

513
Л 40

Х
ПРЕС
Прев. 1965

ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ

и

ТРИГОНОМЕТРИИ,

СЪ ПРИМѢЧАНІИМИ.

СОЧИНЕНІЕ

А. М. ЛЕЖАНДРА,

принятое въ руководство для преподаванія

въ ИНСТИТУТЪ КОРПУСА ПУТЕЙ СООБЩЕНІЯ.

ПЕРЕВЕДЕН СЪ ФРАНЦУЗСКАГО,

(съ 14 изданіа),

ОРИГ

Корпуса Инженеровъ путей сообщенія Капитана

Баладинъ и Буттацъ.

49911

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

Въ типографіи Императорской Академіи Наукъ.

1837.

Библиотека
Л 40
Т 5

ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ,

съ тѣмъ, чтобы по напечатаніи представлены были въ
Ценсурный Комитетъ три экземпляра. С. Петербурга,
24 Сентября 1835 года.

Ценсоръ П. Семеновъ.

ЦѢНА 9 РУБЛЕЙ.

ОТЪ ПЕРЕВОДЧИКОВЪ.

Переведенное нами сочиненіе Лежандра пользуется общою извѣстностію, и напрасно было бы распространяться съ позволять его достоинствамъ, уже доказаннымъ четырнадцатію изданіями. Нельзя незамѣтить впрочемъ, что новымъ подтвержденіемъ неопытимаго превосходства геометріи Лежандра, предъ всѣми подобными сочиненіями, можетъ служить и принятіе ея въ руководство при преподаваніи въ Институтъ Корпуса путей сообщенія.

Переводъ нашъ представляется публикѣ безъ всякихъ перемѣнъ въ сравненіи съ оригиналомъ. Мы надѣемся, что любители математическихъ занятій будутъ вполне удовлетворены ясностію и систематическою послѣдовательностію изложенія, равно какъ и строгостію доказательствъ Лежандра. По мнѣнію самого автора всѣ примѣанія, приложенія, и вообще статьи нѣпечатанныя мелкимъ шрифтомъ, могутъ быть безъ неудобства пропускаемы угашимися, какъ менѣе полезныя, или требующія болѣе внимательнаго изученія. Къ нимъ можно обратиться въ послѣдствіи, если это сочтется нужнымъ, руководствуясь при выборѣ совѣтами опытнаго наставника.

Намъ остается, въ заключеніе, благодарить
всѣхъ особъ принимавшихъ участіе въ судьбѣ пе-
ревода, и принести дань живѣйшей признатель-
ности бывшему Директору Института, Г. Ге-
нералу Лейтенанту Потье, который удостоилъ
нашъ трудъ своимъ покровительствомъ, обратилъ
на него милостивое и просвѣщенное вниманіе
Его Сіятельства Главноуправляющаго Кор-
пусомъ путей сообщенія, и сдѣлался сыновникомъ
пособій полученныхъ нами отъ Института, для
напечатанія перевода.

С. Петербургъ
10 Апрѣля, 1827 года.

ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ.

КНИГА ПЕРВАЯ.

НАЧАЛА.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

I. Геометрія есть наука пѣвущая предметомъ мѣру протяженія.

Протяженіе пѣветъ три измѣренія: *длину, ширину и высоту.*

II. *Линія* есть дѣнна безъ широты.

Оконечности линіи называются *точками*; отсюда слѣдуетъ, что точка не пѣветъ протяженія.

III. *Прямая линія* есть кратчайшее разстояніе между двумя точками.

IV. Всякая линія, не прямая и не составленная изъ прямыхъ, есть *кривая* линія.

И такъ, АВ есть *прямая* линія, АСDB ϕ *ломаная*, или составленная изъ прямыхъ линій, а АЕВ *линія кривая*.

V. *Поверхность* есть протяженіе въ длину и ширину, безъ высоты или толщены.

VI. *Плоскость* есть поверхность, которая со-

держитъ прямую, соединяющую двѣ произвольно взятыя точки на поверхности.

VII. Всякая поверхность, не плоская и не составленная изъ плоскихъ поверхностей, есть *кривая поверхность*.

VIII. *Геометрическимъ тѣломъ* называется всё то, что содержитъ въ себѣ три размѣренія пространства.

IX. Когда двѣ прямыя линіи встрѣчаются, то большее или меньшее пространство ихъ отдѣляющее и заключающее единственно отъ ихъ положенія, называется *угломъ*; точка А встрѣчи или пересѣченія прямыхъ *вершиною* угла; линіи АВ, АС, *сторонами* угла.

Иногда уголъ обозначается одною буквою при вершинѣ его А, а иногда тремя буквами ВАС, или САВ, наблюдая, чтобы буква при вершинѣ занимала всегда среднее мѣсто.

Углы, какъ и всё величины, могутъ быть складываемы, вычитаемы, множимы и дѣлимы: уголъ DCE есть сумма двухъ угловъ DCB и BCE, а уголъ DCB есть разность угловъ DCE и BCE.

X. Когда прямая линія АВ встрѣчаетъ другую прямую CD такъ, что смежные углы ВАС и BAD равны между собою, то каждый изъ нихъ называется *прямымъ угломъ* и говорятъ, что линія АВ *перпендикулярна* къ CD.

XI. Всякой уголъ ВАС, меньшій прямого, называется *острымъ угломъ*, а всякой большій уголъ BEF *тупымъ угломъ*.

XII. Двѣ линіи находящіяся въ одной плоскости и не встрѣчающіяся при продолженіи ихъ на какое бы то ни было пространство, называются *параллельными*; таковы линіи АВ, CD.

XIII. *Плоскою фігурою* называется плоскость ограниченная со всѣхъ сторонъ линіями.

Если эти линіи суть прямыя, то пространство ограниченное ими называется *прямолинейною фігурою*, или *многоугольникомъ*, а самыя ли-

нѣ, взятыя вмѣстѣ, *обводомъ* или *периметромъ* многоугольника.

XIV. Многоугольникъ о трехъ сторонахъ, простѣйшій изъ всѣхъ, называется *треугольникомъ*; о чепырехъ, *четыреугольникомъ*; о пяти, *пятиугольникомъ*; о шести, *шестиугольникомъ* и п. д.

XV. *Равностороннимъ* треугольникомъ называется треугольникъ имѣющій всѣ три стороны равныя; *равнобедреннымъ*, котораго двѣ стороны равны; *неравностороннимъ*, котораго всѣ три стороны неравны. Ф 7

XVI. *Прямоугольнымъ* треугольникомъ называется тотъ, который имѣетъ прямой уголъ. Сторона противоположная прямому углу называется *гипотенузою*. И такъ ABC есть тр-къ, прямоугольный въ A; сторона BC его гипотенуза. Ф 10

XVII. Между чепыреугольниками должно замѣтить:

Квадратъ, коего стороны равны и углы прямые (смотри предлж. XX, книга I.); Ф 11

Прямоугольникъ, который имѣетъ углы прямые, не имѣя равныхъ сторонъ. (см. тоже пред.) Ф 12

Паралелограммъ или *ромбъ*, котораго противоположащія стороны параллельны; Ф 13

Равносторонній ромбъ (*losange*), котораго стороны равны, но углы не прямые; Ф 14

Наконецъ *трапеція* есть чепыреугольникъ, въ коемъ только двѣ стороны параллельны. Ф 15

XVIII. *Диагоналю* называется линія соединяющая вершины двухъ несмежныхъ угловъ: такова линія AC. Ф 16

XIX. *Равносторонній* многоугольникъ имѣетъ всѣ стороны равныя; *равноугольный*, всѣ углы равныя.

XX. Два многоугольника *равносторонны между собою*, когда стороны одного равны сторонамъ другаго и расположены одинаковымъ образомъ; то есть, сдвину по ихъ обводу въ одну сторону, пер-

вая сторона одного равна первой сторонѣ другого; вторая одного равна второй другого; третья третьей и т. д. Тоже самое разумѣть должно и о многоугольникахъ равноугольныхъ между собою.

Какъ въ одномъ, такъ и въ другомъ случаѣ, равные стороны и углы называются сторонами и углами *соотвѣтственными* или *сходственными* (homologues.)

Примеч. Въ первыхъ четырехъ книгахъ Геометріи будутъ разсматриваться фигуры плоскія, или начерченныя на плоской поверхности.

Изыясненіе выраженій и знаковъ.

Аксиома есть предложеніе само по себѣ очевидное.

Теорема есть предложеніе, коего истинна дѣлается очевидною, посредствомъ разсужденія называемаго *доказательствомъ*.

Задача есть вопросъ требующій *рѣшенія*.

Лемма есть предложеніе, коего истинна доказывается предварительно и употребляется потомъ для доказательства какой нибудь теоремы, или для рѣшенія вопроса.

Общее названіе *предложенія* дается безъ различія теоремамъ, задачамъ и леммамъ.

Слѣствіе есть заключеніе выведенное изъ одного или нѣсколькихъ предложеній.

Замѣчаніе (Scholie) есть поясненіе на одно или нѣсколько предложеній, показывающее ихъ связь, пользу, исключеніе, или разпространеніе.

Гипотезою или *предположеніемъ* называется условіе введенное въ изложеніи теоремы, задачи и проч., или въ ходѣ доказательства.

Знакъ $=$ изображаетъ равенство; выраженіе $A = B$ показываетъ, что A равно B .

Дабы означить, что A менѣе B , пишутъ $A < B$.

Для означенія, что A болѣе B , пишутъ $A > B$.

Знакъ $+$ произносится *плюсъ* или *съ*; онъ означаетъ сложеніе.

Знакъ $-$ произносится *безъ* или *минусъ*; онъ

означаетъ вычитаніе. И знакъ $A + B$ представляетъ сумму количествъ A и B ; $A - B$ представляетъ ихъ разность, или остатокъ происшедшій отъ вычитанія B изъ A ; также $A - B + C$, или $A + C - B$, означаетъ, что A и C должны быть сложены и изъ суммы ихъ вычтено B .

Знакъ $\times$ есть знакъ умноженія; $A \times B$ представляетъ произведеніе A на B . Въместо знака $\times$ иногда употребляють точку, такъ что $A \cdot B$ есть тоже самое что $A \times B$. Произведеніе A на B означаютъ также чрезъ AB , безъ всякаго промежуточнаго знака, но не должно употреблять это выраженіе въ одно время съ выраженіемъ линіи AB , которое означаетъ разстояніе точекъ A и B .

Выраженіе $A \times (B + C - D)$ представляетъ произведеніе изъ количества A на количество $B + C - D$. Если должно $A + B$ умножить на $A - B + C$, то произведеніе означится чрезъ $(A + B) \times (A - B + C)$, гдѣ все заключенное въ скобкахъ разсматривается какъ одна величина.

Число поставленное предъ линіею или количествомъ, служить множителемъ линіи или количества; и посему, для означенія того, что линіи AB взята три раза, пишутъ $3AB$; для выраженія половины угла A пишутъ $\frac{1}{2}A$.

Квадратъ линіи AB означается чрезъ $\overline{AB^2}$; кубъ ея чрезъ $\overline{AB^3}$. Въ своемъ мѣстѣ будетъ сказано, что должно разумѣть подъ квадратами и кубами линій.

Знакъ $\sqrt{}$ означаетъ извлеченіе корня, и по этому $\sqrt{2}$ есть корень квадратный изъ 2; $\sqrt{A \times B}$ корень квадратный изъ произведенія A на B , или выраженіе средней пропорціальной линіи между A и B . (*)

(*) Для означенія перпендикулярности и параллельности линій, служатъ употребляемыя знаки $\perp$ и $\parallel$.

АКСІОМЫ.

1. Два количества равныя третьему равны между собою.

2. Цѣлое больше своей части.

3. Цѣлое равно суммѣ частей происшедшихъ отъ его раздѣленія.

4. Между двумя точками можно провести только одну прямую линію.

5. Двѣ величины, на пр. линіи, померкнуты или тѣла равны, если, по наложеніи одной на другую, онѣ совмѣщаются во всемъ своемъ продолженіи.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

ТЕОРЕМА.

Всѣ прямые углы равны между собою.

◆ 11. Пусть линія $CD \perp$ къ AB , и GH къ EF ; должно доказать, что углы ACD , EGH равны между собою.

Если возьмемъ равныя разстоянія CA , CB , GE , GF , то AB будетъ равно EF . По наложеніи линіи EF на AB такъ, чтобы точка E упала въ точку A , а точка F въ точку B , эти линіи совершенно совмѣстятся, ибо, въ противномъ случаѣ, можно бы было провести, отъ A къ B , двѣ прямыя линіи, что противно аксіомѣ 4, и точка G , середина EF , упадетъ въ точку C , средину BA . Но по наложеніи GE на CA , сторона GH упадетъ на CD , ибо, предполагая, если это возможно, что она упадетъ на линію CK , опущенную отъ C , должно имѣть уг. $ACK =$ уг. KCB , въ слѣдствіе предположенія (опр. 10), по которому уг. $EGH =$ уг. HGF . Но уг. ACK больше уг. ACD , уг. KCB менѣе уг. BCD , и сверхъ того, по положенію, $ACD = BCD$; слѣд.

АСК будетъ болѣе КСВ, и по этому, линія СН не можеть упасть на линію СК, отличную отъ СД, но должна совѣстниться съ послѣднею, такъ какъ и уг. ЕСН съ уг. АСД. Отсюда слѣдуетъ, что прямые углы равны между собою.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

ТЕОРЕМА.

Прямая линія СД, встрѣгающая другую прямую АВ, составляетъ съ нею два смежные угла АСД, ВСД, коихъ сумма равна двумъ прямымъ угламъ.

Возставивъ въ точкѣ С, на линіи АВ, перпендикуляръ СЕ, получимъ, что уг. АСД равенъ суммѣ уг. АСЕ, ЕСД, откуда $\text{BCD} + \text{ACD}$ будетъ сумма трехъ уг-въ АСЕ, ЕСД, ВСД. Первый изъ нихъ есть прямой; два другіе, взятые вмѣстѣ, составляютъ также прямой уг. ВСЕ; слѣд. сумма двухъ уг-въ АСД, ВСД, равна двумъ прямымъ уг-мъ.

Слѣдствіе I. Если одинъ изъ уг-въ АСД, ВСД, прямой, то и другой будетъ также прямой.

Слѣдствіе II. Если линія DE $\perp$ къ АВ, то ф. 11. взаимно АВ будетъ $\perp$ къ DE.

Изъ перпендикулярности DE къ АВ слѣдуетъ, что уг. АСД равенъ своему прилежащему DCB, и что они будутъ оба прямые; но такъ какъ уг. АСД прямой, то смежный съ нимъ уг. АСЕ будетъ также прямой, откуда слѣдуетъ, что уг. $\text{ACD} = \text{уг. ACE}$ и линія АВ $\perp$ къ DE.

Слѣдствіе III. Всѣ смежные уг. ВАС, САВ, DAE, EAF, расположенные съ одной стороны прямой ВF и взятые вмѣстѣ, равны двумъ прямымъ ф. 11. уг-мъ; ибо сумма ихъ равна двумъ прилежащимъ уг-мъ ВАС, САЕ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

ТЕОРЕМА.

Двѣ прямыя линіи, имѣющія двѣ общія точки, совмѣщаются во всемъ своемъ протяженіи и составляютъ одну прямую.

Пусть A и B будутъ общія точки. Мы знаемъ, что двѣ прямыя линіи между двумя точками должны совмѣщаться только одну, ибо, въ противномъ случаѣ, отъ A къ B можно бы было провести двѣ прямыя, что противно аксіомѣ 4. Предположимъ теперь, что линіи, продолженныя до точки C , начнутъ удаляться одна отъ другой, и назовемъ одну изъ нихъ CD а другую CE . Проведемъ въ точкѣ C линію CF , которая бы составляла съ CA прямой уг. ACF . Такъ какъ линія ACD прямая, то уг. BCD будетъ прямой (пред. 2 слѣд. I.), и точно также, уг. BCE будетъ прямой, потому что линія ACE прямая. Но часть FCE не можетъ быть равна цѣлому FCD . слѣд. прямыя линіи, имѣющія двѣ общія точки A и B , не могутъ раздѣляться, при продолженіи, ни въ какой изъ своихъ точекъ и по этому составляютъ одну прямую.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV

ТЕОРЕМА.

