

# БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского  
государственного университета



А.Д.Король

27 июня 2025 г.

Регистрационный № 3277/6.

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для  
специальности:

**6-05-0533-13 Механика и математическое моделирование**

2025 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-13-2023 и учебных планов: № 6-5.4-61/01, № 6-5.4-62/01 от 15.05.2023.

#### **СОСТАВИТЕЛИ:**

**О.А.Архипенко**, старший преподаватель кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета;

**А.И.Азаров**, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

**М.В.Игнатенко**, заведующий кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

**Т.С.Якименко**, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

#### **РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**М.В.Чайковский**, доцент кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», кандидат физико-математических наук, доцент

#### **РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования БГУ  
(протокол № 17 от 02.06.2025)

Научно-методическим советом БГУ  
(протокол № 11 от 26.06.2025)

Заведующий кафедрой



М.В.Игнатенко



## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время численные методы являются одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов математики. Это связано как с бурным развитием вычислительной техники, наращиванием ее мощности, так и широким применением средств математического моделирования практически во всех сферах жизнедеятельности человека для оптимизации исследуемого объекта или прогнозирования ситуации. Поэтому в последнее время разрабатывается много новых численных процедур, применяемых как к новым, так и классическим объектам исследования, при этом многие классические алгоритмы решения задач претерпевают изменения с целью улучшения их вычислительных свойств.

Все это определяет важность учебной дисциплины «Численные методы» в учебном процессе, а также обуславливает необходимость внесения своевременных изменений и дополнений в его содержание.

Учебная программа учебной дисциплины «Численные методы» разработана для студентов 3 курса очной формы обучения специальности 6-05-0533-13 Механика и математическое моделирование механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

### **Цели и задачи учебной дисциплины**

Основные **цели** дисциплины «Численные методы»:

- дать теоретическую и практическую подготовку по методам численного решения задач линейной алгебры, математического анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, уравнений математической физики, теоретической и прикладной механики;

- ознакомить учащихся с современными технологиями математического моделирования, основанными на использовании численных методов и прикладного программного обеспечения;

- научить основам работы в системе компьютерной алгебры «Mathematica».

**Задачи дисциплины** состоят в изучении основных принципов построения численных методов и оценки их вычислительных качеств, изучении основных методов численного решения задач линейной алгебры, анализа и дифференциальных уравнений, развития умения и навыков выбора адекватного алгоритма, его программной реализации, интерпретации результатов численных расчетов и степени их достоверности.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Численные методы» относится к модулю «Численные методы. Пакеты прикладных программ» компонента учреждения образования.

**Связи с другими учебными дисциплинами**, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Дисциплина опирается на знания, полученные при изучении дисциплин «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики» и связана с дисциплиной «Численные методы механики сплошных сред».

### **Требования к компетенциям**

Освоение учебной дисциплины «Численные методы» должно обеспечить формирование у студентов следующей *специализированной компетенции*:

Осуществлять обоснованный выбор рациональной численной методики для решения типовых задач механики, проводить ее реализацию с использованием современных программных средств компьютерных вычислений, оценивать корректность полученных результатов и анализировать возможности альтернативных подходов.

В результате изучения дисциплины студент должен

#### **знать:**

- источники и виды погрешностей (неустраняемая, вычислительная) в численных расчетах,
- основные приемы априорной и апостериорной оценки погрешности численных методов,
- понятия устойчивости, сходимости и вычислительной сложности численных алгоритмов,
- условия корректности задачи по Адамару (существование, единственность, устойчивость) и их значение для численного решения,
- сравнительные характеристики (точность, устойчивость, сложность) основных классов методов: интерполяции (полиномиальная), численного интегрирования (Ньютона – Котеса, Гаусса), решения СЛАУ (прямые, итерационные), решения ОДУ (одношаговые, многошаговые, явные/неявные),
- сравнительные преимущества и недостатки явных и неявных методов решения дифференциальных уравнений,
- современные тенденции в вычислительной математике,

#### **уметь:**

- оценить корректность постановки задачи,
- выбрать адекватный метод для численного решения поставленной задачи,
- использовать численные методы для решения математических задач алгебры, анализа и дифференциальных уравнений,
- анализировать достоверность и трактовать численные результаты,

#### **иметь навык:**

- работы с современными программными средствами численного решения математических и прикладных задач,
- программирования численных алгоритмов,
- применения основных приемов априорной и апостериорной оценки погрешности численного решения задач алгебры и анализа.

### **Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается в 6 семестре. В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины отведено для очной формы получения высшего образования – 90 часов, в том числе 52 аудиторных часа: лекции – 34 часов, лабораторные занятия – 18 часов. Из них:

Лекции – 34 часов, лабораторные занятия – 16 часов, управляемая самостоятельная работа – 2 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – экзамен.

## **СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА**

### **Тема 1. Введение и основы вычислительного эксперимента.**

Об основных задачах и содержании вычислительной математики. Содержание и назначение вычислительного эксперимента в трактовке А. А. Самарского.

### **Тема 2. Элементы теории погрешностей.**

Приближенные числа. Значащие и верные цифры. Абсолютная и относительная погрешности. Погрешности арифметических операций. Прямая и обратная задачи теории погрешностей. Погрешность округлений при вычислениях на ЭВМ. Стандарт IEEE 754.

