М32Н

Учреждение образования
«Международный государственный экологический институт
имени А.Д. Сахарова» Белорусского государственного университета

УТВЕРЖДАЮ
Директор
МГЭИ им. А. Д. Сахарова БГУ
_______________ О. И. Родькин
«25» июня 2025
Регистрационный № УД-1746-25/уч.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для специальности:

7-07-0533-03 Ядерная и радиационная безопасность

2025 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 7-07-0533-03-2023 Ядерная и радиационная безопасность от 10.08.2023 и учебного плана учреждения высшего образования для специальности 7-07-0533-03 Ядерная и радиационная безопасность Рег.№161-23/уч. от 07.04.2023

СОСТАВИТЕЛИ:

А.В. Баран, доцент кафедры ядерных и медицинских технологий учреждения образования «Международный государственный экологический институт им. А.Д. Сахарова» Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

В.М. Редьков, главный научный сотрудник Института физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор;

Н.Д. Шайковская, старший научный сотрудник Института физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, кандидат физико-математических наук

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой ядерных и медицинских технологий учреждения образования «Международный государственный экологический институт им. А.Д. Сахарова» Белорусского государственного университета
(протокол №11 от 20 июня 2025);

Научно-методическим советом учреждения образования «Международный государственный экологический институт им. А.Д. Сахарова» Белорусского государственного университета
(протокол №9 от 25 июня 2025)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цель учебной дисциплины – формирование системных знаний и умений по методам математической физики, обеспечивающих теоретическую базу для моделирования физических процессов и решение прикладных задач в области ядерной и радиационной безопасности.

Задачи учебной дисциплины:

1) изучить математические модели, описывающие физические явления, в виде дифференциальных и интегральных уравнений.
2) овладеть методами аналитического решения уравнений математической физики, включая метод разделения переменных, преобразования Фурье и функцию Грина.
3) научиться классифицировать уравнения в частных производных по типу (гиперболические, параболические, эллиптические) и приводить их к каноническому виду.
4) освоить постановку и решение краевых и начальных задач, характерных для волновых, тепловых и статических процессов.
5) приобрести навыки интерпретации математических решений в терминах физических величин и закономерностей.
6) развить компетенции по математическому моделированию физических процессов, включая явления ионизации, диффузии, колебаний и теплопереноса.
7) сформировать фундаментальную математическую культуру, научное мировоззрение и способности к креативному подходу в решении инженерно-физических задач.

Учебная дисциплина относится к модулю «Основы математической физики» компонента учреждения высшего образования. Предполагает предварительное изучение дисциплин «Математический анализ», «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», «Дифференциальные и интегральные уравнения». Изучение дисциплины «Методы математической физики» необходимо для дальнейшего освоения дисциплины «Механика сплошной среды», а также дисциплин таких учебных модулей, как «Ионизирующее излучение», «Дозиметрия и радиационная безопасность» и т.д.

Дисциплина играет исключительно важную роль в формировании теоретических знаний по специальности 7-07-0533-03 «Ядерная и радиационная безопасность», давая основу для математического моделирования физических процессов, происходящих в ядерных реакторах и в других установках, генерирующих ионизирующее излучение, способствуя освоению методов математического описания явлений, происходящих при взаимодействии ионизирующего излучения с веществом.

Воспитательное значение учебной дисциплины «Методы математической физики» заключается в формировании у студентов фундаментальной математической культуры и научного мировоззрения; развитии навыков математического моделирования, аналитического мышления и креативности, необходимых для решения сложных физических и инженерных задач; воспитании познавательной активности: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и дисциплинированности; формировании способностей к непрерывному саморазвитию, профессиональному росту и самореализации.

Изучение данной дисциплины способствует становлению интеллектуально развитой личности, обладающей глубокими знаниями в области прикладной математики и физики, стремлением к инновациям и научно-техническому прогрессу, а также активной гражданской позицией, социальной ответственностью и патриотизмом, направленным на развитие экономики и технологического потенциала страны.

Изучение и усвоение дисциплины предполагает владение следующими специализированными **компетенциями:** применять аппарат математической физики для постановки и решения нестационарных задач для волновых и диффузионных процессов и стационарных задач с уравнением Лапласа, Пуассона и Гельмгольца.

