

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король



26 мая 2025 г.

Регистрационный № 3425/б.

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для
специальности:

6-05-0533-09 Прикладная математика

Профилизация: Численные методы и алгоритмы решения прикладных задач

2025 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-09-2023, учебного плана БГУ №6-5.3-57/04 от 15.05.2023.

СОСТАВИТЕЛЬ:

В.И.Репников, заведующий кафедрой вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТ:

П.П.Матус, главный научный сотрудник отдела информационных технологий Института математики НАН Беларуси, член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

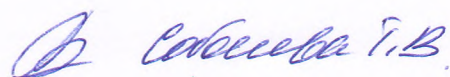
Кафедрой вычислительной математики БГУ
(протокол № 13 от 15.05.2025);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 10 от 22.05.2025)

Заведующий кафедрой



В.И.Репников



ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Методы численного решения жестких систем» – получение студентами навыков конструирования численных алгоритмов, способных эффективно решать жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений на реальных сетках.

Задачи учебной дисциплины:

1. формирование у студентов твердых навыков по выбору алгоритмов для решения конкретной задачи (ориентируясь на вид поставленной задачи и теоретические характеристики соответствующего алгоритма);
2. освоение современных подходов к конструированию эффективных численных методов решения эволюционных задач;
3. Приобретение студентами практического опыта при программной реализации вычислительных алгоритмов.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Методы численного решения жестких систем» относится к дисциплинам профилизации «Численные методы и алгоритмы решения прикладных задач» компонента учреждения образования.

Связи с другими учебными дисциплинами: основой для изучения данной дисциплины являются дисциплины модулей «Математический анализ», «Методы численного анализа», «Математическое моделирование», «Программирование» государственного компонента, «Дифференциальные уравнения и функциональный анализ» компонента учреждения высшего образования.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Методы численного решения жестких систем» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

Специализированные компетенции:

Применять современные технологии построения численных методов интегрирования жестких систем, адаптированных к виду конкретной дифференциальной задачи.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные требования, предъявляемые к численным методам решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- подходы к конструированию приближенных методов решения задачи Коши;
- требования, предъявляемые к численным методам, предназначенным для решения жестких задач;
- способы улучшения свойств численных алгоритмов для адаптации их к задачам рассматриваемого класса;

уметь:

- строить одношаговые методы решения задачи Коши путем пошагового обращения части дифференциального оператора;
- применять прием экономичного вычисления результирующего разностного оператора;
- применять численные методы для практического интегрирования задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;

иметь навык:

- основными понятиями теории численных методов решения задачи Коши;
- подходами к изучению качественных свойств численных алгоритмов и их улучшению;
- навыками самообразования и способами использования аппарата теории численных методов решения задачи Коши для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5 семестре. В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Методы численного решения жестких систем» отведено для **очной формы** получения высшего образования – 108 часов, в том числе 68 аудиторных часов: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 34 часа. Из них:

Лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа (УСР) – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1 Классические методы решения жестких систем

Тема 1.1 Примеры жестких задач. Формальное определение явления

История обнаружения явления. Место жестких задач в математическом моделировании. Жесткое скалярное уравнение. Жесткие линейные системы. Реакция численных методов на явление жесткости. Формальное определение понятия «жесткая система» и границы его применимости.

Тема 1.2 Понятие устойчивости численных методов решения задачи Коши

Численные методы решения задачи Коши как разностные уравнения. Нахождение общих решений простейших разностных уравнений. Типы модельных задач, применяемых для характеристики свойства устойчивости численных методов решения задачи Коши. Корневое условие. Интервал и область устойчивости. А-устойчивость. Метод множества точек границы.

Тема 1.3 Многошаговые методы для жестких задач

Общий вид линейных многошаговых методов без старшей производной. Барьеры Далквиста. Методы Адамса: схема построения, примеры, анализ свойства устойчивости. Методы, основанные на формулах дифференцирования назад: общий вид, способы определения параметров, техника исследования устойчивости. Основные подходы к численной реализации неявных методов.

Тема 1.4 Одношаговые методы для жестких задач

Определение оператора перехода по таблице Бутчера. Неявные методы Рунге-Кутты: условия порядка, примеры методов первого и второго порядка, выбор параметров. Методы высших порядков: упрощающие условия и их смысл, методы Гаусса, методы Радо, методы Лобатто, связь методов с Паде-аппроксимацией, свойство устойчивости, особенности численной реализации. Чисто неявные методы типа последовательного повышения порядка точности. Методы Розенброка. Улучшение свойства устойчивости явных одношаговых методов типа Рунге-Кутты: теоретические предпосылки, практическое построение оптимальных операторов перехода, построение метода по заданному оператору перехода, упорядочивание параметров методов первого порядка, примеры методов.

