**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

__________________А.Д.Король

27 июня 2025 г.

Регистрационный № 3228/б.

**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для специальности:

**6-05-0533-10 Информатика**

2025 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-10-2023, учебных планов № 6-5.3-58/01, № 6-5.3-58/02, № 6-5.3-58/03, № 6-5.3-58/04, № 6-5.3-58/05 от 15.05.2023.

**СОСТАВИТЕЛИ:**

***В.В.Дайняк***, доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕЗЕНЗЕНТЫ:**

***Д.В.Баровик*****,** заместитель директора ОАО “Центр банковских технологий”, кандидат физико-математических наук, доцент.

**В.И.Белько,** заведующий кафедрой биомедицинской информатики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой компьютерных технологий и систем БГУ
(протокол № 14 от 06.06.2025)

Научно-методическим Советом БГУ
(протокол № 11 от 26.06.2025)

Заведующий кафедрой ____________________ В.В.Казачёнок

Соболева Т.В.

# ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Функциональный анализ -  один из важнейших разделов математики, которому уделяется большое внимание в образовательных программах ведущих мировых университетов. По своему содержанию функциональный анализ тесно связан с математическим анализом, геометрией и алгеброй, вычислительной математикой и другими важными разделами математики. Методы функционального анализа находят широкое приложение при изучении физических, социально-экономических и финансовых процессов. Для успешного усвоения курса необходимы знания основ математического анализа, алгебры и геометрии. В процессе изучения дисциплины студенты должны ознакомиться с основными понятиями функционального анализа, изучить разделы функционального анализа, необходимые для использования в других математических дисциплинах, математические методы решения профессиональных задач, уметь применять математические методы при решении профессиональных задач, овладеть математическим аппаратом, необходимым для профессиональной деятельности. По окончанию курса студенты должны быть способны применять изученные методы в собственных исследованиях и корректно интерпретировать полученные результаты. Методы функционального анализа используются в курсах обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, теория вероятностей и математическая статистика, оптимальное управление, экономика и других.

**Цели и задачи учебной дисциплины**

**Цель** учебной дисциплины «Функциональный анализ» – овладение основными положениями теории и методами применения ее для решения задач естествознания, техники и управления.

**Образовательная цель:** формирование составной части банка знаний, получаемых будущими специалистами в процессе учебы и необходимых им в дальнейшем для успешной работы.

**Развивающая цель:** формирование у студентов основ математического мышления, необходимого для исследования разрешимости прикладных задач.

**Задачи учебной дисциплины**:

1. Изучение основных принципов и методов функционального анализа.
2. Формирование умений в области применения основных методов функционального анализа при решении теоретических и прикладных задач естествознания.
3. Получение практических навыков работы с методами функционального анализа.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Функциональный анализ» относится к модулю «Дифференциальные уравнения и функциональный анализ» компонента учреждения высшего образования.

**Связи** с другими учебными дисциплинами. Курс «Функциональный анализ» тесно связан с курсами алгебры и геометрии, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, математической экономики, методов оптимального управления и численных методов.

**Требования к компетенциям**

Освоение учебной дисциплины «Функциональный анализ» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

*Универсальные компетенции:*

Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации,

Решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно-коммуникационных технологий,

Быть способным к саморазвитию и совершенствованию в профессиональной деятельности

*Базовые профессиональные компетенции:*

Решать математические задачи и строить логические цепочки утверждений.

Применять основы дифференциального и интегрального исчисления, демонстрировать способность применения математического анализа к исследованию алгоритмов

Применять базовые принципы построения математических моделей и выполнять их анализ в типовых задачах организационного управления и естественно-интеллектуальной активности человека, использовать системы искусственного интеллекта на практике,

*Специализированные компетенции:*

Использовать методы функционального анализа для решения прикладных задач в различных областях науки, техники, экономики.

Решать уравнения в частных производных и выполнять их исследование в различных приложениях, интерпретировать полученные решения при исследовании естественно-научных процессов, разрабатывать, верифицировать, применять математические модели для исследования сложных систем.

