики случайных величин (характеристики: математическое ожидание, медиана дисперсия, среднее квадратичное отклонение. Некоторые законы распределения случайных величин и их применения в задачах естествознания. Дискретные случайные величины: биномиальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое распределение. Непрерывные случайные величины: равномерное, показательное (экспоненциальное) и нормальное распределения.

4.2. Рекомендуемая литература

Перечень основной литературы

1. Самаль, С.А. Высшая математика. Практикум: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по естественнонаучным и экономическим специальностям: в 2 ч. / [авт.: О. М. Матейко и др.]; под ред. С. А. Самаля. – Минск: РИВШ, 2020–Ч. 1. – 2020. – 329 с.
2. Самаль, С.А. Высшая математика. Практикум: учебное: в 2 ч./ О. М. Матейко [и др.]; под ред. С. А. Самаля. – Минск: РИВШ, 2022–Ч. 2. – 2022. – 360 с.
3. Велько, О. А. Основы высшей математики для социологов: учебно-методическое пособие для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по специальностям 1-23 01 05 "Социология", 1-23 01 15 "Социальные коммуникации" / О. А. Велько, М. В. Мартон, Н. А. Моисеева; БГУ. - Минск: БГУ, 2020. - 303 с. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/254094
4. Велько, О. А. Основы высшей математики и теории вероятностей: учебно-методическое пособие для студентов по специальностям "Социология", "Социальные коммуникации" / О. А. Велько, М. В. Мартон, Н. А. Моисеева; БГУ. - Минск: БГУ, 2022. - 399 с. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/290012

Перечень дополнительной литературы

1. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – 7-е изд., доп. – М.: Высшая школа, 2013. – 405с.
2. Еровенко, В.А. Основы высшей математики для студентов-международников в примерах и задачах: учебно-методическое пособие / В.А. Еровенко, О.М. Матейко, Е.К. Щетникович. – Минск: БГУ, 2012. – 69 с.

3. Высшая математика: учебно-методическое пособие для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по специальности «биотехнология»: в 2 ч. / О. М. Матейко, С. А. Самаль, Н. Б. Яблонская; БГУ. – Минск: БГУ, 2022 – Ч.1.

4. Матейко, О.М. Высшая математика для географов: учеб. пособие: в 2 ч. / О.М. Матейко, А.Н. Таныгина. – Минск: БГУ, 2012. – Ч. 1. – 271 с.

5. Матейко, О.М. Высшая математика для географов: учеб. пособие: в 2 ч. / О.М. Матейко, А.Н. Таныгина. – Минск: БГУ, 2013. – Ч. 2. – 175 с.

6. Матейко, О.М. Высшая математика: учебно-методическое пособие: в 2 ч. / О.М. Матейко, П.В. Плащинский, В.А. Прокашева, В.С. Федосенко. – Минск: БГУ, 2002. – Ч. 1. – 37 с.

7. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: в 2- х ч. / Д.Т. Письменный. – 6-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2015. – Ч.1. – 288с. – Ч. 2. – 256 с.

8. Самаль, С.А. Высшая математика. Общий курс / Под общей ред. С.А. Самаля. –Минск: Вышэйшая школа, 2000. – 351 с.

9. Яшкин, В.И. Теория вероятностей и математическая статистика: практикум для студентов специальности 1-96 01 01 «Таможенное дело» / В.И. Яшкин, С.Н. Барановская. – Минск: БГУ, 2011. – 92 с.

4.3. Электронные ресурсы

1. Электронная библиотека БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/305773. – Дата доступа: 20.01.2025.

2. Электронная библиотека БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/297259. – Дата доступа: 20.01.2025.

3. Электронная библиотека БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/304537. – Дата доступа: 20.01.2025.

Приложение 1.

Значения функции Гаусса $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Целые и десятичные доли x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001338									
4,5	0,0000160									
5,0	0,0000015									

Значение функции $\Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

x	0	1	2	3	4	5	$\varphi(x) =$,		8	9
	Сотые доли x									
0,0	0,0000	0040	0080	0112	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3553	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
	Десятые доли x									
2,	4773	4821	4861	4893	4918	4938	4953	4965	4974	4981
3,	4987	4990	4993	4995	4997	4998	4998	4999	4999	5000[8]