

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король

26 мая 2025 г.

Регистрационный № УД-14091/уч.



МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для
специальности:

1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям)

Направление специальности:

1-31 03 03-01 Прикладная математика (научно-производственная деятельность)

2025 г.

Учебная программа составлена на основе Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 03-2021; учебного плана БГУ № G31-1-212/уч. от 22.03.2022.

СОСТАВИТЕЛЬ:

В.И.Репников, заведующий кафедрой вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТ:

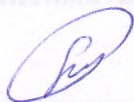
М.М.Чуйко, ведущий научный сотрудник института математики НАН Беларуси, кандидат физико-математических наук

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой вычислительной математики БГУ
(протокол № 13 от 15.05.2025);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 10 от 22.05.2025)

Заведующий кафедрой



В.И.Репников



ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Дисциплина "Методы численного решения жестких систем" посвящена изучению современного состояния теории методов численного решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Первоначально такие задачи считались в вычислительной практике исключением. Однако к настоящему моменту круг их значительно расширился и включает задачи химической, физической кинетики, биологии, микроэлектроники и т.п. Содержание курса по уровню научной новизны материала отвечает современному состоянию вопроса. Три упомянутых спецкурса в сопровождении со специальными семинарскими и лабораторными занятиями призваны быть основой подготовки математиков-прикладников в части разработки вычислительных алгоритмов, в первую очередь в той области математического моделирования, которая связана с начальными задачами для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Методы численного решения жестких систем» – получение студентами навыков конструирования численных алгоритмов, способных эффективно решать жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений на реальных сетках.

В рамках поставленной цели задачи учебной дисциплины состоят в следующем:

1. формирование у студентов твердых навыков по выбору алгоритмов для решения конкретной задачи (ориентируясь на вид поставленной задачи и теоретические характеристики соответствующего алгоритма);
2. освоение современных подходов к конструированию эффективных численных методов решения эволюционных задач;
3. Приобретение студентами практического опыта при программной реализации вычислительных алгоритмов.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к дисциплинам специализации (1-31 03 03-01 04 Численные методы) компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами: основой для изучения данной дисциплины являются дисциплины государственного компонента модуля «Математический анализ», дисциплины государственного компонента «Вычислительные методы алгебры» и «Численные методы» модуля «Методы численного анализа», дисциплина государственного компонента «Основы и методологии программирования» модуля «Программирование», дисциплины компонента учреждения высшего образования «Дифференциальные уравнения» и «Функциональный анализ и интегральные уравнения» модуля «Дифференциальные уравнения и функциональный анализ»

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Методы численного решения жестких систем» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

Универсальные компетенции:

Решать задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно-коммуникационных технологий;

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные требования, предъявляемые к численным методам решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- подходы к конструированию приближенных методов решения задачи Коши;
- требования, предъявляемые к численным методам, предназначенным для решения жестких задач;
- способы улучшения свойств численных алгоритмов для адаптации их к задачам рассматриваемого класса;

уметь:

- строить одношаговые методы решения задачи Коши путем пошагового обращения части дифференциального оператора;
- применять прием экономичного вычисления результирующего разностного оператора;
- применять численные методы для практического интегрирования задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;

владеть:

- основными понятиями теории численных методов решения задачи Коши;
- подходами к изучению качественных свойств численных алгоритмов и их улучшению;
- навыками самообразования и способами использования аппарата теории численных методов решения задачи Коши для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 7 семестре. В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Методы численного решения жестких систем» отведено для **очной формы** получения высшего образования – 200 часов, в том числе 72 аудиторных часа: лекции – 36 часов, лабораторные занятия – 36 часов. Из них:

Лекции – 36 часов, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа (УСР) – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма промежуточной аттестации – зачёт.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Мультипликативная корректировка разностных схем

Тема 1.1 Введение

Проблема численного интегрирования систем дифференциальных уравнений в условиях существенной разномасштабности требует повышенного внимания к конструкции вычислительных алгоритмов с точки зрения обеспечения максимально высокого уровня согласованности в качественном поведении точного и приближенного решений (при реальных шагах численного наблюдения). Повышение уровня такой согласованности в рамках данного курса достигается на двух стратегических направлениях: либо на пути усовершенствования численных методов общего назначения, либо посредством разработки эффективных специализированных методов для более узких классов систем с ориентацией на многоэтапные вычислительные процедуры, пригодные в более общих случаях.