В результате усвоения дисциплины студент должен

знать:

– основы векторного анализа;

– применение дифференциальных операторов в криволинейных системах координат;

– характеристики дифференциальных уравнений в частных производных, типы уравнений математической физики (УМФ);

– постановку краевых задач при решении УМФ;

– метод разделения переменных при решении УМФ;

– роль и значение векторного анализа и УМФ при построении математических моделей различных процессов;

уметь:

– определять поверхности уровня и векторные линии полей;

– вычислять дифференциальные операторы для заданных полей в декартовой и в цилиндрической и сферической системах координат;

– определять поток и циркуляцию векторного поля;

– решать линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП) 1-го порядка;

– определять тип УМФ и приводить их к каноническому виду;

– применять метод разделения переменных (метод Фурье) при решении задач УМФ;

– решать однородные и неоднородные уравнения гиперболического и параболического типа при различных формулировках краевых задач;

– решать уравнения эллиптического типа методом Фурье;

– использовать метод функции Грина при решении задач УМФ;

иметь навык:

– оперировать терминологией методов математической физики.

– использовать методы математической физики с целью их использования в теоретических и экспериментальных исследованиях;

– интерпретировать полученные результаты математического исследования.

Дисциплина изучается в V семестре. Программа курса рассчитана на 108 ч, аудиторных часов 72, из которых лекционных – 44 ч, практических занятий – 28 ч.

Форма получения высшего образования – очная (дневная).

Форма промежуточной аттестации – зачет.

Трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Векторный анализ в задачах математической физики

Векторная функция скалярного аргумента. Скалярные поля и поверхности уровня. Векторные поля и векторные линии. Дифференциальные операторы теории поля. Градиент, дивергенция, ротор и их свойства. Операторы Гамильтона и Лапласа. Дифференциальные операторы второго порядка.

Производная скалярного поля по направлению и ее связь с градиентом. Нормаль к поверхности и ее уравнение. Поток векторного поля и его вычисление. Теорема Остроградского-Гаусса. Инвариантное определение дивергенции. Циркуляция векторного поля. Формула Стокса. Инвариантное определение ротора векторного поля. Соленоидальное, потенциальное и гармоническое виды полей. Теорема разложения Гельмгольца.

Тема 2. Элементы теории поля в криволинейных координатах

Криволинейные ортогональные системы координат. Коэффициенты Ламе. Элементы длин, площадей и объёмов в криволинейных ортогональных координатах. Основные дифференциальные операции в криволинейных ортогональных координатах. Основные дифференциальные операции на примере цилиндрических и сферических координат.

Тема 3. Уравнения математической физики

Дифференциальные уравнения в частных производных, их порядок, решение и отличия от ОДУ. ДУЧП первого порядка, их решения. Решения линейного и квазилинейного ДУЧП 1-го порядка. ДУЧП второго порядка (ДУЧП–2). Уравнения математической физики и примеры их использования моделировании физических и иных процессов.

Классификация ДУЧП–2 с двумя переменными. Уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типов и их канонический вид. Приведение заданного линейного ДУЧП–2 к каноническому виду. Постановка задач УМФ. Начальные условия (задача Коши). Граничные условия (задачи Дирихле и Неймана, смешанная граничная задача). Краевая задача.

Тема 4. Уравнения гиперболического типа

Решение уравнения свободных колебаний однородной неограниченной струны методом Д'Аламбера. Вынужденные колебания однородной неограниченной струны.

Свободные колебания ограниченной струны: задача Дирихле. Метод разделения переменных (метод Фурье). Граничная задача для пространственной составляющей. (задача Штурма-Лиувилля). Частные и общее решения задачи.

Свободные колебания ограниченной струны с одним закрепленным и другим упруго связанным концами. Формулировка краевой задачи и ее решение. Решение задачи Неймана для свободных колебаний ограниченной струны.

Вынужденные колебания жестко закрепленной ограниченной струны. Редукция задач математической физики. Решение поставленной задачи.

Вынужденные колебания струны с подвижными концами. Формулировка краевой задачи, ее редукция и схема решения.

Свободные колебания закрепленной по краям прямоугольной мембраны. Формулировка краевой задачи и ее решение.

Тема 5. Общая схема применения метода Фурье

Оператор правой части уравнения колебаний неоднородной струны, мембраны, тела. Формулировка краевых задач. Принцип суперпозиции.

Применение метода Фурье к решению краевых задач. Формулировка задачи Штурма-Лиувилля (о собственных значениях и собственных функциях). Нормировка собственных функций.

Свойства собственных значений (СЗ) и собственных функций (СФ) задачи Штурма-Лиувилля. Оператор задачи Штурма-Лиувилля и его свойства.