В результате изучения дисциплины студент должен

**знать**:

- основные понятия суммируемости функций по Лебегу;
- основные понятия и методы теории банаховых и гильбертовых пространств;
- основные понятия теории линейных ограниченных операторов и функционалов;
- теорию разрешимости операторных уравнений 1-го и 2-го рода;

**уметь**:

- исследовать множества в банаховых пространствах и последовательности на сходимость;
- исследовать отображения в банаховых пространствах;

- аппроксимировать функции в гильбертовом пространстве рядами Фурье;
- вычислять норму линейного ограниченного оператора и функционала;
- вычислять сопряженный оператор в гильбертовом пространстве;
- применять принцип сжимающих отображений к различным задачам;
- использовать основные результаты функционального анализа в практической деятельности;

**иметь навык:**

- пользоваться основными методами исследования множеств в банаховых и гильбертовых пространствах;
- аппроксимации функций в гильбертовых пространствах;
- методики доказательств и аналитического исследования на разрешимость операторных уравнений первого и второго рода;
- использования основных методов исследования на разрешимость интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера;
- самообразования и использования аппарата функционального анализа для проведения математических и междисциплинарных исследований.

**Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается в 5 семестре. В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Функциональный анализ» отведено **для очной формы** получения высшего образования – 108 часов, в том числе 68 аудиторных часов: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 34 часа. **Из них:**

Лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – экзамен.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## Введение

Предмет и основные методы дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения». Исторические сведения о возникновении и развитии этого раздела математики, его место среди других математических наук.

## Раздел 1. Нормированные векторные пространства

***Тема 1.1. Метрические и нормированные пространства. Открытые и замкнутые множества.***

Метрические пространства, нормированные векторные пространства, открытые и замкнутые множества в них. Предельные точки и точки прикосновения множества. Замыкание множества.

***Тема 1.2. Сходимость в метрических и нормированных пространствах.***

Сходящиеся последовательности и их свойства. Сходимость в пространствах непрерывных функций и пространстве бесконечных числовых последовательностей.

***Тема 1.3. Аппроксимация и построение элемента наилучшей аппроксимации.***

Аппроксимация, построение элемента наилучшей аппроксимации в конечномерных и в строго нормированных пространствах.

***Тема 1.4. Банаховы пространства и их свойства.***

Банановы пространства и ряды в них. Пополнение нормированных векторных пространств. Пространство суммируемых по Лебегу функций и его полнота.

***Тема 1.5. Принцип сжимающих отображений и его применение.***

Принцип сжимающих отображений в банаховых пространствах. Применение принципа сжимающих отображений в линейной алгебре, к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера второго рода, к дифференциальным уравнениям.

## Раздел 2. Гильбертовы пространства и аппроксимация

***Тема 2.1. Гильбертовы пространства.***

Пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства. Пространство квадратично суммируемых по Лебегу функций как гильбертово пространство.

***Тема 2.2. Элемент наилучшей аппроксимации в гильбертовом пространстве.***

Элемент наилучшей аппроксимации в гильбертовом пространстве и его связь с проекцией. Ортогональное разложение гильбертова пространства.

***Тема 2.3. Ряды Фурье и их применение.***

Ортогональные системы и ряды Фурье. Полные ортонормированные системы. Аппроксимация рядами Фурье и ее применение. Изоморфизм гильбертовых пространств.

## Раздел 3. Линейные ограниченные операторы

***Тема 3.1. Пространства линейных ограниченных операторов и их свойства.***

Линейный ограниченный оператор и его норма. Пространство линейных ограниченных операторов и сходимость в нем. Принцип равномерной ограниченности.

***Тема 3.2. Обратные операторы.***

Обратные операторы, левый и правый обратные операторы, и разрешимость операторного уравнения. Непрерывная обратимость оператора и корректная разрешимость.

***Тема 3.3. Операторные уравнения. Метод резольвент.***

Линейные операторные уравнения первого и второго рода и их решение. Метод резольвент для решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера.

## Раздел 4. Сопряженное пространство и сопряженные операторы

***Тема 4.1. Линейные ограниченные функционалы. Общий вид функционала в гильбертовом пространстве.***

Линейные ограниченные функционалы и их норма. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

***Тема 4.2. Сопряженные пространства и их свойства.***

Сопряженное пространство. Продолжение линейного ограниченного функционала.

***Тема 4.3. Сопряженные операторы в гильбертовых пространствах.***

Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах и их применение. Операторы ортогонального проектирования.

***Тема 4.4. Собственные векторы и собственные значения оператора.***

Собственные векторы и собственные значения самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Симметричный оператор.

## Раздел 5. Компактные множества и компактные операторы

***Тема 5.1. Компактные и предкомпактные множества. Теорема Арцела- Асколи.***

Компактные и предкомпактные множества в банаховых пространствах. Критерий предкомпактности Хаусдорфа. Теорема Арцела-Асколи предкомпактности в пространстве непрерывных функций. Критерий конечномерности банахова пространства.