Тема 1.2 Цели и возможности процедуры корректировки

Случай одного дифференциального уравнения. Примеры корректировки известных численных методов. Случай системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Спектральная корректировка. Использование функционала Релея.

Тема 1.3 Принципы выбора корректирующего множителя

Обеспечение свойства точности метода на регулярном режиме (и на других специальных решениях) линейного приближения исходной системы. Минимизация евклидовой нормы главной части локальной погрешности метода.

Раздел 2. Численные методы на основе пошагового выделения и точного обращения главной части исходного дифференциального оператора с последующей аппроксимацией остаточного члена

Тема 2.1 Точные интегральные соотношения

Взгляд на простейшие численные методы через процедуру точного обращения главной части исходного дифференциального оператора. Варианты точных интегральных соотношений, ориентированных на построение явных и неявных численных методов. Выбор параметров точно обрабатываемой части дифференциального оператора. Случай одного дифференциального уравнения. Система таких уравнений.

Тема 2.2 Аппроксимация остаточного члена

Повышение точности приближений посредством аппроксимации необращенной части дифференциального оператора. Обсуждение результатов и возможные обобщения.

Раздел 3. Экономичное нахождение результирующего разностного оператора

Тема 3.1. Общая схема построения результирующего разностного оператора на вспомогательной сетке узлов

Актуальность задачи разработки специализированных методов для систем линейных дифференциальных уравнений. Построение адаптивного типа вычислительных алгоритмов, основанных на процедуре экономичного нахождения результирующего разностного оператора.

Тема 3.2. Выбор значений основных параметров результирующего оператора

Случай вещественного спектра, обеспечение основных требований согласованности. Общий случай, построение базового вычислительного модуля.

Раздел 4. Численные методы с регулируемым уровнем аппроксимации разномасштабных составляющих обратного оператора линейного приближения

Тема 4.1. Многоэтапная стратегия организации вычислительного процесса

Ориентация на численные методы явного типа. Эволюционные операторы, их спектральные функции. Многочленная аппроксимация многомерных операторов по матричной переменной. Акцент в аппроксимации на “жесткую” часть спектра. Рекурсивные формулы для многочленных коэффициентов, учет условий взаимосогласованности операторов. Монотонный характер двусторонних приближений матричной экспоненты. Обеспечение основных требований согласованности дифференциальной и разностной задач при любых шагах сетки и любом порядке точности метода. Повышение уровня аппроксимации в “мягкой” части спектра.

Тема 4.2. Практическая реализация рассматриваемого подхода

Обеспечение монотонного характера основных вычислительных процедур. Проблемы и перспективы рассматриваемого способа конструирования вычислительных алгоритмов, в частности в сочетании с обобщенными методами последовательных поправок и последовательных невязок.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий
(ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Мультипликативная корректировка разностных схем	10			8		2	
1.1	Введение	2						
1.2	Цели и возможности процедуры корректировки	4			4		1	Экспресс-опрос, письменный отчет по лабораторной работе
1.3	Принципы выбора корректирующего множителя	4			4		1	Экспресс-опрос, письменный отчет по лабораторной работе
2	Численные методы на основе пошагового выделения и точного обращения главной части исходного дифференциального оператора с последующей аппроксимацией остаточного члена	6			2		1	