Если два смежные углы, ACD , DCB . взятыгъ имѣють равны двумъ прямымъ угламъ, то вѣршинія ихъ стороны AC , AB , будутъ составлять одну прямую линію.

Если CB не есть продолженіе AC , то пусть имъ будетъ линія CE . Такъ какъ линія ACE прямая, то сумма уг-въ ACD , DCE , будетъ равна

двумъ прямымъ углѣмъ (пред. 2); но по предположенію, сумма углѣвъ ACD , DCB , также равна двумъ прямымъ углѣмъ; слѣд. будемъ имѣть $ACD + DCB = ACD + DCE$. Вычитая съ обѣихъ сторонъ общій уг. ACD , найдемъ, что часть DCB равняется целому DCE , что невозможно. Отсюда слѣдуетъ, что CB есть продолженіе AC .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

ТЕОРЕМА.

Когда двѣ прямыя линіи AB , DE , перестѣкаются, то углы противоположныя вершинамъ равны между собою.

Такъ какъ линіи DE и AB суть прямыя, то сумма углѣвъ ACD , ACE , такъ какъ и сумма углѣвъ ACE , BCE , равна двумъ прямымъ углѣмъ; отсюда $ACD + ACE = ACE + BCE$. Вычитая съ обѣихъ сторонъ общій уг. ACE , найдемъ, что уг. ACD равенся противоположному уг. BCE . Подобнымъ образомъ можно доказать, что уг. ACE равенъ противоположному уг. BCD .

Замѣчаніе. Четыре угла, составленные около одной точки двумя перестѣкающимися прямыми и взятые вѣсть, равны четыремъ прямымъ углѣмъ, ибо углы ACE , BCE , составляютъ два прямые угла и относительно равны углѣмъ ACD , BCD .

Вообще, сколько бы прямыхъ CA , CB и проч., ни встрѣчались въ одной точкѣ C , сумма всѣхъ углѣвъ ACB , BCD , DCE и проч. ими образуемыхъ, будетъ равна четыремъ прямымъ углѣмъ; ибо, составивъ, въ точкѣ O , четыре прямыхъ угла, посредствомъ двухъ линій взаимно перпендикулярныхъ, увидимъ, что пространство занимаемое прямыми углѣми и суммою углѣвъ ACB , BCD и проч., будетъ одинаково.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ VI.

ТЕОРЕМА.

Два тр-ка равны, когда они имѣютъ по равному углу заключающемуся между соответственными равными сторонами.

Пусть уг. A равенъ уг. D , сторона AB равна DE , сторона AC равна DF ; должно доказать, что тр-ки ABC , DEF , равны.

Дѣйствительно, данные тр-ки могутъ быть наложены одинъ на другой и совершенно совмѣстятся. Если наложимъ сторону DE на равную ей AB такъ, что точка D упадетъ въ A , и точка E въ B , то сторона DF , по совмѣщеніи стороны DE , пойдетъ по направленію линіи AC , ибо уг. $D = A$. Въ слѣдствіе равенства сторонъ DF и AC , точка F упадетъ въ C , и третья сторона EF совершенно покроетъ третью сторону BC . Отсюда слѣдуетъ, что тр-ки DEF и ABC равны между собою (акс. 5.)

Слѣдствіе. Имя три относительно равныя части въ двухъ тр-кахъ, какъ то: уг. $A = D$, сторону $AB = DE$, и сторону $AC = DF$, можно заключить, что и прочія три части также равны, то есть: уг. $B = C$, уг. $C = F$, и сторона $BC = EF$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ VII.

ТЕОРЕМА.

Два тр-ка равны, когда имѣютъ по равной сторонѣ прилежащей къ двумъ соответственнымъ равнымъ угламъ.

Пусть сторона BC равна сторонѣ EF , уг. B равенъ углу E , и уг. C равенъ углу F ; должно доказать равенство тр-въ ABC , DEF .

Если положимъ EF на равную ей BC , то точка E упадетъ въ B , и точка F въ C ; въ слѣдствіе равенства уг. въ B и E , сторона ED пойдетъ по направленію AB , и точка D упадетъ въ какую нибудь точку линіи AC . Подобнымъ образомъ, по равенству уг. въ F и C , линія FD пойдетъ по направленію линіи AC и точка D упадетъ въ какую нибудь точку линіи AC . Отсюда видно, что точка D , находясь въ одно и то же время на прямыхъ BA , CA , упадетъ въ точку A общаго ихъ пересѣченія, и посему два тр-ка ABC , DEF , совершенно совмѣщаются, и суть равны.

Слѣдствіе. Имѣя три относительно равныя часинъ въ двухъ тр-кахъ, а именно: сторону $BC = EF$, уголъ $B = E$, и уг. $C = F$, можно заключить, что и прочія три будутъ также равны, т. е. $AB = DE$, $AC = DF$, $A = D$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

ТЕОРЕМА.

Въ каждомъ тр-кѣ, одна изъ сторонъ меньше суммы двухъ другихъ.

Такъ какъ BC , на примѣръ, есть кратчайшее разстояніе между двумя точками B и C (опред. Φ 23. 3); то ясно, что BC будетъ меньше $AB + AC$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

ТЕОРЕМА.

Если изъ точки O , взятой внутри тр-ка ABC , Φ 24. проведутся прямыя OC , OB , къ оконечностямъ линіи BC , то сумма сихъ прямыхъ будетъ меньше суммы сторонъ AB , AC .

Продолжимъ BO до встрѣчи со стороною AC

въ D. Такъ какъ прямая линія OC меньше $OD + CD$ (пред. 8), то прибавя съ обѣихъ сторонъ OB, получимъ $BO + OC < BO + OD + DC$, или $BO + OC < BD + DC$. Подобнымъ образомъ, $BO < BA + AD$, гдѣ, прибавъ съ обѣихъ сторонъ DC, будемъ имѣть $BD + DC < BA + AC$. Но такъ какъ найдено, что $BO + OC < BD + DC$, то, по большей причинѣ, $BO + OC < BA + AC$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

ТЕОРЕМА.

Если двѣ стороны AB, AC, тр-ка ABC, равны двумъ соотвѣтственнымъ сторонамъ DE, DF, тр-ка EDF, и въ томъ же время уг. BAC, заключающійся между двумя первыми сторонами, больше угла EDF, заключающагося между двумя вторыми, то сторона BC первого тр-ка будетъ больше стороны EF второго.

Сдѣлаемъ уголъ $CAG = D$, возьмемъ $AG = DE$, и проведемъ линію CG; тр-ки GAC, DEF будутъ равны, ибо имѣютъ по равному углу заключающемуся между равными сторонами (пред. 6.); откуда $CG = EF$. Здѣсь могутъ встрѣпиться три случая, смотря по тому, упадетъ ли точка G внѣ тр. ABC, или на сторону BC, или внутри рассматриваемаго тр-ка.

Первый случай. Прямая линія CG меньше $GI + IC$, прямая линія AB меньше $AI + IB$; слѣд. $GC + AB$ меньше $GI + AI + IC + IB$, или, что все равно, $GC + AB < AG + BC$. Вычитая съ одной стороны AB, а съ другой равную ей AG, получимъ $GC < BC$, но $GC = EF$; слѣд. $EF < BC$.

Второй случай. Если точка G падаетъ на сторону BC, то очевидно, что GC, или равная ей EF, будетъ меньше BC.

Третій случай. Наконецъ, когда точка G падаетъ внутри тр. ABC , но основываясь на предыдущей теоремѣ, будемъ имѣть $AG + GC < AB + BC$. Вычитая съ одной стороны AG , а съ другой равную ей AB , получимъ $GC < BC$, или $EF < BC$.

Замѣчаніе. Обратно, если двѣ стороны AB , AC , тр. ABC , равны двумъ сторонамъ DE , DF , тр. DEF , и если третья сторона BC первого тр-ка болѣе третьей стороны FE второго, то уг. BAC въ первомъ тр-кѣ будетъ болѣе уг. EDF во второмъ.

Ибо, отвергнувъ это предположеніе, должно допустить, что уг. BAC равенъ EDF , или менѣе его; въ первомъ случаѣ CB будетъ равна EF (пред. 6), а во второмъ CB будетъ менѣе EF ; но такъ какъ то и другое противно предположенію, слѣд. уг. BAC будетъ болѣе уг. EDF .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

ТЕОРЕМА.

Два тр-ка равны, если стороны одного равны соответственнымъ сторонамъ другого.

Пусть сторона $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$; ф. 22. должно доказать, что уг. $A = D$, $B = E$, $C = F$.

Такъ какъ стороны AB и AC равны сторонамъ DE и DF , то полагая, что уг. A болѣе уг. D , слѣдовало бы, по предыдущей теоремѣ, что сторона BC болѣе EF ; и на оборотъ, полагая уг. A менѣе уг. D , должно, чтобы сторона BC была менѣе EF ; но какъ BC равна EF , то уг. A не можетъ быть болѣе или менѣе уг. D ; слѣд. будетъ ему равенъ. Подобнымъ образомъ докажется, что уг. $B = E$, и уг. $C = F$.

Замѣчаніе. Можно замѣтить, что равные углы противоположны равнымъ сторонамъ: такъ напри-

и́тъ, равные углы A и D противоположны разным сторонамъ BC , EF .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

ТЕОРЕМА.

Въ равнобедренномъ тр-кѣ, углы противолежащія равнымъ сторонамъ равны.

Ф. 28. Пусть сторона $AB = AC$; уг. C будетъ равенъ углу B .

Соединивъ вершину A съ точкою D серединою основанія BC , получимъ два тр-ка ABD , ADC , которые равны между собою, ибо имѣютъ всѣ три стороны относительно равныя; именно: сторона AD есть общая, $AB = AC$, по предположенію, а $BD = DC$, по построенію; слѣд., основываясь на предыдущей теоремѣ, уг. B равенъ углу C .

Слѣдствіе. Равносторонній тр-къ есть также и равноугольный, т. е. имѣетъ всѣ углы равные.

Замѣчаніе. Равенство тр-въ ABD , ADC , показываетъ, что уг. $BAD =$ уг. DAC и уг. $BDA =$ уг. ADC . Посему очевидно, что послѣдніе углы суть прямые, и отсюда: *линія соединяющая вершину равнобедреннаго тр-ка съ серединою его основанія перпендикулярна къ основанію и раздѣляетъ уголъ при вершинѣ на двѣ равныя части.*

Въ неравностороннемъ тр-кѣ беремъ за основаніе какую нибудь изъ сторонъ, и тогда вершиною тр-ка называется вершина угла противоположнаго сторонѣ взятой за основаніе. Въ равнобедренномъ тр-кѣ, за основаніе принимается сторона неравная которой нибудь изъ двухъ другихъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

ТЕОРЕМА.

Обратно, если два угла тр-ка равны, то и стороны имъ противоположныя равны.

Если уг. $ABC = ACB$, то сторона AC будетъ ф. 29 также равна стороне AB .

Допустивъ неравенство сихъ сторонъ, положимъ, что AB будетъ большая изъ двухъ, и взявъ $BD = AC$, соединимъ точки C и D . Такъ какъ уг. DBC равенъ, по предположенію, уг. ACB , и стороны BC и BD равны сторонамъ BC , AC , то слѣдуетъ, что (пред. 6) тр-ки DBC и ACB равны. Но часть не можетъ равняться целому; посему неравенство сторонъ AB , AC не имѣетъ мѣста, и тр. ABC есть равнобедренный.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

ТЕОРЕМА.

Изъ двухъ сторонъ тр-ка большая противолежитъ большему углу, и обратно, изъ двухъ ф. 30. угловъ тр-ка больший уголъ противолежитъ болшей сторонѣ.

1-е. Если уг. $C > B$, то сторона AB , противоположная уг. C , будетъ болѣе стороны AC , противоположной уг. B .

Сдѣлавъ уг. $BCD = B$, будемъ имѣть въ тр-кѣ BCD , $BD = BC$ (пред. 13); но линія $AC < AD + CD$, и $AD + CD = AD + BD = AB$; слѣд. $AB > AC$.

2-е. Если сторона $AB > AC$, то уг. C , противоположный сторонѣ AB , будетъ болѣе уг. B , противоположнаго сторонѣ AC .

Допустивъ, что $C < B$, будемъ имѣть, по доказанному выше, $AB < AC$, что прямою предпо-

ложению. Если же $C = B$, то $AB = AC$ (пред. 13) что также противно предположению; и слѣд. уг. C долженъ быть болѣе угла B .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

ТЕОРЕМА.

Изъ точки А, данной внѣ прямой DE, нельзя провести болѣе одного перпендикуляра къ прямой.

Ф. 11. Предполагая возможнымъ проведеніе двухъ перпендикуляровъ AB и AC , продолжимъ одинъ изъ нихъ AB , на разстояніе $BF = AB$, и соединимъ точки C , F .

Треуг. CBF равенъ треуг. ABC , ибо углы CBF , CBA прямые, сторона CB общая и сторона $FB = AB$; откуда (пред. 6) слѣдуетъ, что уг. $BCF =$ уг. BCA , и такъ какъ уг. BCA прямой, по предположенію, то уг. BCF будетъ также прямой. Но если сумма смежныхъ угловъ BCF , BCA , равна двумъ прямымъ угламъ, то должно, чтобы линія ACF была прямою (пред. 4); и посему изъ точки A къ F можно провести двѣ прямыя линіи ABF , ACF , что неможно (Акс. 4). Отсюда слѣдуетъ, что изъ одной точки нельзя провести двухъ перпендикуляровъ къ прямой линіи.

Ф. 12. *Замѣчаніе.* Равнымъ образомъ, нельзя изъ данной точки C , на прямой AB , возставить къ ней два перпендикуляра. Ибо, предполагая, что CD и CE суть искомыя перпендикуляры, мы получимъ бы два прямые угла DCB и BCE , и часть равнялась бы цѣлому, что невозможно.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

ТЕОРЕМА.

Ф. 11. *Если изъ какой нибудь точки А, взятой внѣ прямой DE, опустимъ на прямую перпендику-*

ляръ AB , и проведемъ наклонныя AE , AC , AD и прот., то:

1-е. Перпендикуляръ AB будетъ короче всякой наклонной лини.

2-е. Две наклонныя AC , AE , проведенныя съ одной стороны перпендикуляра, и удаляющіяся отъ него на равныя разстоянія BC , BE , равны.

3-е. Изъ двухъ произвольно взятыя наклонныя AC и AD , или AE и AD , болѣе удаляющіяся отъ перпендикуляра, длиннѣе.

Продолжимъ перпендикуляръ AB на разстояніе $BF = AB$, и соединимъ точки F и C , F и D .

1. Тр. BCF равенъ тр-ку BCA , ибо прямой уг. $CBF =$ уг. CBA , сторона BC общая, и сторона $BF = BA$; въ слѣдствіе чего (пред. 6.) третья сторона CF равна третьей сторонѣ AC . Но какъ прямая ABF менѣ ломаной ACF , то и AB , равная половинѣ ABF , будетъ менѣ AC , равной половинѣ ACF .

Отсюда слѣдуетъ 1-е, перпендикуляръ короче всякой наклонной лини.

2. Если положимъ $BE = BC$, то по причинѣ общей стороны AB и равныхъ уг-въ ABE , ABC , тр-ки ABE , ABC равны (пред. 6.), и въ нихъ $AE = AC$. Отсюда 2-е, наклонныя линіи, равно удаленныя отъ основанія перпендикуляра, равны.

3. Такъ какъ въ тр-кѣ ADF , сумма сторонъ AC , CF менѣ (пред. 9) суммы сторонъ AD , DF , то AC , равная половинѣ линіи ACF , менѣ $AD = \frac{1}{2} ADF$; и пошному 3-е, наклонныя линіи, болѣе удаляющіяся отъ перпендикуляра, длиннѣе.

Слѣдствіе I. Перпендикуляръ есть истинная мѣра разстоянія точки отъ прямой, ибо онъ короче каждой изъ наклонныхъ.

