

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король



Регистрационный № 3506/8

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для
специальности:

6-05-0533-08 Компьютерная математика и системный анализ

2025 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-08-2023, учебных планов БГУ № 6-5.4-56/01 от 15.05.2023, № 6-5.4-56/11 ин. от 31.05.2023.

СОСТАВИТЕЛИ:

В.И.Громак, профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

О.А.Лаврова, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук;

Н.Л.Щеглова, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

В.К.Дюбков, ректор Учреждения дополнительного образования «Институт повышения квалификации и переподготовки специалистов информационных технологий и бизнес-администрирования», кандидат технических наук;

А.А.Леваков, профессор кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа БГУ
(протокол № 2 от 12.09.2025)

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 2 от 26.09.2025)

Заведующий кафедрой



Л.Л.Голубева

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время наметилось значительное расширение круга задач, связанных с изучением современных естественнонаучных, экономических, социально-политических процессов, которые требуют детального количественного анализа и, зачастую, не имеют однозначных решений. Одним из основных подходов для научного анализа таких задач является математическое моделирование исследуемых процессов. Более того, с развитием информационных технологий сформировалась тенденция замены физических экспериментов, реализация которых может оказаться невозможной в силу финансовых, морально-этических или других обстоятельств, вычислительными экспериментами, основанными на компьютерной реализации математических моделей исследуемых объектов и процессов реальности. Математическое моделирование является неизбежной составляющей научно-технического прогресса.

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Математическое моделирование и анализ динамических систем» – формирование практических навыков и умений построения математических моделей реальных объектов с учетом цели исследования, применения математических методов для осуществления анализа построенных моделей, а также формирование навыков, необходимых для успешного применения фундаментальных математических знаний при исследовании задач в областях, непосредственно не связанных с математикой.

Образовательная цель: обучить методам и приемам построения и анализа математических моделей; обеспечить овладение минимумом знаний и практических навыков по симметричному анализу дифференциальных уравнений; систематизировать и закрепить математические знания, необходимые при решении прикладных задач; сформировать системный подход к организации процесса решения реальных задач средствами математического моделирования.

Развивающая цель: развитие понимания общности математических подходов и методов для исследования задач из различных областей производства, обслуживания и научных исследований; формирование умений сочетать аналитическое мышление, системное мышление и возможности современных систем компьютерной математики (*Mathematica*, *MATLAB*) и языков программирования (*Python*, *Julia*) для качественного и количественного описания и анализа объектов исследования в форме математических моделей.

Задачи учебной дисциплины:

- изучение методов и приемов построения математических моделей;
- отработка навыков построения и анализа детерминированных математических моделей в виде непрерывных и дискретных систем;
- приобретение навыков аналитического и алгоритмического методов построения и анализа математических моделей в символьных и числовых

системах компьютерной математики.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Математическое моделирование и анализ динамических систем» относится к модулю «Дифференциальные уравнения» государственного компонента.

Учебная программа составлена с учетом программ по дисциплинам: «Математический анализ», «Компьютерная математика», «Дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики», «Численные методы», «Прикладной системный анализ», «Метод конечных элементов». Приобретенные при изучении данной дисциплины компетенции пригодятся студенту при изучении дисциплины «Метод конечных элементов» и дисциплин в подготовке специалиста с углубленным высшим образованием.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Математическое моделирование и анализ динамических систем» должно обеспечить формирование следующих компетенции:

Базовые профессиональные компетенции:

Строить и анализировать дифференциальные модели.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- подходы к классификации математических моделей, к построению и анализу базовых математических моделей для механических, биологических, экологических и экономических систем; основные типы решений математических моделей: положение равновесия, колебания, решения с хаотическим поведением и основные методы их исследований;

- основные понятия и определения теории непрерывных групп Ли, основные методы исследования симметричных свойств дифференциальных систем; основные типы прикладных задач, которые могут эффективно решаться с помощью теории групп Ли;

уметь:

