

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета
 А.Д.Король

27 июня 2025 г.

Регистрационный № 3185/б.



ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для
специальности:

6-05-0533-11 Прикладная информатика

2025 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-11-2023, учебных планов БГУ: № 6-5.3-59/03 от 15.05.2023, № 6-5.3-59/04 от 15.05.2023, № 6-5.3-59/05 от 15.05.2023, № 6-5.3-59/11ин. от 31.05.2023, № 6-5.3-59/12ин. от 31.05.2023, № 6-5.3-59/13ин. от 31.05.2023.

СОСТАВИТЕЛЬ:

Е.Г.Красногир, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТ:

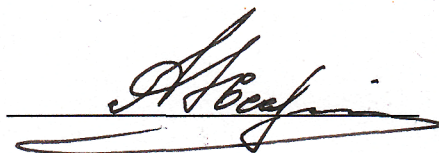
Е.А.Криштанович, старший преподаватель кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный аграрный технический университет».

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой теории вероятностей и математической статистики БГУ
(протокол № 15 от 27.05.2025)

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 11 от 26.06.2025)

Заведующий кафедрой



А.Ю.Харин



ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» – изучение основных сведений о построении и анализе математических моделей, учитывающих случайные факторы.

Задачи учебной дисциплины:

1. ознакомление студентов с основными понятиями теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов;
2. демонстрация математической обоснованности процедур вероятностного и статистического анализа, понимание границ их применимости;
3. развитие практических навыков в использовании методов вероятностного и статистического анализа для постановки и решения задач, возникающих в различных областях науки, техники, экономики и др.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к модулю «Теория вероятностей и математическая статистика» компонента учреждения образования.

Программа составлена с учетом межпредметных связей с учебными дисциплинами. Основой для изучения учебной дисциплины являются учебные дисциплины государственного компонента модуля «Высшая математика».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» должно обеспечить формирование следующей *специализированной компетенции*:

Применять основные методы математической статистики для решения задач оценивания параметров моделей и проверки гипотез по наблюдаемым данным, применять знания вероятностно-статистического анализа случайных процессов, возникающих при решении прикладных задач.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- аксиомы теории вероятностей;
- свойства вероятностной меры;
- определения и свойства случайных величин и их функций распределения;
- основные законы распределения вероятностей;
- определения и свойства математического ожидания, дисперсии, характеристической функции;
- виды и условия сходимостей последовательностей случайных величин;
- основные предельные теоремы;
- понятия, используемые в статистическом оценивании параметров;
- методы построения точечных и интервальных статистических оценок;
- основы проверки статистических гипотез;

- основные понятия теории случайных процессов;
- основные понятия, связанные со стационарностью, непрерывностью, дифференцированием и интегрированием случайных процессов;
- определения и свойства марковских случайных процессов;
- уметь:**
 - вычислять вероятности событий;
 - находить функции распределения и плотности вероятностей случайных величин;
 - находить числовые характеристики случайных величин;
 - исследовать сходимость последовательностей случайных величин;
 - применять предельные теоремы;
 - строить точечные и интервальные статистические оценки неизвестных параметров, исследовать их свойства;
 - осуществлять статистическую проверку гипотез;
 - определять числовые характеристики случайных процессов;
- иметь навыки:**
 - использования методов теории вероятностей и теории случайных процессов;
 - использования основных методов статистической обработки данных;
 - использования аппарата теории вероятностей и математической статистики для проведения теоретических и практических исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 4-м семестре. В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» отведено для очной формы получения высшего образования – 216 часов, в том числе 102 аудиторных часа: лекции – 68 часов, лабораторные занятия – 34 часа. Из них:

Лекции – 68 часов, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа (УСР) – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма промежуточной аттестации – зачет и экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Теория вероятностей

Тема 1.1. Основные понятия теории вероятностей

Случайный эксперимент. Случайные события и соотношения между ними. Понятие вероятности. Простейшие вероятностные модели. Аксиомы теории вероятностей. Вероятностное пространство. Свойства вероятности. Условная вероятность. Формулы полной вероятности и Байеса. Независимость событий.

Тема 1.2. Случайные величины

Одномерные случайные величины и их функции распределения. Типы случайных величин. Основные законы распределения вероятностей. Многомерные случайные величины. Условные распределения. Независимость случайных величин. Функциональные преобразования случайных величин.