Слѣдствіе II. Изъ одной точки нельзя провести трехъ равныхъ линій къ одной прямой; ибо, въ противномъ случаѣ, выйдъ бы съ одной сто-

роны перпендикуляра двѣ равныя наклонныя, что невозможно.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

ТЕОРЕМА.

*Если изъ точки С, середины прямой АВ, воз-
стакимъ перпендикуляръ EF къ прямой, то 1-е,
каждая изъ точекъ перпендикуляра будетъ равно
удалена отъ оконечностей линіи АВ; 2-е, каждая*
ф. 82 *точка взятая внѣ перпендикуляра будетъ нерав-
но удалена отъ оконечностей А и В.*

1. Такъ какъ предполагается, что $AC = CB$, то наклонныя AD, DB , равно удаляющіяся отъ перпендикуляра, будутъ равны. Тоже можно сказать о наклонныхъ AE и EB , AF и FB , и проч.; слѣд. 1-е, каждая точка взятая на перпендикулярѣ равно удалена отъ оконечностей A и B .

2. Пусть теперь точка I будетъ взята внѣ перпендикуляра. Если соединимъ IA, IB , то одна изъ этихъ линій пересѣчетъ перпендикуляръ въ D . Проведа линію DB , получимъ $DB = DA$, и такъ какъ прямая линія IB менѣе ломаной линіи $ID + DB$, и $ID + DB = ID + DA = IA$, то $IB < IA$; и отсюда 2-е, каждая точка взятая внѣ перпендикуляра неравно удалена отъ оконечностей A и B .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

ТЕОРЕМА.

*Два прямоугольные трѣугла равны, когда кро-
мѣ равныхъ гипотенузъ имѣютъ по одной рав-
ной сторонѣ.*

ф. 83. Если гипотенуза $AC = DF$, и сторона $AB = DE$,

по прямоугольный тр-ку ABC будетъ равенъ прямоугольному тр-ку DEF.

Такъ какъ равенство было бы равно, если бы претвля стороны BC равнялась претвлей EF, то предположивъ, если это возможно, что стороны BC, EF, не равны, и что BC есть большая изъ нихъ, возьмемъ $BG = EF$, и проведемъ AG. Въ тр-ках ABG, DEF, уг. B равенъ прямому углу E, сторона $AB = DE$, сторона $BG = EF$, и тр-ки равны (пред. 6.), откуда линия $AG = DF$, и такъ какъ, по предположенію, $DF = AC$, то $AC = AG$. Но наклонная AC не можетъ быть равна AG (пред. 16), ибо она болѣе удалена отъ перпендикуляра AB; слѣд. невозможно, чтобы BC разнилась отъ EF; и по этому тр. ABC равенъ тр-ку DEF.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

ТЕОРЕМА.

Въ каждомъ треугольникѣ, сумма трехъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ.

Пусть въ предложенномъ тр-кѣ ABC, сторона AB будетъ наибольшая, а BC наименьшая (1); въ слѣдствіе чего уг. ACB будетъ наибольшій и BAC наименьшій (пред. 14).

Черезъ точку A и черезъ точку I, среднюю противоположащей стороны, проведемъ прямую AI, продолживъ CE до C', такъ чтобы $AC' = AB$; продолжимъ также линію AB до B', такъ чтобы AB' равно было удвоенной линіи AI.

Означивъ чрезъ A, B, C, при угла тр-ка ABC и чрезъ A', B', C', при угла тр-ка AB'C', мы докажемъ, что уг. $C' = B + C$ и уг. $A = A' + B'$, и за-

(1) Это предположеніе содержитъ въ себѣ и тотъ случай, когда средняя сторона AC будетъ равна одной изъ крайнихъ AB или BC.

ключаемъ отсюда, что $A + B + C = A' + B' + C'$, то есть, что сумма угловъ въ обоихъ тр-кахъ есть одна и таже.

Для достиженія этого вывода возьмемъ $AK = AI$, и соединимъ точки K, C' . Тр-ки CAK и BAI будутъ равны, ибо имѣютъ общій уг. A , заключающійся между равными сторонами, и именно: $AC = AB$, и $AK = AI$. Въ слѣдствіе этого равенства тр-гольника $CK = BI$, уг. $ACK = ABC$ и уг. $AKC' = AIB$.

Тр-ки BCK и ACI будутъ также равны; ибо сумма двухъ смежныхъ уг-въ $AKC' + CKB'$, такъ какъ и сумма двухъ уг-въ $AIC + AIB$, равна двумъ прямымъ уг-мъ (пред. 2.); и вычитая съ обеихъ сторонъ равные углы AKC', AIB , найдемъ, что уг. $CKB' = AIC$. Эти равные углы заключаются въ обоихъ тр-кахъ между относительно равными сторонами, т. е. $CK = IB = CI$, и $KB' = AK = AI$; ибо, по положенію, $AB' = 2AI = 2AK$.

И такъ тр-ки BCK, ACI , равны (пред. 6), и сторона $CB' = AC$, уг. $BCK = ACB$ и уг. $KBC = CAI$.

Отсюда слѣдуетъ 1-е, что уг. ACB' , означенный чрезъ C' , составленъ изъ двухъ уг-въ равныхъ угламъ B и C тр-ка ABC , такъ что имѣемъ $C = B + C'$; 2-е, что уг. A , тр-ка ABC , составленъ изъ уг. A' , и изъ CAV' , принадлежащаго тр-ку $AB'C'$, и уг. CAI равнаго уг. B' , тогоже самаго тр-ка, что даетъ $A = A' + B'$, откуда $A + B + C = A' + B' + C'$. Сверхъ того, $AC < AB$, по предположенію, и въ слѣдствіе этого $CB' < AC'$, откуда видно, что въ тр-кѣ ACB' , уг. въ A , означенный чрезъ A' , менше угла B' , и такъ какъ сумма ихъ равна углу A предложеннаго тр-ка, то $A' < \frac{1}{2}A$.

Если приложимъ тоже построеніе къ тр-ку $AB'C'$, для составленія тр-ка $AB''C''$, коего углы означатся буквами A'', B'', C'' , то будемъ имѣть, подобнымъ образомъ, два слѣдующія равенства:

$C' = C + B'$, $A' = A'' + B'$, которые даютъ $A' + B' + C = A'' + B'' + C''$, гдѣ видно, что сумма уг-въ есть одна и также во всѣхъ тр-кахъ и что уг. $A'' < \frac{1}{2} A'$, а отсюда $A'' < \frac{1}{2} A$.

Продолжая неопредѣленно рядъ тр-въ $AB'C'$, $AB''C''$ и проч., достигнемъ тр-ка abc , въ которомъ сумма трехъ угловъ будетъ всегда одинакова съ суммою уг-въ предложеннаго тр-ка ABC , и гдѣ уг. a будетъ менѣе каждаго произвольно взятаго члена убывающей геометрической прогрессіи $\frac{1}{2} A$, $\frac{1}{4} A$, $\frac{1}{8} A$ и проч.

Въ сѣдствие этого можно предположить, что рядъ сихъ тр-въ продолженъ до тѣхъ поръ пока уг. a будетъ менѣе всякаго даннаго угла, и если теперь, посредствомъ тр-ка abc , построимъ тр. abc , въ которомъ сумма уг-въ $a + b$ будетъ равна a , и сѣд. будетъ менѣе всякаго даннаго угла, то отсюда видно, что сумма уг-въ тр-ка abc приводится почти къ одному углу c .

Дабы имѣть точную мѣру этой суммы, продолжимъ сторону ac до d' , и назовемъ x' вѣншій уг. bcd' . Этотъ уг. x' , взятый вмѣстѣ съ угломъ c , тр-ка abc , равенъ двумъ прямымъ угламъ (пред. 2), и потому, означая чрезъ D прямой уголъ, получимъ $c = 2D - x'$, откуда видно, что сумма уг-въ тр-ка abc выразится чрезъ

$$2D + a' + b' - x'.$$

Легко вообразить, что тр. abc , пзмѣнясь въ своихъ сторонахъ и углахъ, представляетъ всѣ послѣдовательные тр-ки происходящіе отъ постепеннаго построения, и безпрестанно приближающіеся къ предѣлу, въ которомъ углы a' и b' равны нулю. Но такъ какъ въ этотъ предѣлъ прямая линія acd' совмѣстится съ ab' , то три точки a' , b' , c' будутъ находиться на одной прямой, углы b' и x' , равно какъ и уг. a' , уничтожатся, а величина $2D + a' + b' - x'$, пзмѣняющая суммѣ

уг-въ тр-ка $a'b'c'$, обратившя въ $2D$, откуда слѣдуетъ, что во всякомъ тр-кѣ сумма трехъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ.

Слѣдствіе I. Если даны два угла тр-ка, или ихъ сумма, то можно опредѣлить третій, вычитая сумму данныхъ изъ двухъ прямыхъ угловъ.

Слѣд. II. Если два угла одного тр-ка относительно равны двумъ угл-мъ другого тр-ка, то и третій уголъ перваго будетъ равенъ третьему углу втораго.

Слѣд. III. Въ тр-кѣ можетъ быть только одинъ прямой уголъ, ибо предположивъ, что въ немъ могутъ находиться два прямые угла, должно допустить также, что третій уголъ равенъ нулю. По большей причинѣ, тр-къ не можетъ имѣть болѣе одного тупаго угла.

Слѣд. IV. Въ прямоугольномъ тр-кѣ, сумма двухъ острыхъ угловъ равна прямому углу.

Слѣд. V. Въ равносѣторенномъ тр-кѣ, каждый уголъ равенъ трети двухъ прямыхъ угловъ, или двумъ третямъ одного прямого угла. И такъ, если прямой уголъ выразится единицею, то уголъ равносѣтореннаго тр-ка будетъ $= \frac{2}{3}$.

Слѣд. VI. Если продолжимъ, въ какомъ бы то ни было тр-кѣ ABC , сторону AB до D , то получимъ вѣншній уголъ CBD , который будетъ равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ противоположныхъ угловъ A и C , ибо, прибавляя уг. ABC , будемъ имѣть двѣ суммы, равныя двумъ прямымъ угламъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

ТЕОРЕМА.

Сумма вѣншнихъ внутреннихъ угловъ многоугольника равна двумъ прямымъ угламъ взятымъ

столько разъ, сколько находится единицъ въ числѣ сторонъ безъ двухъ.

Пусть ABCD и пр., будетъ предложенный многоугольникъ. Если изъ вершины одного угла A проведемъ діагонали AC, AD, AE и проч., къ вершинамъ прочихъ противоположныхъ угловъ то легко усмотрѣть, что многокъ будетъ раздѣленъ на нѣсколько три-ковъ, если онъ имѣетъ семь сторонъ; на шестъ, если онъ имѣетъ восемь сторонъ; и вообще, на столько три-ковъ сколько многокъ имѣетъ сторонъ безъ двухъ; ибо, можно разсматривать всѣ эти три-ки, какъ имѣющіе общую вершину въ точкѣ A, и концы основанія суть стороны многока, исключая тѣхъ, которыя составляютъ уголъ A. Очевидно также, что сумма угловъ всѣхъ три-ковъ не разнится съ суммой угловъ многоугла, и сдѣд., эта послѣдняя сумма равняется двумъ прямымъ угламъ, взятымъ столько разъ сколько есть три-ковъ, или сколько сторонъ многока безъ двухъ.

Слѣд. I. Сумма угловъ четырехугла равняется произведенію двухъ прямыхъ угловъ на $4-2$, что составляетъ четыре прямые угла. И такъ, если всѣ четыре угла четырехугла равны между собою, то каждый изъ нихъ есть прямой, и это оправдываетъ XVII опредѣленіе, гдѣ, въ случаѣ прямоугла и квадрата, предполагалось, что четыре угла четырехугла суть прямые.

Слѣд. II. Сумма угловъ пятиугла равна двумъ прямымъ угламъ помноженнымъ на $5-2$, что составляетъ 6 прямыхъ угловъ. И такъ, когда пятиуглъ есть равноугольный, то каждый изъ угловъ его равенъ пятой части шестидесяти прямыхъ угловъ, или $\frac{2}{3}$ прямого угла.

Слѣд. III. Сумма угловъ шестиугла равна $2 \times (6-2)$ или 8 прямымъ угламъ; откуда сдѣдуетъ, что въ равноугольномъ шестиуглѣ каждый уголъ равенъ $\frac{2}{3}$ или $\frac{1}{3}$ прямого угла.

Замѣчаніе. Еслибъ предложенный многокъ

имѣть одинъ или нѣсколько *сходящихся* угловъ, то должно бы было разсматривать каждый входящій уголъ, какъ большій двухъ прямыхъ угловъ. Но для избѣжанія всякаго замѣшательства, мы будемъ разсматривать здѣсь и въ послѣдствіи, мног-ко съ *исходящими* углами, которые иначе называются *выпуклыми* *многоугольниками*. Всякій выпуклый мног-къ имѣетъ то свойство, что произвольно проведенная прямая линія встрѣчается собою его только въ двухъ точкахъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

ТЕОРЕМА.

Если дать прямыя линіи AB, CD , перпендикулярны къ третьей FG , то онѣ будутъ параллельны, то есть нестрѣтятся при продолженіи ихъ на какое бы то ни было разстояніе.

Предположивъ, что онѣ встрѣчаются въ точкѣ O , имѣли бы два перпендикуляра OF и OG , опущенные изъ одной точки O на линію FG , что невозможно (пред. 15).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

ТЕОРЕМА.

*Если дать прямыя линіи AB, CD , составляющія съ третьей EF внутренніе углы BEF, DFE , ко-
ихъ сумма равна двумъ прямымъ угламъ, то линіи AB, CD , параллельны.*

Если бы углы BEF, DFE , были равны, то каждый изъ нихъ былъ бы прямой, и тогда предположеніе привелось бы къ предыдущему случаю. Но, предполагая ихъ неравными, опустимъ изъ точки

Г, вершины большого угла, перпендикуляръ FG на линію AB .

Въ тр-хъ EFG , сумма двухъ острыхъ уг-въ $FEG + EFG$ равна прямому углу (пред. 19, слѣд. 4). Если вычтемъ одну сумму изъ $BEF + DFE$, равной по предположенію двумъ прямымъ угламъ, то останется уг. DFG равный прямому углу. Отсюда слѣдуетъ, что линіи AB , CD , перпендикулярны къ одной прямой GF и параллельны между собою (пред. 21).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

ТЕОРЕМА.

Если две прямыя линіи AB , CD , составляють съ третьей EF два внутренніе угла съ одной стороны, коихъ сумма болѣе или менѣе двухъ прямыхъ угловъ, то линіи AB , CD , достаточно продолженныя, должны встрѣтиться.

1. Предположимъ, что сумма уг-въ $BEF + EFD$ будетъ менѣе двухъ прямыхъ уг-въ, и проведемъ FG , такъ чтобы уг. $EFG =$ уг. AEF , получимъ сумму $BEF + EFG$, равную $BEF + AEF$, и слѣд. равную двумъ прямымъ угламъ. Но такъ какъ $BEF + EFD$ менѣе двухъ прямыхъ угловъ, то линія DF будетъ заключаться въ углѣ EFG .

Если проведемъ, чрезъ точку F , наклонную FM , которая встрѣтитъ AB въ M , то уг. AMF будетъ равенъ $GFМ$, ибо, прибавляя съ обѣихъ сторонъ одно количество $EFМ + FEM$, получимъ двѣ суммы равныя двумъ прямымъ угламъ. Если отложимъ теперь $MN = FM$, и соединимъ точки F , N , то уг. AMF , внѣшній относительно тр-ка FMN , будетъ равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ противоположныхъ уг-въ MFN , MNF (пред. 19, слѣд. 6). Но эти углы равны между собою, ибо

противоположныя равныя стороны MN, FN ; слѣд. уг. AMF , или равный ему MFG , вдвое больше MFN , и прямая линія FN , раздѣляя уг. GFM пополамъ, встрѣчаетъ линію AB въ точкѣ N , на разстояніи $MN = FN$.

Изъ того же доказательства слѣдуетъ, что взявъ $NP = FN$, опредѣлимъ на линіи AB точку P , къ которой примыкаетъ прямая FP , и составляетъ уг. GFP , равный половинѣ угла GFN , или четверти GFM .