***Тема 5.2. Непрерывные отображения на компактах.***

Теорема Кантора и Вейерштрасса. Экстремум линейного непрерывного функционала.

***Тема 5.3. Компактные операторы.***

Структура компактного оператора**.** Компактные самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах и их собственные векторы.

***Тема 5.4. Альтернатива Фредгольма.***

Разрешимость интегральных уравнений Вольтера и Фредгольма с ядром Гильберта-Шмидта.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

| Номер раздела, темы | Название раздела, темы | Количество аудиторных часов | | | | | Количество часов УСР | Форма контроля знаний |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Лекции | Практические занятия | Семинарские занятия | Лабораторные занятия | Иное | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **1** | **Нормативные векторные пространства** | **8** | | | **6** | | | |
| 1.1 | Метрические и нормированные пространства. Открытые и замкнутые множества. | 2 | | | 2 | | | Опрос и проверка отчета по лабораторной работе |
| 1.2 | Сходимость в метрических и нормированных пространствах. | 2 | | | 2 | | | Опрос и проверка отчета по лабораторной работе |
| 1.3 | Аппроксимация и построение элемента наилучшей аппроксимации. | 1 | | | | | | Опрос |
| 1.4 | Банаховы пространства и их свойства. | 1 | | | | | | Опрос |
| 1.5 | Принцип сжимающих отображений и его применение. | 2 | | | 2 | | 2 | Контрольная работа |
| **2** | **Гильбертовы пространства и аппроксимация** | **6** | | | **6** | | | |
| 2.1 | Гильбертовы пространства. | 2 | | | 2 | | | Опрос и проверка отчета по лабораторной работе |
| 2.2 | Элемент наилучшей аппроксимации в гильбертовом пространстве. | 2 | | | 2 | | | Опрос и проверка отчета по лабораторной работе |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.3 | Ряды Фурье и их применение. | 2 | | | 2 | | 2 | Коллоквиум, проверка отчета по лабораторной работе |
| **3** | **Линейные ограниченные операторы** | **6** | | | **6** | | | |
| 3.1 | Пространства линейных ограниченных операторов и их свойства. | 2 | | | 2 | | | Опрос и проверка отчета по лабораторной работе |
| 3.2 | Обратные операторы. | 2 | | | 2 | | | Опрос и проверка отчета по лабораторной работе |
| 3.3 | Операторные уравнения. Метод резольвент. | 2 | | | 2 | | | Контрольная работа |
| **4** | **Сопряженное пространство и сопряженные операторы** | **7** | | | **7** | | | |
| 4.1 | Линейные ограниченные функционалы. Общий вид функционала в гильбертовом пространства. | 2 | | | 2 | | | Опрос и проверка отчета по лабораторной работе |
| 4.2 | Сопряженные пространства и их свойства. | 2 | | | 2 | | | Опрос и проверка отчета по лабораторной работе |
| 4.3 | Сопряженные операторы в гильбертовых пространствах | 2 | | | 2 | | | Опрос и проверка отчета по лабораторной работе |
| 4.4 | Собственные векторы и собственные значения оператора | 1 | | | 1 | | | Контрольная работа |
| **5** | **Компактные множества и компактные операторы** | **7** | | | **5** | | | |
| 5.1 | Компактные и предкомпактные множества. Теорема Арцела- Асколи. | 2 | | | 2 | | | Опрос и проверка отчета по лабораторной работе |
| 5.2 | Непрерывные отображения на компактах. | 1 | | | 1 | | | Опрос и проверка отчета по лабораторной работе |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5.3 | Компактные операторы. | 2 | | | | | | Опрос |
| 5.4 | Альтернатива Фредгольма. | 2 | | | 2 | | | Контрольная работа |
| | | **34** | | | **30** | | **4** | |

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Основная литература

1. Филимоненкова, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу : учебное пособие для студ. технических направлений бакалавриата и направлений "Прикладная математика", "Прикладная математика и информатика" технических вузов / Н. В. Филимоненкова. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. - 168 с. - URL: https://e.lanbook.com/book/212048.
2. Филимоненкова, Н. В. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие для студ. технических направлений бакалавриата и направлений "Прикладная математика", "Прикладная математика и информатика" технических вузов / Н. В. Филимоненкова. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. - 229 с. - URL: https://e.lanbook.com/book/212057.
3. Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа : учебное пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. - Изд. 2-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. - 271 с. - URL: https://e.lanbook.com/book/210290.
4. Дайняк, В. В. Банаховы пространства: методические указания и задания к практическим занятиям / В. В. Дайняк, Е. С. Чеб. - Минск: БГУ, 2021. - 67 с. - URL: https://elib.bsu.by/handle/123456789/275205.
5. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон. - 6-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 560 с. - URL: https://e.lanbook.com/book/189430.