### **Тема 3. Интерполирование и приближение функций.**

Алгебраическое интерполирование. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа. Конечные разности. Разделенные разности, их свойства. Интерполяционный многочлен Ньютона (для равных и неравных узлов). Представление погрешности интерполирования. Минимизация погрешности: выбор узлов на основе многочленов Чебышева. Интерполирование кубическими сплайнами (основы построения, условия гладкости). Задача аппроксимации. Метод наименьших квадратов для линейных моделей.

### **Тема 4. Приближенное вычисление интегралов.**

Квадратурные формулы общего вида. Формулы, основанные на интерполяции. Простейшие формулы Ньютона – Котеса: трапеций, Симпсона. Составные формулы Ньютона – Котеса. Погрешность составных формул. Правила Рунге практической оценки погрешности. Квадратурные формулы типа Гаусса.

### **Тема 5. Численные методы решения систем ЛАУ.**

Нормы векторов и матриц. Число обусловленности матрицы, его влияние на точность решения. Прямые методы: метод Гаусса с выбором ведущего элемента, LU - факторизация, метод прогонки для трехдиагональных систем. Итерационные методы: Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации (SOR). Понятие о нестационарных методах (метод сопряженных градиентов) и предобуславливании.

### **Тема 6. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц.**

Основные свойства собственных значений и векторов. Инвариантность спектра при преобразовании подобия. Степенной метод.

### **Тема 7. Решение нелинейных уравнений и систем.**

Отделение корней. Метод дихотомии. Метод простой итерации: условие сходимости (принцип сжимающих отображений), скорость сходимости. Метод Ньютона. Модификации метода Ньютона. Случай кратных корней.

### **Тема 8. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.**

Одношаговые методы. Метод Эйлера. Оценка скорости сходимости. Методы Рунге – Кутты. Многошаговые методы. Устойчивость, условие корней. Метод Адамса. Понятие о жестких системах ОДУ. А – устойчивость. Метод Гира.

### **Тема 9. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.**

Разностный метод решения краевой задачи для уравнения второго порядка. Методы построения разностных схем. Интегро-интерполяционный метод. Понятие о компактных разностных схемах. Метод Галеркина. Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем. Разностные методы решения краевых задач для нелинейных ОДУ. Методы редукции краевых задач к задачам Коши. Методы дифференциальной прогонки и метод стрельбы.

### **Тема 10. Построение и исследование разностных схем для задач математической физики.**

Уравнение теплопроводности (параболическое): явная и неявная схемы. Анализ устойчивости методом Фурье (спектральный признак). Условие Куранта для явной схемы. Уравнение переноса (гиперболическое): Схемы «уголок», Лакса. Понятие консервативности, монотонности. Уравнение Пуассона (эллиптическое): построение разностной схемы (5-точечный шаблон). Использование метода Зейделя для решения сеточных уравнений.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий  
(ДОТ)

| Номер раздела, темы | Название раздела, темы                         | Количество аудиторных часов |                      |                     |                      |      | Количество часов<br>УСР | Форма контроля знаний                                                               |
|---------------------|------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------|---------------------|----------------------|------|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|                     |                                                | Лекции                      | Практические занятия | Семинарские занятия | Лабораторные занятия | Иное |                         |                                                                                     |
| 1                   | 2                                              | 3                           | 4                    | 5                   | 6                    | 7    | 8                       | 9                                                                                   |
| 1                   | Введение и основы вычислительного эксперимента | 1                           |                      |                     |                      |      |                         | Опрос                                                                               |
| 2                   | Элементы теории погрешностей                   | 1                           |                      |                     | 1                    |      |                         | Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе                     |
| 3                   | Интерполирование и приближение функций         | 2                           |                      |                     | 2                    |      | 0,5                     | Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, контрольная работа |
| 4                   | Приближенное вычисление интегралов             | 2                           |                      |                     | 2                    |      |                         | Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе                     |
| 5                   | Численные методы решения систем ЛАУ            | 7                           |                      |                     | 2                    |      |                         | Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе, контрольная работа |



|    |                                                                             |           |  |  |           |          |                                                                        |
|----|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|--|--|-----------|----------|------------------------------------------------------------------------|
| 6  | Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц               | 2         |  |  | 1         |          | Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе        |
| 7  | Решение нелинейных уравнений и систем                                       | 2         |  |  | 2         | 0,5      | Опрос, письменный отчет с устной защитой по работе, контрольная работа |
| 8  | Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений   | 5         |  |  | 2         |          | Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе        |
| 9  | Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений | 4         |  |  | 2         | 1        | Опрос, письменный отчет с устной защитой по работе, контрольная работа |
| 10 | Построение и исследование разностных схем для задач математической физики   | 8         |  |  | 2         |          | Опрос, письменный отчет с устной защитой по лабораторной работе        |
|    | <b>Всего часов</b>                                                          | <b>34</b> |  |  | <b>16</b> | <b>2</b> | <b>Экзамен</b>                                                         |

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Основная литература

1. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики : учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – Изд. 8-е, стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. – 664 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/210674>.
2. Гулин, А. В. Введение в численные методы в задачах и упражнениях : учебное пособие / А. В. Гулин, О. С. Мажорова, В. А. Морозова. – Москва : ИНФРА-М, 2022. – 368 с. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1852192>.
3. Пантелеев, А. В. Численные методы. Практикум : учебное пособие / А. В. Пантелеев, И. А. Кудрявцева. – Москва : ИНФРА-М, 2023. – 512 с. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/2002583>.
4. Фаддеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры : учебник / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. – Изд. 4-е, стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. – 734 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/210368>.