Такимъ образомъ можно послѣдовательно получить половину, четверть, осьмую и ш. д. части угла GFM , и линіи производящія эти дѣленія будутъ встрѣчать линію AB въ точкахъ болѣе и болѣе удаляющихся, но которыя легко опредѣлить, ибо $MN = FN$, $NP = FN$, $PQ = FP$, и проч. Можно также замѣтить, что каждое разстояніе одной изъ этихъ точекъ пересѣченія до постоянной точки F , не совѣтъ равно удвоенному разстоянію отъ предыдущей точки пересѣченія, ибо FN , на примѣръ, меньше $FM + MN$, или $2FM$; подобнымъ образомъ $FP < 2FN$, $FQ < 2FP$, и проч.

Продолжая подраздѣлять уг. GFM на двѣ части, достигнемъ скоро до угла GFZ , меньшаго нежели данный уг. GFD , и удостоверимся въ справедливости того, что продолженная линія FZ встрѣтитъ AB въ определенной точкѣ; слѣдовательно, по большей причинѣ, прямая FD , содержащаяся въ углѣ EFZ , встрѣтитъ AB .

2. Положимъ теперь, что сумма двухъ внутреннихъ уг-въ AEF, CFE , болѣе двухъ прямыхъ уг-въ. Если продолжимъ AE къ B , и CF къ D , то сумма четырехъ уг-въ AEF, BEF, CFE, EFD , будетъ равна четырехъ уг-въ, и вычитая изъ нее сумму $AEF + CFE$, большую двухъ прямыхъ уг-въ, получимъ въ остатокъ сумму $BEF + EFD$, меньшую двухъ прямыхъ уг-въ. Отсюда слѣдуетъ, по первому случаю, что линіи EB, FD , будучи достаточно продолжены, встрѣтятся.

Слѣдствіе. Черезъ данную точку F можно провести только одну линію, параллельную AB, ибо, проводя произвольно FE, найдемъ, что только одна линія FG уравниваетъ сумму двухъ уг-въ BEF, EFG, двумъ прямымъ уг-мъ, а всякая другая прямая FD дѣлаетъ сумму BEF + EFD большею или меньшею двухъ прямыхъ уг-въ, и поэтому должна встрѣпнись линію AB.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV.

ТЕОРЕМА.

Если двѣ параллельныя линіи AB, CD, встрѣчаются съ стѣкущею EF, то сумма внутреннихъ угловъ AGO, GOC, будетъ равна двумъ прямымъ угламъ. Ф. 58.

Еслибъ эта сумма была болѣе или менѣе двухъ прямыхъ уг-въ, то линіи AB, CD, встрѣпились бы съ одной или съ другой стороны (пред. 23), и слѣд. небыли бы параллельны.

Слѣдствіе I. Если уг. GOC есть прямой, то уг. AGO будетъ также прямой, и слѣд., всякая линія, перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ, будетъ перпендикулярна и къ другой.

Слѣд. II. Такъ какъ сумма уг-въ AGO + GOC равна двумъ прямымъ уг-мъ, равно какъ сумма уг-въ GOD + GOC, то вычитая изъ обѣихъ частей GOC, найдемъ, что уг. AGO = GOD. Сверхъ того AGO = BGE и GOD = COF (пред. 5.); слѣдовательно четыре острые угла AGO, BGE, GOD, COF, равны между собою. Тоже будетъ и съ четырьмя тупыми углами AGE, BGO, GOC и DOF. Еще можно замѣтить, что прибавляя къ каждому изъ острыхъ уг-въ по одному тупому, получимъ сумму равную двумъ прямымъ уг-мъ.

Замѣчаніе. Углы, о которыхъ было говорено,

сравняваемые по два, принимаютъ различныя названія. Мы уже назвали углы AGO , GOC *внутренними съ одной стороны*; углы BGO , GOD , имѣютъ тоже названіе; углы AGO , GOD , и также углы BGO , GOC , называющіеся *внутренними на крестъ лежащими*. Наконецъ углы EGB , COF , или AGE , DOF , называющіеся *внѣшними на крестъ лежащими* и углы EGB , GOD , или AGE , GOC , *соотвѣстственными*. Допустивъ это, можно считать доказанными слѣдующія предложенія.

1. Сумма внутреннихъ угловъ съ одной стороны равна двумъ прямымъ угламъ.

2. Углы внутренніе на крестъ лежащіе суть равны между собою, такъ какъ и углы внѣшніе на крестъ лежащіе и углы соотвѣстственные.

Обратно, если во второмъ случаѣ, углы одного названія равны между собою, то можно заключить, что линіи, къ коимъ они относятся, параллельны. Положимъ напримѣръ, что уг. $AGO =$ уг. GOD , и такъ какъ $GOC + GOD$ составляютъ два прямые угла, то будемъ имѣть, что $AGO + GOC$ равняется двумъ прямымъ углѣмъ, и слѣд. линіи AC , CO , параллельны (пред. 22).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

ТЕОРЕМА.

Двѣ линіи AB , CD , параллельныя третьей EF , параллельны между собою.

Проведемъ стѣкущую PQR перпендикулярно къ EF . Такъ какъ AB параллельна EF , то стѣкущая PR будетъ перпендикулярна къ AB (пред. 24, слѣд. 1), и сверхъ того, по параллельности CD и EF , перпендикулярна къ CD . Отсюда видно, что линіи CD и AB перпендикулярны къ одной и той же прямой PQ , и слѣд. параллельны между собою. (пред. 21).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XXVI.

ТЕОРЕМА.

Две параллельныя линіи накладываются во всѣхъ точкахъ въ равномъ разстояніи.

Если на одной изъ двухъ данныхъ параллельныхъ линій AB , CD , возьмемъ двѣ произвольныя точки и возставимъ перпендикуляры EG , FN , то прямыя EG и FN будутъ въ тоже время перпендикулярны къ CD (пред. 24), и, сверхъ того, равны между собою.

Ибо, по проведеніи HE , углы FEN и GHE , разсматриваемые въ отношеніи параллельныхъ AB , CD , будутъ равны какъ внутренніе на крестъ лежащіе (зам. пред. 24); и такъ какъ прямыя EG , FN , перпендикулярны къ прямой BA , и потому параллельны между собою, то углы FHE , HEG , разсматриваемые въ отношеніи параллельныхъ линій EG , FN , будутъ также равны, какъ внутренніе на крестъ лежащіе. Въ слѣдствіе этого, триглы FHE , HGE , имѣя общую сторону HE , прилежащую къ двумъ относительно равнымъ угламъ, будутъ равны (пред. 7), и сторона EG , измѣряющая разстояніе параллельныхъ линій AB , CD , въ точкѣ E , будетъ равна сторонѣ FN , измѣряющей разстояніе между тѣми же параллельными линіями, въ точкѣ F .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XXVII.

ТЕОРЕМА.

Два угла ABC , DEF , имѣющіе параллельныя стороны и обращенные отверстія въ одну сторону, равны.

Продолживъ, если нужно, DE до встрѣчи съ AC въ точкѣ G , найдемъ, что уг. DEF равенъ ϕ 41.

углу DGC ; ибо EF параллельна GC (пред. 24.), уг. DGC равенъ углу BAC , по параллельности AB и DG , и въ слѣдствіе этого, уг. DEF равенъ углу BAC .

Замѣчаніе. Предыдущая теорема можетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, когда линія EF будетъ обращена въ одну сторону съ AC , а ED съ AB ; ибо, по продолженіи линіи EF къ H , получимъ уг. DEH , который, имѣя стороны параллельныя сторонамъ угла BAC , не будетъ ему равенъ. Въ этомъ случаѣ, углы DEF и BAC составятъ вмѣстѣ два прямыхъ угла.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVIII.

ТЕОРЕМА.

Противоположныя стороны и также противоположные углы параллелограмма равны между собою.

Ф. 44.

Проведа діагональ BD , получимъ два тр-ка ADB , DBC , которые имѣютъ общую сторону BD , уг. $ADB = DBC$ (пред. 24.), по параллельности прямыхъ AD , BC , и уг. $ABD = BDC$, по параллельности прямыхъ AB , CD . Отсюда слѣдуетъ, что тр-ки ADB , DBC , суть равны (пред. 7), и потому сторона AB , противоположная углу ADB , равна сторонѣ BC , противоположной углу DBC . Подобнымъ образомъ, третья сторона AD равна третьей BC , и слѣд. противоположныя стороны параллелограмма равны.

Изъ того же равенства тр-въ видно, что уг. A равенъ углу C , и такъ какъ уг. ADC , составленный изъ двухъ уг-въ ADB , BDC , равенъ углу ABC , составленному изъ двухъ уг-въ DBC , ABD , то и противоположные углы параллелограмма равны.

Слѣдствіе. Двѣ параллельныя линіи AB , CD ,

содержащихся между двумя параллельными AD, BC , равны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XXIX.

ТЕОРЕМА.

Если въ четырехугольн. $ABCD$ противоположныя стороны равны, такъ, что $AB = CD$ и $AD = BC$, то равныя стороны будутъ между собою параллельны и фигура будетъ параллелограммъ.

По проведеніи діагонали BD , получимъ два тр-х. 44
 ABD, BDC , которые, имѣя стороны относительно равныя, равны между собою, откуда уг. ADB , противоположныйъ сторонѣ AB , равенъ углу DBC , противоположномуъ сторонѣ CD , и сторона AD параллельна BC (пред. 24). По той же причинѣ, AB параллельна CD ; и въ слѣдствіе этого четырехугольн. $ABCD$ есть параллелограммъ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XXX.

ТЕОРЕМА.

*Если противоположныя стороны AB, CD , че- ф. 44
 тыреуголка равны и параллельны, то двѣ другія стороны также равны и параллельны, и фигура $ABCD$ будетъ параллелограммъ.*

Проведемъ діагональ BD . Такъ какъ AB параллельна CD , то внутренніе на крестъ лежащіе углы ABD, BDC , равны (пред. 24). Сверхъ того сторона $AB = DC$, сторона DB есть общая, и тр-хъ ABD равенъ тр-ху BDC (пред. 6), откуда сторона $AD = BC$, уг. $ADB = DBC$, а въ слѣдствіе этого AD параллельна BC , и фигура $ABCD$ есть параллелограммъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXI.

ТЕОРЕМА.

Дѣтъ діагонали параллелограмма, AC , BD , пересѣкаются взаимно на двѣ равныя части.

Сравнивая тр-ки ADO , COB , находимъ, что сторона $AD = CB$, уг. $ADO = CBO$ (пред. 24), и уг. $DAO = OCB$. Въ слѣдствіе этого, тр-ки равны (пред. 27), и сторона AO , противоположная углу ADO , равна OC , стороне противоположной углу OBC , откуда $DO = OB$.

Замѣчаніе. Такъ какъ, въ случаѣ равносторонняго ромба, стороны AB , BC , равны, то тр-ки AOB , OBC , имѣя стороны относительно равныя, будутъ равны, откуда слѣдуетъ, что уг. $AOB = BOC$, и по этому двѣ діагонали ромба пересѣкаются взаимно на двѣ равныя части подъ прямыми углами.

К Н И Г А II.

О КРУГѢ И ИЗМѢРЕНІИ УГЛОВЪ.

О П Р Е Д Ѣ Л Е Н І Я.

I. *Окружность круга* есть кривая линія, которой всѣ точки равно удалены отъ внутренней ч. 40. точки, называемой *центромъ*.

Кругъ есть пространство ограниченное этою кривою линією.

Замѣчаніе Иногда въ рѣчь събиваются кругъ съ окружностію, но легко возстановивъ точность этихъ выраженій, принявъ въ соображеніе, что кругъ есть поверхность, имѣющая длину и ширину, между тѣмъ какъ окружность есть только линія.

II. Всякая прямая линія CA , CE , CD и проч., проведенная отъ центра къ окружности, называется *радіусомъ* или *полупоперечникомъ*; всякая линія, какъ на пр. AB , проходящая чрезъ центръ и ограниченная съ обѣихъ сторонъ окружностію, называется *діаметромъ* или *поперечникомъ*.

Изъ опредѣленія круга видно, что всѣ радіусы равны между собою, также какъ и діаметры, равные удвоеннымъ радіусамъ.

III. *Дугою* называють часть окружности, какъ на пр. FHG .

Хорда дуги есть прямая линія FG , соединяющая ея оконечности.

IV. *Сегментъ* или *отрѣзокъ* есть поверхность или часть круга заключающаяся между дугою и хордою.

Замѣчаніе Одной и той же хордѣ FG соответствуютъ двѣ дуги FHG , FEG , и следовательно два отрѣзка, но здѣсь должно всегда подразумѣвать меньшія изъ данныхъ дугъ или сегментовъ, если противное не будетъ означено.

V. *Секторъ* или *вырѣзокъ* есть часть круга заключающаяся между дугою DE и двумя радіусами CD , CE , проведенными чрезъ конечности

ф. 47. дуги.

VI. *Линією вписанною въ кругъ* называется лин., коей конечности находятся на окружности, какъ на пр. AB .

Вписаннымъ угломъ, уголъ BAC , составленный двумя хордами и имѣющій вершину на окружности.

Вписаннымъ треугольникомъ, три-къ BAC , вершины угловъ коего находятся на окружности;

И вообще, *вписанною (фигурою)*, такая фигура, вершины угловъ которой находятся на окружности. Въ тоже время говорить, что кругъ опи-

ф. 48. санъ около аной фигуры.

VII. *Стянутою* называется линія вепрѣчающая окружность въ двухъ точкахъ, какъ на пр. AB .

VIII. *Касательная* есть линія имѣющая только одну точку общую съ окружностью; такая CD . Общая точка M называется *точкою касанія*.

IX. Подобнымъ образомъ, двѣ окружности касательны, если имѣютъ одну общую точку.

ф. 160.

X. *Описанный около круга многоугольникъ* есть многъ, коего всѣ стороны касательны къ окружности; въ этомъ случаѣ говорить также, что кругъ *вписанъ* въ многоугольникъ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.

ТЕОРЕМА.

*Всякій діаметръ раздѣляетъ кругъ и окруж- ф. 40.
ность его на двѣ равныя части.*

Ибо, накладывая фигуру АЕВ на АГВ, и сохраняя общее ихъ основаніе АВ, необходимо должно, чтобы кривая АЕВ совершенно совмѣстилась съ кривою АГВ, безъ чего существовали бы точки неравно удаленныя отъ центра, что противно опредѣленію круга.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ II.

ТЕОРЕМА.

Всякая хорда меньше діаметра.

Проведя къ конечностямъ хорды AD радіусы AC, CD, будемъ имѣть $AD < AC + CD$ или $AD < AB$. ф. 42.

Слѣдствіе. Наибольшая линія какую только можно вписатьъ въ кругъ, равна его діаметру.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ III.

ТЕОРЕМА.

Прямая линія встрѣчаетъ окружность только въ двухъ точкахъ.

Предположивъ, что она встрѣчаетъ окружность въ трехъ точкахъ, имѣя бы три точки равно удаленныя отъ центра, и слѣдовательно три равныя прямыя проведенныя изъ одной точки въ прямой линіи, что невозможно (16, 1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ IV.

ТЕОРЕМА.

Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ, равныя дуги стягиваются равными хордами; и на оборотъ, равныя хорды стягиваютъ равныя дуги.

Если радіусъ AC равенъ радіусу EO , а дуга AMD равна дугѣ ENG , то и хорда AD будетъ равна хордѣ EG .

Такъ какъ діаметръ AB равенъ діаметру EF , то полукругъ $AMDB$ можетъ быть положенъ на полукругъ $ENGF$, и кривая $AMDB$ совершенно совмѣстится съ кривою $ENGF$. Но часть AMD равна ENG , по положенію; слѣд. точка D упадетъ въ точку G , и хорда AD будетъ равна хордѣ EG . Обратно, при предположеніи радіуса $AC = EO$ и хорды $AD = EG$, дуга EMD будетъ равна дугѣ ENG . Ибо, проводя радіусы CD , OG , получимъ два тр-ка ACD , EOG , которые имѣютъ стороны относительно равныя, а именно: $AC = EO$, $CD = OG$, и $AD = EG$, и потому будутъ равны (11, I); отсюда уг. $ACD = EOG$. Но если наложимъ полукругъ ADB на равный ему EGF , то очевидно, по равенству ACD и EOG , что радіусъ CD упадетъ на радіусъ OG , и точка D въ точку G ; слѣд. дуга AMD будетъ равна дугѣ ENG .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ V.