### Дополнительная литература

1. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения. 2-изд./ А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – Мн.: БГУ, 2006. – 434 с.
2. Хелемский, А.Я. Лекции по функциональному анализу/ А.Я. Хелемский. – М.: МЦНМО, 2009. – 304с.
3. Богачев, В.И. Действительный и функциональный анализ: Университетский курс/ В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. – М.: РХД, 2009. – 724с.
4. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., Физматлит, 2002.
5. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: учеб. пособие / А.Б. Антоневич, М.Х. Мазель, Я.В. Радыно. – Минск : БГУ, 2011. – 319 с.
6. Дайняк, В.В.Теория нормированных векторных пространств: метод. указания и задания/ В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2005. – 82 с.
7. Дайняк, В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.1. / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2013. – 52 с.
8. Дайняк, В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.2. / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2015. – 56 с.

9. Дайняк, В. В. Гильбертовы пространства и аппроксимация /В. В. Дайняк, Е.С.Чеб.-Минск: БГУ,2020.-52с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/256668

10. Дайняк В.В. Метрические пространства: метод. Указания и задания. В 3 ч. Ч.1 / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. - Минск: БГУ, 2020. - 52 с. http://elib.bsu.by/handle/123456789/241306

## Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Текущий контроль осуществляется путем оценки знаний и активности студентов на практических занятиях, рубежных контрольных мероприятий в форме выполнений индивидуальных заданий, контрольных работ и коллоквиумов. Выполнение заданий является обязательным для всех студентов.

Основным средством диагностики усвоения знаний и овладения необходимыми компетенциями по учебной дисциплине «Функциональный анализ» является проверка индивидуальных заданий, выполняемых в рамках часов, отводимых на текущий контроль знаний, контрольные работы, коллоквиумы.

Для диагностики могут использоваться опросы по теме занятия, оценка отчета выполнения индивидуального лабораторного задания, оценка результатов коллоквиума.

Отметка за лабораторное занятие включает:

- ответ (полнота ответа) – 30 %
- выполнение индивидуального лабораторного задания – 70 %

Коллоквиумы используются для обобщения и систематизации учебного материала. В коллоквиум включаются теоретический вопрос и решение практической задачи. При оценивании коллоквиума внимание обращается на:

- содержание и последовательность изложения теоретического вопроса – 30%;
- соответствие и полноту раскрытия вопроса – 30 %;
- грамотный научный подход к решению практической задачи – 40%.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» учебным планом предусмотрен экзамен.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

– ответы на лабораторных занятиях– 50%;

– результаты коллоквиума – 50 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе итоговой отметки текущей аттестации (модульно-рейтинговой системы оценки знаний) 40 % и экзаменационной отметки 60 %.

**Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов**

***Тема 1.5. Принцип сжимающих отображений и его применение (2 часа)***

Принцип сжимающих отображений в банаховых пространствах. Применение принципа сжимающих отображений в линейной алгебре, к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера второго рода, к дифференциальным уравнениям.

(Форма контроля – отчет).

***Тема 2.3. Ряды Фурье и их применение (2 часа)***

Ортогональные системы и ряды Фурье. Полные ортонормированные системы. Аппроксимация рядами Фурье и ее применение. Изоморфизм гильбертовых пространств.

(Форма контроля - отчет).

**Примерная тематика заданий для лабораторных занятий**

Материалы к лабораторным занятиям с индивидуальными заданиями для каждого студента представлены в следующих материалах:

- Дайняк, В.В. Теория нормированных векторных пространств: метод. указания и задания / В.В.Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2005. – 82 с.
- Дайняк В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.1. / В.В.Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2013. – 52 с.
- Дайняк В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.2. / В.В.Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2015. – 56 с.

**Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса используется ***практико-ориентированный подход,*** который предполагает***:***

- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

## Методические рекомендации по организации самостоятельной работы

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Функциональный анализ» используются современные информационные ресурсы, размещенные на образовательном портале: комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, методические указания к лабораторным занятиям, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к экзамену, задания, тесты, вопросы для самоконтроля, тематика рефератов и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

## Задачи для коллоквиумов

1. Доказать, что в нормированном пространстве $E$ открытый шар $B(0,r)$ – открытое множество.

