

## ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОНДОВЫХ ИНДЕКСОВ АЗИИ

У. А. Кришень<sup>1)</sup>, С. В. Рогозин<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> магистрант, Белорусский государственный университет, г. Минск,  
Республика Беларусь, ukrishen@mail.ru

<sup>2)</sup> кандидат физико-математических наук, доцент,  
Белорусский государственный университет,  
г. Минск, Республика Беларусь, rogosin@bsu.by

Фондовый рынок Азии привлекает внимание инвесторов, профессиональных участников рынка ценных бумаг и аналитиков благодаря своей высокой динамике и потенциалу роста. Одна из волатильность и чувствительность к глобальным экономическим изменениям делают анализ текущей ситуации и прогнозирование будущих изменений довольно сложной задачей. В данной статье будут проанализированы и спрогнозированы изменения при использовании дробно-дифференциальных моделей изменения ключевых индексов 3-х стран Азии: Японии (Nikkei 225), Индии (Nifty 50), Тайваня (TWII). Работа является продолжением исследования, начатого в [1].

**Ключевые слова:** фондовые индексы; рынок Азии; дробно-дифференциальное моделирование; модель ARFIMA; модель с ARCH-/GARCH-эффектами.

## FRACTIONAL-DIFFERENTIAL MODELING ASIAN STOCK INDICES

U. A. Krishen<sup>1)</sup>, S. V. Rogosin<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> master's student, Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus,  
ukrishen@mail.ru

<sup>2)</sup> PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Belarusian State University,  
Minsk, Republic of Belarus, rogosin@bsu.by

The Asian stock market attracts the attention of investors, professional securities market participants and analysts due to its high dynamics and growth potential. Their volatility and sensitivity to global economic changes make analyzing the current situation and forecasting future changes quite a difficult task. In this article we will analyze and forecast changes in key indices of 3 Asian countries: Japan (Nikkei 225), India (Nifty 50), Taiwan (TWII) using fractional-differential models. The work is a continuation of the research published in [1].

**Keywords:** stock indices; Asian market; fractional-differential modeling; ARFIMA model; ARCH-/GARCH-effects model.

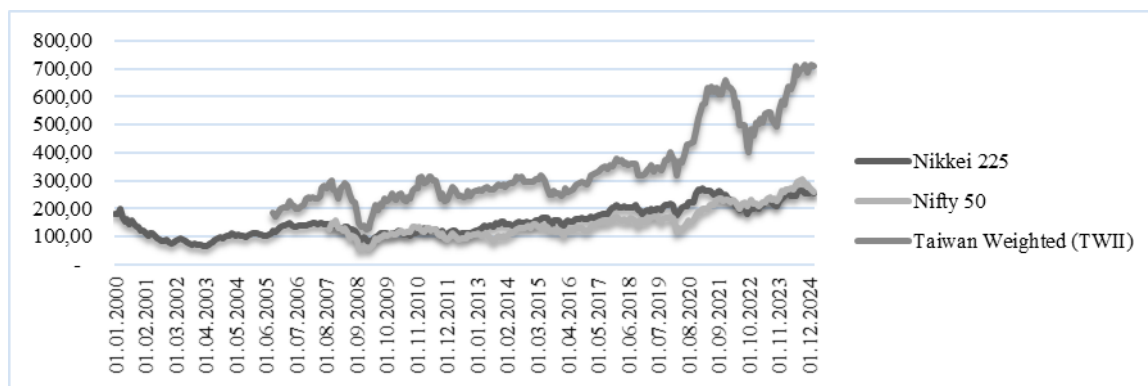
Мировой рынок ценных бумаг представляет собой сложную и неоднородную систему, которую можно условно разделить на несколько ключевых регионов: европейский, азиатский и американский. Каждый из этих регионов обладает уникальными характеристиками, формирующимися под влиянием экономических, политических и социальных условий. Эти факторы определяют структуру рынка, его динамику, а также поведение и стратегии его участников.