- строить детерминированные математические модели в непрерывном и дискретном случае, одномерном и многомерном пространствах, с наличием запаздывания и без него; находить положения равновесия и анализировать их на устойчивость; осуществлять все этапы процесса математического моделирования (содержательная постановка задачи, концептуальная постановка задачи, математическая модель, исследование, валидация, интерпретация);

- проводить исследование динамических моделей на наличие групп симметрий, уметь строить их алгебры Ли и универсальные инварианты, находить точные решения или понижать порядок дифференциальных уравнений, допускающих локальные однопараметрические группы Ли;

иметь навыки:

- владения методами и приемами построения и анализа

детерминированных математических моделей в виде дифференциальных уравнений, дискретных математических моделей;

– владения приёмами и методами аналитического исследования дифференциальных систем на наличие групп симметрий.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 6 и 7 семестрах. В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Математическое моделирование и анализ динамических систем» отведено для **очной формы** получения высшего образования – 190 часов, в том числе 86 аудиторных часов, лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 52 часа. **Из них:**

6 семестр:

Лекции – 16 часов, лабораторные занятия – 26 часов + 2 часа ДОТ, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачёт.

7 семестр:

Лекции – 18 часов, лабораторные занятия – 14 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Математические модели в приложениях

Тема 1.1 Введение в математическое моделирование

Понятие математической модели, математического моделирования. Классификация математических моделей по способу представления объекта моделирования, по определенности данных модели, по цели моделирования. Динамическая система. Устойчивость решений. Этапы процесса математического моделирования. Подходы к построению базовых математических моделей.

Применение принципа аналогии в математическом моделировании на примере моделей динамики численности популяции одного вида (модель Мальтуса, логистическая модель, нелинейный аналог модели Мальтуса). Качественный анализ динамических систем первого порядка.

Тема 1.2 Математические модели колебательных явлений

Построение математических моделей колебательных движений механических систем на основе фундаментальных законов природы и вариационных принципов. Модель пружинного осциллятора. Модель математического маятника. Иерархический подход к построению моделей. Свободные и вынужденные колебания. Резонанс. Модель двухвидового взаимодействия «хищник-жертва». Структурная неустойчивость модели. Качественный анализ динамических систем второго порядка.

Тема 1.3 Математические модели распространения инфекционных заболеваний

Модель Кермака-Маккендрика (SIR-модель) распространения инфекционных заболеваний с формированием иммунитета. Условие возникновения эпидемии на основе качественного анализа динамической системы. Базовое репродуктивное число, его оценка для различных заболеваний. Пороговый эффект в математической эпидемиологии. Оценка целесообразности вакцинации. Уравнение для финального размера эпидемии. Расширения SIR-модели: SIS-модель, SEIR-модель, модель с учетом рождаемости и смертности.

Тема 1.4 Математические модели с запаздыванием

Описание процессов с последействием дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Уравнение Хатчинсона: логистическая модель с запаздыванием. Линейный анализ устойчивости положений равновесия логистической модели. Зависимость характера устойчивости положения равновесия от величины запаздывания. Начальная задача для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Метод последовательного интегрирования начальной задачи. Моделирование

физиологических процессов на примере модели регуляции концентрации клеток крови. Хаотичное поведение и предельные циклы в моделях с запаздыванием.

Тема 1.5 Дискретные математические модели

Дискретная динамическая система. Устойчивость неподвижных точек дискретной динамической системы. Циклы. Бифуркация удвоения периода. Бифуркационная диаграмма. Явление каскада удвоения периода периодических решений при переходе к хаотическому поведению системы. Универсальная константа Фейгенбаума. Дискретные модели популяционной динамики.

Тема 1.6 Методы моделирования, приводящие к дифференциальным уравнениям с частными производными

Построение математических моделей на основе закона сохранения массы. Математические модели процессов переноса. Уравнение непрерывности. Уравнение переноса. Бегущая волна. Метод характеристик. Уравнение Бюргерса. Математические модели процессов диффузии. Математические модели пространственной популяционной динамики. Модель Фишера популяционной динамики с учетом случайного перемещения особей. Аналитическое решение стационарного уравнения диффузии в одномерном случае с точечным источником вещества.