2. Доказать, что для любых элементов $B(0,r)$ выполнено неравенство $\|x\| \le \max\{\|x+y\|,\|x-y\|\}$.

3. Доказать, что алгебраическая сумма и объединение двух ограниченных множеств – ограниченное множество.

4. Пусть в пространстве со скалярным произведением $H$ последовательности $x^{(n)}, y^{(n)} \in B[0,1]$ и $(x^{(n)}, y^{(n)}) \to 1$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\|x^{(n)} - y^{(n)}\| \to 0$ при $n \to \infty$.

5. Пусть $M$ и $N$ – такие множества в гильбертовом пространстве $H$, что $M \subset N$. Доказать, что $N^{\perp} \subset M^{\perp}$.

6. В гильбертовом пространстве $l_2$ рассмотрим последовательность элементов $x^{(n)} = \left\{1, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{1}{2^{in}}, \dots\right\}$. Доказать, что линейная оболочка этой последовательности всюду плотна в пространстве $l_2$.

7. Пусть $A \subset E$ – замкнутое множество. Доказать, что $\rho(x, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in A$.

8. Доказать, что для того, чтобы элемент $x$ был ортогонален подпространству $L \subset H$ необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $y \in L$ имело место неравенство

9. Доказать, что для любого множества $M \subset H$ множество $M^{\perp}$ является подпространством.

10. Пусть $A, B \subset E$ и $\overline{A} \subset \overline{B}$. Следует ли, что $A \subset B$? Ответ обоснуйте и приведите пример.

11. Доказать, что гильбертово пространство является строго нормированным.

12. Доказать, что ортогональная система без нулевого элемента линейно независима в гильбертовом пространстве.

13. Доказать, что для любого множества $M \subset H$ в гильбертовом пространстве имеет место включение $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$. Привести пример строгого включения.

14. Пусть $M \subset E$ выпуклое множество и $\lambda \in \Re$ – некоторое число. Доказать, что множество $\lambda M = \{ x \in E : x = \lambda y, y \in M \}$ – выпукло. Будет ли множество всех выпуклых подмножеств пространства $E$ векторным пространством?

15. Будет ли замыкание выпуклого множества $M \subset E$ в нормированном векторном пространстве $E$ выпуклым множеством? Ответ обоснуйте.

16. Пусть $A, B \subset E$ – замкнутые множества и их пересечение $A \bigcap B$ пусто. Может ли расстояние $\rho(A, B) = 0$?

17. Пусть $M$ и $N$ – подпространства гильбертова пространства $H$ и $M \perp N$. Доказать, что – $M + N$ подпространство в $H$.

18. Пусть $M, N \subset H$ и $H = M + N$. Верно ли, что $N = M^{\perp}$?

19. Пусть $M, N \subset H$ такие, что любой $x \in H$ единственным образом представим в виде $x = y + z, y \in M, z \in N$. Следует ли отсюда, что $N$ и $M$ – подпространства в $H$? Ответ обосновать.

20. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением выполнено равенство $\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x + y}{2}\right\|^2$.

21. Доказать, что в унитарном пространстве элементы $x$ и $y$ ортогональны тогда и только тогда, когда $\|\alpha x + \beta y\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2$ для любых $\alpha, \beta \in C$.

22. Доказать, что в пространстве нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства.

23. Пусть $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}, (y^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset E$ – фундаментальные последовательности. Доказать, что числовая последовательность $\lambda^{(n)} = \left\| x^{(n)} - y^{(n)} \right\|$ сходится.

24. Доказать, что если $f : E \to W$ непрерывно, то $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ для любого $A \subset E$.

25. Пусть множество $A \subset E$ фиксировано. Доказать, что функция $f(x) = \rho(x, A)$ непрерывно отображает $E$ в $\Re$.

26. Образует ли в пространстве $C[a, b]$ подпространство множество многочленов степени не выше чем $n$?

27. Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Доказать, что множество $\{t \in \Re : f(t) < 1\}$ открыто на числовой прямой.

28. Пусть $A, B \subset E$ – произвольные множества в банаховом пространстве $E$. Доказать, что $\rho(A, B) = \rho(\overline{A}, \overline{B})$.