Рынок ценных бумаг в азиатском регионе характеризуется высокой активностью и

многообразием. Противостояние между странами с развитыми экономиками, такими как Япония, Южная Корея и Сингапур, и стремительно растущими экономиками, включая Индию и государства Юго-Восточной Азии, формирует уникальную инвестиционную среду. Это открывает возможности для перераспределения капитала: от стабильных развитых рынков с жесткими стандартами корпоративного управления к развивающимся рынкам, которые предлагают более высокую доходность и значительный потенциал роста. Такой контраст делает азиатский регион особенно привлекательным для инвесторов, желающих диверсифицировать свои портфели и воспользоваться различиями в экономическом развитии и рыночных условиях.

Для оценки состояния и динамики рынка отдельной страны или регионы инвесторы часто используют данные фондовых индексов, которые представляют собой агрегированные показатели, отражающие общую тенденцию изменения стоимости акций крупнейших компаний. Поскольку эти данные формируют временные ряды, для их анализа и прогнозирования будущих изменений могут быть применены эконометрические методы. Однако сложность таких данных, включающая нелинейные зависимости, долгосрочные эффекты и высокую степень волатильности, требует использования более специализированные подходы и модели. В этой связи дробно-дифференциальное моделирование является одним из инструментов, позволяющим учитывать сложные динамические закономерности и длинную память ряда.

Для применения дробно-дифференциального метода моделирования будущих изменений и тенденций были выбраны следующие индексы: Nikkey 225 (Япония), Nifty 50 (Индия), TWII (Тайвань) [2-4]. Первичным этапом перед применением дробно-дифференциального моделирования и прогнозирования будет статистический анализ временных рядов данных индексов. Этот анализ позволит выявить ключевые закономерности, тренды и особенности динамики рынков, что является основой для построения точных моделей.



Динамика азиатских фондовых индексов, в долларах США

Как видно из представленного графика, фондовые индексы Nifty 50 и Nikkey 225 обладают схожей тенденцией роста. Столь значительный рост индекса Taiwan Weighted связан с тем, что в данной стране все большее внимание уделяется технологическим компаниям, а также активным развитием инноваций, технологий и цифровизации. Одной из ключевых компаний, входящей в индекс TWII, является компания TSMC (с англ. Taiwan Semiconductor Manufacturing Company Limited) – лидер в производстве полупроводников.

Приступая к эконометрическому анализу и построению модели с длинной памятью ряда и коррекцией условной гетероскедастичности, данные фондовые индексы, являющиеся временными рядами, были проверены на наличие «единичного корня». Результаты тестов представлены в таблице.

### Тесты «единичного корня» для фондовых индексов азиатского региона

| Индекс    | ADF   |        |             | KPSS                |       |             | Вывод |
|-----------|-------|--------|-------------|---------------------|-------|-------------|-------|
|           | Спец. | Стат.  | Крит. точка | Спец.               | Стат. | Крит. точка |       |
| Nikkey 25 | N(1)  | -17.69 | -1.94       | N(1)<br>(незнач. С) | 0.306 | 0.463       | I (1) |
| Nifty 50  | C(1)  | -14,16 | -2,87       | C(1)                | 0.155 | 0.463       |       |
| TWII      | C(1)  | -15,70 | -2,87       | C(1)                | 0.135 | 0.463       |       |

По представленной выше таблице заметно, что все исследуемые индексы характеризуются свойством нестационарности, что требует учета данного аспекта при построении моделей. Составление эконометрических моделей производилось в специализированном программном обеспечении EViews [5]. Заданный временной промежуток – с января 2000 по февраль 2025 года (25 лет, ежемесячные данные, в долларах США).