Моделирование процессов переноса загрязнений в реке. Моделирование дорожного трафика. Одно- и двусолитонные решения уравнения Кортевега – де Фриза. Взаимодействие солитонов. Одномерное уравнение диффузии в неподвижной среде.

Раздел 2. Групповой анализ дифференциальных уравнений

Тема 2.1 Введение в групповой анализ дифференциальных уравнений

Динамическая система и ее состояние. Динамическая система, описываемая конечной системой дифференциальных уравнений. Базовые понятия: интеграл, группа Ли, точечные и контактные преобразования, диффеоморфизмы. Понятие симметрии и группы симметрий дифференциальных уравнений.

Тема 2.2 Однопараметрические группы Ли преобразований

Локальная g -параметрической группа Ли. Группа Ли точечных преобразований. Касательное векторное поле группы Ли преобразований. Инфинитезимальный оператор группы Ли преобразований. Инварианты группы Ли преобразований. Критерий инвариантности. Инвариантные многообразия групп Ли преобразований. Критерий инвариантности многообразия.

Тема 2.3 Группы преобразований и дифференциальные уравнения

Теория продолжения группы и инфинитезимального оператора. Дифференциальные инварианты. Нахождение группы преобразований, допускаемой дифференциальным уравнением и определение наиболее общего дифференциального уравнения, допускающего заданную группу. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих известную группу преобразований: построение интегрирующего множителя, «выпрямления» допускаемого оператор, понижения порядка. «Размножение» решений дифференциальных уравнений, допускающих известную группу преобразований.

Тема 2.4 Алгебры Ли симметрий

Коммутатор инфинитезимальных операторов. Алгебры Ли симметрий. Вычисление алгебры Ли симметрий. Обобщение групп Ли точечных преобразований на многомерный случай. Инварианты многопараметрических групп Ли и полных систем операторов. Базис инвариантов многопараметрических групп Ли. Инвариантные и частично инвариантные многообразия.

Тема 2.5 Групповая классификация уравнений математической физики

Групповая классификация уравнений математической физики: Бюргерса, Кортевега – де Фриза, уравнения теплопроводности и др. Инвариантные и частично инвариантные решения уравнений математической физики. Понятия о преобразованиях Беклунда, интегрируемых уравнениях, граничных условиях, совместимых с допускаемыми группами симметрий.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	6 семестр	16			28		6	
1	Математические модели в приложениях	16			28		6	
1.1	Введение в математическое моделирование	2			4			Отчет по лабораторной работе с устной защитой
1.2	Математические модели колебательных явлений	4			6		2	Отчет по лабораторной работе с устной защитой. Отчет по письменным заданиям с их устной защитой.
1.3	Математические модели распространения инфекционных заболеваний	2			4			Отчет по лабораторной работе с устной защитой. Контрольная работа
1.4	Математические модели с запаздыванием	2			4			Отчет по лабораторной работе с устной защитой.
1.5	Дискретные математические модели	2			4			Отчет по лабораторной работе с устной защитой.

1.6	Методы моделирования, приводящие к дифференциальным уравнениям с частными производными	4			4 + 2 (ДОТ)	4	Отчет по лабораторной работе с устной защитой. Отчет по письменным заданиям с их устной защитой. Контрольная работа
	7 семестр	18			14	4	
2	Групповой анализ дифференциальных уравнений	18			14	4	
2.1	Введение в групповой анализ дифференциальных уравнений	2			2		Отчет по лабораторной работе с устной защитой
2.2	Однопараметрические группы Ли преобразований	4			2		Отчет по лабораторной работе с устной защитой
2.3	Группы преобразований и дифференциальные уравнения	4			2		Отчет по лабораторной работе с устной защитой
2.4	Алгебры Ли симметрий	4			4		Отчет по лабораторной работе с устной защитой
2.5	Групповая классификация уравнений математической физики	4			4	4	Отчет по лабораторной работе с устной защитой. Отчет по письменным заданиям с их устной защитой. Контрольная работа