Линейное пространство. Базис и размерность линейного пространства. Евклидово пространство. Скалярное произведение векторов и его свойства. Метрические пространства. Гильбертово пространство. Обобщенный ряд Фурье. Интеграл и преобразование Фурье. Линейные отображения и линейные операторы. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов. Ортогональность системы собственных векторов.

Общая схема применения метода Фурье при решении задач математической физики. Свободные колебания жестко закрепленной круглой мембраны. Функции Бесселя.

Тема 6. Уравнения параболического типа

Уравнение теплопроводности. Начальное и граничные условия. Решение однородного уравнения теплопроводности для однородной краевой задачи Дирихле. Собственные значения и собственные функции данной краевой задачи. Условие существования и единственности решения. Функция мгновенного точечного источника.

Решение неоднородного уравнения теплопроводности. Постановка краевой задачи. Общий вид искомого решения. Общее решение для однородной части. Частное и общее решение для неоднородной части. Функция мгновенного точечного источника для данной задачи. Запись решения исходной краевой задачи в интегральном виде.

Решение задачи Дирихле для неоднородного уравнения теплопроводности при неоднородных граничных условиях. Постановка краевой задачи. Общие решения однородной по граничным условиям части и исходной краевой задачи.

Решение уравнения теплопроводности для бесконечного стержня. Общее решение задачи. Интеграл Пуассона. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. δ - функция Дирака и ее свойства.

Общая характеристика уравнения диффузии и соответствующих краевых задач.

Тема 7. Уравнения эллиптического типа. Функция Грина

Уравнения Лапласа и Пуассона. Постановка краевых задач.

Решение уравнения Лапласа в цилиндрических и сферических координатах. Фундаментальные решения. Формулы Грина. Гармонические функции и их свойства.

Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье. Формулировка внутренней краевой задачи. Общее решение задачи и условие его существования и единственности. Интеграл Пуассона. Ядро Пуассона. Решение внешней краевой задачи.

Решение краевых задач в шаре. Формулировка внутренней краевой задачи. Использование метода Фурье в данной задачи. Дифференциальные уравнения для угловых функций и их решения. Присоединенные многочлены Лагранжа. Сферические функции. Частное и общее решение исходной краевой задачи.

Решение задачи Дирихле. Метод функции Грина. Постановка двумерной краевой задачи. Построение функции Грина и фундаментальное решение уравнения Лапласа на плоскости. Свойства функции Грина.

Постановка трехмерной краевой задачи. Построение функции Грина и фундаментальное решение уравнения Лапласа в пространстве. Свойства функции Грина.

Функция Грина для уравнения теплопроводности.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

(очная (дневная) форма получения высшего образования)

Номер раздела, темы, занятия	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					
		Лекции	Практические (семинарские) занятия	Лабораторные занятия	Управляемая самостоятельная работа	Иное	Формы контроля знаний
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Векторный анализ в задачах математической физики	10	8			метод. пособие	1 – 6
2	Элементы теории поля в криволинейных координатах	4	1			метод. пособие	1 – 6
3	Уравнения математической физики	4	3			метод. пособие	1 – 6
4	Уравнения гиперболического типа	12	8			метод. пособие	1 – 6
5	Общая схема применения метода Фурье	3	1			метод. пособие	1 – 6
6	Уравнения параболического типа	6	3			метод. пособие	1 – 6
7	Уравнения эллиптического типа. Функция Грина	5	2			метод. пособие	1 – 6
	Контрольная работа		2				
ВСЕГО		**44**	**28**				

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Рекомендуемая литература

Основная

1. Жевняк, Р. М. Высшая математика: Дифференциальные уравнения. Ряды. Уравнения математической физики. Теория функций комплексной переменной: учеб. пособие / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : ИРФ "Обозрение", 1997. – 570 с.
2. Русак, В. Н. Математическая физика : Учеб. пособие для студ. физ-мат. спец. ун-тов / В. Н. Русак. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 208 с.