### Дополнительная литература

5. Азаров, А. И. Сборник задач по методам вычислений : учебное пособие / А. И. Азаров, В. А. Басик, М. В. Игнатенко [и др.] ; под ред. П. И. Монастырного. – Минск : Издательский центр БГУ, 2007. – 376 с.
6. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – Москва : Наука, 1987. – 632 с.
7. Бахвалов, Н. С. Численные методы. Решение задач и упражнения : учебное пособие / Н. С. Бахвалов, А. А. Корнев, Е. В. Чижонков. – Москва : Бином, 2016. – 352 с.
8. Березин, И. С. Методы вычислений. В 2 т. Т. 2 / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – Москва : Физматгиз, 1962. – 640 с.
9. Бобков, В. В. Вычислительные методы. В 2 т. Т. 1 / В. В. Бобков, В. И. Крылов, П. И. Монастырный. – Москва : Наука, 1976. – 304 с.
10. Бобков, В. В. Вычислительные методы. В 2 т. Т. 2 / В. В. Бобков, В. И. Крылов, П. И. Монастырный. – Москва : Наука, 1977. – 400 с.
11. Бобков, В. В. Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения / В. В. Бобков, В. И. Крылов, П. И. Монастырный. – Минск : Наука и техника, 1982. – 286 с.
12. Бобков, В. В. Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных / В. В. Бобков, В. И. Крылов, П. И. Монастырный. – Минск : Наука и техника, 1986. – 311 с.
13. Волков, В. М. Численные методы : учеб.-метод. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / В. М. Волков. – Минск : БГУ, 2016. – 87 с. – URL: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/161943>.

14. Волков, В. М. Численный анализ и оптимизация / В. М. Волков, О. Л. Зубко, И. Н. Катковская [и др.]. – Минск : Белгослес, 2017. – 207 с.
15. Годунов, С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – Москва : Наука, 1977. – 440 с.
16. Гулин, А. В. Численные методы математической физики / А. В. Гулин, А. А. Самарский. – Москва : Альянс, 2016. – 432 с.
17. Игнатенко, М. В. Методы вычислений. Интерполирование и интегрирование : курс лекций / М. В. Игнатенко. – Минск : БГУ, 2006. – 116 с.
18. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – Москва : Academia, 2018. – 96 с.
19. Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – Москва : Наука, 1967. – 500 с.
20. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики : учеб. пособие / Г. И. Марчук. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. – 608 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/210302>.
21. Мысовских, И. П. Лекции по методам вычислений : учеб. пособие / И. П. Мысовских. – Санкт-Петербург : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1998. – 470 с.
22. Николаев, Е. С. Методы решения сеточных уравнений / Е. С. Николаев, А. А. Самарский. – Москва : Наука, 1987. – 600 с.
23. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – Москва : Наука, 1983. – 616 с.
24. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – Москва : Наука, 1989. – 432 с.

#### **Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки**

Рекомендуются следующие формы диагностики компетенций.

Устная форма

– Опрос.

Письменная форма

– Контрольная работа.

Устно-письменная форма

– Письменный отчет с устной защитой по лабораторным работам.

Отметка за ответы на лекциях (опрос) и лабораторных занятиях определяется полнотой и содержательностью изложения, использованием примеров из практики и другими показателями.

Оценка отчетов по лабораторным работам и домашним заданиям учитывает корректность применяемых методов исследования, привлечение знаний из смежных областей, а также организацию работы в группе.

Контрольная работа проводится преподавателем письменно и включает проверку результатов выполнения заданий.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Численные методы» согласно учебному плану является **экзамен**.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, позволяющая проследить и оценить динамику достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

- отчет по лабораторным работам – 50%,
- контрольная работа – 50%.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе итоговой отметки текущей аттестации (модульно-рейтинговой системы оценки знаний) 40 % и экзаменационной отметки 60 %.

### **Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов**

#### ***Тема 3. Интерполирование и приближение функций. (0,5 ч.)***

В качестве заданий для контрольной работы студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [5]: гл. 6, задачи и упражнения 43–62.

Форма контроля — контрольная работа.

#### ***Тема 7. Решение нелинейных уравнений и систем. (0,5 ч.)***

В качестве заданий для контрольной работы студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [5]: гл. 5.2, задачи и упражнения 55–62.

Форма контроля — контрольная работа.

#### ***Тема 9. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. (1 ч.)***

В качестве заданий для контрольной работы рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [5]: гл. 10.5, задачи и упражнения 63–72.

Форма контроля — контрольная работа.

### **Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса используются

#### ***1) эвристический подход:***

- осуществление студентами лично-значимых открытий окружающего мира,
- демонстрация многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем,

- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов,
- индивидуализация обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности,

**2) *практико-ориентированный подход:***

- освоение содержания образования через решения практических задач,
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности,
- ориентация на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры,
- использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций,

**3) *методы и приемы развития критического мышления,*** которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления,

**4) *метод группового обучения,*** который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- изучение литературы и материалов электронных источников по проблемам дисциплины;
- работы, предусматривающие аналитическое решение задач и выполнение заданий лабораторных занятий;
- выполнение домашнего задания;
- подготовка к лабораторным занятиям;
- курсовые, дипломные и научно-исследовательские работы, связанные с тематикой дисциплины;
- подготовка к участию в конференциях с докладами по проблемам дисциплины.

Для организации дистанционной и самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендуется использовать современные информационные ресурсы, размещенные на образовательном портале механико-математического факультета БГУ <https://edummf.bsu.by> и содержащие учебные материалы (лекций, примерные задания к контрольным работам, задания к лабораторным работам, вопросы к экзамену и т.п.).