В последующем анализе используются модели класса *ARFIMA* и *GARCH*, разработка которых восходит, соответственно, к статьям [6] и [7]. Модели класса *ARFIMA* (1) и *GARCH* (2) для индекса Nikkey 25 имеют следующий вид:

$$NK = 172.19 (\text{Prob. } 0.9776) + 16.64 * D2020M1 (\text{Prob. } 0.0023) + 0.4999 * D (\text{Prob. } 0.0000) + \\ + 0.3829 * AR(8) (\text{Prob. } 0.0000) + 0.52085 * MA(1) + 0.0840 * MA(12) (\text{Prob. } 0.0953) \quad (1)$$

$$D(NK) = 0.2759 (\text{Prob. } 0.0091) + 0.5230 * AR(5) (\text{Prob. } 0.0000) - 0.5584 * MA(5) (\text{Prob. } 0.0000)$$

$$GARCH = 2.8816 (\text{Prob. } 0.1272) + 0.1813 * RESID(-1)^2 (\text{Prob. } 0.0001) + \\ + 0.1052 * RESID(-2)^2 (\text{Prob. } 0.0442) - 0.1547 * GARCH(-1) (\text{Prob. } 0.0003) + \\ + 0.8463 * GARCH(-2) (\text{Prob. } 0.0000) \quad (2)$$

Обе модели статистически значимы, но объясняют разный уровень разброса выборки: модель *ARFIMA*, без взятия первой разности, объясняет 97% разброса выборки, в то время как модель *ARCH/GARCH* описывает 5% разброса, что является существенным показателем, учитывая использование первых разностей. Внутренняя структура моделей сложна: для *ARFIMA* потребовались высокие порядки *AR*(8) и *MA*(1), *MA*(12), а для *ARCH/GARCH* — сложные порядки *ARCH/GARCH*(2) и *AR*(5), *MA*(5).

По предпосылкам МНК:

1. У обеих моделей отсутствует автокорреляция ( $DW=1.73$  для *ARFIMA* и  $DW=1.96$  для *ARCH/GARCH*).

2. Модель *ARCH/GARCH* приближена к нормальному распределению на 3% уровне значимости, в то время как для *ARFIMA* нормальное распределение недостижимо.

3. Условная гетероскедастичность отсутствует в *ARCH/GARCH*, но была выявлена в *ARFIMA*, что потребовало введения *ARCH/GARCH* эффектов.

4. Ошибки прогноза отличаются: для *ARFIMA* — 14 %, для *ARCH/GARCH* — 3,8 %. На основе лучшей модели (2) прогнозируется незначительный рост индекса Nikkei 25: март 2025 — 256,84 долл. США, апрель 2025 — 257,01 долл. США.

Для индекса Nifty 50 (период: сентябрь 2007 – февраль 2025, 210 наблюдений) были по-

строены модели *ARFIMA* (3) и *GARCH* (4).

$$\begin{aligned} \text{NF50} = & -0.4386 (\text{Prob.0.2737}) + 1.0104 * \text{NF50}(-1) (\text{Prob.0.0000}) - 1.1275 * D (\text{Prob.0.0000}) + \\ & + 0.9596 * \text{AR}(1) (\text{Prob.0.0000}) - 0.1332 * \text{AR}(8) (\text{Prob.0.0000}) + 0.1383 * \text{MA}(8) (\text{Prob.0.0000}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$D(\text{NF50}) = 1.5037 (\text{Prob.0.1866}) - 0.7978 * \text{AR}(1) (\text{Prob.0.0000}) + 0.82783 * \text{MA}(1) (\text{Prob.0.0000})$$

$$\begin{aligned} \text{GARCH} = & 0.2336 (\text{Prob.0.3093}) + 2.0720 * \text{GARCH}(-1) (\text{Prob.0.0000}) - \\ & - 1.0736 * \text{GARCH}(-2) (\text{Prob.0.0000}) \end{aligned} \quad (4)$$

Обе модели статистически значимы, однако объясняют разный уровень разброса выборки: модель *ARFIMA*, где не берется первая разность от показателя Nifty 50, объясняет 99% разброса выборки, в то время как модель с *GARCH* эффектами – 0,6% разброса выборки, что значительно меньше, чем в первой модели. Структура данных моделей также сложна: *ARFIMA* требует высоких порядков *AR* и *MA*, а *GARCH* — второго порядка *GARCH*. По предпосылкам МНК:

1. Отсутствует автокорреляция.
2. *GARCH* приближена к нормальному распределению.
3. Гетероскедастичность отсутствует.
4. Ошибки прогноза: *ARFIMA* — 6,74%, *GARCH* — 4,73%.

