Самосогласованное дискретное Фурье-представление интенсивности лазерного пучка в фазовом пространстве

В. В. Кабанов, А. О. Негриенко

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: v.kabanov@ifanbel.bas-net.by , a.nehryienka@dragon.bas-net.by

Предложен итерационный метод нахождения оптимально канонически-сопряженных Фурье-представлений (ФП) поперечного профиля интенсивности лазерного пучка, в основе которого лежит схождение к определенному пределу самосогласованной константы из соотношения неопределенности, а достоверность подтверждается оценкой средней функциональной дистанции между искомыми ФП.

Ключевые слова: дискретные Фурье-представления, фазовое пространство, лазерный пучок

Self-consistent discrete Fourier representation of laser beam intensity in phase space

V. V. Kabanov, A. O. Nehryienka

B. I. Stepanov Institute of Physics of the NAS of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: v.kabanov@ifanbel.bas-net.by; a.nehryienka@dragon.bas-net.by

An iterative method for finding optimal canonically conjugate Fourier representations (FR) of the transverse intensity profile of a laser beam is proposed. The method is based on the convergence to a certain limit of the self-consistent constant from the uncertainty principle, and the reliability is confirmed by an estimate of the average functional distance between the sought FRs.

Keywords: discrete Fourier representations, phase space, laser beam

Измерение поперечного распределения профиля интенсивности лазерного пучка (ЛП) с помощью специальных цифровых камер с высоким пространственным разрешением и применение алгоритмов дискретного преобразования Фурье позволяет получить расширенную картину в канонически-сопряженных координатах (КСК) фазового пространства [1]. Двумерные дискретные Фурье-представления реализуется с учетом условий, определяемых теоремой о выборках Котельникова-Шеннона-Найквиста [2–4]. В основу итерационного алгоритма нахождения оптималь-но самосогласованных, канонически-сопряженных Фурье-представлений положен критерий оценки средней функциональной дистанции между Фурье-образами распределения интенсивности, предшествующими и следующими за каждым шагом итерации. Этот критерий тесно связан с основными положениями эргодической теоремы (Купмен - фон-Нейман [5, 6], Винер – Хинчин [7, 8]. Вторым принципиальным критерием итерационного алгоритма является поиск сходящейся к определенному пределу истинной константы, присущей соотношению неопределенности [9–11]. Такой итерационный метод позволяет по известному пространственному распределению интенсивности определять полную самосогласованную картину ЛП в КСК, как локально – при конкретно заданных параметрах измеряемого диапазона и его разрешения, так и глобально – при поиске решения с вариацией этих параметров.

Результаты такого анализа показывают, что соотношение неопределенности очерчивают гиперболическую границу, за пределами которой никакой связи между симплектическими компонентами не существует. В области существования симплектической связи между Фурье-сопряженными образами существует жесткая, однозначная связь, соответствующая истинной константе из соотношения неопреде-ленности. В таком случае имеется определенная степень свободы для численного измерения канонически-сопряженного Фурье-представления с максимально сбалансированным по степени разрешения с исходным, экспериментально измеренным портретом. Проявление традиционного соотношения неопределенности в измерении симплектически сопряженных компонентов может быть реализовано при определенных специфических условиях процесса измерения, например, при жестко заданных параметрах измеряемого диапазона и его разрешения в КСК, а также с обратно-пропорциональной связью вариации числа канонически-сопряженных отсчетов.

Координатное и импульсное представления связаны между собой преобразованиями Фурье, неотъемлемой частью которых является соотношение неопределенности

$$\sigma_x \sigma_{k_x} \geq \frac{1}{C_\sigma} \ , \tag{1}$$

задающее нижний предел для существования произведения среднеквадратичных отклонений σ_x, σ_{k_x} и пар канонически сопряженных координат x и k_x соответственно. На самом деле, как будет показано ниже, соотношение (1) является строгой связью, только со знаком равенства, которая обуславливает нахождение точно согласованных, канонически сопряженных Фурье-образов и соответствующего им истинного значения константы в C_x едином итерационном процессе самосогласования. Значения константы неопределенности зависят от конкретной формы функции распределения, которая, в свою очередь, обусловлена конкретной внутренней структурой локализации и режимом распространения ЛП с учетом конкретных сопутствующих процессов, таких как: рассеяние излучения, спекловая структура и шумы. Кроме того, она также зависит от конкретно заданных параметров измеряемого диапазона и его разрешения. Например, модельная оценка константы неопределенности для ЛП с гауссовым профилем поперечной локализации при ограниченном диапазоне измерения, равном $3\sigma_x$ и уровне разрешения – 35 отсчетов на σ_x составляет $C_x \cong 6{,}01$, и с ростом параметров измерения стремится к теоретическому пределу 2π.