Тема 1.3. Числовые характеристики случайных величин

Математическое ожидание случайных величин и его свойства. Неравенства для математического ожидания. Условное математическое ожидание. Моменты случайных величин. Дисперсия. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин.

Тема 1.4. Характеристическая функция

Характеристическая функция и ее свойства. Формула обращения, теорема единственности.

Тема 1.5. Сходимость последовательностей случайных величин

Виды сходимости последовательностей случайных величин и их критерии (сходимость по распределению, сходимость по вероятности, сходимость в среднем). Виды сходимости последовательностей случайных величин и их критерии (сходимость почти наверное). Соотношения между видами сходимости.

Тема 1.6. Предельные теоремы

Закон больших чисел. Критерий и достаточные условия выполнимости закона больших чисел. Усиленный закон больших чисел. Центральная предельная теорема и ее следствия.

Раздел 2. Математическая статистика

Тема 2.1. Выборки и точечные оценки

Выборки и выборочные характеристики. Основные понятия теории статистического оценивания.

Тема 2.2. Методы построения оценок

Метод моментов. Метод максимального правдоподобия. Метод наименьших квадратов. Доверительный интервал. Методы построения интервальных оценок.

Тема 2.3. Проверка статистических гипотез

Основные понятия теории статистической проверки гипотез. Лемма Неймана-Пирсона. Последовательный анализ Вальда. Критерии согласия.

Раздел 3. Случайные процессы

Тема 3.1. Основные понятия теории случайных процессов

Понятия случайного процесса и его вероятностных характеристик. Классификация случайных функций. Основные характеристики и свойства стационарных случайных процессов.

Тема 3.2. Процессы с конечными моментами второго порядка

Ковариационная функция случайного процесса и ее свойства. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость в среднем квадратичном.

Тема 3.3. Марковские случайные процессы

Функция переходных вероятностей. Классификация марковских случайных процессов. Цепи Маркова с дискретным и непрерывным временем. Стационарные вероятности для цепей Маркова. Процессы с независимыми приращениями.

Тема 3.4. Статистический анализ временных рядов

Оценка математического ожидания и ее свойства. Оценка ковариационной функции.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий
(ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСП	Форма контроля
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Теория вероятностей	42			22		2	
1.1	Основные понятия теории вероятностей	12			8			
1.1.1	Случайный эксперимент. Случайные события и соотношения между ними.	2			2			Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях.
1.1.2	Понятие вероятности. Простейшие вероятностные модели.	2			2			Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой
1.1.3	Аксиомы теории вероятностей. Вероятностное пространство.	2						Устный опрос
1.1.4	Свойства вероятности. Условная вероятность.	2			2			Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с

								их устной защитой
1.1.5	Формулы полной вероятности и Байеса.	2			1			Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой
1.1.6	Независимость событий.	2			1			Устный опрос. Контрольная работа № 1. Решение задач на лабораторных занятиях.
1.2	Случайные величины	8			4			
1.2.1	Одномерные случайные величины и их функции распределения.	2						Устный опрос
1.2.2	Типы случайных величин. Основные законы распределения вероятностей.	2			2			Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой
1.2.3	Многомерные случайные величины. Условные распределения. Независимость случайных величин.	2			1			Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой
1.2.4	Функциональные преобразования случайных величин.	2			1			Устный опрос. Контрольная работа № 2. Решение задач на лабораторных занятиях

1.3	Числовые характеристики случайных величин	10			6			
1.3.1	Математическое ожидание случайных величин и его свойства.	2			2			Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой
1.3.2	Неравенства для математического ожидания.	2						Устный опрос
1.3.3	Условное математическое ожидание.	2						Устный опрос
1.3.4	Моменты случайных величин. Дисперсия.	2			2			Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой
1.3.5	Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин.	2			2			Устный опрос. Контрольная работа № 3. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой
1.4	Характеристическая функция	2			2			
1.4.1	Характеристическая функция и ее свойства. Формула обращения, теорема единственности.	2			2			Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой

1.5	Сходимость последовательностей случайных величин	6					2	
1.5.1	Виды сходимости последовательностей случайных величин и их критерии (сходимость по распределению, сходимость по вероятности, сходимость в среднем).	2					1	Устный опрос. Собеседование
1.5.2	Виды сходимости последовательностей случайных величин и их критерии (сходимость почти наверное).	2					0,5	Устный опрос. Собеседование
1.5.3	Соотношения между видами сходимости.	2					0,5	Устный опрос. Собеседование
1.6	Предельные теоремы	4			2			
1.6.1	Закон больших чисел. Критерий и достаточные условия выполнимости закона больших чисел. Усиленный закон больших чисел.	2						Устный опрос
1.6.2	Центральная предельная теорема и ее следствия.	2			2			Коллоквиум по разделу 1. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой
2	Математическая статистика	12			4		2	
2.1	Выборки и точечные оценки	2						