Прогнозы различаются: *ARFIMA* предсказывает снижение индекса до 623,76 долл. США к апрелю 2025, а *GARCH* — рост до 688,58 долл. США.

Заключительным индексом фондового сектора азиатского региона является индекс TWII. Выборка состояла из 234 показателей (сентябрь 2009 года по февраль 2025). Модели *ARFIMA* (5) и *GARCH* (6) представлены следующим видом:

$$\begin{aligned} \text{TWII} = & 385.3633 (\text{Prob.0.9392}) + 0.4998 * D (\text{Prob.0.0172}) + 0.9317 * \text{AR}(1) (\text{Prob.0.0000}) - \\ & - 0.4346 * \text{MA}(1) (\text{Prob.0.0188}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} D(\text{TWII}) = & 1.748 (\text{Prob.0.0863}) + 0.7431 * \text{AR}(12) (\text{Prob.0.0000}) - \\ & - 0.8936 * \text{MA}(12) (\text{Prob.0.0000}) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{GARCH} = & 6.5893 (\text{Prob.0.1922}) + \\ & + 0.1327 * \text{RESID}(-1)^2 (\text{Prob.0.0106}) + 0.8616 * \text{GARCH}(-1) (\text{Prob.0.0000}) \end{aligned}$$

Модель *ARFIMA* объясняет 97,9% разброса выборки, а *GARCH* — 4% разброса выборки. Обе модели значимы, с отсутствием автокорреляции и гетероскедастичности. Ошибки прогноза составили следующие значения: *ARFIMA* — 6,46%, *GARCH* — 4,25%.

Прогнозные значения также различаются: *ARFIMA* предсказывает снижение до 649,41 долл. США, а *GARCH* — рост до 711,44 долл. США.

Обобщая выводы, полученные по моделям для азиатского рынка, можно сказать об определенной тенденции: модели ARFIMA показывают спад, а модели с ARCH-/GARCH-эффектами прогнозируют незначительный подъем. Для рынка ценных бумаг Азии перспективнее учитывать выводы, полученные по моделям с коррекцией условной гетероскедастичности.

### Библиографические ссылки

1. Кришень У. А. Применение дробно-дифференциальных моделей в анализе котировок международных индексов // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Труды 11-го междунар. семинара 16–20 сент. 2024 г., Минск, Беларусь: БГУ, 2024. С. 49-53.
2. Nikkei Inc. Nikkei 225 Index Methodology // Nikkei 225 Official Site- : сайт. URL: <https://indexes.nikkei.co.jp/en/nkave/index/profile?idx=nk225> (date of access: 10.03.2025).
3. Taiwan Stock Exchange (TWSE). Taiwan Weighted Index Methodology // TWSE: сайт. URL: <https://www.twse.com.tw/en> (date of access: 10.03.2025).
4. Yahoo Finance. Historical Data for Nifty 50 (^NSEI) // Yahoo Finance: сайт. URL: <https://finance.yahoo.com/quote/%5ENSEI/history/?period1=0&period2=1740595347&frequency=1mo> (date of access: 10.03.2025).
5. EViews // Eviews: сайт. URL: <https://www.eviews.com/home.html> (date of access: 11.03.2025).
6. Granger C. W. J., Joyeux Roselyne. An introduction to long-memory time series models and fractional differencing // J. Time Series Analysis. 1980, V. 1, № 1, 15–29. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1980.tb00297.x>
7. Engle R.F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation // Econometrica, 1982, V. 50, No. 4, 987–1007. <https://doi.org/10.2307/1912773>