

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
Государственного университета

А.Д.Король

27 июня 2025 г.

Регистрационный № 3326/6.



КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для
специальности:

6-05-0533-09 Прикладная математика

Профилизация: Математическое моделирование и управление

2025 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-09-2023; учебного плана БГУ № 6-5.3-57/03 от 15.05.2023.

СОСТАВИТЕЛИ:

В.В.Крахотко, доцент кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Н.М.Дмитрук, заведующий кафедрой методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

О.И.Костюкова, главный научный сотрудник отдела нелинейного и стохастического анализа Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси», доктор физико-математических наук, профессор;

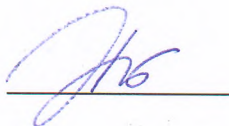
И.К.Асмыкович, доцент кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой методов оптимального управления БГУ
(протокол № 10 от 27.05.2025)

Научно-методическим Советом БГУ
(протокол № 11 от 26.06.2025)

Заведующий кафедрой



Н.М.Дмитрук

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Качественная теория оптимального управления» – формирование у студентов целостного представления о качественных методах теории оптимального управления, выработка навыков их применения к исследованию динамических систем и задач оптимального управления, возникающих в механике, экономике, биологии, эпидемиологии, медицине и др. Образовательная цель: формирование и развитие практико-ориентированной компетентности, позволяющей использовать полученные знания для решения задач в сфере профессиональной и социальной деятельности. Развивающая цель: формирование знаний, умений и навыков анализа и решения различных оптимизационных задач, связанных с машинным обучением.

Задачи учебной дисциплины:

1. Освоение теоретических основ качественной теории оптимального управления, включая базовые понятия управляемости, наблюдаемости, достижимости а также освоение принципа максимума как ключевого метода анализа оптимальности процессов управления.

2. Формирование представлений об эффективных методах оптимального управления, актуальных для приложений в механике, экономике и других областях.

3. Выработка практических навыков самостоятельного применения методов качественного анализа и оптимального управления при решении прикладных задач различной природы.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к дисциплинам профилизации компонента учреждения образования.

Программа составлена с учетом межпредметных связей с учебными дисциплинами. Основой для изучения учебной дисциплины являются дисциплины модуля «Математический анализ», дисциплины «Линейная алгебра», «Методы оптимизации». Сведения из дисциплины «Качественная теория оптимального управления» служат базой для учебных дисциплин «Конструктивные методы оптимального управления и наблюдения», выполнения курсовых и дипломных работ.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Качественная теория оптимального управления» должно обеспечить формирование следующей компетенции:

Специализированные компетенции:

Применять фундаментальные результаты теории оптимального управления, в частности принцип максимума и динамическое программирование, при решении конкретных задач управления движением.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные задачи и понятия теории управления, включая управляемость, наблюдаемость, достижимость;

- постановку и специфику задач оптимального управления, содержание и значение принципа максимума как базового метода анализа оптимальности;

- основные результаты качественной теории оптимального управления, в частности, формулировки принципа максимума для различных задач оптимального управления;

уметь:

- исследовать управляемость и наблюдаемость линейных стационарных и нестационарных систем;

- формулировать и моделировать практические задачи оптимального управления в механике и экономике;

- применять методы решения задач оптимального управления и проводить качественный анализ полученных решений;

иметь навык:

- применения принципа максимума при решении типовых задач оптимального управления;

- качественного анализа оптимальных траекторий и управляющих воздействий в динамических системах;

- использования методов оптимального управления для интерпретации и обоснования результатов прикладных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5 семестре. В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Качественная теория оптимального управления» отведено для очной формы получения высшего образования – 108 часов, в том числе 68 аудиторных часов: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 34 часа. **Из них:**

Лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа (УСР) – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины 3 зачетных единицы.

Форма промежуточной аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Введение

Задачи качественной теории оптимального управления и их приложения. Примеры прикладных задач из механики, экономики, эпидемиологии. Историческая справка. Цели и задачи учебной дисциплины.

Раздел 1. Линейные управляемые системы

Тема 1.1. Управляемость обыкновенных линейных стационарных систем

Линейные системы. Формула Коши. Множество достижимости. Понятие полной управляемости. Неявный критерий управляемости. Критерий управляемости Калмана. Канонические формы управляемых систем. Спектральный критерий управляемости Хаутуса. Условная и относительная управляемость. Управляемость дискретных систем.

Тема 1.2. Управляемость линейных стационарных систем с запаздыванием

Системы с запаздыванием. Формула Коши. Неявный критерий относительной управляемости. Определяющее уравнение. Критерий относительной управляемости в терминах решений определяющего уравнения. Системы нейтрального типа.