2.1.1	Выборки и выборочные характеристики. Основные понятия теории статистического оценивания.	2						Устный опрос
2.2	Методы построения оценок	6			4			
2.2.1	Метод моментов. Метод максимального правдоподобия.	2			2			Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой
2.2.2	Метод наименьших квадратов.	2			1			Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой
2.2.3	Доверительный интервал. Методы построения интервальных оценок.	2			1			Устный опрос. Контрольная работа № 4. Решение задач на лабораторных занятиях
2.3	Проверка статистических гипотез	4					2	
2.3.1	Основные понятия теории статистической проверки гипотез. Лемма Неймана-Пирсона. Последовательный анализ Вальда.	2					1	Устный опрос. Собеседование
2.3.2	Критерии согласия.	2					1	Устный опрос. Собеседование
3	Случайные процессы	14			4			

3.1	Основные понятия теории случайных процессов	4			2			
3.1.1	Понятия случайного процесса и его вероятностных характеристик. Классификация случайных функций.	2						Устный опрос
3.1.2	Основные характеристики и свойства стационарных случайных процессов.	2			2			Устный опрос. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой
3.2	Процессы с конечными моментами второго порядка	2						
3.2.1	Ковариационная функция случайного процесса и ее свойства. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость в среднем квадратичном.	2						Устный опрос
3.3	Марковские случайные процессы	6			2			
3.3.1	Функция переходных вероятностей. Классификация марковских случайных процессов.	2						Устный опрос
3.3.2	Цепи Маркова с дискретным и непрерывным временем.	2			2			Устный опрос. Контрольная работа № 5. Решение задач на лабораторных занятиях. Отчеты по домашним заданиям с их устной защитой

3.3.3	Стационарные вероятности для цепей Маркова. Процессы с независимыми приращениями.	2						Устный опрос
3.4	Статистический анализ временных рядов	2						
3.4.1	Оценка математического ожидания и ее свойства. Оценка ковариационной функции.	2						Устный опрос

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей : учебник для студ. мат. спец. ун-тов / Б. В. Гнеденко [предисл. А. Н. Ширяева]; МГУ им. М. В. Ломоносова. – Изд. 13-е. – Москва : URSS, 2022. – 448 с.
2. Боровков, А. А. Теория вероятностей : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 010100 «Математика» / А. А. Боровков. – Изд. стер. – Москва : URSS: Либроком, 2023. – 652 с.
3. Коршунов, Д. А. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей : учебное пособие / Д. А. Коршунов, С. Г. Фосс, И. М. Эйсымонт. – Изд. 3-е, испр. и доп. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар : Лань, 2022. – 219 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/187568>.
4. Коган, Е. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для студ. высших учебных заведений / Е. А. Коган, А. А. Юрченко. – Москва : ИНФРА-М, 2023. – 249 с. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1920312>.
5. Зубков, А. М. Сборник задач по теории вероятностей : учебное пособие / А. М. Зубков, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар : Лань, 2022. – 319 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/184062>.

Дополнительная литература

1. Харин, Ю. С. Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика / Ю. С. Харин, Н. М. Зуев, Е. Е. Жук. – Минск : БГУ, 2011. – 463 с.
2. Харин, Ю. С. Теория вероятностей, математическая статистика. Задачи, упражнения, тестовые задания / Ю. С. Харин, Е. Е. Жук, В. И. Лобач, Е. Н. Орлова, А. Ю. Харин. – Минск : БГУ, 2010. – 302 с.
3. Ширяев, А. Н. Вероятность. В 2-х кн. /А. Н. Ширяев. – Москва : МЦНМО, 2004. – 928 с.
4. Булинский, А. В. Теория случайных процессов / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 400 с.
5. Карлин, С. Основы теории случайных процессов / С. Карлин. – Москва : Мир, 1988. – 354 с.
6. Матальцкий, М. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для студ. УВО по физико-математическим спец. / М. А. Матальцкий, Г. А. Хацкевич. – Минск : Вышэйшая школа, 2017. – 591 с.
7. Розанов, Ю. А. Случайные процессы / Ю. А. Розанов. – Москва : Наука, 1979. – 184 с.
8. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей и математической статистики / В. П. Чистяков. – Москва : Наука, 1987. – 240 с.
9. Григорьев-Голубев, В. В. Теория вероятностей и математическая статистика. Руководство по решению задач : [учебник для студентов и