29. Доказать, что множество $A \subset E$ является ограниченным тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x^{(n)} \in A$ и любой последовательности $\lambda^{(n)} \in C, \lambda^{(n)} \to 0$, при $n \to \infty$ последовательность $\lambda^{(n)} x^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$.

30. Пусть $M, N \subset H$ – подпространства гильбертова пространства $H$ и $M \perp N$. Доказать, что $M + N$ – подпространство в $H$.

## Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Метрические пространства. Определения и примеры
2. Неравенство Юнга. Неравенство Гельдера для сумм. Неравенство Минковского для сумм
3. Применение метрических пространств
4. Линейные пространства
5. Нормированные векторные пространства. Примеры. Свойства норм
6. Интегральное неравенство Гельдера. Интегральное неравенство Минковского
7. Анализ в нормированных пространствах. Свойства открытых множеств. Примеры
8. Внутренние, внешние, граничные, предельные и изолированные точки. Теорема о замкнутом множестве
9. Расстояние от точки до множества. Необходимое и достаточное условие того, чтобы точка являлась точкой прикосновения
10. Предел последовательностей в нормированном векторном пространстве. Примеры. Теорема о точке прикосновения
11. Отображение в нормированном векторном пространстве. Теоремао непрерывном отображении
12. Эквивалентные нормы. Теорема об эквивалентных нормах в конечномерных пространствах
13. Аппроксимация в нормированных векторных пространствах. Теорема об элементе наилучшего приближения
14. Строго нормированные пространства и их свойства
15. Банаховы пространства. Примеры. Принцип вложенных шаров
16. Ряды в Банаховых пространствах. Критерий банахова пространства
17. Примеры задач, приводящих к исследованию интегральных уравнений
18. Принцип сжимающих отображений. Теорема Банаха
19. Локальный принцип сжимающих отображений. Теорема о свойстве n-ой итерации сжимающего отображения

20. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода

21. Интегральные уравнения с вырожденным ядром

22. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода

23. Пополнение линейных нормированных пространств

24. Предгильбертовы пространства. Примеры. Свойства скалярных произведений

25. Ортогональные системы. Процесс ортогонализации Шмидта

26. Гильбертовы пространства. Теорема о пополнении. Расстояние от точки до подпространства. Теорема об аппроксимации

27. Проекция в гильбертовом пространстве. Теорема о проекции

28. Ортогональное дополнение и его свойства

29. Разложение гильбертова пространства в прямую сумму. Теорема о плотном множестве

30. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве

31. Компактные множества в нормированных пространствах

32. Относительно компактное множество. Теорема Арцела - Асколи. Относительная компактность в пространствах $L\,p\ [a, b], l\,p\ , 1 \leq p < \infty$

33. Линейные ограниченные операторы. Ограниченность интегрального оператора

34. Ограниченность и непрерывность. Оператор дифференцирования

35. Пространства линейных операторов. Равномерная сходимость

36. Сильная сходимость в пространстве $L(X,\ Y)$. Принцип равномерной ограниченности

37. Сильная сходимость в пространстве $L(X,\ Y)$. Теорема Банаха - Штейнгауза

38. Левый и правый обратные операторы и их свойства

39. Обратный оператор. Критерий существования обратного оператора

40. Замкнутые операторы и их свойства. Теорема Банаха о замкнутом графике

41. Теорема Хана - Банаха и ее следствия

42. Сопряженные пространства. Теорема Рисса

43. Сопряженные операторы

44. Вполне непрерывные операторы

45. Теория Рисса - Шаудера разрешимости уравнений 2-ого рода. Замкнутость $R\ (I - A), R\ (I - A\ )$. Первая и вторая теорема Фредгольма

46. Теория Рисса - Шаудера разрешимости уравнений 2-ого рода. Третья теорема Фредгольма

47. Теория Рисса - Шаудера разрешимости уравнений 2-ого рода. Альтернатива Фредгольма

48. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

| Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование | Название кафедры | Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине | Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) |
| --- | --- | --- | --- |
| Учебная дисциплина не требует согласования | | | |

Заведующий кафедрой компьютерных технологий и систем
доктор педагогических наук, профессор ______________ В.В.Казаченок

06.06.2025

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УО**
на _____/_____ учебный год

| № п/п | Дополнения и изменения | Основание |
|---|---|---|
| | | |

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_______________________________ (протокол № ____ от ________ 202_ г.)

Заведующий кафедрой
_______________________ _________________ ____________________

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
_______________________ _________________ ____________________