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Ризниченко, Г. Ю. Математическое моделирование биологических процессов. Модели в биофизике и экологии : учебное пособие для вузов / Г. Ю. Ризниченко. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : Юрайт, 2024. - 181 с.
2. Лобанов А. И. Математическое моделирование нелинейных процессов : учебник для вузов, для студентов, обучающихся по естественнонаучным направлениям / А. И. Лобанов, И. Б. Петров. - Москва : Юрайт, 2023. - 255 с.
3. Ершов Н. М. Дифференциальные уравнения в прикладных задачах / Н. М. Ершов. - Москва : ДМК Пресс, 2021. - 358 с.
4. Корзюк В. И. Уравнения математической физики : учебное пособие для студентов высших учебных заведений по математическим специальностям / В. И. Корзюк. - Изд. 2-е, испр. и доп. - Москва : URSS : ЛЕНАНД, 2021. - 479 с.
5. Горлач, Б. А. Математическое моделирование. Построение моделей и численная реализация : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по программам высшего образования в областях: "Инженерное дело, технологии и технологические науки" и "Науки об обществе" / Б. А. Горлач, В. Г. Шахов. - Изд. 5-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2023. - 291 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/305219>.

Дополнительная литература

1. Моделирование экологических процессов : учебно-методическое пособие / С. А. Лаптёнок, и др. ; УО "Международный гос. экологический институт им. А. Д. Сахарова" БГУ, Факультет мониторинга окружающей среды, Кафедра ядерной и радиационной безопасности, Кафедра экологической медицины и радиобиологии. - Минск : ИВЦ Минфина, 2022. - 143 с. - URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/289033>.
2. Стрелков, С. П. Введение в теорию колебаний : учебник / С. П. Стрелков. - Изд. 4-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2021. - 437 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/158954>.
3. Введение в математическое моделирование: Учеб. пособие / Под. ред. П. В. Трусова. -- М.: Логос, 2005.
4. Амелькин В. В., Садовский А. П. Математические модели и дифференциальные уравнения. Мн.: БГУ, 1982.
5. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2001.
6. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука, 1987.

7. Прохорова. Р.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие. – Мн.: БГУ, 2017.
8. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматлит, 1959.
9. Мышкис. А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
10. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
11. Долгий Ю. Ф., Сурков П. Г. Математические модели динамических систем с запаздыванием. Екатеринбург: Издательство Урал. ун-та, 2012.
12. Геворкян Э. А. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом : учебно-методическое пособие / Э. А. Геворкян. — Москва : ЕАОИ, 2011. — 155 с. — ISBN 978-5-374-00568-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/126308>.
13. Адлер В. Э., Хабибулин И. Т., Черданцев И.Ю. Групповой анализ дифференциальных уравнений. Учебное пособие. Уфа. 2013.
14. Головин С. В., Чесноков А. А. Групповой анализ дифференциальных уравнений. Электронное учебное пособие. Новосибирск. 2009.
15. Романюха А. А. Математические модели в иммунологии и эпидемиологии инфекционных заболеваний : монография / А. А. Романюха. - 3-е изд. - Москва : Лаборатория знаний, 2020. - 296 с. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/135547>.
16. Методы и модели исследования сложных систем и обработки больших данных / И. Ю. Парамонов [и др.] ; под ред. В. А. Смагина, А. Д. Хомоненко. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2020. - 234 с. - <https://reader.lanbook.com/book/126938>.
17. Осипов, А. В. Дискретная динамика : учебное пособие / А. В. Осипов. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2019. - 142 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/206147>.
18. Мюррей. Д. Математическая биология. Т.1. Введение. М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2009.
19. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. 2011.
20. Юмагулов М. Г. Введение в теорию динамических систем. СПб.: Издательство "Лань", 2015.
21. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
22. Петросян Л. А., Захаров В. В. Введение в математическую экологию. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.
23. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. Мир, 1983.

24. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1997.
25. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Физматлит, 1978.
26. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
27. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
28. Salsa S. Partial Differential Equations in Action. From Modelling to Theory. Springer, 2016.
29. Vries G., Hillen T., Lewis M., Mueller J., Schoenfish B. A course in mathematical biology: quantitative modeling with mathematical and computational methods. SIAM, 2006.
30. Lynch S. Dynamical Systems with Applications using Mathematica: 2 ed. Birkhauser, 2017.
31. Barnes B., Fulford G. R. Mathematical Modelling with Case Studies: A differential equation approach using Maple and MATLAB. Second Edition, CRC Press, 2008.
32. Blumann G. W., Cole J. D. Similarity methods for Differential Equations. Springer, 1974.

Рекомендуемое учебно-лабораторное оборудование

Для проведения занятий рекомендуется использование следующего программного обеспечения: MS Office, математические пакеты *Mathematica* и MATLAB, Python.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины «Математическое моделирование и анализ динамических систем». Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля: отчет по лабораторной работе с устной защитой, отчет по письменным заданиям с их устной защитой, контрольная работа.

Оценка текущего контроля по дисциплине «Математическое моделирование и анализ динамических систем» формируется в результате регулярной и систематической проверки знаний студентов во время занятий и по итогам их самостоятельной работы. Текущий контроль знаний проходит во время устной защиты отчёта по лабораторным работам, выполняемым в учебной лаборатории и самостоятельно вне аудитории, отчётов по письменным заданиям

УСР. Задания к лабораторным работам и УСР составляются согласно содержанию учебного материала. Во время самостоятельной работы студент выполняет задания, полученные на лабораторных занятиях, а также изучает рекомендуемую литературу.

При защите лабораторных работ оценивается полнота ответа, аргументация выбранных решений, последовательность и оригинальность изложения материала, оригинальность кода, корректность оформления, самостоятельность выполнения заданий. Также ценится знание студентом теоретических сведений, полученных на лекциях, поэтому студенту при выполнении лабораторных заданий необходимо знание лекционных материалов. Для совершенствования способностей учиться самостоятельно студентам могут выдаваться темы докладов, с которыми они выступают на занятиях.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Математическое моделирование и анализ динамических систем» учебным планом предусмотрен **зачет** в шестом семестре и **экзамен** в седьмом семестре.

Зачёт по дисциплине проходит в форме контрольного опроса в устной или письменной форме. Если студент успешно защитил все лабораторные работы и выполнил все письменные задания управляемой самостоятельной работы, то допускается определение результатов промежуточной аттестации по дисциплине на основании результатов текущего контроля знаний без проведения дополнительного опроса на зачёте. Это решение находится в компетенции преподавателя (группы преподавателей), ответственного за реализацию дисциплины. При этом явка студента на зачёт является обязательной.

Экзамен по дисциплине проходит в форме письменного контрольного опроса и далее в устной форме.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

- отчеты по лабораторным работам с устной защитой, отчеты по письменным заданиям с устной защитой – 60 %;
- контрольная работа – 40 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе итоговой отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) 40% и экзаменационной отметки 60%.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.2. Математические модели колебательных явлений (2 ч.)

Синтез асинхронного режима в линейных периодических дифференциальных системах.

Примерный перечень заданий

Задание 1. Исследовать произвольную заданную линейную периодическую систему на наличие асинхронных колебаний.

Пример 1.
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sin t & -2 \sin t & \cos t \\ \cos t & 1 - \cos t & \sin t \\ \sin 2t & \sin 2t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \pi t & -1 - \sin \pi t & \sin \pi t \\ 1 - \cos \pi t & -\cos \pi t & \cos \pi t \\ 1 - \sin 2\pi t & -1 - \sin 2\pi t & \sin 2\pi t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Построить систему вида $\dot{x} = A(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n > 2$, функционирующую в асинхронном режиме.