Раздел 2 Специализированные методы решения жестких систем

Тема 2.1 Способы улучшения свойств численных методов

Подгонка по оператору перехода, примеры экспоненциально подогнанных методов. Использование обращения части дифференциального оператора для построения численных методов: обращение линейной части дифференциального оператора, методы для уравнений типа Риккати.

Тема 2.2 Системно ориентированные методы решения задачи Коши

Численные методы для линейных однородных систем: свойство исходной дифференциальной задачи, технология исследования свойств численных

методов в системном случае, привязка свойств к разностной траектории, построение методов с использованием технологии обращения части дифференциального оператора в сочетании с принципом регуляризации, многократное обращение части дифференциального оператора: выбор параметров. Методы для неоднородных линейных систем. Использование матричных операций при построении системно ориентированных методов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий
(ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Классические методы решения жестких систем	22			18		2	
1.1	Примеры жестких задач. Формальное определение явления	2			2			Экспресс-опрос
1.2	Понятие устойчивости численных методов решения задачи Коши	2			2			Экспресс-опрос
1.3	Многошаговые методы для жестких задач	4			6		2	Экспресс-опрос, тест
1.4	Одношаговые методы для жестких задач	14			8			Отчет по лабораторной работе, экспресс-опрос Контрольная работа № 1 по темам 1.1-1.4
2	Специализированные методы решения жестких систем	12			12		2	
2.1	Способы улучшения свойств численных методов	4			4		2	Экспресс-опрос, тест

2.2	Системно ориентированные методы решения задачи Коши	8			8			Отчет по лабораторной работе, экспресс-опрос Контрольная работа № 2 по темам 2.1-2.2
-----	---	---	--	--	---	--	--	---

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Голубева, Н.В. Математическое моделирование систем и процессов: учебное пособие для вузов / Н.В. Голубева. – Изд. 4-е, исправл. и дополн. - Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 244 с. - <https://reader.lanbook.com/book/393023>
2. Слабнов, В. Д. Численные методы : учебник [для вузов] / В. Д. Слабнов. - Изд. 3-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. - 389 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/359849>.
3. Волков, Е. А. Численные методы : учебное пособие [для вузов] / Е. А. Волков. - Изд. 7-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. - 248 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/254663>.

Дополнительная литература

1. Curtiss C.F., Hirschfelder J.O. Integration of stiff equations. – Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1952, 38.
2. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения. – Мн.: Наука и техника, 1982. – 296 с.
4. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 334 с.
5. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы, т. I – М.: Наука., 1976. – 304 с.
6. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 685 с.
7. Riha W. Optimal Stability Polynomials // Computing, 1972, V. 9, No 1. – P. 37 – 43.
8. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т. I. М.: Физматлит, 1962. – 464 с.
9. Марков В.А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. Санкт-Петербург, Типография императорской Академии наук, 1892. – 110 с.
10. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. – 552 с.
11. Репников В.И. О свойствах некоторых функционалов, связанных с линейными дифференциальными системами // Вестник Белорусского университета. Сер. 1. Физика, математика, информатика, № 2. 2001. – С. 60 – 65.
12. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. – 552 с.

13. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир. – 1983. – 384 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущей аттестации: отчеты по лабораторным работам, письменные контрольные работы, устные экспресс-опросы.

Лабораторные работы, как правило, представляют собой задания, включающие программную реализацию указанного численного метода, проведение вычислительного эксперимента и комментарии по его итогам. Рекомендуемая форма отчетности по лабораторной работе – письменный отчет. Лабораторная работа оценивается по 10-балльной шкале. Отметка за лабораторную работу может быть снижена в случае несвоевременного выполнения.

Письменные контрольные работы проводятся для контроля знаний по одному или нескольким разделам дисциплины. Они включают 4–5 заданий и оцениваются по 10-балльной шкале. В случае неудовлетворительной отметки контрольная работа может быть переписана.

Устный экспресс-опрос студентов проводится в свободной форме во время лабораторных и лекционных занятий. Его результаты учитываются преподавателем при выставлении итоговой отметки.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Методы численного решения жестких систем» учебным планом предусмотрен экзамен.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

- отчеты по лабораторным работам – 50 %;
- контрольные работы – 40 %;
- устный экспресс-опрос – 10 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (модульно-рейтинговой системы оценки знаний) – 60 % и отметки на зачете – 40 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

Тема 1.3. Многошаговые методы для жестких задач (2 часа)

1. При заданном k построить k -шаговый метод максимального порядка точности. Проверить выполнение корневого условия.
 2. Построить ФДН-метод указанного порядка точности. Исследовать свойства устойчивости построенного метода.
 3. Построить сходящийся итерационный процесс для реализации ФДН-метода, не ухудшающий свойства устойчивости исходного метода.
- Форма контроля – экспресс-опрос.