ТЕОРЕМА.

Въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ, большая дуга стягивается большею хордою, и обратно, если разсматриваемыя дуги будутъ менѣе полукружности.

Положивъ, что дуга $АН$ болѣе дуги AD , проведе- ф. 60.
демъ хорды AD , $АН$, и радіусы CD , CH . Двѣ сторо-
ны AC , CH , тр-ка ACH , равны двумъ сторо-
намъ AC , DC , тр-ка ACD , по уг. ACH болѣе угла
 ACD (10, I); слѣд. третья сторона $АН$ болѣе
третьей AD ; и по этому наибольшая изъ двухъ
хордъ есть та, которая стягиваетъ наибольшую
дугу.

Обратно, если хорда $АН$ болѣе AD по положенію,
то изъ тѣхъ же треугольниковъ выведемъ,
что уг. ACH болѣе угла ACD , и дуга $АН$ болѣе
дуги AD .

Примѣчаніе. Мы предполагали здѣсь, что дуги
наши разсматриваемыя, менѣе полуокружности.
Еслибъ онѣ были болѣе полуокружности то про-
тивное имѣло бы мѣсто, и хорда уменьшалась бы
съ увеличеніемъ дуги, и обратно: такъ на при-
мѣръ, хорда AD , дуги $AKBD$, болѣе $AKBH$, была
бы менѣе хорды $АН$, второй дуги.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

ТЕОРЕМА.

Радіусъ CG , перпендикулярный къ хордѣ AB , раздѣляетъ хорду и дугу AGB , ея стягивающую, на двѣ равныя части. ф. 61.

Проведемъ радіусы AC , CB , которые, въ отно-
шеніи къ перпендикуляру CD , будутъ равно на-
клонными. Отсюда видно, что они равно удаля-
ются отъ перпендикуляра (17, I), и въ слѣдствіе
этого $AD = DB$.

Во второмъ же случаѣ, по равенству $AD = DB$,
 CG есть перпендикуляръ возставленный въ сред-
нѣ AB ; слѣд. (17, I), каждая точка перпендику-
ляра должна быть равно удалена отъ оконечно-
стей A и B , и какъ точка G принадлежитъ къ

числу ихъ, то разстояніе $AG = BG$. Но если хорда AG равна хордѣ BG , то и дуга AG будетъ равна BG (пред. 4); слѣд. радіусъ CG , перпендикулярный къ хордѣ AB , раздѣляетъ дугу ея стягиваемую по поламъ, въ точкѣ G .

Замѣчаніе Центръ C , точка D , середина хорды AB и G , середина дуги ея стягиваемой, находятся на одной прямой линіи перпендикулярной къ хордѣ. Но такъ какъ доснапочно двухъ точекъ для опредѣленія положенія прямой линіи, то всякая прямая линія, проходящая чрезъ двѣ изъ означенныхъ точекъ, пройдетъ въ тоже время чрезъ третью и будетъ перпендикулярна къ хордѣ.

Отсюда же слѣдуетъ, что *перпендикуляръ возставленный въ серединѣ хорды пройдетъ чрезъ центръ круга и средину дуги стягиваемой хордою.*

Ибо, проведенный перпендикуляръ есть потъ же самый, который былъ бы опущенъ изъ центра на хорду, потому что оба проходятъ чрезъ средину хорды.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

ТЕОРЕМА.

Чрезъ три данныя точки A, B, C , не находящіяся на одной прямой, можно провести окружность, и притомъ только одну.

Соединимъ точки A и B , B и C , и раздѣлимъ прямыя AB, BC , пополамъ, перпендикулярами DE, FG , которые встрѣтятся въ точкѣ O .

Очевидно, что линіи DE, FG , должны пересѣчься, если онѣ непараллельны. Если же предположимъ, что онѣ параллельны, то линія AB , перпендикулярная къ DE , будетъ перпендикулярна къ FG (24, 1), и уголъ K будетъ прямой; но такъ

какъ BK , продолженіе BD , различна отъ BF , ибо точки A, B, C , не находятся на одной прямой, то имѣли бы два перпендикуляра, опущенные изъ одной точки на одну прямую, что не возможно (13, I); и потому перпендикуляры DE и FG всегда пересѣкутся въ точкѣ O .

Точка O , какъ принадлежащая перпендикуляру DE , равно удалена отъ точекъ A и B (17, I); также точка O , принадлежащая перпендикуляру FG , равно удалена отъ точекъ B и C , следовательно при разстояніи AO, BO, CO , будутъ равны и окружность круга, описанная изъ точки O , какъ центра, радіусомъ OB , пройдетъ чрезъ точки A, B, C .

Доказавъ такимъ образомъ, что чрезъ три точки, находящіяся на одной прямой, всегда можно провести окруж-ть круга, должно доказать еще, что чрезъ три точки можно провести только одну окруж-ть.

Если предположимъ, что имѣемъ другую окружность проходящую чрезъ точки A, B, C , то центръ ея не можетъ находиться въ линіи DE (17, I), по тому что въ этомъ случаѣ онъ будетъ не равно удаленъ отъ точекъ A и B ; этотъ центръ не можетъ находиться въ линіи FG , по той же причинѣ, и слѣд. долженъ находиться въ одно и то же время на обѣихъ прямыхъ DE, FG . Но такъ какъ прямыя линіи пересѣкаются только въ одной точкѣ, то посему существуетъ только одна окруж-ть круга проходящая чрезъ три данныя точки.

Слѣдствіе. Двѣ окруж-ти встрѣчаются только въ двухъ точкахъ. Еслибъ онѣ имѣли три общія точки, то центры ихъ совпали бы, и онѣ составили бы одну и ту же окружность.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

ТЕОРЕМА.

Равныя хорды равно удалены отъ центровъ, и изъ двухъ неравныхъ хордъ меньшая болѣе удалена отъ центра.

Ф. 53. 1. Пусть хорда $AB = DE$; раздѣлимъ эти хорды пополамъ перпендикулярами CF , CG . и проведемъ радіусы CA , CD .

Прямоугольные треугольники CAF , CDG , имѣютъ гипотенузы CA , CD , равныя; кромѣ того, сторона AF , половина AB , равна сторонѣ DG , половине DE , и треугольники равны; слѣдов., третья сторона CF равна третьей сторонѣ CG ; откуда 1-е, *двѣ равныя хорды AB , DE , равно удалены отъ центра.*

2. Пусть хорда AN болѣе DE , въ слѣдствіе чего и дуга AKN будетъ болѣе дуги DME (пред. 5). Возмемъ на дугѣ AKN часть $ANB = DME$, проведемъ хорду AB и опустимъ перпендикуляры CF , CI , на хорду и на линію AN . Очевидно, что CF болѣе CO , а CO болѣе CI (16, I), и имѣя съ болѣею причиною $CF > CI$. Но такъ какъ $CF = CG$, по равенству хордъ AB , DE , то $CG > CI$; и слѣд. 2-е, *изъ двухъ неравныхъ хордъ, меньшая болѣе удалена отъ центра.*

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

ТЕОРЕМА.

Ф. 54. *Перпендикуляръ BD , возставленный въ концѣ радіуса CA , есть касательная къ окружности.*

Такъ какъ всякая наклонная OE длиннѣе перпендикуляра CA (16, I), то, посему, точка E находится внѣ окружности, линія BD будетъ имѣть съ нею только одну общую точку, и слѣд. будетъ касательною къ окружности (опр. 8).

Замѣчаніе. Черезъ данную точку А можно провести только одну касательную АD къ окружности. Допуская возможность провести другую, увидимъ, что послѣдняя не будетъ перпендикулярна къ радіусу АС, и по этому радіусъ СА сдѣлается наклонною, относительно другой касательной, а перпендикуляръ опущенный на нее будетъ менѣе СА; слѣд. предполагаемая касательная войдетъ въ предѣлы круга и будетъ съкущуюю.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

ТЕОРЕМА.

Дуги окружности MN, PQ, заключающіяся между параллельными АВ, DE, равны между собою.

Здѣсь могутъ встрѣтиться три случая:

1. Если обѣ параллельныя линіи суть съкущія, ф. 11. то проведя радіусъ СН, перпендикулярный къ хордѣ МР, увидимъ, что онъ будетъ въ тоже время перпендикуляренъ къ параллельной ей NQ (24. I), и слѣд. точка Н будетъ вдругъ серединою дуги МНР и дуги NHQ (6), а отсюда дуга МН = НР, дуга НН = НQ. и наконецъ, МН — НН = НР — НQ, то есть $MN = PQ$.

2. Если одна изъ параллельныхъ АВ, DE, будетъ касательною, то радіусъ СН, проведенный черезъ точку касанія Н, будетъ перпендикуляренъ ф. 12 къ касательной DE (9), и къ параллельной ей МР, хордѣ дуги МНР, которую онъ раздѣлитъ пополамъ въ точкѣ Н. Отсюда слѣдуетъ, что дуги МН, НР, заключающіяся между параллельными АВ, DE, равны.

3. Наконецъ, если параллельныя DE, IL, касательны къ кругу въ точкахъ Н и К, то проведя съкущую АВ, параллельную имъ, получимъ МН = НР

и $МК = КР$; слѣд. вся дуга $ПМК = ПРК$, и каждая изъ нихъ составляетъ полуокруж-ть.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

ТЕОРЕМА.

Если дать окружности пересѣкаются въ двухъ точкахъ, то линія, проходящая чрезъ центры
 Ф. 67. *окружностей, перпендикулярна къ хордѣ, которая соединяетъ точки пересѣченія.*

Очевидно, что линія $АВ$, соединяющая точки пересѣченія окруж-тей, есть хорда общая имъ обѣимъ. Если возставимъ перпендикуляръ въ серединѣ хорды, то онъ пройдетъ чрезъ оба центра $С$, $Д$ (6). Но такъ какъ чрезъ двѣ данныя точки можно провести только одну прямую, то прямая проходящая чрезъ центры будетъ перпендикулярна къ общей хордѣ въ ея серединѣ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

ТЕОРЕМА.

Если разстояніе между центрами будетъ менѣе суммы радіусовъ и если, въ то же время, болѣе болѣе большій радіусъ менѣе малаго радіуса сложеннаго съ разстояніемъ между центрами, то круги пересѣкнутся.

Въ случаѣ пересѣченія, построеніе треугольника $САД$ должно быть возможно; для этого нужно, не только чтобы $СД$ была $< АС + АД$, но также, чтобы наибольшій радіусъ $АД$ былъ $< АС + СД$. Въ случаѣ возможности построенія треугольника $САД$, очевидно, что окружности, описанныя изъ центровъ $С$ и $Д$, пересѣкнутся въ $А$ и $В$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

ТЕОРЕМА.

Если разстояніе центров C и D двух круговъ будетъ равно суммѣ ихъ радіусовъ CA, AD , то круги эти коснутся внѣшними ихъ частями.

Очевидно, что они будутъ имѣть общую точку A , и примутъ только одну, потому что, въ случаѣ пересѣченія ихъ въ двухъ точкахъ, не обходимо, чтобы разстояніе центровъ было менѣе суммы радіусовъ (12).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

ТЕОРЕМА.

Если разстояніе CD центровъ двухъ круговъ равно разности ихъ радіусовъ CA, AD , то круги коснутся внутри.

Очевидно, что они будутъ имѣть только одну общую точку A , и немогутъ имѣть другой; ибо для этого нужно, чтобы болѣйшій радіусъ былъ менѣе суммы радіуса AC и разстоянія CD между центрами (12), что не имѣетъ мѣста.

Слѣдствіе. Очевидно, что когда два круга касаются вѣн или внутри, то центры ихъ и точка касанія находятся на одной прямой линіи.

Замѣчаніе. Всѣ круги, имѣющіе центры на прямой линіи CD и проходящіе чрезъ точку A , касаются между собою, потому что имѣютъ одну только общую точку A . Если въ точкѣ A возставимъ, къ линіи CD , перпендикуляръ AE , то онъ будетъ общею касательною всѣхъ этихъ круговъ,

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

ТЕОРЕМА.

Въ одномъ кругѣ или въ двухъ равныхъ кругахъ, равные углы ACB , DCE , имѣющіе свои вершины въ центрѣ, заключаютъ равныя дуги AB , DE , на окружностяхъ; и обратно, если дуги AB , DE , равны, то и углы ACB , DCE равны.

1. Если углы ACB , DCE , равны, то они могутъ быть наложены одинъ на другой, и такъ какъ стороны ихъ также равны, то очевидно, что точка A упадетъ въ точку D и точка B въ E . Тогда дуга AB должна упасть на дугу DE , и еслибы эти дуги не совмѣстившись, то были бы точки неравно удаленныя отъ центра, что невозможно; слѣд. $AB = DE$.

2. При предположеніи $AB = DE$, углы ACB и DCE будутъ необходимо равны: въ противномъ случаѣ положимъ, что ACB будетъ болѣе, возьмемъ уг. $ACI = DCE$, и, изъ доказаннаго выше, будемъ имѣть $AI = DE$. Но, по предположенію, дуга $AB = DE$, откуда $AI = AB$, т. е. часть равна цѣлому, что невозможно, и слѣд. уголъ $ACB = DCE$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

ТЕОРЕМА.

Если въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ, углы ACB , DCE , находятся между собою въ отношеніи цѣлыхъ чиселъ, такъ какъ и дуги AB , DE , или заключаемыя, то будемъ имѣть пропорцію уг. ACB : уг. $DCE = \text{дуга } AB : \text{дуга } DE$.

Предположимъ, напротивъ, что углы ACB , DCE , относятся между собою какъ 3 къ 4, или

что уголъ M , служащій имъ общему мѣроу, будетъ заключаться семь разъ {въ уголъ ACB и четыре раза въ уголъ DCE . Такъ какъ частныя углы ACm , mCn , nCr и проч., DCx , xCy и проч., равны между собою; слѣд. частныя дуги Am , mn , np . . . ; Dx , xy , и проч., будутъ также равны между собою (15); и по этому цѣлая дуга AB будетъ относиться къ цѣлой дугѣ DE , какъ 7 къ 4. Очевидно, что тоже разсужденіе будетъ имѣть мѣсто, когда 7 и 4 замѣнимъ другими числами; и слѣдовательно въ томъ случаѣ, когда углы ACB , DCE , могутъ быть выражены въ цѣлыхъ числахъ, то дуги AB , DE будутъ относиться между собою какъ углы ACB , DCE .

Замѣчаніе. Обратно, если дуги AB , DE , относятся между собою, какъ два цѣлыхъ числа, то углы ACB , DCE , будутъ относиться какъ тѣже самыя числа, и въ слѣдствіе этого получимъ пропорцію $ACB : DCE = AB : DE$; ибо, по равенству частныхъ дугъ Am , mn , np , Dx , xy и проч., частныя углы ACm , mCn , nCr ; DCx , xCy и проч., будутъ также равны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

ТЕОРЕМА.

Каково бы ни было отношеніе угловъ ACB , ACD , но они всегда будутъ относиться между собою какъ дуги AB , AD , заключающіяся между ихъ сторонами и описанныя изъ вершинъ, взятыхъ 4. 63. за центры, одинаковыми радіусами.

Предположимъ, что меньшій уголъ помѣщенъ въ большемъ, и если изложенное нами свойство не имѣетъ мѣста, то уг. ACB будетъ относиться къ углу ACD , какъ дуга AB къ дугѣ большей или меньшей нежели AD . Предполагая, что она

будетъ болѣе AD , и означивъ ее чрезъ AO , получимъ уг. ACB : уг. $ACD = \text{дуга } AB : \text{дуга } AO$.

Если вообразимъ теперь, что дуга AB разделена на равныя части, изъ конхъ каждая меньше DO , то покрайней мѣрѣ одна изъ точекъ дѣленія будетъ находиться между точками D и O . Означивъ чрезъ I эту точку, получимъ, по проведеніи CI , дуги BA , AI , которыя находятся между собою въ отношеніи цѣлыхъ чиселъ, и по предыдущей теоремѣ, уголъ ACB : уг. $ACI = \text{дуга } AB : \text{дуга } AI$.