преподавателей вузов] / В. В. Григорьев-Голубев, Н. В. Васильева, Е. А. Кротов. – 2-е изд. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2021. – 304 с. – URL: <https://ibooks.ru/bookshelf/380027/reading>.

Электронные ресурсы

1. Образовательный портал БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://edufpmi.bsu.by/course/view.php?id=371>. – Дата доступа: 15.11.2024.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Для диагностики компетенций в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы:

1. Устная форма: устные опросы, собеседования.
2. Письменная форма: контрольные работы и коллоквиум, решение задач.
3. Устно-письменная форма: отчеты по домашним заданиям с их устной защитой.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» учебным планом предусмотрены зачет и экзамен.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

- устные опросы, отчеты по домашним заданиям, собеседования – 33 %;
- контрольные работы – 33 %;
- коллоквиум – 34 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки текущей аттестации составляет 40 %, экзаменационной отметки – 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

Тема 1.5. Сходимость последовательностей случайных величин (2 ч.).

Ознакомление с примерами решения задач, приведенными в лекциях по рассматриваемой теме. Решение задач на сходимость по распределению, сходимость по вероятности, сходимость в среднем, сходимость почти наверное, на соотношения между видами сходимости случайных последовательностей.

Примерный перечень заданий:

1) На вероятностном пространстве (Ω, F, P) , где $\Omega = [0, 1]$, $F = \mathcal{B}[0, 1]$ – σ -алгебра борелевских множеств отрезка $[0, 1]$, P – мера Лебега, задана последовательность

$$\xi_n^k(w) = \begin{cases} 1, & w \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], \\ 0, & w \notin \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]. \end{cases}$$

Сходится ли данная последовательность по вероятности?

2) Подбрасывается симметричная монета. По итогу подбрасывания строится случайная последовательность

$$\xi_n(w) = \begin{cases} 1, & \text{орёл,} \\ 0, & \text{решка.} \end{cases}$$

Сходится ли данная последовательность по вероятности и по распределению?

3) Какие виды сходимости имеют место для последовательности

$$\xi_n(w) = \begin{cases} n^3, & w \in [0, 1/n^4], \\ 1, & w \in (1/n^4, 1] \end{cases} ?$$

4) На (Ω, F, P) задана последовательность

$$P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n^\alpha}, \quad P\{\xi_n = n\} = \frac{1}{2n^\alpha}, \quad P\{\xi_n = -n\} = \frac{1}{2n^\alpha}, \quad n \geq 1, \\ \alpha \in \left[\frac{3}{2}, 2 \right].$$

Доказать, что $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n. n.} 0$, но L_2 -сходимость отсутствует.

5) Пусть X_n при каждом $n \geq 1$ имеет плотность вероятностей $p_{X_n}(x) = \frac{n}{\pi(1+(nx)^2)}$. Доказать, что $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$, но не стремится к нулю в среднем квадратичном.

Форма контроля – собеседование по итогам выполнения студентами выданного им задания.

Тема 2.3. Проверка статистических гипотез (2 ч.).

Ознакомление с примерами решения задач, приведенными в лекциях по рассматриваемой теме. Решение задач на проверку гипотез с использованием критерия отношения правдоподобия, критериев согласия Пирсона и Колмогорова, вычисление вероятностей ошибок первого и второго родов.

Примерный перечень заданий:

1) Интернет-магазин имел ежедневный доход θ_0 , дисперсия дохода σ^2 . Ему предлагают осуществить продвижение сайта в поисковых системах с целью повышения среднего дохода до $\theta_1 > \theta_0$. В течение тестового периода продвижения длительностью n дней регистрировались следующие ежедневные доходы: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Используя гауссовскую модель, построить критерий отношения правдоподобия для проверки двух простых гипотез $H_0: \theta = \theta_0$ и $H_1: \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$, на уровне значимости p . Вычислить вероятности ошибок первого и второго родов.