2.1	Точные интегральные соотношения	2			2			Экспресс-опрос
2.2	Аппроксимация остаточного члена	4					1	Письменный отчет по лабораторной работе, контрольная работа №1 по темам 1.1-2.2
3	Экономичное нахождение результирующего разностного оператора	6			10		1	
3.1	Общая схема построения результирующего разностного оператора на вспомогательной сетке узлов	2			4		1	Письменный отчет по лабораторной работе, экспресс-опрос
3.2	Выбор значений основных параметров результирующего оператора	4			6			Письменный отчет по лабораторной работе, экспресс-опрос
4	Численные методы с регулируемым уровнем аппроксимации разномасштабных составляющих обратного оператора линейного приближения	14			10		2	
4.1	Многоэтапная стратегия организации вычислительного процесса	6			4		1	Экспресс-опрос, письменный отчет по лабораторной работе
4.2	Практическая реализация рассматриваемого подхода	8			6		1	Письменный отчет по лабораторной работе, контрольная работа №2 по темам 3.1-4.2

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Голубева, Н.В. Математическое моделирование систем и процессов: учебное пособие для вузов / Н.В. Голубева. – Изд. 4-е, исправл. и дополн. - Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 244 с. - <https://reader.lanbook.com/book/393023>
2. Слабнов, В. Д. Численные методы : учебник [для вузов] / В. Д. Слабнов. - Изд. 3-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. - 389 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/359849>.
3. Волков, Е. А. Численные методы : учебное пособие [для вузов] / Е. А. Волков. - Изд. 7-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. - 248 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/254663>.

Дополнительная литература

1. Бобков В.В. Одношаговые методы численного решения жестких систем. Дисс. На соиск. уч. ст. доктора физ.-мат.наук. ИМ АН Беларуси. Минск. – 1995.
2. Бобков В.В. Многоэтапные методы численного решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Избр. научные труды Белорусского государственного университета: т.6. Математика. Изд-во БГУ, Минск. – 2001. – С. 66 – 91.
3. Бобков В.В. К вопросу численного моделирования начальных задач // Вестник БГУ. Сер. 1. 2013. № 3. С. 75 – 82.
4. Бобков В.В.: Мандрик П.А., Репников В.И. Адаптивные методы численного решения жестких систем // Дифференц. уравнения, т. 29, № 4. – 1993. – С. 689 – 699.
5. Бобков В.В., Кучмиенко И.А., Фалейчик Б.В. Дискретный аналог метода Пикара// Вестн.Белорус. ун-та. Сер.1, физ., матем., информ. № 3. – 2002. – С. 68 – 71.
6. Bobkov V.V. Spectrally consistent approximations to the matrix exponent and their applications to boundary layer problem // Computational methods in applied mathematics, Vol. 2 (2002), No. 4, pp. 354 – 377.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущей аттестации: отчеты по лабораторным работам, письменные контрольные работы, устные экспресс-опросы.

Лабораторные работы, как правило, представляют собой задания, включающие программную реализацию указанного численного метода, проведение вычислительного эксперимента и комментарии по его итогам. Рекомендуемая форма отчетности по лабораторной работе – письменный отчет. Лабораторная работа оценивается по 10-балльной шкале. Отметка за

лабораторную работу может быть снижена в случае несвоевременного выполнения.

Письменные контрольные работы проводятся для контроля знаний по одному или нескольким разделам дисциплины. Они включают 4–5 заданий и оцениваются по 10-балльной шкале. В случае неудовлетворительной отметки контрольная работа может быть переписана.

Устный экспресс-опрос студентов проводится в свободной форме во время лабораторных и лекционных занятий. Его результаты учитываются преподавателем при выставлении итоговой отметки.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Методы численного решения жестких систем» учебным планом предусмотрен зачёт.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

Тема 1.2. Цели и возможности процедуры корректировки (1 ч)

Примерное задание:

1. Найти примеры операторов перехода, обеспечивающих А-устойчивость соответствующего одношагового численного метода.
2. Изучить связь между видом оператора перехода и порядком точности соответствующего метода.

Форма контроля: письменный отчет по лабораторной работе

Тема 1.3. Принципы выбора корректирующего множителя (1 ч)

Примерное задание:

1. Построить примеры явных А-устойчивых одношаговых методов, пользуясь подгонкой по оператору перехода.