Выполнение заданий на основе методических указаний к лабораторным занятиям с применением научных результатов, полученных при выполнении темы НИР 1.2.01 «Развитие конструктивных и асимптотических методов исследования сложных управляемых дифференциальных и дискретных систем» ГПНИ «Конвергенция-2025».

Форма контроля – письменный отчет по заданиям с устной защитой.

Тема 1.6. Методы моделирования, приводящие к дифференциальным уравнениям с частными производными (2 ч.)

Итоговая работа по темам 1.4-1.6 «Моделирование сложных процессов».

Примерный перечень заданий

Задание 1. Исследуйте на устойчивость положение равновесия $N \equiv 0$, используя линеаризацию в окрестности положения равновесия, для уравнения Хатчинсона $N'(t) = kN(t) \left(1 - \frac{N(t-T)}{N_p}\right)$, где k – Ваш порядковый номер в списке группы, $N_p > 0, T > 0$. Какой теоретический результат известен об устойчивости положения равновесия $N \equiv N_p$ для уравнения Хатчинсона? Сформулируйте его. Сравните устойчивость положения равновесия $N \equiv N_p$ для уравнения Хатчинсона с устойчивостью положения равновесия $N \equiv N_p$ для логистического уравнения $N'(t) = kN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{N_p}\right)$.

Задание 2. Сделайте первых два шага метода последовательного интегрирования для заданной математической модели с запаздывающим аргументом.

Задание 3. Найдите положения равновесия для модели популяционной динамики Бевертон-Холта. Проанализируйте устойчивость найденных

положений равновесия. Постройте бифуркационную диаграмму для модели Бевертон-Холта.

Задание 4. Постройте аналитическое решение методом характеристик для модели, заданной уравнением непрерывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + t \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}$, с начальным условием $\rho(0, x) = \rho_0(x)$. Является ли характеристическая кривая заданного уравнения прямой линией? Ответ поясните.

Задание 5. Для уравнения Скллама одномерной популяционной динамики $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + ku$ сделайте замену переменных $t^* = kt, x^* = \sqrt{k/D} x$ и сформулируйте уравнение Скллама в переменных t^* и x^* . k – Ваш порядковый номер в списке группы.

Выполнение заданий на основе методических указаний к лабораторным занятиям.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 1.6. Методы моделирования, приводящие к дифференциальным уравнениям с частными производными (2 ч.)

Математическое моделирование задач гидромеханики магнитной жидкости.

Выполнение заданий на основе методических указаний к лабораторным занятиям с применением научных результатов, полученных при выполнении темы НИР 1.4.01.4 «Компьютерное моделирование сложных магнитожидкостных систем со свободной поверхностью при наличии магнитофореза» ГПНИ «Конвергенция-2025».

Форма контроля – письменный отчет по заданиям с устной защитой.

Тема 2.5. Групповая классификация уравнений математической физики (4 ч.)

Групповая классификация уравнения Кортевега – де Фриза.

Выполнение заданий на основе методических указаний к лабораторным занятиям с применением научных результатов, полученных при выполнении темы НИР 1.2.03.1 «Разработка новых методов исследования аналитических и качественных свойств решений нелинейных дифференциальных систем, их анализ и приложения» ГПНИ «Конвергенция-2025».

Форма контроля – письменный отчет по заданиям с устной защитой.

Примерная тематика лабораторных занятий

Раздел 1. Математические модели в приложениях

Лабораторная работа № 1. Математические модели динамики численности популяции одного вида. *Модель Мальтуса. Логистическая модель или модель Ферхюльста. Нелинейный аналог модели Мальтуса. Предсказание*

численности населения. Работа с базой знаний Wolfram Alpha. Предельный рост численности населения земли

Лабораторная работа № 2. Линейные математические модели колебательных явлений. Модель пружинного осциллятора с учетом сопротивления среды и внешней силы. Система химической реакции двух веществ.

Лабораторная работа № 3. Нелинейные математические модели колебательных явлений. Модель математического маятника без учета сопротивления среды. Период колебаний маятника. Математическая модель двухвидового взаимодействия "хищник-жертва". Структурная неустойчивость модели "хищник-жертва".