2) Монету бросали 4040 раз. Получили 2048 выпадений герба и 1992 выпадений решки. Проверить, используя: а) критерий Колмогорова; б) критерий Пирсона, согласуются ли эти данные с гипотезой H_0 о симметричности монеты при уровне значимости 0,05.

3) Получены следующие данные об интервалах времени между последовательными ремонтами компьютера в течение 6 месяцев (в часах): 1, 10, 20, 30, 40, 52, 63, 70, 80, 90, 100, 102, 130, 140, 190, 210, 266, 310, 530, 590, 640, 1340. Применяя критерий Колмогорова, проверить при уровне значимости 0,05, согласуются ли эти данные с экспоненциальным распределением с параметром: а) $\lambda = 0,1$, б) $\lambda = 0,01$.

Форма контроля – собеседование по итогам выполнения студентами выданного им задания.

Примерный перечень лабораторных занятий

1. Случайные события и соотношения между ними.
2. Простейшие вероятностные модели.
3. Свойства вероятности. Условная вероятность.
4. Формулы полной вероятности и Байеса. Независимость событий.
5. Дискретные и абсолютно непрерывные случайные величины. Основные законы распределения вероятностей.
6. Многомерные случайные величины. Условные распределения. Независимость случайных величин. Функциональные преобразования случайных величин.
7. Математическое ожидание случайных величин и его свойства.
8. Дисперсия.
9. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин.
10. Характеристическая функция и ее свойства.
11. Центральная предельная теорема.
12. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия.
13. Метод наименьших квадратов. Методы построения интервальных оценок.
14. Основные характеристики и свойства стационарных случайных процессов.
15. Цепи Маркова с дискретным и непрерывным временем.

Рекомендуемая тематика контрольных работ:

1. Контрольная работа № 1. Простейшие вероятностные модели. Свойства вероятности. Условная вероятность. Формулы полной вероятности и Байеса. Независимость событий.

2. Контрольная работа № 2. Основные законы распределения вероятностей. Многомерные случайные величины. Условные распределения. Независимость случайных величин. Функциональные преобразования случайных величин.

3. Контрольная работа № 3. Математическое ожидание случайных величин и его свойства. Дисперсия. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин.

4. Контрольная работа № 4. Характеристическая функция и ее свойства. Центральная предельная теорема. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия. Метод наименьших квадратов. Методы построения интервальных оценок.

5. Контрольная работа № 5. Основные характеристики и свойства стационарных случайных процессов. Цепи Маркова с дискретным и непрерывным временем.

Примерный перечень тем для коллоквиума

1. Основные понятия теории вероятностей.
2. Случайные величины.
3. Числовые характеристики случайных величин.
4. Характеристическая функция.
5. Сходимость последовательностей случайных величин.
6. Предельные теоремы.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» используются:

1. **практико-ориентированный подход**, который предполагает:
 - освоение содержания образования через решения практических задач;
 - приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
 - ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
 - использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций;
2. **методы и приемы развития критического мышления**, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в

процессе чтения и письма; понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине целесообразно использовать современные информационные ресурсы: разместить на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебно-методические материалы или ссылки для теоретического изучения дисциплины, методические указания к лабораторным занятиям, материалы текущего контроля и текущей аттестации, включая вопросы к коллоквиуму, зачету и экзамену, задания, тесты).

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Случайные события и соотношения между ними.
2. Простейшие вероятностные модели.
3. Аксиомы теории вероятностей. Свойства вероятности.
4. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
5. Независимые случайные события.
6. Функция распределения и ее свойства.
7. Дискретные функции распределения. Основные законы дискретного распределения вероятностей.
8. Плотность распределения вероятностей и ее свойства. Основные абсолютно непрерывные законы распределения вероятностей.
9. n -мерная функция и плотность распределения. Свойства.
10. Независимость случайных величин. Критерии независимости.
11. Функциональные преобразования случайных величин.
12. Математическое ожидание случайных величин.
13. Дисперсия и ее свойства.
14. Ковариация, коэффициент корреляции и их свойства.
15. Характеристическая функция и ее свойства.
16. Случайные последовательности и их сходимость.
17. Закон больших чисел и условия его выполнения.
18. Усиленный закон больших чисел и условия его выполнения.
19. Центральная предельная теорема.
20. Понятие статистики, статистической оценки. Состоятельность, несмещенность, точность оценки.
21. Выборочная функция распределения, выборочная характеристическая функция, выборочные моменты, гистограмма.
22. Метод моментов.
23. Метод максимального правдоподобия.
24. Метод наименьших квадратов.
25. Методы построения доверительных интервалов.