Переход к численному преобразованию Фурье сопряжен с процедурой дискретизации, которая, прежде всего, позволяет перейти от непрерывного интегрального Фурье-представления к дискретной форме преобразования в виде конечного ряда. Для вычисления КС импульсного представления поперечного профиля интенсивности ЛП использовался алгоритм двухмерного быстрого дискретного преобразования Фурье (БПФ) [12], расчет которого для экспериментальных данных, представленных в виде симметричных квадратных $\tilde{N}_x \times \tilde{N}_y$ матриц $X_{i,j}$, можно выполнить по формуле

$$F_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{N}_x}} \sum_{i=0}^{\tilde{N}_x - 1} \frac{1}{\sqrt{\tilde{N}_y}} \sum_{j=0}^{\tilde{N}_y - 1} X_{i,j} exp\left(\frac{-\mathrm{i}2\pi in}{\tilde{N}_x}\right) exp\left(\frac{-\mathrm{i}2\pi jm}{\tilde{N}_y}\right), \tag{2}$$

где $\tilde{N}_x, \tilde{N}_y$ - обобщенные числа отсчетов, определяемые через измеряемые в КСК диапазоны $L_X = N_x \Delta x$, и $F_X = N_{k_x} \Delta k_x$ объекта соотношениями вида $\tilde{N}_x = C N_x N_{k_x}$. Измеряемые диапазоны можно выразить кратными: $L_X = l\sigma_x$, $F_X = l\sigma_{k_x}$, а константы связаны соотношением $lC = C_\sigma$. Таким образом числа отсчетов, приходящиеся на интервалы среднеквадратичных отклонений координатного и импульсного представлений, определим как $N_{\sigma_x} = \dfrac{\sigma_x}{\Delta x}$ и $N_{\sigma_{kx}} = \dfrac{\sigma_{k_x}}{\Delta k_x}$, соответственно. Тогда соотношение (1) можно раскрыть в новых переменных – числах отсчетов, которые непосредственно использу ются в ДПФ

$$N_{\sigma_x} N_{\sigma_{kx}} = \frac{\tilde{N}_x}{C_\sigma}. \quad (3)$$

При этом шаги дискретизации также связаны через обобщённое число отсчётов $\tilde{N}_x$

$$\Delta x \Delta k_x = \frac{1}{\tilde{N}_x}. \quad (4)$$

Итерационный алгоритм поиска самосогласованных (истинно-сопряженных) Фурье-представлений начинается с определения требуемых параметров разрешения в числах отсчетов $N_{0\sigma_x}$, $N_{0\sigma_{kx}}$ и исходного значения константы неопределенности $C_{0\sigma}$, используя которое в соотношениях типа (3) определим значения обобщенных чисел отсчетов $\tilde{N}_{1x}$ и $\tilde{N}_{1y}$ для вычисления Фурье-образа по формуле (2). По установленному Фурье-образу можно определить соответствующее среднеквадратичное отклонение σ_{1k_x} и его значение в числах отсчетов $N_{1\sigma_{kx}}$. Сравнение исходно заданного (требуемого) числа отсчетов $N_{0\sigma_{kx}}$ со значением, рассчитанным в первом шаге итерации, позволяет оценить абсолютную погрешность в определении требуемого (заданного) $N_{0\sigma_{kx}}$. В случае высокого значения погрешности, при повторной итерации определяем новое значение константы по формуле (3): $C_{1\sigma} = \tilde{N}_1 / N_{\sigma_x} N_{1\sigma_{kx}}$, с использованием установленного в предыдущем шаге значения числа отсчетов $N_{1\sigma_{kx}}$ средне-квадратичного отклонения σ_{1k_x}, и далее вновь реализуем описанный выше алгоритм, начиная с определения нового итерационного значения обобщенных чисел отсчетов $\tilde{N}_{2x}$ и $\tilde{N}_{2y}$ по формуле (3): $\tilde{N}_{2x(y)} = C_{1\sigma} N_{0\sigma_{x(y)}} N_{0\sigma_{kx(y)}}$.