Тема 1.3. Наблюдаемость линейных стационарных систем

Операция восстановления состояния по наблюдаемому выходу. Связь проблемы наблюдаемости с проблемой управляемости, дуальность. Критерии наблюдаемости линейных стационарных систем.

Тема 1.4. Линейные дискретные системы

Линейные дискретные системы управления, управляемость и наблюдаемость. Примеры.

Раздел 2. Задачи оптимального управления

Тема 2.1. Постановка и классификация задач оптимального управления

Математическая модель управляемого объекта. Классы доступных управлений. Ограничения на траекторию: задачи со свободными, закрепленными, подвижными концами траекторий, фазовые и смешанные ограничения. Допустимые управления. Типы критериев качества, эквивалентность критериев. Оптимальное управление. Существование оптимальных управлений.

Тема 2.2. Принцип максимума для простейшей задачи терминального управления

Простейшая задача терминального управления. Игольчатая вариация. Вариация траектории. Формула приращения критерия качества. Формулировка

и доказательство принципа максимума Понтрягина в задаче терминального управления.

Тема 2.3. Обсуждение принципа максимума

Экстремали Понтрягина и их свойства. Принцип максимума как достаточное условие оптимальности. Связь принципа максимума с правилом множителей Лагранжа. Задачи оптимального управления с критериями качества типа Больца и Лагранжа. Экономическая интерпретация принципа максимума. Построение оптимальных программных управлений с помощью принципа максимума. Краевая задача принципа максимума. Примеры.

Тема 2.4. Задачи с подвижным правым концом траектории

Обобщенная игольчатая вариация. Вариации функционалов и траектории. Отделимость выпуклых конусов. Принцип максимума для задач с терминальными ограничениями-неравенствами. Условия трансверсальности. Терминальные ограничения-равенства. Задачи с подвижным левым концом траектории. Примеры.

Тема 2.5. Задачи с нефиксированной продолжительностью процесса

Принцип максимума для простейшей задачи с нефиксированной продолжительностью процесса. Оптимальный момент окончания процесса. Общая задача оптимального управления.

Раздел 3. Синтез оптимальных систем

Тема 3.1. Оптимальные по быстродействию системы

Задачи линейного быстродействия. Теоремы о числе переключений. Теоремы единственности и существования оптимальных управлений. Формулировка принципа максимума в задаче быстродействия.

Тема 3.2. Синтез оптимальных систем с помощью принципа максимума

Синтез оптимальных по быстродействию систем. Успокоение материальной точки. Успокоение простого маятника. Множество управляемости, обратный маятник. Синтез на плоскости для систем второго порядка с различными типами особых точек.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий
(ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Введение	2						
1	Линейные управляемые системы	10			6			
1.1	Управляемость обыкновенных линейных стационарных систем	4			2			Устный опрос
1.2	Управляемость линейных стационарных систем с запаздыванием	2						Устный опрос
1.3	Наблюдаемость линейных стационарных систем	2			2			Решение задач
1.4	Линейные дискретные системы	2			2			Расчетно-графическое задание №1
2	Задачи оптимального управления	16			16		2	
2.1	Постановка и классификация задач оптимального управления	2			2			Устный опрос
2.2	Принцип максимума для простейшей задачи терминального управления	4			4			Решение задач
2.3	Обсуждение принципа максимума	4			4		2	Решение задач. Расчетно-графическое задание №2

2.4	Задачи с подвижным правым концом траектории	2			4			Решение задач
2.5	Задачи с нефиксированной продолжительностью процесса	2			2			Контрольная работа
3	Синтез оптимальных систем	8			8		2	
3.1	Оптимальные по быстродействию системы	4			2			Устный опрос
3.2	Синтез оптимальных систем с помощью принципа максимума	4			6		2	Решение задач Расчетно-графическое задание №3
	Итого:	34			30		4	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Лившиц, К. И. Теория управления : учебник / К. И. Лившиц, Ю. И. Параев. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. – 232 с. – <https://e.lanbook.com/book/133923>.
2. Абдрахманов, В. Г. Элементы вариационного исчисления и оптимального управления. Теория, задачи, индивидуальные задания : учебное пособие / В. Г. Абдрахманов, А. В. Рабчук. – 2-е изд., испр. – Санкт-Петербург : Лань, 2025. – 112 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/211535>.