Лабораторная работа № 4. Математические модели распространения инфекционных заболеваний. SIR-модель. Пороговый эффект. Учет вакцинации в модели. SEIR-модель. Модель с учетом рождаемости и смертности.

Лабораторная работа № 5. Математические модели с запаздыванием. Реализация алгоритма для метода последовательного интегрирования. Начальная задача для уравнения Хатчинсона. Влияние величины запаздывания на устойчивость. Модель регуляции концентрации клеток крови. Фазовый портрет для дифференциального уравнения первого порядка с запаздывающим аргументом.

Лабораторная работа № 6. Дискретные математические модели. Дискретные модели популяционной динамики. Бифуркационная диаграмма дискретной логистической модели. Бифуркационная диаграмма дискретной модели Рикера. Генерация последовательности псевдослучайных чисел.

Лабораторная работа № 7. Математические модели процессов переноса частиц вещества. Перенос загрязнений в реке. Моделирование дорожного трафика. Одно- и двусолитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза.

Лабораторная работа № 8. Математические модели процессов диффузии частиц вещества. Одномерное уравнение диффузии в неподвижной среде. Математические модели пространственной популяционной динамики. Уравнение диффузии с точечным источником.

Раздел 2. Групповой анализ дифференциальных уравнений

Лабораторная работа № 1. Введение в групповой анализ дифференциальных уравнений. Написать программу построения векторного поля, инфинитезимального оператора, уравнения Ли. Работу программы проиллюстрировать на примере группы неравномерных растяжений (масштабных преобразований).

Лабораторная работа № 2. Группы Ли преобразований на плоскости. Геометрическая визуализация действия заданных групп на плоскости. Визуализация на плоскости геометрического объекта и результата действия на него заданными группами преобразований.

Лабораторная работа № 3. Продолжение группы и инфинитезимального оператора. Составить программу для вычисления продолжения инфинитезимального оператора, пользуясь рекуррентными соотношениями.

Лабораторная работа № 4. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений. Продолжение группы и инфинитезимального оператора. Нахождение дифференциальных инвариантов группы. Построение группы симметрий для конкретных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Лабораторная работа № 5. Групповой анализ дифференциальных уравнений в частных производных. Продолжение группы и инфинитезимального оператора. Построение группы симметрий и инвариантных решений на примерах уравнений теплопроводности, Бюргерса, Кортевега – де Фриза.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется **эвристический подход**, который предполагает демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем.

При организации образовательного процесса используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает освоение содержания через решения практических задач.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендовано разместить на образовательном портале или сайте кафедры учебно-методические материалы: курсы лекций и лабораторные практикумы, методические указания к лабораторным занятиям, вопросы для подготовки к экзамену, перечень рекомендуемой литературы, информационные ресурсы.

Самостоятельная работа студента включает в себя работу с учебной литературой по заданным разделам дисциплины, поиск новейшей учебной и научной информации в указанных областях знаний и знакомство с ней, а также выполнение поставленных заданий.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Модель. Математическая модель. Классификация математических моделей.
2. Моделирование. Математическое моделирование, его достоинства. Этапы процесса математического моделирования. Содержательная и концептуальная постановки задачи.