## Примерный перечень заданий исследовательского характера для контрольных работ

Индивидуальные задания исследовательского характера для самостоятельной работы включают аналитические решения теоретических задач различного уровня сложности, которые сдаются на проверку в письменном виде.

### Тема 1. Введение.

### Тема 2. Элементы теории погрешностей.

1. Определить относительную погрешность при вычислении полной поверхности усеченного конуса, если радиусы его оснований  $R$  и  $r$ , образующая  $l$ , измеренные с точностью до 0,01 см, следующие  $R = 23,64$  см,  $r = 17,31$  см,  $l = 10,21$  см.

2. Высота  $h$  и радиус основания  $R$  цилиндра измерены с точностью до 0,5%. Какова относительная погрешность при вычислении объема цилиндра?

3. Длина периметра правильного вписанного 96-угольника, которым пользовался Архимед при вычислении  $\pi$ , выражается при  $r = 1$  формулой

$$p = 96 \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$
. Если вычислять непосредственно по этой формуле, желая получить  $\pi$  с точностью до 0,001, то с какой точностью нужно производить вычисления подкоренных величин?

4. Какая из формул  $S^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)$  или  $S^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)$ , где  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  является численно более устойчивой для вычисления отклонения  $S^2$  множества событий  $x_1, \dots, x_n$ .

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [5]: гл. 1, задачи 1–30.

### Тема 3. Интерполирование и приближение функций

1. Функция  $f(x) = \frac{1}{A^2 - x}$  приближается на  $[-4; -1]$  многочленом Лагранжа по узлам  $x_i = -4, -3, -2, -1$ . При каких значениях  $A$  оценка погрешности в равномерной норме не превосходит  $10^{-5}$ ?

2. Функция  $f(x) = e^{2x}$  приближается на отрезке  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$  интерполяционным многочленом второй степени по трём узлам:  $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ . Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит  $\frac{\sqrt{3}}{9}$ .

3. Пусть функция  $f(x) = \sin x$  задана на отрезке  $[4; b]$ . При каком  $b > 4$  многочлен Лагранжа третьей степени, построенный по оптимальным узлам, приближает эту функцию с погрешностью  $\varepsilon \leq 10^{-3}$ ?

4. Оценить число равноудаленных на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  точек, обеспечивающее интерполирование функции  $f(x) = \sin x$  с точностью  $\varepsilon \leq 10^{-2}$ .
5. Дана таблица натуральных логарифмов чисел от 1000 до 10000. Какова наибольшая погрешность линейной (квадратичной) интерполяции, если шаг равен 1?
6. Оценить погрешность приближения функции  $e^{2x}$  на  $[2; 5]$  интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени, построенным по оптимальным узлам.
7. С какой точностью можно вычислить по формуле Ньютона  $\cos 10,5$  по известным значениям  $\cos 10$ ,  $\cos 11$ ,  $\cos 12$ ,  $\cos 13$ ,  $\cos 14$ ,  $\cos 15$ ?
8. Оценить число точек на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ , обеспечивающее интерполирование функции  $f(x) = \sin x$  с точностью  $\varepsilon \leq 10^{-2}$ .
9. Функция  $\ln(x)$  приближается на отрезке  $[1, 2]$  интерполяционным многочленом третьей степени по четырём узлам  $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$ . Доказать, что погрешность интерполирования в равномерной норме не превосходит  $\frac{1}{300}$ .
10. Дана таблица синусов с шагом 1. Какова наибольшая погрешность линейной интерполяции?
11. Даны точки  $(0,2)$ ,  $(1,1)$ ,  $(2,3)$ . Построить кубический сплайн  $S(x)$  с естественными граничными условиями  $(S''(0)=0, S''(2)=0)$ . Записать явный вид  $S(x)$  на отрезках  $[0,1]$  и  $[1,2]$ . Проверить непрерывность  $S'(x)$  в точке  $x=1$ .
12. Функция  $f(x) = \cos(\pi x)$  задана в узлах:  $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$ . Построить кубический сплайн с условиями полного замораживания:  $S'(0) = f'(0), S'(1) = f'(1)$ . Показать, что  $S''(x)$  непрерывна во внутреннем узле  $x = 0.5$ .
13. Экспериментальные данные измерений силы упругости  $y$  (Н) при растяжении пружины на длину  $x$  (см), представленных в таблице. Аппроксимировать данные линейной моделью методом наименьших квадратов. Вычислить сумму квадратов невязок.

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x$ | 1   | 2   | 3   | 4   |
| $y$ | 1.8 | 3.1 | 4.2 | 5.9 |

14. Траектория движения снаряда задана точками, представленными в таблице. Подобрать квадратичную модель с помощью МНК. Оценить высоту в момент  $t = 1.5$  с.

|                |    |    |    |   |
|----------------|----|----|----|---|
| Время $t$ (с)  | 0  | 1  | 2  | 3 |
| Высота $h$ (м) | 10 | 15 | 12 | 5 |

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [5]: гл. 6, задачи 1–62.

#### Тема 4. Приближенное вычисление интегралов

1. Пусть весовая функция  $p(x)$  четна, узлы  $x_i$  расположены симметрично относительно нуля, т.е.  $x_{n+1-i} = -x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Доказать, что в интерполяционной квадратурной формуле  $I(f) \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$  для вычисления интеграла

$I(f) = \int_{-a}^a p(x)f(x)dx$  коэффициенты, соответствующие симметричным узлам равны, то есть  $c_{n+1-i} = c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

2. Для вычисления  $\int_0^1 f(x)dx$  применяется составная формула трапеций.