Форма контроля: письменный отчет по лабораторной работе

Тема 2.2. Аппроксимация остаточного члена (1 ч)

Примерное задание:

1. Построить точные интегральные соотношения при пошаговом выделении линейной главной части дифференциального оператора.
2. Выписать условия порядка при пошаговом выделении линейной главной части дифференциального оператора.
3. Построить примеры численных методов, основанных на пошаговом выделении линейной главной части дифференциального оператора.
4. Построить точные интегральные соотношения при пошаговом выделении квадратичной главной части дифференциального оператора.

Форма контроля: письменный отчет по лабораторной работе

Тема 3.1. Общая схема построения результирующего разностного оператора на вспомогательной сетке узлов (1 ч)

1. Построить примеры базовых операторов с нужными свойствами, на основе которых можно строить результирующий оператор.

2. Разработать алгоритм численного интегрирования задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с заданной точностью на основе экономичного нахождения результирующего разностного оператора.

3. Осуществить программную реализацию алгоритма пункта 2.

Форма контроля: письменный отчет по лабораторной работе

Тема 4.1. Многоэтапная стратегия организации вычислительного процесса (1 ч)

1. Построить примеры численных алгоритмов на основе использования принципа дифференциальных невязок.

2. Осуществить программную реализацию алгоритмов пункта 1.

Форма контроля: письменный отчет по лабораторной работе

Тема 4.2. Практическая реализация рассматриваемого подхода (1 ч)

1. Построить примеры численных алгоритмов на основе принципа обратных дифференциальных невязок.

2. Программно реализовать алгоритмы пункта 3.

Форма контроля: письменный отчет по лабораторной работе

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине следует использовать современные информационные технологии: разместить в сетевом доступе комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, методические указания к лабораторным занятиям, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, экзамену, список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.). Эффективность самостоятельной работы студентов проверяется в ходе текущего и итогового контроля знаний. Для общей оценки качества усвоения студентами учебного материала рекомендуется использование рейтинговой системы.

Примерный перечень вопросов к зачёту

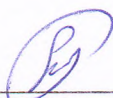
1. Примеры жестких задач.
2. Формальное описание явления жесткости и его область применения.
3. Понятие устойчивости численных методов решения задачи Коши.
4. Метод множества точек границы.
5. Сравнительный анализ свойств устойчивости явных и неявных методов классического типа.
6. Цели и возможности процедуры корректировки.
7. Спектральная корректировка. Использование функционала Релея.
8. Обеспечение свойства точности метода на регулярном режиме (и на других специальных решениях) линейного приближения исходной системы.

9. Минимизация евклидовой нормы главной части локальной погрешности метода.
10. Варианты точных интегральных соотношений, ориентированных на построение явных и неявных численных методов.
11. Выбор параметров точно обращаемой части дифференциального оператора (случай одного дифференциального уравнения).
12. Выбор параметров точно обращаемой части дифференциального оператора (случай системы)
13. Повышение точности приближений посредством аппроксимации необращенной части дифференциального оператора.
14. Актуальность задачи разработки специализированных методов для систем линейных дифференциальных уравнений.
15. Построение адаптивного типа вычислительных алгоритмов, основанных на процедуре экономичного нахождения результирующего разностного оператора.
16. Выбор основных параметров результирующего оператора в случае вещественного спектра матрицы.
17. Выбор основных параметров результирующего оператора в общем случае.
18. Многочленная аппроксимация многомерных операторов по матричной переменной.
19. Рекурсивные формулы для многочленных коэффициентов, учет условий взаимосогласованности операторов.
20. Монотонный характер двусторонних приближений матричной экспоненты.
21. Обеспечение основных требований согласованности дифференциальной и разностной задач при любых шагах сетки и любом порядке точности метода.
22. Повышение уровня аппроксимации в “мягкой” части спектра.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой
вычислительной математики
доцент, кандидат физ.-мат. наук


 (подпись)

В.И.Репников

15.05.2025

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УО

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