Дополнительная

3. Деревич, И. В. Практикум по уравнениям математической физики : учебное пособие / И. В. Деревич. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 428 с.
4. Емельянов, В. М. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач : учебное пособие для вузов / В. М. Емельянов, Е. А. Рыбакина. – 3-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 216 с.
5. Карчевский, М. М. Лекции по уравнениям математической физики : учебное пособие для вузов / М. М. Карчевский. – 3-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 164 с.
6. Байков, В. А. Уравнения математической физики / В. А. Байков, А. В. Жибер. – Москва-Ижевск : Институт компьютер. исследований, 2003. – 252 с.
7. Борковская, И. М. Уравнения математической физики / И. М. Борковская, О. Н. Пыжкова. – Минск : БГТУ, 2010 – 77 с.
8. Будак. Б. М. Сборник задач по математической физике / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 521 с.
9. Жевняк, Р. М. Высшая математика : Учеб. пос. для втузов. Ч. IV. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук – Мн. : Выш. шк., 1987. – 240 с.
10. Каплан, И. А. Практические занятия по высшей математике. Ч. V. / И. А. Каплан. – 2-е изд. – Харьков : Изд-во Харьковского университета, 1972. – 412 с.
11. Колесникова, С. И. Методы решения основных задач уравнений математической физики / С. И. Колесникова. – М.: МФТИ, 2015. – 486 с.
12. Краснов, М. Л. Вся высшая математика : Учебник. Т. 4. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Т. И. Макаренко, Е. В. Шикив, В. И. Заляпин, С. К. Соболев. – М. : Едиториал УРСС, 2001. – 352 с.
13. Краснов, М. Л. Задачи и примеры с подробными решениями : Учеб. пос. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Т. И. Макаренко – 2-е изд. – М. : Едиториал УРСС, 2002. – 144 с.
14. Мартинсон, Л. К., Малов Ю.М. Дифференциальные уравнения математической физики / Л. К. Мартинсон, Ю. М. Малов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 345 с.

15. Математика : учеб.-метод. комплекс. В 4 ч. Ч.3 / А. А. Тиунчик [и др.]. – Мн. : БГАТУ, 2014. – 236 с.

16. Романко, В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – 2-е изд. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 344 с.

17. Русак, В. Н. Математическая физика / В. Н. Русак – Мн. : Дизайн ПРО, 1998. – 208 с.

18. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 3 : Уч. пос. для втузов / Под общ. Ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – 4-е изд. – М. : Изд-во ФМЛ, 2002. – 576 с.

19. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : Учеб. пос. В 3 ч. Ч. 3 / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; Под общ. ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Выш. шк., 1991. – 288 с.

20. Холодова, С. Е. Специальные функции в задачах математической физики / С. Е. Холодова, С. И. Перегудин. – СПб: НИУ ИТМО, 2012. – 631 с.

21. Черненко, В. Д. Высшая математика в примерах и задачах : Учеб. пос. В 3 т. Т. 2 / В. Д. Черненко. – СПб. : Политехника, 2003. – 477 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики

С целью диагностики знаний, умений и навыков студентов по данной дисциплине рекомендуется использовать:

1) контрольные работы;
2) самостоятельные работы;
3) индивидуальные домашние задания;
4) тесты;
5) устный опрос в ходе практических занятий;
6) проверку конспектов лекций студентов.

Инновационные подходы и методы к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется ***метод учебной дискуссии***, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме. Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

Для организации самостоятельной работы студентов по курсу необходимо использовать современные технологии: разместить в сетевом доступе комплекс учебных и учебно-методических материалов (программа, методические указания к практическим занятиям, список рекомендуемой литературы и информационных ресурсов, задания в тестовой форме для самоконтроля и др.).

При этом не ставится цель охватить все стороны предмета или заменить другие формы работы. Подбор заданий для самостоятельной работы направлен на формирование базовых предметных компетенций путем применения теоретических знаний в конкретных ситуациях, а также на развитие активности и самостоятельности студентов.

Качество самостоятельной работы студентов целесообразно проверять в ходе текущего промежуточного и итогового контроля в форме устного опроса, коллоквиумов, контрольных работ по темам и разделам дисциплины (модулям).

Рекомендуемые темы практических занятий

1. Разложение периодических функций в тригонометрические ряды Фурье.
2. Интегральные преобразования Фурье.
3. Операционное исчисление и решение интегро-дифференциальных уравнений.
4. Приведение к каноническому виду уравнений 2-го порядка
5. Метод разделения переменных для гиперболических уравнений.
6. Метод разделения переменных для параболических уравнений.
7. Свойства цилиндрических функций и их применение к решению гиперболических и параболических уравнений.
8. Решение задач Дирихле и Неймана для прямоугольных областей.
9. Решение краевых задач эллиптических уравнений в круговых областях.
10. Метод разделения переменных в эллиптических задачах для цилиндрических и сферических областей.
11. Применение потенциалов и функций Грина при решении краевых задач.