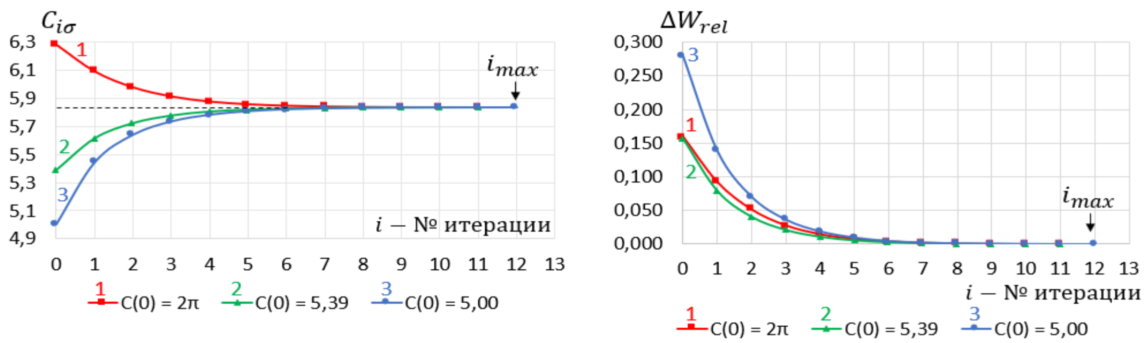
Итерационный процесс поиска самосогласованного дискретного представления Фурье-образа экспериментально измеренного поперечного распределения интенсивности (ПРИ) одномодового лазерного пучка гауссовой формы при наличии спекловой структуры представлен на рис. 1. Рисунок 1, *а* иллюстрирует стремление константы неопределенности к самосогласованному значению $C_\sigma \cong 5.83$ независимо от исходно заданных величин константы неопределенности на старте итерационного поиска ($C_{0\sigma} = 2\pi$, 5.39 и 5.00 для кривых 1, 2 и 3 соответственно).

Критерием самосогласованной сходимости Фурье-образов в процессе итерационного поиска может служить величина средней функциональной дистанции (СФД) между распределением спектральной плотности мощности (СПМ) ЛП, рассчитанной при наиболее точно определенной константе $C_{\sigma imax}$ в конце итерационного поиска $i = i_{max}$ (либо теоретически установленной), с распределением СПМ Фурье-образа на любом предшествующем шаге итерации.

$$\Delta W_{rel} = \frac{1}{\pi N_k{}^2} \frac{1}{\mathcal{W}_C} \sum_{n=-N_{k_x}}^{N_{k_x}} \sum_{m=-N_{k_y}}^{N_{k_y}} \left| \mathcal{W}_{C_{\sigma imax}}(n,m) - \mathcal{W}_{C_i}(n,m) \right|, \text{ при} \sqrt{n^2+m^2} \le N_k \cdot \qquad (5)$$

где, $\mathcal{W}_C = \frac{1}{\pi N_k^2} \sum_{i=-N_{k_x}}^{N_{k_x}} \sum_{j=-N_{k_y}}^{N_{k_y}} \mathcal{W}_{C_{\sigma imax}}(n,m)$ – среднее значение распределения СПМ, $\mathcal{W}_{C_{\sigma imax}}(n,m)$ – распределение СПМ, рассчитанные при наиболее точно определенной константе $C_{\sigma imax}$; $\mathcal{W}_{\varkappa}(n,m)$ – распределение СПМ, рассчитанное при любом $i < i_{max}$.

Приведенные на рис. 1, *б* расчеты средней функциональной дистанции, ΔW_{rel} в зависимости от значения текущего итерационного шага, указывают на их быструю (после $5 \div 6$ итерации) сходимость к единому, самосогласованному пределу независимо от исходных значений константы неопределенности ($C_{0\sigma} = 2\pi$, 5.39 и 5.00 для кривых 1, 2 и 3 соответственно).