Сравнивая эти пропорціи и принявъ въ соображеніе равенство ихъ предыдущихъ членовъ, заключимъ, что послѣдующіе будутъ пропорціональны, и такимъ образомъ, уг. ACD : углу $ACI = \text{дуга } AO : \text{дуга } AI$.

Въ этой пропорціи, дуга AO болѣе дуги AI , и потому должно, чтобы уг. ACD былъ болѣе угла ACI ; но такъ какъ, напротивъ того, онъ меньше, слѣд. невозможно, чтобы уг. ACB относился къ углу ACD такъ какъ дуга AB къ дугѣ болѣе нежели AD .

Точно такимъ же образомъ докажемъ, что четвертый членъ не можетъ быть меньше AD ; слѣд. онъ долженъ быть ему равенъ и поэтому будемъ имѣть пропорцію.

Уголъ ABC : уг. $ACD = \text{дуга } AB : \text{дуга } AD$.

Слѣствіе. Такъ какъ уголъ при центрѣ и дуга, заключающаяся между его сторонами, имѣютъ такую взаимную связь, что съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ одного изъ этихъ количествъ, увеличивается или уменьшается другое въ одинаковомъ отношеніи, то можно взять одно изъ нихъ за мѣру другого. Основываясь на этомъ, мы будемъ приниматьъ впродъ дугу AB за мѣру угла ABC . Должно только замѣнить, при взаимномъ сравненіи угловъ, что дуги служащія имъ

мѣрою, должны были бытъ описаны равными радіусами, но это условіе подразумѣвается во всѣхъ предыдущихъ теоремахъ.

Замѣчаніе I. Казалось бы естественнѣе измѣрять количества другими количествами того же самаго рода, и, основываясь на этомъ началѣ, относить всѣ углы къ прямому углу. Въ такомъ случаѣ, принявъ прямой уголъ за единицу, острый уголъ выражался бы числомъ заключающимся между 0 и 1, а тупой числомъ заключающимся между 1 и 2. Но этотъ способъ выражанія угловъ неудобенъ для употребленія, и найдено, что измѣреніе дугами гораздо проще, по причинѣ легкости построенія дугъ равныхъ даннымъ, и по многимъ другимъ причинамъ. Впрочемъ, если измѣреніе угловъ дугами круга есть нѣкоторымъ образомъ непрямо, то весьма не трудно достигнуть, посредствомъ этого способа, до измѣренія прямого и независимаго, ибо, сравнивая дугу служащую мѣрою угла съ четвертью окружности, получимъ отношеніе данного угла къ прямому углу, что даетъ независимую мѣру.

Замѣчаніе II. Все, что было доказано въ трехъ предыдущихъ теоремахъ, относительно сравненія угловъ съ дугами, имѣетъ равнымъ образомъ мѣсто въ сравненіи секторовъ съ дугами; ибо секторы бываютъ иногда только равны, когда углы равны, и вообще они пропорціональны угламъ; слѣдов. два сектора ACB , ACD , взятые въ одномъ кругѣ или въ равныхъ кругахъ, относятся между собою, какъ дуги AB , AD , служащія имъ основаніями.

Отсюда видно, что дуги круга, служащія мѣрою угловъ, могутъ также служить мѣрою разныхъ секторовъ одного круга или разныхъ круговъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

ТЕОРЕМА.

Вписанный угол BAD измѣряется половиною дуги BD, заключающейся между его сторонами.

Ф. 61. Предположивъ сначала, что центръ круга за-
 н 65. ключается въ уголъ BAD, проведемъ діаметръ AE
 и радіусы CB, CD. Вписанный уголъ BCE, ир-ка ABC,
 равенъ суммѣ двухъ вписанныхъ CAB, ABC,
 (19, I), и въ равнобедренномъ ир-кѣ BAC, уголъ
 $CAB = ABC$; слѣд. уг. BCE будетъ вдвое болѣе
 угла BAC.

Уголъ BCE, какъ уголъ при центрѣ, измѣ-
 ряется дугою BE, и слѣд. уголъ BAC будетъ из-
 мѣряться половиною BE. Точно такимъ же обра-
 зомъ докажется, что уголъ CAD будетъ измѣ-
 ряться половиною ED; и въ слѣдствіе всего
 $BAC + CAD$, или уг. BAD, будетъ измѣряться по-
 ловиною $BE + ED$, или половиною дуги BD.

Предполагая, что центръ C находится внѣ
 Ф. 66. угла BAD, проведемъ діаметръ AE. Уголъ BAE бу-
 детъ измѣряться половиною BE, а уголъ DAE по-
 ловиною DE; слѣд. ихъ разность BAD будетъ из-
 мѣряться половиною BE безъ половинъ ED, или
 половиною BD.

Отсюда слѣдуетъ, что всякій вписанный уголъ
 измѣряется половиною дуги, заключающейся ме-
 ду его сторонами.

Слѣдствіе I. Всѣ углы BAC, BDC, и проч.,
 вписанные въ одномъ сегментѣ, равны между со-
 бою; ибо всѣ они измѣряются одною дугою BOC.

Слѣдствіе II. Всякій уголъ BAD, вписанный
 въ полуокружность еснъ прямой, ибо онъ измѣ-
 ряется половиною полуокружности BOD, или чети-
 вертью окружности.

Чтобы доказать это другимъ образомъ, про-

ведемъ радіусъ AC . Въ равнобедренномъ тр-кѣ BAC , уголъ $BAC = ABC$, а въ равнобедренномъ тр-кѣ CAD , уголъ $CAD = ADC$; слѣд. $BAC + CAD$, или $BAD = ABD + ADB$. Но если сумма двухъ угловъ B и D , тр-ка ABD , равна претъемъ углу BAD , то сумма всѣхъ угловъ тр-ка, равная двумъ прямымъ угламъ, будетъ равна удвоенному углу BAD , откуда слѣдуетъ, что уголъ BAD есть прямой.

Слѣдствіе III. Всякій уголъ BAC , вписанный въ сегментѣ болѣе полукруга, есть острый; ф. 66. ибо имѣетъ мѣрою дугу BOC , меньшую полуокружности.

Всякій уголъ BOC , вписанный въ сегментѣ меньше полукруга, есть тупой, потому что онъ измѣряется половиною дуги BAC , болѣе полуокружности.

Слѣдствіе IV. Сумма противоположныхъ угловъ A и C , чешыреугольника $ABCD$, равна двумъ ф. 67. прямымъ угламъ; ибо уг. BAD измѣряется половиною дуги BCD , а уг. BCD измѣряется половиною дуги BAD , откуда слѣдуетъ, что сумма ихъ, имѣющая мѣрою полуокружность, будетъ равна двумъ прямымъ угламъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX

ТЕОРЕМА.

Уголъ BAC , составленный касательною и хордою, измѣряется дугою $AMDC$, которая заключается между его сторонами.

Проведемъ, въ точкѣ касанія A , діаметръ AD . Уг. BAD , какъ прямой (9), измѣряется половиною полуокружности AMD , а уг. DAC измѣряется ф. 69. половиною DC ; слѣд. $BAD + DAC$, или BAC , бу-

дуги измѣрился половиною AMD съ половиною DC , или половиною цілою дуги $AMDC$.

Точно такимъ же образомъ докажемъ, что уголъ CAE измѣрился половиною дуги AC , заключающейся между его сторонами.

ЗАДАЧИ ОТНОСЯЩИЯСЯ КЪ ДВУМЪ ПЕРВЫМЪ КНИГАМЪ.

Задача I.

Данную прямую AB раздѣлить на двѣ равныя части.

Изъ точекъ A и B , какъ центровъ, радіусомъ большимъ половины данной прямой AB , опишемъ круги, пересѣкающіеся въ точкѣ D , которая будетъ равно удалена отъ точекъ A и B . Опредѣлимъ, сверху или снизу линіи AB , еще точку E , равно отстоящую отъ точекъ A и B , и чрезъ точки D и E проведемъ прямую DE , которая раздѣлитъ линію AB на двѣ равныя части.

Обѣ точки D , E , должны находиться на перпендикулярѣ, возстановленномъ въ серединѣ линіи AB . Но такъ какъ чрезъ двѣ данныя точки можно провести только одну прямую линію, то линія DE и будетъ есть самый перпендикуляръ, который раздѣлитъ линію AB на двѣ равныя части въ точкѣ C .

Задача II.

Въ точкѣ A , данной на прямой BC , возставить къ прямой перпендикуляръ.

Возмемъ точки B и C , равно отстоящія отъ точки A ; опишемъ изъ этихъ точекъ, какъ цен-

прямую, радиусомъ большимъ BA , дуги пересѣкающіеся въ точку D , и проведемъ AD , которая будетъ искомымъ перпендикуляромъ.

Точка D , равно удаленная отъ точекъ B и C , принадлежитъ перпендикуляру возстановленному въ серединѣ BC , и слѣд. AD будетъ искомымъ перпендикуляромъ.

Замѣчаніе. Можно употреблять вѣдѣсь же способъ для построения прямого угла BAD , въ точкѣ A , на данной прямой BC .

Задача III.

Изъ точки A , данной вѣдѣсь прямой линіи BD , опустить на прямую перпендикуляръ.

Изъ точки A , какъ центра, достаточно большимъ радиусомъ, опишемъ дугу пересѣкающую линію BD въ точкахъ B и D ; опредѣлимъ точку E , равно удаленную отъ вѣдѣхъ точекъ, и проведемъ прямую AE , которая будетъ искомымъ перпендикуляромъ.

Точки A и E равно удалены отъ точекъ B и D ; слѣд. AE есть перпендикуляръ въ серединѣ DB .

Задача IV.

При точкѣ A , на линіи AB , построить уголъ равный данному углу K .

Изъ вершины K , какъ центра, произвольнымъ радиусомъ опишемъ дугу II , заключающуюся между сторонами угла; также изъ точки A , какъ центра, радиусомъ AB , равнымъ KI , опишемъ неопредѣленную дугу BO ; возьмемъ радиусъ равный хордѣ II , и изъ точки B , какъ центра, опишемъ дугу BO , въ точкѣ O ; наконецъ, проведемъ AD , получимъ уголъ DAB , равный данному K . Такъ какъ дуги BD , II , имѣютъ равные радиусы и хорды, то

они равны (4, II), и въ слѣдствіе этого уголъ $\angle BAD = \angle IKL$.

Задача V.

Данный уголъ или дугу раздѣлить на двѣ равныя части.

74. 1. Если нужно раздѣлять дугу AB на двѣ равныя части, то изъ точекъ A и B , какъ центровъ, опишемъ одинаковымъ радіусомъ двѣ дуги, пересѣкающіяся въ точкѣ D , и поможемъ, чрезъ точку D и центръ C , проведемъ CD , которая раздѣлитъ дугу AB на двѣ равныя части, въ точкѣ E .

Такъ какъ точки C и D равно отстоятъ отъ точекъ A и B , оконечностей хорды AB , то линія CD перпендикулярна къ этой хордѣ въ ея среднѣ, и слѣд. раздѣляетъ дугу AB на двѣ равныя части въ точкѣ E (6, I).

2. Если нужно раздѣлить на двѣ равныя части уголъ ACB , то изъ вершины C , какъ центра, опишемъ дугу AB , и окончивающіе построение точно такъ какъ показано выше. Очевидно, что прямая CD раздѣлитъ на двѣ равныя части уголъ ACB .

Замѣчаніе. Употребляя то же построение, можно будетъ раздѣлить каждую изъ половинъ AE , ED , на двѣ равныя части. Продолжая такіе послѣдовательныя дѣйствія, раздѣлимъ уголъ въ четыре, восемь, шестнадцать и т. д. равныхъ частей.

Задача VI.

Чрезъ данную точку A , провести прямую, параллельную данной прямой BC .

75. Изъ точки A , какъ центра, достаточна большаго радіуса, опишемъ неопредѣленную дугу EO ; изъ точки E , какъ центра, тѣмъ же радіусомъ опишемъ дугу FO , которая пересѣчетъ первую дугу въ точкѣ O . Проведемъ AO , которая и будетъ параллельна BC .

сомъ опишемъ дугу AF , возьмемъ $ED = AF$, и проведемъ AD , которая будетъ искомая линия.

Ибо, по проведеніи AE , получимъ внутренніе на крестъ лежащіе углы AEF , EAD , равные между собою, откуда слѣдуетъ что линии AD , EF , параллельны (24, I).

Задача VII.

Даны два угла A и B треугольника; найти третій.

Проведемъ неопредѣленную прямую DEF ; сделаемъ, при точкѣ E , углы $DEC = A$ и $CEH = B$; остальной уголъ HEF будетъ равенъ искомому, ибо сумма всехъ трехъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ.

Задача VIII.

Даны две стороны B и C и уголъ A , между ними заключающійся; построить треугольникъ.

Проведа неопредѣленную линію DE , построимъ при точкѣ D уголъ EDF , равный данному углу A ; потомъ возьмемъ $DG = B$, $DH = C$, и проведемъ GH . Соснавленный такимъ образомъ треугольникъ DGH будетъ искомымъ.

Задача IX.

По данной сторонѣ и двумъ угламъ треугольника построить треугольникъ.

Данные углы будутъ, или оба прилежащіе, или одинъ только прилежащій, а другой противоположный данной сторонѣ. Въ последнемъ случаѣ, опредѣлимъ третій уголъ (пред. 7), и будемъ имѣть два прилежащіе угла. Проведемъ потомъ DE , равную данной сторонѣ, нанесемъ при точкѣ D уг. EDF , равный одному изъ прилежащихъ

угловъ, и при точкѣ E уг. DEG равный другому; линіи DF , EG , пересѣкутся въ H , и DEH будетъ искомый триугольникъ.

Задача X.

По даннымъ тремъ сторонамъ A , B , C , триугольника, построить триугольникъ.

Проведемъ DE , равную стороне A ; изъ точки E , какъ центра, радиусомъ равнымъ второй стороне B , опишемъ дугу; изъ точки D , какъ центра, радиусомъ равнымъ третьей стороне C , опишемъ вторую дугу, пересѣкающую первую въ точкѣ F , и проведемъ линіи DF , EF , получимъ искомый триугольникъ DEF .

Замѣчаніе. Если одна изъ сторонъ будетъ болѣе суммы двухъ прочихъ, то дуги не пересѣкутся; но построение всегда возможно, какъ скоро сумма двухъ какихъ нибудь сторонъ болѣе третьей.

Задача XI.

По даннымъ двумъ сторонамъ A и B триугольника, и углу C , противоположному сторонѣ B , построить триугольникъ.

Здѣсь можетъ быть два случая: 1. Если уг. C ф. 10. будетъ прямой или тупой, то построимъ уг. EDF , равный уг. C , возьмемъ $DE = A$, изъ точки E , какъ центра, радиусомъ равнымъ сторонѣ B , опишемъ дугу, пересѣкающую линію DF , въ точкѣ F . Проведемъ EF , получимъ триугольникъ DEF , который будетъ искомымъ.

Въ второмъ случаѣ необходимо, чтобъ сторона B была болѣе стороны A , ибо уголъ C , какъ тупой или прямой, будетъ наибольшій изъ угловъ, следовательно и сторона ему противоположная должна быть наибольшею.

2. Если угол C острый, и сторона B больше A , то построение неизмѣнится и DEF будетъ искомымъ треугольникомъ.

Но если угол C будетъ острый и сторона B менѣе A , то дуга, описанная радіусомъ $EF = B$, изъ точки E , какъ центра, пересѣчетъ сторону DF , въ двухъ точкахъ F и G , находящихся по одну сторону D , и тогда будемъ имѣть два треугольника DEF , DEG , равно удовлетворяющіе вопросу.

Замѣчаніе. Рѣшеніе вопроса невозможно въ томъ случаѣ, когда сторона B менѣе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки E , на линію DF .

Задача XII.

Даны два смежныя стороны параллелограмма A и B , и уголъ C , между ими заключающійся; построить параллелограммъ.