Рекомендуемые темы контрольных работ

1. Разложение функций в ряды Фурье. Операционные методы решения интегро-дифференциальных уравнений.
2. Приведение к каноническому виду и метод Фурье для гиперболических уравнений.
3. Цилиндрические функции и решение краевых задач для эллиптических уравнений в прямоугольных областях.
4. Метод разделения переменных для эллиптических уравнений в круговых и цилиндрических областях.

Рекомендуемые темы коллоквиумов:

1. Тригонометрические ряды и преобразования Фурье.
2. Интегральные уравнения с симметричным ядром.
3. Специальные функции и общие свойства гармонических функций.

Примерный перечень вопросов к зачету:

1) Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Производные по направлению.
2) Градиент скалярного поля и его физический смысл.

3) Векторные функции скалярного аргумента. Их дифференцирование и интегрирование.

4) Векторное поле. Векторные линии.

5) Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция векторного поля.

6) Теорема Остроградского—Гаусса (без доказательства). Вычисление потоков векторных полей с её помощью. Инвариантное (независимое от системы координат) определение дивергенции.

7) Циркуляция и ротор (вихрь) векторного поля. Теорема Стокса (без доказательства). Инвариантное (независимое от системы координат) определение вихря.

8) Оператор Гамильтона “набла”, особенности его применения, его действие на произведение функций. Дифференциальные операции первого порядка.

9) Дифференциальные операции второго порядка (с использованием оператора “набла”). Оператор Лапласа.

10) Потенциальное векторное поле. Скалярный потенциал. Связь потенциального векторного поля с его потенциалом.

11) Вихревое (соленоидальное) векторное поле. Векторный потенциал. Связь вихревого векторного поля с его векторным потенциалом.

12) Лапласово векторное поле. Гармонические функции.

13) Классификация векторных полей. Теорема разложения Гельмгольца.

14) Криволинейные ортогональные системы координат. Коэффициенты Ламэ.

15) Основные дифференциальные операции в криволинейных ортогональных координатах.

16) Цилиндрические координаты: коэффициенты Ламэ и их геометрический смысл. Основные дифференциальные операции в цилиндрических координатах.

17) Сферические координаты: коэффициенты Ламэ и их геометрический смысл. Основные дифференциальные операции в сферических координатах.

18) Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

19) Основные уравнения математической физики. Граничные и начальные условия.

20) Вывод уравнения малых поперечных колебаний натянутой струны.

21) Общее описание метода разделения переменных (метода Фурье).

22) Свободные колебания струны конечной длины. Решение задачи методом Фурье. Собственные функции задачи и собственные колебания струны.

23) Уравнение Шрёдингера при постоянном внешнем поле. Вывод стационарного уравнения Шрёдингера. Физический смысл постоянной разделения E.

24) Решение уравнения Шрёдингера для частицы в бесконечно грубокой одномерной потенциальной яме.

25) Решение уравнения Шрёдингера для частицы, движущейся в центральном поле.

26) Метод Фурье для уравнения теплопроводности (задача остывания бесконечного стержня).

27) Разложение функций в ряд Фурье.

28) Интегральная формула Фурье. Косинус- и синус-преобразование Фурье.

29) Преобразование Фурье (с комплексной экспонентой; вывод формулы комплексного преобразования из косинус- и синус-преобразования Фурье).

30) Самосопряжённые операторы. Свойства их собственных значений и собственных функций.

31) Ортогональные системы функций. Примеры ортогональных систем.

32) Обобщённый ряд Фурье (разложение функции по системе ортонормированных функций). Формулы для построения обобщенного ряда Фурье.

33) Скалярное произведение в пространстве функций (непосредственная формула, формула через коэффициенты Фурье). Аналогия разложения по ортонормированной системе функций с конечномерными евклидовыми пространствами.

34) Дельта-функция Дирака. Трехмерная дельта-функция Дирака.

35) Связь дельта-функции Дирака с преобразованием Фурье.

36) Общее описание метода функции Грина для решения неоднородных задач.

37) Функция Грина для уравнения теплопроводности (остывание бесконечно длинного стержня).

38) Функция Грина для уравнения Пуассона в неограниченном пространстве.

39) Функция Грина для уравнения Пуассона в ограниченной области.

40) Решение неоднородного волнового уравнения методом функции Грина.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Согласование не требуется			