3. Модель. Математическая модель. Подходы к построению математических моделей.
4. Математическая модель. Применение принципа аналогии при построении математических моделей.
5. Непрерывные динамические системы. Фазовое пространство. Фазовая траектория. Фазовый портрет. Анализ устойчивости решения по фазовому портрету.
6. Непрерывные и дискретные динамические системы. Положение равновесия. Анализ устойчивости положений равновесия.
7. Непрерывные и дискретные модели, описывающие динамику численности популяции одного вида. Качественное поведение решений в различных моделях.
8. Модели логистического типа: непрерывные без запаздывания, непрерывные с запаздыванием, дискретные. Характер устойчивости положений равновесия.
9. Модель пружинного осциллятора. Подходы к построению модели. Фазовый портрет.
10. Модель пружинного осциллятора. Свободные и вынужденные колебания. Резонанс.
11. Математическая модель колебаний, учитывающая сопротивление среды и внешние силы.
12. Математическая модель физического маятника. Подходы к построению модели. Фазовый портрет. Колебательные и вращательные движения маятника.
13. Математическая модель системы хищник-жертва. Качественный анализ системы.
14. Применение вариационного принципа наименьшего действия при построении математических моделей механических систем без учета сопротивления среды.
15. SIR-модель распространения инфекционных заболеваний. Качественный анализ системы Кермака-Маккендрика. Пороговый эффект.
16. SIR-модель распространения инфекционных заболеваний. Базовое репродуктивное число. Апостериорная оценка базового репродуктивного числа. Оценка целесообразности вакцинации.
17. Математические модели с запаздыванием. Причины использования. Начальная задача для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Метод последовательного интегрирования.
18. Исследование логистической модели с запаздыванием на устойчивость. Зависимость качественного поведения решения от значения параметра запаздывания.
19. Дискретные математические модели. Типы поведения решения дискретных уравнений. Графическое построение решения одномерной дискретной динамической системы.

20. Дискретные математические модели. Анализ устойчивости неподвижных точек дискретной динамической системы. Циклы.
21. Дискретная модель Мальтуса. Бифуркационная диаграмма.
22. Дискретная логистическая модель. Бифуркационная диаграмма. Явление каскада удвоения периода. Универсальная константа Фейгенбаума. Типы поведения решения.
23. Построение математических моделей на основе закона сохранения массы.
24. Уравнение непрерывности. Бегущая волна. Метод характеристик для скорости потока, зависящей от времени $u = u(t)$ или от положения в пространстве $u = u(x)$.
25. Уравнение Бюргерса и его приложения. Метод характеристик для скорости потока, зависящей от плотности вещества $u = u(\rho)$.
26. Пространственные модели популяционной динамики. Качественное поведение решения модели в ограниченном пространстве.
27. Стационарное уравнение диффузии с точечным источником вещества. Построение аналитического решения.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Базовые понятия ОДУ: векторное поле, решение, базис первых интегралов. интегрирующий множитель.
2. Линейные и квазилинейные уравнение с частными производными первого порядка.
3. Группа, многообразие. Точечные и контактные преобразования.
4. Однопараметрические группы Ли преобразований. Примеры.
5. Касательное векторное поле однопараметрические группы Ли.
6. Инфинитезимальный оператор однопараметрической группы Ли.
7. Инварианты, инвариантные многообразия.
8. Критерий инвариантности группы Ли преобразований.
9. Группы преобразований и дифференциальные уравнения.
10. Теория продолжения группы и инфинитезимального оператора.
11. Дифференциальные инварианты. Примеры.
12. Нахождение группы преобразований, допускаемой дифференциальным уравнением
13. Определение наиболее общего ОДУ, допускающего заданную группу преобразований.
14. Методы интегрирования ОДУ, допускающих известную группу преобразований.
15. Скобка Ли инфинитезимальных операторов.
16. Алгебры Ли симметрий и их вычисление.
17. Обобщение групп Ли точечных преобразований на многомерный случай.

18. Групповая классификация уравнений математической физики. Примеры. Модель. Математическая модель. Классификация математических моделей.

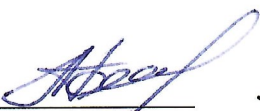
19. Моделирование. Математическое моделирование, его достоинства. Этапы процесса математического моделирования. Содержательная и концептуальная постановки задачи.

20. Модель. Математическая модель. Подходы к построению математических моделей.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы УО по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Метод конечных элементов	Кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа	Предложения отсутствуют	Рекомендовать к утверждению учебную программу (протокол № 2 от 12.09.2025)

Заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа
к.ф.-м.н., доцент


 _____ Л.Л.Голубева

12.09.2025

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УО

на ____/____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