Оценить минимальное число разбиений  $N$ , обеспечивающее точность  $0,5 \cdot 10^{-3}$  на двух классах функций:

$$1) \|f''(x)\| \leq 1; \quad 2) \int_0^1 |f''(x)| dx \leq 1.$$

3. Найти оценку погрешности вычисления интеграла  $\int_0^1 f(x)dx$  при

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  по составной квадратурной формуле

$$S(f) = (f(0) + 4f(0,1) + 2f(0,2) + 4f(0,3) + \dots + 4f(0,9) + f(1,0)) / 30.$$

4. Оценить минимальное количество узлов составной квадратурной формулы Симпсона для вычисления интеграла  $\int_0^2 f(x)dx$ , обеспечивающее точность  $\varepsilon \leq 0,5 \cdot 10^{-4}$  на классе функций, удовлетворяющих условию  $\sup_{x \in [0;2]} |f^{(IV)}(x)| \leq 1$ .

5. Рассмотрим квадратурную формулу  $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)$ . Доказать, что формула точна для многочленов степени  $\leq 2$ . Проверить точность для  $f(x) = x^3$  и  $f(x) = x^4$ . Объяснить результаты. Найти погрешность формулы для  $f(x) = e^x$  (оценить через производную).

6. Для ортогональных многочленов вида  $\psi_n(x) = x^n + \dots$  показать справедливость рекуррентного соотношения  $\psi_n(x) = (x + b_n)\psi_{n-1}(x) - c_n\psi_{n-2}(x)$  с коэффициентом  $c_n > 0$ .

7. Доказать, что квадратура Гаусса с 2 узлами точна для многочленов



степени  $\leq 3$ : проверить для  $f(x) = x^3$ , вычислить  $\int_{-1}^1 (2x^2 + 3x - 1) dx$  по этой формуле.

8. Вычислить  $\int_0^1 e^x dx$  по составной формуле трапеций с шагами  $h = 0.5$  и  $h = 0.25$ . Оценить погрешность результата при  $h = 0.5$  с помощью правила Рунге. Сравнить с истинной погрешностью.

9. Сила  $F(x) = x^2 + 1$  (Н) действует вдоль оси  $x$  на отрезке  $[0, 2]$  (м). Вычислить работу силы: по формуле Симпсона с 2 интервалами, по формуле Гаусса с 2 узлами. Сравнить результаты.

10. Пластина плотности  $\rho(y) = y$  ограничена кривыми  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ . Найдите ординату центра масс  $\bar{y} = \frac{\int y \cdot \rho dS}{\int \rho dS}$ , используя составную формулу трапеций с шагом 0.5.

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [5]: гл. 7, задачи 1–4; гл. 8, задачи 1–217.

### Тема 5. Численные методы решения систем ЛАУ.

1. Доказать, что для операторной нормы матрицы  $A \in M_n(R)$ , порожденной векторной нормой  $\|x\|$ , справедливо представление  $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ .

2. Доказать, что для операторной нормы матрицы  $A \in M_n(R)$ , порожденной векторной нормой  $\|x\|_\infty$ , справедливо представление  $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ .

3. Пусть  $A = A^T$ . Доказать, что  $\max_{\|x\|_2=1} |(Ax, x)| = \rho(A)$ .

4. Пусть числа  $d_k > 0, k = \overline{1, n}$ . Доказать, что  $\sum_{k=1}^n d_k |x_k|$  является нормой вектора  $x$ . Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.

5. Пусть числа  $d_k > 0, k = \overline{1, n}$ . Доказать, что  $\max_k (d_k |x_k|)$  является нормой вектора  $x$ . Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.

6. Пусть  $|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$ . Доказать, что метод простой итерации  $x^{(n+1)} = Sx^{(n)} + \phi$  для системы  $Ax = b$  сходится.

7. Пусть  $|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$ . Доказать, что  $\det A \neq 0$ .
8. Пусть  $A = A^T > 0$ . Доказать, что итерационный процесс  $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau \left( A \frac{x^{(k+1)} + x^{(k)}}{2} - b \right)$  сходится при  $\tau > 0$ . Оценить его скорость сходимости, если известны  $\lambda_{\max}(A)$  и  $\lambda_{\min}(A)$ .
9. Найти все матрицы, для которых метод итераций будет сходящимися ( $x = Bx + g$ ),  $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$ , где  $\alpha, \beta$  – некоторые числа.
10. При каких значениях параметра  $\tau$  метод  $x^{(k+1)} = (E - \tau A)x^{(k)} + \tau f$  для системы уравнений  $Ax = f$  с матрицей  $A = \begin{bmatrix} 5 & 0,8 & 4 \\ 2,5 & 3 & 0 \\ 2 & 0,8 & 4 \end{bmatrix}$  сходится для произвольного приближения?
11. Доказать неравенство  $\|x\|_C^2 \leq \rho(C) \|x\|_2^2$ , где  $C = C^T > 0$ .
12. Пусть  $A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5}/2 \\ \sqrt{5}/2 & 1 \end{bmatrix}$ . Записать сходящийся метод простой итерации. Найти оптимальное значение итерационного параметра  $\tau$ .
13. Показать, что для системы ЛАУ  $Ax = b$ ,  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 4.8 \end{bmatrix}$ , метод  $x^{(k+1)} = (E - \tau A)x^{(k)} + \tau b$  сходится для любого начального приближения при  $0 < \tau < 0.4$ .
14. Найти все матрицы, для которых метод Зейделя будет сходящимися ( $x = Bx + g$ ),  $B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ , где  $\alpha, \beta$  – некоторые числа.