Проведемъ линію $DE = A$; при точкѣ D нанесемъ уголъ $FDE = C$, и возьмемъ $DF = B$. Опишемъ потомъ двѣ дуги, одну изъ точки F , какъ центра, радіусомъ $FG = DE$, а другую изъ точки E , какъ центра, радіусомъ $EG = DF$; чрезъ точку G пересѣченія ихъ проведемъ FG , EG , и $DEGF$ будетъ искомымъ параллелограммъ.

Такъ какъ, по построенію, противоположныя стороны равны, то отсюда слѣдуетъ, что начерченная фигура есть параллелограммъ (30, I), составленный по даннымъ сторонамъ и углу.

Слѣдствіе. Если данный уголъ будетъ прямой, то получимъ прямоугольникъ, а если стороны равны, то квадратъ.

Задача XIII.

Найти центръ даннаго круга или дуги.

Возьмемъ на окружности или на дугѣ три произвольныя точки A , B , C ; проведемъ или вообразимъ линіи AB и BC , и раздѣлимъ каждую изъ этихъ линій пополамъ перпендикулярами DE , FG ;

точка O пересѣченія вписхъ перпендикуляровъ будетъ искомый центръ.

Это построение употребляется также для проведенія окружности чрезъ три данныя точки A , B , C , и для описанія ее около даннаго треугольника ABC .

ЗАДАЧА XIV.

Чрезъ данную точку провести касательную къ кругу.

Ф 86. Если данная точка A находится на окружности, то проведемъ радіусъ CA и линію AD , къ нему перпендикулярную, которая будетъ искомою касательною (9, II).

Ф 86. Если же данная точка A будетъ находиться внѣ окружности, то соединивъ ее съ центромъ прямою CA , раздѣлимъ CA по поламъ въ точкѣ O , и взявъ ее за центръ, опишемъ радіусомъ CO кругъ, пересѣкающій данную окружность въ точкѣ B , и проведемъ AB , которая будетъ искомою касательною.

Ибо, по проведеніи BC , уголъ CBA , вписанный въ полуокружность, будетъ прямой (18, II); следовательно AB перпендикулярна къ концу радіуса CB , и поэтому есть касательная къ кругу.

Замѣчаніе. Такъ какъ A находится внѣ круга, то ясно, что будутъ существовать двѣ касательныя AB , AD , равныя и проходящія чрезъ данную точку A ; онѣ равны потому, что прямоугольные треугольники CBA , CDA , имѣютъ общую гипотенузу CA , и сторону $CB = CD$; а въ слѣдствіе равенства треугольниковъ (18, I), сторона $AD = AB$ и уголъ $CAD = CAB$.

ЗАДАЧА XV.

Въ данномъ треугольникѣ ABC вписать кругъ.

Ф 87. Раздѣлимъ углы A и B пополамъ линіями AO

и BO , который пересѣкнется въ точку O , и опустимъ изъ нея перпендикуляры OD , OE , OF , на три стороны триугольника. Эти перпендикуляры будутъ равны, ибо уголъ $BAO = OAF$, по построению; прямой уголъ $ABO = AFO$, и третій уголъ AOD равенъ третьему AOE . Кроме того, сторона AO есть общая для $\triangle AOD$, $\triangle AOE$, и слѣдовательно эти триугольники, имѣя по равной сторонѣ, прилежащей къ равнымъ угламъ, будутъ равны, откуда $OD = OE$. Точно такимъ же образомъ докажемъ, что три $\triangle BOD$, $\triangle BOE$, равны; слѣдов. $OD = OE$ и три перпендикуляра OD , OE , OF , равны между собою.

Если опишемъ теперь изъ точки O , какъ центра, радиусомъ OD , окружность, то очевидно, что она будетъ вписана въ триугольникъ ABC , ибо сторона AB , перпендикулярная къ концу радиуса OD , касательна къ кругу. Тоже можно сказать о сторонахъ BC , AC .

Замѣчаніе. Три линіи, раздѣляющія углы триугольника пополамъ, встрѣчаются въ одной точкѣ.

Задача XVI.

На данной прямой AB описать сегментъ, вмѣщающій данный уголъ C , или такой, чтобы въ немъ вписанные были равны данному углу C .

Продолживъ AB до D , построимъ при точкѣ B , ф. 10. уголъ $DBE = C$, возставимъ перпендикуляры BO къ BE и GO къ AB , въ ея срединѣ; изъ точки ихъ встрѣчи O , какъ центра, радиусомъ OB , опишемъ кругъ, и искомый сегментъ будетъ AMB .

Такъ какъ линія BF перпендикулярна къ оконечности радиуса OB , то она касательна къ кругу, и уголъ ABF измѣрится половиною дуги AKB (19. II). Кроме того вписанный уголъ AMB

будетъ также измѣряться половиною дуги AKB ; следовательно $AMB = ABF = EBD = C$, и посему все углы, вписанные въ сегментъ AMB , равны данному углу C .

Замѣчаніе. Еслибъ данный уголъ былъ прямой, то искомый сегментъ былъ бы полукругъ, описанный на линіи AB , взятой за діаметръ.

Задача XVII.

Найти численное отношеніе между двумя данными прямыми AB , CD , въ томъ случаѣ когда онѣ будутъ имѣть общую мѣру.

Накладывая меньшую линію CD на большую AB возможное число разъ, положимъ, напримѣръ, что она будетъ заключаться въ AB два раза, съ остаткомъ BE .

Будемъ накладывать остатокъ BE на BC , столько разъ сколько будетъ возможно; наприм., одинъ разъ съ остаткомъ DF .

Положимъ второй остатокъ DF на первый BE , возможное число разъ: напр., одинъ разъ съ остаткомъ BG ; наложимъ потомъ третій остатокъ BG на второй DF , столько разъ, сколько первый можетъ заключаться въ последнемъ.

Должно продолжать подобное дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока получимъ такой остатокъ, который бы заключался въ предыдущемъ цѣлое число разъ.

Этотъ послѣдній остатокъ будетъ общею мѣрою предложенныхъ линій, и принявъ его за единицу, мы легко опредѣлимъ величину предыдущихъ остатковъ, а наконецъ и двухъ предложенныхъ линій, откуда выведемъ ихъ численное отношеніе.

Положимъ для примѣра, что остатокъ BG содержится въ DF ровно два раза, и тогда BG будетъ общею мѣрою двухъ предложенныхъ линій.

Полагая $BG = 1$, получимъ $FD = 2$; но EB со-

держитъ одинъ разъ DF съ BC , слѣдов. $EB = 3$; такъ какъ CD содержитъ EB съ ED , то получимъ $CD = 3$; наконецъ AB содержитъ два раза CD съ EB , слѣдов. $AB = 13$; и отношеніе двухъ линий AB и CD выразиши отношеніемъ 13 и 3. Если примемъ линію CD за единицу, то линія AB выразиши чрезъ $\frac{13}{3}$, а если линію AB примемъ за единицу, то линія CD выразиши чрезъ $\frac{3}{13}$.

Замѣчаніе. Способъ здѣсь показанный, одинаковъ съ изложеннымъ въ арифметикѣ, для опредѣленія общаго дѣлителя двухъ чиселъ, и слѣдовательно не имѣетъ нужды въ другомъ доказательствѣ.

Можетъ случиться, что продолжая показанное дѣйствіе, мы не достигнемъ остатка заключающагося въ предыдущемъ цѣломъ числѣ разъ, и тогда данныя линіи не имѣютъ общей мѣры и называются *несоизмѣримыми*. Въ послѣдствіи мы увидимъ явнѣе примѣръ при опредѣленіи отношенія диагонали къ сторонѣ квадрата. Въ такомъ случаѣ невозможно получить между данными линіями точное численное отношеніе, во пренебрегая послѣднимъ остаткомъ, найдемъ отношеніе болѣе или менѣе приближенное, смотря потому, болѣе или менѣе продолжено было дѣйствіе.

Задача XVIII.

Даны два угла A и B ; найти ихъ общую мѣру (если они ее имѣютъ), и вывести отсюда точное ихъ отношеніе.

Опишемъ равными радіусами дуги CD , EF , заключающія мѣрою данныхъ угловъ и будемъ сравнивать эти дуги такимъ образомъ какъ сравнивали линіи въ предыдущей задачѣ; ибо дуга можетъ быть наложена на другую, описанную одинаковымъ радіусомъ, точно также какъ прямая

линія на пряму, и основываясь на этомъ, мы можемъ достигнуть опредѣленія общей мѣры дугъ DC, EF, если она существуетъ, и ихъ численнаго отношенія. Это отношеніе будетъ отношеніемъ данныхъ угловъ (17, II), и если DO представляетъ общую мѣру дугъ, то DAO будетъ общою мѣрою угловъ.

Замѣчаніе. Можно найти такимъ образомъ независимую величину угла, сравнивая дугу, служащую ему мѣрою, съ окружностію; напри- мѣръ, если дуга CD относится къ окружности, такъ какъ 3 къ 25, то уголъ A будетъ $\frac{A}{25}$ четырехъ прямыхъ угловъ или $\frac{1}{12}$ одного прямого угла.

Можетъ случиться, что дуги также не будутъ имѣть общей мѣры, и тогда отношеніе угловъ будетъ болѣе или менѣе приближенное, смотря по тому, болѣе или менѣе будетъ продолжено дѣйствіе.

КНИГА III.

ОТНОШЕНІЯ ФИГУРЪ.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

I. Мы будемъ называть *равноѣдными* фигуры тѣ, коихъ поверхности равны.

Двѣ фигуры могутъ быть равноѣдны, не будучи подобными: на прим., кругъ можетъ, быть равноѣденъ съ квадратомъ, треугольникъ съ прямоугольникомъ, и проч.

Название *равныхъ* фигуръ оснащено при тѣхъ, которыя по наложеніи одной на другую совмѣщаются во всѣхъ своихъ точкахъ: таковы два круга, имѣющіе равные радіусы; два треугольника, имѣющіе относительно равныя стороны, и проч.

II. Двѣ фигуры *подобны*, **когда** углы ихъ относительно равны и соотвѣтственные стороны пропорціональны. *Соотвѣственными или сходственными сторонами* называются стороны, имѣющія одинаковое положеніе въ разсматриваемыхъ фигурахъ, или прилежащія къ равнымъ угламъ. Самые углы называются *соотвѣственными углами*.

Двѣ фигуры равныя всегда подобны, но двѣ фигуры подобныя могутъ быть и неравныя.

III. *Подобными дугами, подобными секторами, подобными сегментами*, въ двухъ разныхъ кругахъ, называются тѣ, которые соотвѣтствуютъ равнымъ угламъ при центрѣ.

Ф. 93. Такъ какъ уголъ А равенъ углу О, то дуга ВС подобна дугѣ DE, секторъ ABC подобенъ сектору ODE и проч.

Ф. 95. IV. *Высотой* параллелограмма называется перпендикуляръ EF, измѣряющій разстояніе между противоположныхъ сторонъ АВ, CD, взятыхъ за основанія.

Ф. 94. V. *Высота* треугольника есть перпендикуляръ AD, опущенный изъ вершины угла А, на противоположную сторону BO, взятую за основание.

Ф. 96. VI. *Высота* трапеціи есть перпендикуляръ EF, проведенный къ двумъ параллельнымъ сторонамъ АВ, CD, и заключающійся между ними.

VII. *Площадь* или *поверхность* фигуръ суть выраженія почти однозначащія. Площадь означаетъ по большей части поверхностьную величину фигуры, когда она измѣрится или сравнивается съ другими поверхностями.

Примѣчаніе. Теорія пропорцій необходима для того, чтобы совершенно понимать предисловія изложенныя въ этой и слѣдующихъ книгахъ, и читателямъ надлежитъ ее въ обыкновенныхъ курсахъ Арифметики и Алгебры. Мы сдѣлаемъ только одно замѣчаніе, которое необходимо для опредѣленія настоящаго смысла теоремъ, и для изясненія вѣрной сообразности, какъ въ нихъ изложены доказательства.

Если имѣемъ пропорцію $A : B :: C : D$, то извѣстно, что произведеніе крайнихъ $A \times D$ равно произведенію среднихъ $B \times C$. Если имѣемъ, несомненно для чиселъ, будетъ имѣть мѣсто и при величинъ любыхъ величинахъ, если только онѣ выражены, или по крайней мѣрѣ выражены въ числахъ, что можно всегда предположить истинно, если A, B, C, D будутъ линіи, то легко предположить себѣ, что одна изъ четырехъ, или какая нибудь изъ нихъ линія, сдѣлать или общему мѣрѣ и будетъ принята за единицу; тогда каждая изъ линій A, B, C, D , представляется извѣстнымъ числомъ единицъ, цѣлое или дробное, сомѣренное или несомѣренное, и пропорція между линіями A, B, C, D , обращается въ численную пропорцію.

Произведеніе линій A и D , есть не что иное, какъ произведеніе числа линіямихъ единицъ, заключающагося въ A , въ число линіиныхъ единицъ, заключающагося въ D . Легко понять, что это произведеніе можетъ и должно разлѣлиться произведенію составленному подобнымъ образомъ изъ линій B и C .

Величины A и B могутъ быть одного рода; на прил., линія между шпиль какъ величины C и D будутъ другого рода, кривизна поверхности, и въ этомъ случаѣ ихъ должно разсматривать всегда

какъ числа A и B выразились въ единицахъ линейныхъ, а C и D въ единицахъ *поверхности*, и произведение $A \times D$ будетъ числомъ, точно такъ, какъ и произведение $B \times C$.

Вобщемъ во всѣхъ дѣйствіяхъ производимыхъ надъ пропорціями, чѣмъ пропорціи должны быть расширенными какъ числа, во сколько угодно разъ, и ясно, что въ нихъ имѣютъ случаи и будутъ и извѣстнаго измѣренія поименовать дѣйствія и слѣдствія, изъ нихъ выводимыя.

Мы должны прежде сказать предварительно, что много такъ доказательствъ нашихъ имѣютъ основаніемъ весьма простые правила Алгебры, которыя сами основываются на извѣстныхъ аксиомахъ. Такъ, наприм., если $A = B + C$, то умноживъ каждую часть на M , получимъ $A \times M = B \times M + C \times M$, равносильно, если $A = B + C$ и $D = E - C$, то сложивъ равныя величины, и сокративъ $+C$ и $-C$, которыя взаимно уничтожились, получимъ $A + D = B + E$, и т. д. Все это само по себѣ очевидно, но въ случаѣ какого нибудь измѣренія, весьма полезно руководствоваться Алгебраическими соображеніями, и такимъ образомъ соединить полученіе нѣсколькихъ двухъ точекъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ

ТЕОРЕМА.

Параллелограммы имѣющіе равныя основанія и равныя высоты, равновѣсны.

Пусть AB общее основаніе двухъ параллелограммовъ $ABCD$, $ABEF$, и такъ какъ, по предположенію, ф. 90. они имѣютъ общую высоту, то верхнія ихъ основанія будутъ находиться на одной прямой, параллельной AB . По свойству параллелограммовъ, $AD = BC$, и $AF = BE$, и по той же причинѣ, $DC = AB$, $FE = AB$; слѣд. $DC = FE$, и вычитая DC и FE изъ одной и той же линіи DE , получимъ равныя остатки CE и DF .

Одновременно, что треугольники DAF , CBD суть равносторонніе и слѣдовательно равныя.

Если вычтемъ изъ четырехугла $ABCD$ тр. ф. 90. ADF , то останется параллелограммъ $ABEF$; а если изъ того же четырехугла вычтемъ тр. CBE , то получимъ параллелограммъ $ABCD$; откуда слѣдуетъ, что два параллелограмма $ABCD$,

ABEF, имѣющіе равныя основанія и высоты, равномѣрны.

Ф. 97. *Слѣдствіе.* Всякій параллелограммъ ABCD, равномѣренъ съ прямоугольникомъ ABEF, одного основанія и одной высоты.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

ТЕОРЕМА.

Ф. 98. *Всякій треугольникъ ABC есть половина параллелограмма ABCD, имѣющаго съ нимъ одинаковое основаніе и высоту.*

Справедливость этого очевидна изъ равенства треугольниковъ ABC, ACD (28, I).