26. Основные понятия теории статистической проверки гипотез.
27. Критерий отношения правдоподобия. Последовательный критерий отношения правдоподобия.
28. Критерии согласия.
29. Случайные процессы и их вероятностные характеристики. Понятия стационарности случайного процесса.
30. Цепь Маркова с дискретным временем. Асимптотические свойства однородной цепи Маркова с дискретным временем.
31. Цепь Маркова с непрерывным временем.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Случайные события и соотношения между ними.
2. Понятие вероятности. Простейшие вероятностные модели.
3. Алгебра, σ -алгебра. Измеримое пространство. Аксиомы теории вероятностей.
4. Свойства вероятности (вероятностной меры).
5. Условная вероятность и ее свойства. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
6. Независимые случайные события и их свойства.
7. Понятие случайной величины. Функция распределения и ее свойства.
8. Дискретные функции распределения. Основные законы дискретного распределения вероятностей.
9. Плотность распределения вероятностей и ее свойства. Основные абсолютно непрерывные законы распределения вероятностей.
10. Многомерная случайная величина и случайный n -вектор. n -мерная функция и плотность распределения. Свойства.
11. Условная функция распределения, условная плотность распределения вероятностей и их свойства.
12. Независимость случайных величин. Критерии независимости.
13. Функциональные преобразования случайных величин. Формула свертки.
14. Математическое ожидание случайных величин. Простейшие свойства.
15. Неравенства для математического ожидания. Мультипликативное свойство.
16. Условное математическое ожидание и его свойства.
17. Моменты скалярной случайной величины. Дисперсия и ее свойства.
18. Математическое ожидание и дисперсия для основных законов распределения вероятностей.
19. Ковариация, коэффициент корреляции и их свойства.
20. Характеристическая функция и ее свойства: ограниченность, комплексное сопряжение, линейные преобразования, связь с моментами. Характеристическая функция суммы независимых СВ.
21. Случайные последовательности: сходимость по распределению, по вероятности, в среднем.

22. Случайные последовательности: сходимость почти наверное. Эквивалентные определения.
23. Условия сходимости случайных последовательностей.
24. Соотношения между видами сходимости случайных последовательностей.
25. Закон больших чисел и условия его выполнения.
26. Усиленный закон больших чисел и условия его выполнения.
27. Центральная предельная теорема. Неравенство Берри-Эссеена. Теорема Муавра-Лапласа.
28. Случайная выборка. Понятие статистики, статистической оценки. Состоятельность, несмещенность, точность оценки.
29. Выборочная функция распределения, выборочная характеристическая функция, выборочные моменты, гистограмма и их свойства.
30. Неравенство Крамера-Рао. Эффективные оценки.
31. Метод моментов. Оценки по методу моментов. Пример.
32. Метод максимального правдоподобия и его свойства.
33. Регрессионные модели. Принцип метода наименьших квадратов и его геометрический смысл.
34. Оптимальные свойства МНК-оценки для линейной множественной регрессионной модели.
35. Интервальное оценивание параметров. Методы построения доверительных интервалов.
36. Построение доверительных интервалов для параметров нормального распределения.
37. Основные понятия теории статистической проверки гипотез.
38. Критерий отношения правдоподобия. Последовательный критерий отношения правдоподобия.
39. Критерии согласия.
40. Случайные процессы и их вероятностные характеристики. Классификация случайных функций.
41. Понятия стационарности случайного процесса.
42. Свойства ковариационных (корреляционных) функций. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайных процессов в среднеквадратическом.
43. Спектральная плотность случайного процесса. Белый шум.
44. Определение и классификация марковских случайных процессов.
45. Цепь Маркова с дискретным временем. Асимптотические свойства однородной цепи Маркова с дискретным временем.
46. Цепь Маркова с непрерывным временем.
47. Случайный процесс с независимыми приращениями. Винеровский случайный процесс и его свойства.
48. Пуассоновский случайный процесс и его свойства.
49. Понятие временного ряда. Оценка математического ожидания и ее свойства.

50. Оценка корреляционной функции временного ряда. Оценивание тренда методом наименьших квадратов.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой теории вероятностей
и математической статистики
доктор физ.-мат. наук, профессор



А.Ю.Харин

27.05.2025

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УО

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