Тема 2.1 Способы улучшения свойств численных методов (2 часа)

1. Методом подгонки по оператору перехода построить явный А-устойчивый метод заданного порядка точности.
 2. Применяя прием обращения части дифференциального оператора, построить пример метода заданного порядка точности, ориентированного на решение задач, близких к линейным.
 3. Применяя прием обращения части дифференциального оператора, построить пример метода заданного порядка точности, ориентированного на решение уравнений типа Риккати.
- Форма контроля – экспресс-опрос.

Примерный перечень лабораторных занятий

- Занятие 1. Примеры жестких задач.
- Занятие 2. Анализ устойчивости методов решения задачи Коши.
- Занятие 3. Построение областей устойчивости численных методов.
- Занятие 4. ФДН-методы.
- Занятие 5. Конструирование неявных А-устойчивых одношаговых численных методов.
- Занятие 6. Чисто неявные численные методы типа последовательного повышения порядка точности.
- Занятие 7. Решение задачи о построении оптимального многочлена устойчивости.
- Занятие 8. Построение методов по заданному оператору перехода.
- Занятие 9. Упорядочивание параметров численного метода.
- Занятие 10. Обращение линейной части дифференциального оператора.
- Занятие 11. Различные типы обращаемых частей дифференциального оператора.
- Занятие 12. Подгонка по оператору перехода.
- Занятие 13. Системно ориентированные экспоненциальные численные методы.
- Занятие 14. Многократное обращение части дифференциального оператора.
- Занятие 15. Матричная обращаемая часть дифференциального оператора.
- Занятие 16. Контрольная работа №2.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации занятий используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности.

Также при организации образовательного процесса используется метод группового обучения, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине следует использовать современные информационные технологии: разместить в сетевом доступе комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, методические указания к лабораторным занятиям, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, экзамену, список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.). Эффективность самостоятельной работы студентов проверяется в ходе текущего и итогового контроля знаний. Для общей оценки качества усвоения студентами учебного материала рекомендуется использование рейтинговой системы.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Примеры жестких задач.
2. Формальное описание явления жесткости и его область применения.
3. Понятие устойчивости численных методов решения задачи Коши.
4. Метод множества точек границы.
5. Многошаговые методы решения задачи Коши. Барьеры Далквиста.
6. Экстраполяционные методы Адамса.
7. Интерполяционные методы Адамса.
8. Методы, основанные на формулах дифференцирования назад: построение.
9. Методы, основанные на формулах дифференцирования назад: устойчивость.

10. Основные подходы к реализации неявных методов.
11. Различные способы вычисления оператора перехода одношаговых методов.
12. Примеры неявных методов Рунге-Кутты первого и второго порядков точности.
13. Упрощающие условия и их смысл.
14. Примеры построения методов Гаусса.
15. Методы Радо.
16. Методы Лобатто.
17. Устойчивость методов высших порядков.
18. Особенности численной реализации неявных методов Рунге-Кутты.
19. Построение неявных методов на основе принципа последовательного повышения порядка точности.
20. Методы Розенброка.
21. Постановка задачи об оптимизации оператора перехода явных методов
 типа Рунге-Кутты и ее решение в случае методов первого порядка точности.
22. Построение оптимальных операторов перехода в общем случае.
23. Построение численного метода по заданному оператору перехода.
24. Вторая схема реализации оператора перехода, упорядочивание параметров.
25. Построение одношаговых методов путем подгонки по оператору перехода.
26. Построение одношаговых методов на пути обращения части дифференциального оператора (общая схема).
27. Обращение линейной части дифференциального оператора: общая схема, примеры методов.
28. Специализированные схемы для уравнений типа Риккати.
29. Системно ориентированные разностные схемы: основные понятия, схема исследования устойчивости.
30. Характеристики исходной дифференциальной задачи и их съём с разностной траектории.
31. Обращение линейной части дифференциального оператора как способ улучшения характеристик системно ориентированных разностных схем.
32. Многократное обращение части дифференциального оператора: построение интегрального соотношения.
33. Многократное обращение части дифференциального оператора: примеры схем, выбор параметров.
34. Корректировка положения равновесия вдоль разностной траектории:
 общая схема, методы первого порядка.
35. Корректировка положения равновесия вдоль разностной траектории:

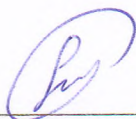
методы произвольного порядка.

36. Обращение матричной части дифференциального оператора.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой
вычислительной математики
доцент, кандидат физ.-мат. наук


(подпись)

В.И.Репников

15.05.2025

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УО

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