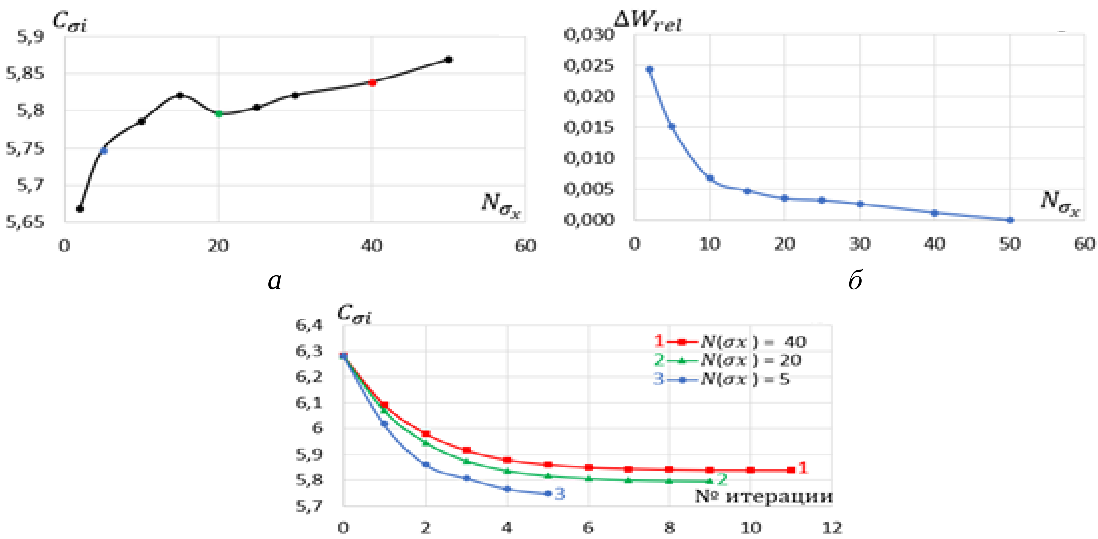


а *б*

Рис 1. Данные, используемые в ходе итерационного процесса локального поиска при различных исходно заданных значениях константы $C_{\sigma i}$ ($C_{0\sigma} = 2\pi$, 5.39 и 5.00 для кривых 1, 2, 3 соответственно):
а – значения константы неопределенности;
б – величина средней функциональной дистанции (СФД) СПМ

Следует отметить, что приведенные выше результаты (рис. 1) получены при конкретном пространственно-спектральном разрешении: $N_{\sigma_x} = N_{0\sigma_x} = 40$, т. е. локально в одной фиксированной точке на КСК-плоскости в единицах дискретных отсчетов. Вместе с тем, сопряженные Фурье-образы могут существовать в любой точке КСК-плоскости, разрешенной соотношением неопределенности, которое, как показывает анализ, в дискретном представлении трансформируется в строгие равенства уравнений (3, 4). Такой подход позволяет исследовать глобальное поведение Фурье-образов с учетом вариации разрешения в КСК (подробнее см. рис. 2).

В основу итерационного метода поиска оптимальных канонически-сопряженных Фурье-представлений поперечного профиля интенсивности лазерного пучка положен критерий схождения к определенному пределу самосогласованной константы из соотношения неопределенности. Достоверность метода подтверждается оценкой средней функциональной дистанции между искомыми Фурье-представлениями.



в

Рис. 2. Зависимость глобального поведения констант в ходе итерационного процесса от степени заданного разрешения:
а – самосогласованные итерационные значения константы неопределенности;
б – величина средней функциональной дистанции (СФД) СПМ;
в – поиск самосогласованных значений константы C_i в локальных точках при N_{σ_x} равных 40, 20, 5 для кривых 1, 2, 3 соответственно

Библиографические ссылки

1. *Кабанов В. В., Негриенко А. О.* Измерение поперечного профиля лазерного пучка в канонически-сопряжённых координатах. // Nonlinear Dynamics and Applications. Minsk, 2024. 30. С. 144 –154.
2. *Котельников В. А.* О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи («On the transmission capacity of ’ether’ and wire in electrocommunication») // Первая Всесоюзная Конференция по вопросам связи, 14 января, 1933.
3. *Shannon C. E.* A mathematician theory of communication, Bell Sys. Tech. J. 1948, Vol. 27, P. 379–423, 623–656; *Shannon C. E.* Communication in the presence of noise, Proc. IRE. 1949. Vol. 37. P. 10–21.
4. *Hans Dieter Lüke*, The Origins of the Sampling Theorem // IEEE Communications Magazine. 1999. April. P. 106–108.
5. *Koopman B. O.* Hamiltonian Systems and Transformation in Hilbert Space, Proc Natl Acad Sci U S A. 1931. 17(5). P. 315–318.
6. *von Neumann J.* "Zur Operatorenmethode In Der Klassischen Mechanik". Annals of Mathematics (in German). 1932. 33 (3). P. 587–642.
7. *Wiener N.* The Fourier Integral, Cambridge, 1932.
8. *Хинчин А. Я.* Теория корреляции стационарных случайных процессов. Математический сборник. 1934. 109 (1) P. 604–615.
9. *Heisenberg W.* Uber den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematic und Mechanik. Zeit. Physik. 1927. 43. P. 172–198.
10. Translation of "Uber den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik", Zeitschrift fur Physik, v. 43, no. 3-4, P. 172–198, 1927. // NASA TM-77379 Washington D.C. 20546. 1983. December.
11. *Folland G. B., Sitaram A.* The uncertainty principle: A Mathematical Survey // Journal of Fourier Analysis and Applications. 1997. V. 3. No 3. P. 207–238.
12. *Nussbaumer H. J.* Fast fourier transform and convolution algorithms. Springer Series in Information Sciences, Publishers: Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2. 1981. 273 p.