### Тема 6. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц.

1. Пусть  $A = A^T$  имеет собственные значения  $\lambda(A) \in [m, M]$ ,  $m > 0$ . Доказать, что при любом  $\tau > 0$  итерационный процесс  $\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + A \left( \frac{x^{(k+1)} + x^{(k)}}{2} \right) = b$  сходится. Определить оптимальное значение  $\tau_{\text{опт}}$ .

2. Найти  $\alpha, \beta$ , при которых метод Зейделя будет сходящимся для систем уравнений  $x = Hx + \phi$  с матрицей вида  $H = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$ .

3. Число обусловленности матрицы  $A$  равно  $q$ . Найти число обусловленности матрицы  $A^{-1}$ .

4. При решении системы ЛАУ с матрицей размерности  $128 \times 128$  методом сопряженных градиентов за 50 итераций достигается относительная погрешность приближенного решения  $1e-3$ . Какое максимальное число итераций потребуется для достижения точности не хуже, чем  $1e-9$ ?

5. Число обусловленности симметричной матрицы  $K = 1e9$ . Максимальное собственное значение при этом равно 1000. Вычислить минимальное и максимальные собственные значения обратной матрицы.

6. Какой будет значение переменной  $x$ , если все переменные класса `double`  $p = \frac{(S+1)^2}{(S-1)^2}$ ; *if* ( $p == 1$ )  $x = 1$ ; *else*  $x = 0$ ;

а)  $p = 1e-20$ ; б)  $p = 1e-12$ ; в)  $p = 1e12$ ; г)  $p = 1e15$ ; д)  $p = 1e155$ .

7. Какая геометрическая фигура в  $R^3$  будет определена множеством точек  $\|x\| = \text{const}$  в случае максимальной и квадратичной норм?

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [5]: гл. 2, задачи 81–88, 107–114.

### Тема 7. Решение нелинейных уравнений и систем.

1. Построить итерационный процесс Ньютона для вычисления корня  $n$ -ой степени  $\sqrt[n]{a}$ ,  $a > 0$ ,  $n$  – вещественное число.

2. Построить итерационный процесс вычисления всех корней уравнения  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1 = 0$  методом простой итерации.

3. Для  $\phi(x) = \cos(x)$  найти область сходимости итерации  $x_{k+1} = \phi(x_k)$ .

4. Пусть дана функция  $\phi(x) = ae^{-bx^2} + c$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \geq 0$ . При каких ограничениях на  $a, b$  и  $c$  метод простой итерации сходится при любом начальном приближении.

5. Построить метод простой итерации для решения уравнения  $2 + x = e^x$ ,  $x > 0$ .

6. Исследовать сходимость метода простой итерации для  $\phi(x) = e^{-x}$  в зависимости от выбора начального приближения  $x_0$ .

7. Дано уравнение  $x = \phi(x)$ , которое решается методом простой итерации  $x_{n+1} = \phi(x_n)$ . Найти область сходимости к корням уравнения, если

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{2}{x} \right).$$

8. Определить скорость сходимости метода Ньютона к корням уравнения  $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ .

9. Построить метод простой итерации для решения уравнения  $x^2 - 2 = 0$ , сходящийся при любом начальном приближении  $x_0$ .

10. Найти область сходимости метода простой итерации для следующего уравнения  $x = e^{2x} - 1$ .

11. Построить итерационный процесс вычисления всех корней уравнения  $f(x) = 3x + \cos x + 1 = 0$  методом простой итерации.

12. Пусть  $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ . Исследовать его сходимость в зависимости от выбора начального приближения  $x_0$ .

13. Найти положение равновесия груза на пружинах

$$\begin{cases} k_1(x_1 - 0) - k_2(x_2 - x_1) = 0 \\ k_2(x_2 - x_1) - mg = 0 \end{cases}, \quad \text{где } k_1 = 100 \text{ Н/м}, k_2 = 150 \text{ Н/м}, m = 2 \text{ кг}, g = 9,8 \text{ м/с}^2.$$

Свести к системе нелинейных уравнений через замену линейных слагаемых на  $k_i \sqrt{\Delta x}$ . Выполнить 2 шага метода Ньютона с  $x^{(0)} = (0.1; 0.2)^T$ .

14. Уравнение состояния Ван-дер-Ваальса:  
 $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT, (P = 10^7 \text{ Па}, T = 300 \text{ К}, a = 0.137, b = 3.7 \cdot 10^{-5}, R = 8.314).$  О  
пределить корни  $V \in [b, 0.1]$  методом дихотомии. Найти объем с точностью 0.001.

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [5]: гл. 4, задачи 52, 54, 105.

### Тема 8. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Решить задачу Коши:  $y' = -2y, y(0) = 1, h = 0.5$  а) используя явную схему, вычислить  $y_1, y_2$ ; б) используя неявную схему, найти  $y_1$ .

2. Для системы:  $\begin{cases} y' = z \\ z' = -y \end{cases}, y(0) = 0, z(0) = 1, h = 0.1$  вычислить  $(y_1, z_1)$  методом Хойна.

3. Для  $y' = x + y, y(0) = 1$ : а) методом Эйлера найти  $y_1, y_2$  при  $h = 0.5$ ; б) построить прогноз  $y_3$  по методу Адамса-Бэшфорта 2-го порядка.