Дополнительная литература

1. Методы оптимизации : электронный учебно-методический комплекс для специальностей: 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)»; 1-31 03 04 «Информатика»; 1-31 03 05 «Актuarная математика»; 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (по направлениям)», 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» / В. В. Альсевич [и др.] ; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. методов оптимального управления. – Минск : БГУ, 2020. – 203 с. – URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/243989>.
2. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, В. В. Альсевич [и др.]. – Минск: Четыре четверти, 2011. – 472 с.
3. Васильев Ф. Методы оптимизации / Ф. Васильев – М.: Litres, 2022.
4. Габасов Р. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2018.
5. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе [и др.]. – М.: Наука, 1983.
6. Габасов, Р. Оптимизация линейных систем: Методы функционального анализа / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Мн.: Изд-во БГУ, 1973.
7. Габасов, Р. Особые оптимальные управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова – URSS, 2018. – 256 с.
8. Гамкрелидзе, Р.В. Основы оптимального управления / Р.В. Гамкрелидзе. – URSS, 2019. – 200 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для диагностики компетенций в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы:

1. Устная форма: устный опрос.
2. Письменная форма: расчетно-графические задания, контрольная работа.
3. Устно-письменная форма: решение задач.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Методы оптимизации в машинном обучении» учебным планом предусмотрен **экзамен**.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

- устный опрос, решение задач – 10 %;
- расчетно-графические задания – 30 %;
- контрольная работа – 60 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) – 40 % и отметки на экзамене – 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

Тема 2.3. «Обсуждение принципа максимума». (2 ч)

Задание 1. Построить математическую модель системы управления (технический или экономический пример) и сформулировать для нее задачу оптимального управления (по вариантам групповых заданий).

Задание 2. Определить оптимальное управление с помощью принципа максимума Понтрягина и провести анализ решения.

(Форма контроля – расчетно-графическое задание №2).

Тема 3.2. «Синтез оптимальных систем с помощью принципа максимума». (2 ч)

Задание 1. Решить задачу быстродействия для линейного объекта второго порядка (по вариантам индивидуальных заданий).

Задание 2. Решить задачу синтеза на плоскости.

Форма контроля – расчетно-графическое задание №3.

Перечень используемых средств диагностики результатов управляемой самостоятельной работы студентов: расчетно-графические задания.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса большинства практических занятий используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности.

При организации образовательного процесса используются следующие методы:

– **метод учебной дискуссии**, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме. Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

– **метод группового обучения**, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

В качестве технических средств для организации работы в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать Образовательный портал БГУ (<https://edufpmi.bsu.by>) – инструменты с эффективной функциональностью контроля, тренинга и самостоятельной работы.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы

Для обеспечения возможности самостоятельной работы при изучении теории и выполнении практических заданий рекомендуется использовать изданные учебные пособия, размещенные в электронной библиотеке университета.

Для самоконтроля усвоения учебного материала рекомендуется использовать образовательный портал EDUFPMI, где размещены:

- учебно-методические материалы,
- учебные издания для теоретического изучения дисциплины,
- расчетно-графические задания и примеры их решений,
- материалы текущего контроля и текущей аттестации,
- вопросы для подготовки к зачету.

Примерный перечень вопросов к экзамену

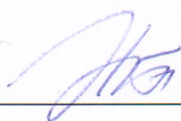
1. Системы управления: понятие управляемого объекта, типы систем управления, принципы управления, понятия программного и позиционного управления.
2. Линейные системы управления. Формула Коши. Множество достижимости системы линейной по управлению.
3. Канонические формы линейных управляемых систем.
4. Понятие управляемости линейных стационарных систем. Критерий управляемости Калмана.
5. Понятие управляемости линейных стационарных систем. Спектральный критерий управляемости.
6. Управляемость линейных нестационарных систем.
7. Связь проблемы наблюдаемости с проблемой управляемости, дуальность.

8. Критерии наблюдаемости линейных стационарных систем.
9. Наблюдаемость линейных нестационарных систем.
10. Постановка и классификация задач оптимального управления.
11. Принцип максимума Понтрягина в простейшей задаче терминального управления.
12. Экстремали Понтрягина и их свойства.
13. Принцип максимума как достаточное условие оптимальности.
14. Задачи оптимального управления с критериями качества типа Больца и Лагранжа.
15. Экономическая интерпретация принципа максимума.
16. Построение оптимальных программных управлений с помощью принципа максимума. Краевая задача принципа максимума.
17. Задачи с подвижным правым концом траектории, условия трансверсальности.
18. Принцип максимума для простейшей задачи с нефиксированной продолжительностью процесса.
19. Принцип максимума для общей задачи оптимального управления.
20. Оптимальные по быстродействию системы
21. Понятие синтеза оптимальных систем
22. Синтез оптимальных систем с помощью принципа максимума
23. Успокоение материальной точки
24. Успокоение маятника
25. Множество управляемости. Примеры

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Конструктивные методы оптимизации	Кафедра методов оптимального управления	Предложения отсутствуют	Рекомендовать к утверждению учебную программу (протокол № 10 от 27.05.2025)

Заведующий кафедрой
методов оптимального управления
канд. физ.-мат.наук, доцент



Н.М.Дмитрук

27.05.2025

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УО

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