4. Для уравнения  $y' = \lambda y$ : а) найти область устойчивости явного метода Эйлера; б) проверить А-устойчивость неявного метода Эйлера.

5. Для задачи Коши  $\begin{cases} y' = -100y \\ y(0) = 1 \end{cases}, h = 0.1$ : а) сделать 1 шаг методом

Гира:  $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}))$ ; б) сравнить с явным методом Эйлера.

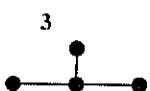
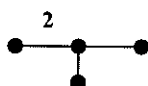
### Тема 9. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Для  $y'' + y = 0, y(0) = 0, y(\pi/2) = 1$  на сетке  $x_0 = 0, x_1 = \pi/4, x_2 = \pi/2$ :  
 а) построить разностную схему, используя шаблон  $\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$ ; б) записать систему уравнений.
2. Для уравнения  $y'' = 0, y(0) = 0, y(1) = 1$  на сетке  $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$ : а) решить методом прогонки; б) сравнить с аналитическим решением.
3. Доказать, что любое решение разностного уравнения  $y_{k+1} - 5y_k + 6y_{k-1} = 0$  удовлетворяет уравнению  $y_{k+1} - 9y_k + 27y_{k-1} - 23y_{k-2} - 24y_{k-3} + 36y_{k-4} = 0$
4. Доказать, что любое решение разностного уравнения  $y_{k+1} - 12y_k + 2y_{k-2} + 27y_{k-3} - 18y_{k-4} = 0$  однозначно представимо в виде суммы решений уравнений  $y_{k+1} - 3y_{k-1} + 2y_{k-2} = 0$  и  $y_{k+1} - 9y_{k-1} = 0$ .
5. Вычислить определитель  $\Delta_k = \det A_k$  трехдиагональной матрицы порядка  $k$   $A_k = \begin{pmatrix} b & c & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & a & b \end{pmatrix}$ , учитывая, что  $\Delta_0 = 1$ .
6. Найти решение разностной задачи  $y_{k+2} + y_k = 0, y_0 = 2, y_1 = 1$ .
7. Пусть  $\phi_k$  и  $z_k$  — два частных решения уравнения  $a_1 y_{k+1} + a_0 y_k + a_{-1} y_{k-1} = 0, a_1 a_{-1} \neq 0$ . Доказать, что определитель матрицы  $A_k = \begin{pmatrix} \phi_k & \phi_{k+1} \\ z_k & z_{k+1} \end{pmatrix}$  либо равен нулю, либо отличен от нуля для всех  $k$  одновременно.
8. Определить 1000-й член последовательности, первые два члена которой равны единице, а последующие определяются рекуррентными соотношениями  $y_{i+1} = y_{i-1} + y_i, i = 2, 3, \dots$
9. Найти общее решение уравнения  $by_{i+1} - cy_i + ay_{i-1} = 0, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
10. Найти общее действительное решение уравнения  $2y_{i-1} - y_i + y_{i+1} = 0, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
11. Найти решение разностной задачи  $2y_i + 3y_{i+1} + y_{i+2} = 0, y_0 = 2, y_1 = 1$ .
12. Найти решение разностной задачи  $y_{k+2} + 4y_{k+1} + 4y_k = 0, y_0 = 1, y_1 = 4$ .
13. Методом стрельбы (в 1 итерацию) решить  $y'' = -y, y(0) = 0, y(\pi/2) = 1$  с начальным приближением  $y'(0) = \alpha_0 = 0$ .

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [5]: гл. 10, задачи 51–56.

**Тема 10. Построение и исследование разностных схем для задач математической физики.**

1. Для уравнения теплопроводности  $u_t = u_{xx}$  на сетке  $t_n = n\tau$ ,  $x_m = mh$ :  
а) построить явную схему  $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2}$ ; б) записать неявную схему.
2. Для условия Неймана  $u_x(0, t) = 0$ : а) используя фиктивный узел  $x_{-1}$ , получить разностное условие  $\frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2h} = 0$ ; б) исключить  $u_{-1}^n$ .
3. Для явной схемы уравнения переноса  $u_t + cu_x = 0$ :  $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + c \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$  а) вывести условие Куранта ( $c\tau/h \leq 1$ ); б) проверить для  $c = 1$ ,  $\tau = 0.1$ ,  $h = 0.2$ .
4. При каких значениях параметра  $\theta \in [0; 1]$  разностная схема  $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = (1 - \theta) \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \theta \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$  устойчива?
5. Для схемы Лакса  $u_m^{n+1} = \frac{u_{m-1}^n + u_{m+1}^n}{2} - \frac{a\tau}{2h} (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)$  проверить: а) консервативность ( $\sum u_m^{n+1} = \sum u_m^n$ ); б) монотонность  $\kappa = a\tau/h = 0.5$ .
6. Для уравнения Пуассона  $\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} = f_{ij}$  на сетке  $2 \times 2$  ( $f_{11} = 1$ ,  $f_{12} = -1$ ,  $f_{21} = 0$ ,  $f_{22} = 2$ ): а) записать систему; б) выполнить 2 итерации метода Зейделя с нулевым начальным приближением.
7. Теплопроводность стержня  $u_t = 0.1 \cdot u_{xx}$ ,  $u(0, t) = 100$ ,  $u(1, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = 0$ . Построить неявную схему для шагов  $\tau = 0.1$ ,  $h = 0.25$ . Записать систему для первого временного слоя.
8. Для схемы «уголок»  $u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{a\tau}{h} (u_m^n - u_{m-1}^n)$ : а) проверить монотонность при  $\kappa_1 = a\tau/h = 0.8$ ,  $\kappa_2 = 1.2$ ; б) объяснить физический смысл.
9. Определить порядок аппроксимации разностных схем на решении уравнения теплопроводности и переноса  
а)  $\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n$ ; б)  $\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h} = 0$ .
10. Какой(-ие) из шаблонов соответствует типовым неявным двухслойным схемам для нестационарного уравнения теплопроводности?



## Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Понятие приближенного числа. Абсолютная и относительная погрешности.
2. Верные и значащие цифры в приближенных числах.
3. Стандарт IEEE 754: представление чисел с плавающей точкой.
4. Особенности представления в IEEE 754: эпсилон-машина, ноль, бесконечность.
5. Погрешности округлений при вычислениях на ЭВМ.
6. Прямая задача теории погрешностей.
7. Обратная задача теории погрешностей.
8. Этапы вычислительного эксперимента по А.А. Самарскому.
9. Содержание и назначение вычислительного эксперимента.
10. Интерполяционный многочлен Лагранжа: построение и применение.
11. Погрешность интерполяции многочленом Лагранжа.
12. Конечные разности и их свойства.
13. Интерполяционный многочлен Ньютона для равных узлов.
14. Разделенные разности и их свойства.
15. Интерполяционный многочлен Ньютона для неравных узлов.
16. Минимизация погрешности интерполяции: выбор узлов интерполяции.
17. Оптимальные узлы интерполяции - многочлены Чебышева.
18. Интерполяция кубическими сплайнами: основные понятия.
19. Условия гладкости для кубических сплайнов.
20. Построение кубического сплайна с различными граничными условиями.
21. Задача аппроксимации функций. Метод наименьших квадратов (МНК).
22. МНК для линейных моделей: вывод нормальной системы.
23. Решение нормальной системы в МНК.
24. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса: общий вид.
25. Простейшие формулы Ньютона-Котеса: формула трапеций.
26. Простейшие формулы Ньютона-Котеса: формула Симпсона.
27. Составные квадратурные формулы: трапеций и Симпсона.
28. Оценка погрешности составных квадратурных формул.
29. Правило Рунге практической оценки погрешности.
30. Квадратурные формулы типа Гаусса: общая идея.
31. Построение квадратурных формул Гаусса.
32. Нормы векторов: определение и свойства.
33. Нормы матриц: согласованность и подчиненность.
34. Число обусловленности матрицы и его вычисление.
35. Влияние числа обусловленности на точность решения СЛАУ.
36. Оценка погрешности решения СЛАУ при возмущенной правой части.

37. Метод Гаусса с выбором ведущего элемента.
38. LU-разложение матрицы и его применение.
39. Метод прогонки для трехдиагональных систем.
40. Итерационные методы: метод Якоби.
41. Итерационные методы: метод Зейделя.
42. Метод последовательной верхней релаксации (SOR).
43. Нестационарные итерационные методы: метод наименьших  
невязок.
44. Метод скорейшего спуска и его особенности.
45. Критерии остановки для итерационных методов.
46. Свойства собственных значений и векторов.
47. Инвариантность спектра при преобразовании подобия.
48. Теорема Гершгорина о локализации собственных значений.
49. Степенной метод для вычисления максимального собственного  
значения.
50. Степенной метод для вычисления собственного вектора.
51. Методы решения нелинейных уравнений: отделение корней.
52. Метод дихотомии (половинного деления).
53. Метод простой итерации: условия сходимости.
54. Метод Ньютона и его модификации.
55. Решение нелинейных уравнений с кратными корнями.
56. Одношаговые методы: метод Эйлера.
57. Методы Рунге-Кутты: общая схема построения.
58. Многошаговые методы: метод Адамса.
59. Устойчивость многошаговых методов: условие корней.
60. Понятие жестких систем ОДУ.
61. А-устойчивость численных методов.
62. Метод Гира для жестких систем.
63. Построение разностных схем для краевых задач ОДУ.
64. Интегро-интерполяционный метод построения разностных схем.
65. Аппроксимация и сходимость разностных схем.
66. Оценка погрешности для разностных схем.
67. Метод стрельбы для краевых задач.
68. Метод дифференциальной прогонки.
69. Разностные схемы для уравнения теплопроводности: явная схема.
70. Неявная схема для уравнения теплопроводности.
71. Устойчивость разностных схем: метод Фурье (спектральный  
признак).
72. Условие Куранта для явной схемы.
73. Разностные схемы для уравнения переноса: схема "уголок".
74. Схема Лакса для уравнения переноса.
75. Понятия консервативности и монотонности разностных схем.
76. Разностные схемы для уравнения Пуассона.
77. Пятиточечный разностный шаблон для уравнения Пуассона.
78. Решение сеточных уравнений методом Зейделя. Сходимость.



## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

| Название дисциплины, с которой требуется согласование | Название кафедры | Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине | Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) |
|-------------------------------------------------------|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Учебная дисциплина не требует согласования            |                  |                                                                                                               |                                                                                                   |

Заведующий кафедрой веб-технологий  
и компьютерного моделирования,  
кандидат физ.-мат. наук, доцент



М.В.Игнатенко

02.06.2025

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УО**  
на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

| №<br>п/п | Дополнения и изменения | Основание |
|----------|------------------------|-----------|
|          |                        |           |

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 202\_ г.)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_