Слѣдствіе I. Треугольникъ ABC есть половина на прямоугольника BCEF, ибо прямоугольникъ BCEF равномѣренъ съ параллелограммомъ ABCD.

Слѣд. II. Въ треугольнику, имѣющіе равныя основанія и высоты, равномѣрны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

ТЕОРЕМА.

Два прямоугольника имѣющіе равныя высоты относятся между собою какъ ихъ основанія

Ф. 99. Пусть ABCD, AEFD, два прямоугольника имѣющіе общую высоту AD; они будутъ относиться какъ ихъ основанія AB, AE.

Предположимъ сначала, что основанія AB, AE, будутъ соизмѣрны, и относятся между собою какъ числа 7 и 4. Раздѣливъ AB на семь равныхъ частей, копѣ AE будетъ содержать четыре, проведемъ, въ каждой изъ точекъ дѣленія, перпен-

двууглы къ основанію, чрезъ что составимъ параллелограммы, которые, по равенству своихъ высотъ и оснований, будутъ равны. Прямоугольникъ ABCD будетъ заключать въ себѣ семь частныхъ прямоугольниковъ, между тѣмъ какъ прямоугольникъ AEFD чепыре; слѣд. прямоугольникъ ABCD будетъ относиться къ прямоугольнику AEFD какъ 7 къ 4, или такъ какъ АВ къ АЕ. Это же самое разсужденіе можетъ быть употреблено и при всякомъ другомъ отношеніи сторонъ АВ, АЕ, откуда слѣдуетъ, что каково бы ни было отношеніе ихъ, во въ случаѣ соизмѣримости всегда будемъ имѣть:

$$ABCD : AEFD = AB : AE.$$

Предполагая теперь, что основанія АВ, АЕ, несоизмѣримы, мы докажемъ, что пропорція не измѣнится и будетъ:

$$ABCD : AEFD = AB : AE.$$

Еслибъ она не была справедлива, то три члена ея останутся постоянными, а чепвертый будетъ болѣе или менѣе АЕ. Предположимъ, что онъ будетъ болѣе, и что имѣемъ:

$$ABCD : AEFD = AB : AO.$$

Если раздѣлимъ линію АВ на части равныя и менѣшія ЕО, то между точками Е и О будетъ пахотдаться покрайней мѣрѣ одна точка дѣленія І. Чрезъ эту точку проведемъ къ АІ перпендикуляръ КІ, и такъ какъ основанія АВ, АІ, соизмѣримы, то получимъ, по вышедоказанному,

$$ABCD : AIKD = AB : AI$$

Но по предположенію имѣемъ:

$$ABCD : AEFD = AB : AO.$$

Въ этихъ двухъ пропорціяхъ предыдущіе члены равны; слѣд. послѣдующіе будутъ пропорціональны, и потому

$$AIKD : AEFD = AI : AO.$$

Здѣсь АО болѣе AI, и должно, дабы пропорція была мѣсно, чтобъ прямоугольн. AEFD былъ болѣе прямоугольн. AIKD; но какъ въ самомъ дѣлѣ послѣдній болѣе перваго, то пропорція несправедлива, и прямоугольн. ABCD не можетъ относиться къ прямоугольнику AEFD, такъ какъ линия АВ къ линіи болѣе AE.

Разсуждая подобнымъ образомъ, найдемъ, что четвертый членъ пропорціи не можетъ быть мѣнѣе AE, и слѣдовательно онъ равенъ AE.

Отсюда видно, что при какомъ бы не было отношеніи оснований, два прямоугольника одинаковой высоты, ABCD, AEFD, относятся между собою какъ ихъ основанія АВ, AE.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

ТЕОРЕМА.

Ф. 101. *Два какіе нибудь прямоугольника ABCD, AEGF, относятся между собою какъ произведенія ихъ оснований на высоты, такъ что имеемъ $ABCD : AEGF = AB \times AD : AC \times AF$.*

Расположивъ прямоугольники такимъ образомъ, чтобъ углы въ точкѣ А были противоположны вершинами, продолжимъ стороны GE, CD, до встрѣчи ихъ въ H. Прямоугольники ABCD, AEHD, имѣя общую высоту AD, будутъ относиться какъ ихъ основанія АВ, AE; прямоугольники AEHD, AEGF, имѣя общую высоту AE, будутъ относиться какъ ихъ основанія AD, AF, и поэтому получимъ пропорціи:

$$ABCD : AEHD = AB : AE.$$

$$AEHD : AEGF = AD : AF.$$

Перемножая ихъ почленно, и принявъ въ со-

ображеніе, что средній членъ АЕFD, какъ общій множитель предыдущаго и послѣдующаго членовъ, можетъ быть уничтоженъ, будемъ имѣть:

$$ABCD: AEGF = AB \times AD: AE \times AF.$$

Замѣчаніе. Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что можно принимать за мѣру прямоугольника произведеніе его основанія на высоту, разумѣя подъ нимъ всегда произведеніе двухъ чиселъ, выражающихъ число линейныхъ единицъ въ основаніи и въ высотѣ.

Эта мѣра, впрочемъ, не есть независимая, но только относительная; ибо здѣсь предполагается, что, взявъ выраженіе другаго прямоугольника, по размѣреніи сторонъ его тою же линейною единицею, получимъ другое произведеніе, и отношеніе этихъ двухъ произведеній будетъ равно отношенію прямоугольниковъ, по доказанному въ теоремѣ.

На примѣръ, если основаніе прямоугольника А равно 3 единицамъ, а высота 10, то прямоугольникъ выразится произведеніемъ 3×10 или 30, числомъ само по себѣ ничего не означающимъ; но если имѣемъ другой прямоугольникъ В, котораго основаніе равно 12 единицамъ, а высота 7, то онъ будетъ представленъ произведеніемъ 7 на 12 или 84; отсюда заключаемъ, что два прямоугольника А и В относятся между собою какъ числа 30 и 84. Еслибъ теперь условились принять прямоугольникъ А за единицу мѣры поверхностей, то прямоугольникъ В имѣлъ бы независимую мѣрою $\frac{84}{30}$, то есть былъ бы равенъ $\frac{14}{5}$ поверхноснымъ единицамъ.

Гораздо проще принимать за единицу поверхностей квадратъ, избирая между ними такой, коего сторона равнялась бы единицѣ длины. Въ этомъ случаѣ, мѣра, которую мы рассматривали прежде какъ относительную, обращается въ

независимую; на прим. число 30, измѣрившееся прямоугольникомъ А, представляетъ 30 поверхностныхъ единицъ, или 30 такихъ квадратовъ, которыхъ сторона равна единицѣ, что весьма ясно показы-

ф. 102. ваеиъ фигура 102.

Въ Геометріи весьма часто сжѣшпваютъ произведение двухъ линій съ ихъ *прямоугольникомъ*, и это выраженіе перешло даже въ Арифметику для означенія произведенія двухъ неравныхъ чиселъ, также какъ *квадратъ* для означенія произведенія одного числа на самого себя.

ф. 103. Квадраты чиселъ 1, 2, 3, и проч., суть 1, 4, 9, откуда видно, что квадратъ построенный на удвоенной линіи въ четверо болѣе; на утроенной линіи, въ девять разъ болѣе, и т: д:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

ТЕОРЕМА.

Площадь параллелограмма равна произведенію его основанія на высоту.

ф. 67. Такъ какъ параллелограммъ ABCD равноизренъ съ прямоугольникомъ ABEF, имѣющимъ одинакое основаніе АВ и высоту BE (1); и какъ послѣдній имѣетъ мѣрою $AB \times BE$ (4), то и параллелограммъ ABCD будетъ измѣряться произведеніемъ АВ на BE.

Слѣдствіе. Параллелограммы съ одинаковыми основаніями относятся какъ ихъ высоты, а съ одинаковыми высотами какъ ихъ основанія; ибо, пѣтя при какія ни есть величины А, В, С, знаемъ, что вообще $A \times C : B \times C = A : B$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

ТЕОРЕМА.

Площадь треугольника равна произведенію его основанія на половину высоты.

Треугольник ABC есть половина прямоугольника $ABCE$, одинаковаго съ нимъ основанія BC и высоты AD (2), и какъ площадь параллелограмма $ABCE = BC \times AD$ (5); то площадь треугольника $ABC = \frac{1}{2} BC \times AD$, или $BC \times \frac{1}{2} AD$.

Слѣдствіе. Два треугольника съ одинаковыми основаніями относятся между собою какъ ихъ высоты, а съ одинаковыми высотами какъ ихъ основанія.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

ТЕОРЕМА.

Площадь трапеціи $ABCD$ равна произведенію ея высоты EF на полусумму параллельныхъ основаній AB, CD .

Черезъ точку I , среднюю сторону BC , проведемъ линію, параллельную противоположной сторонѣ AD , и продолжимъ BC до встрѣчи ея съ линіею KL .

Въ треугольникахъ IBL, ICK , сторона $IB = CI$, по построенію, уголъ $IBL = ICK$, уг. $ILB = уг. IKC$, по параллелизму линій CK и BL (24, I): въ слѣдствіе этого треугольники равны (7, I), и трапеція $ABCD$ равносильна съ параллелограммомъ $ADKL$, который имѣетъ ширину $EF \times AL$.

Но $AL = DK$, и по равенству треугольниковъ, сторона $BL = CK$; слѣд. $AB + CD = AL + DK = 2 AL$, и такимъ образомъ AL равна полусуммѣ основаній AB, CD ; откуда площадь трапеціи $ABCD$ равна высотѣ EF , умноженной на полусумму основаній AB, CD , что выразится слѣдующимъ образомъ: $ABCD = EF \times \frac{AB + CD}{2}$.

Замѣчаніе. Если чрезъ точку I , среднюю BC , проведемъ III , параллельную основанію AB , то точка II будетъ также серединою AD , потому что $AIII$ есть параллелограмъ, также какъ $DIII$, по

параллелизму противоположащихъ сторонъ. И такъ будемъ имѣть $АН = ІЛ$, и $ДН = ІК$; но какъ $ІЛ = ІК$, по равенству треугольниковъ $ВІЛ$, $СІК$, то въ слѣдствіе этого $АН = ДН$. Можно замѣтить что линия $ІІ = АЛ = \frac{AB + CD}{2}$: отсюда видно, что площадь трапеціи можетъ быть также выражена произведеніемъ $EF \times ІІ$, и въ этомъ случаѣ будетъ равна своей высотѣ умноженной на линію соединяющую средныя непараллельныхъ сторонъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

ТЕОРЕМА.

Ф. 106. Если линія AC раздѣлена на двѣ части AB , BC , то квадратъ, построенный на всей линіи AC , содержитъ въ себѣ два квадрата построенные на линіяхъ AB , BC , и дважды взятый прямоугольникъ изъ тѣхъ же линій, что выражается слѣдующимъ образомъ: AC^2 или $(AB + BC)^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BC$.

Построимъ квадратъ $ACDE$, возьмемъ $AF = AB$, проведемъ FG и $ВН$ параллельныя AC и AE .

Квадратъ $ABCD$ раздѣленъ на четыре части: первая $ABIF$ есть квадратъ построенный на BA , потому что $AF = AB$; вторая $IGDH$ есть квадратъ на BC ; ибо, по равенству AC и AE , AB и AF , разность $AC - AB$ равна разности $AE - AF$, что даетъ $BC = EF$; но, въ слѣдствіе параллелизма, $IG = BC$ и $DG = EF$, и поэтому квадратъ $IGHD$ равенъ квадрату построенному на BC . Вычтя изъ эти двѣ части изъ цѣлаго квадрата, получимъ два прямоугольника $BCGI$, $EFIH$, кои хъ мѣра есть произведеніе изъ $AB \times BC$; слѣдовательно квадратъ построенный на AC и проч.

Замѣчаніе. Это предположеніе сходно съ доказа-

нымъ въ Алгебрѣ для составленія квадрата двученнаго количества выраженного чрезъ

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

ТЕОРЕМА.

Если линія *АС* есть разность двухъ линій *АВ*, *ВС*, то квадратъ, составленный на линіи *АС*, равнопрень съ суммою квадратовъ построенныхъ на линіяхъ *АВ*, *ВС*, безъ удвоеннаго прямоугольника составленнаго изъ тѣхъ же линій *АВ*, *ВС*, что выразится чрезъ *АС*² или $(AB - BC)^2 = \overline{AB} + \overline{BC} - 2AB \times BC$. 107

Построимъ квадратъ *АВІF*; возьмемъ *АЕ* = *АС*, проведемъ *СG* и *ІК* параллельныя *ВІ* и *АВ*, и дополнимъ квадратъ *ЕFІК*.

Каждый изъ двухъ прямоугольниковъ *СВІG*, *GLKD*, мѣреть мѣрою *АВ* × *ВС*, и если вычтемъ ихъ изъ цѣлой фигуры *АВІКЕА*, выраженной чрезъ $\overline{AB} + \overline{BC}$, то очевидно, что получимъ квадратъ *АСDE*; слѣд. и проч.

Замѣчаніе. Это предложеніе сходно съ Алгебраическою формулою $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

ТЕОРЕМА.

Прямоугольникъ составленный изъ суммы и разности двухъ линій равенъ разности квадратовъ построенныхъ на этихъ линіяхъ, такъ что

$$(AB + BC) \times (AB - BC) = \overline{AB} - \overline{BC}.$$

Построимъ на линіяхъ *АВ*, *АС*, квадраты *АВІF*, *АСDE*; продолжимъ *АВ* на разстояніе *ВК* = *ВС*, и дополнимъ прямоугольникъ *AKLE*. 108.

Основаніе AK прямоугольника равно суммѣ двухъ линій AB, BC ; его высота AE есть разность тѣхъ же линій; следовательно прямоугольникъ $AKLE = (AB + BC) \times (AB - BC)$; но этотъ же прямоугольникъ составленъ изъ двухъ частей $ABHE + BHLK$: часть $BHLK$ равна прямоугольнику $EDGF$; ибо $BH = DE$ и $BK = EF$, и по этому $AKLE = ABHE + EDGF$. Двѣ эти части составляютъ разность квадратовъ $ABIF, BHIG$, или квадратъ построенный на BC ; слѣд. $(AB + BC) \times (AB - BC) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$.

Замѣчаніе. Это предложеніе одинаково съ Алгебраическою формулою: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

ТЕОРЕМА.

Квадратъ построенный на гипотенузѣ прямоугольнаго тригольника равенъ суммѣ квадратовъ построенныхъ на двухъ другихъ сторонахъ.

Ф. 109.

Положимъ, что тригольникъ ABC есть прямоугольный въ A . Построимъ квадраты на трехъ сторонахъ, изъ вершины прямого угла опустимъ перпендикуляръ AD на гипотенузу, продолжимъ его до E , и проведемъ діагонали AF, CH .

Уголъ ABF , составленъ изъ угла ABC и прямого угла CBF ; уголъ CBH составленъ изъ угла ABC и прямого угла ABH , откуда $ABF = HBC$. Но AB, BH , равны какъ стороны квадрата; $BF = BC$, по тойже причинѣ; следовательно тригольники ABF, HBC , имѣя по равному углу заключающемуся между равными сторонами, будутъ равны (6, I).

Тригольникъ ABF есть половина прямоугольника $BDEF$ (или BE для краткости), имѣющаго съ нимъ одинаковое основаніе BF и высоту BD (пред. 2). Подобнымъ образомъ тригольникъ HBC равенъ половинѣ квадрата AH ; ибо уголъ BAC ,

такъ какъ и уголъ BAI , суть прямыя; AC и AI составляютъ одну прямую, параллельную IB , откуда слѣдуетъ что треугольникъ IBC и квадратъ AI , имѣющіе одинаковое основаніе IB , будутъ имѣть общую высоту AB , и треугольникъ составитъ половину квадрата.

Мы доказали уже, что треугольникъ ABF равенъ треугольнику IBC , и по этому прямоугольникъ $BDEF$ равный дважды взятому треугольнику ABF , равноѣренъ съ квадратомъ AI , равнымъ два раза взятому треугольнику IBC . Подобнымъ же образомъ докажется, что прямоугольникъ $CDEG$ равноѣренъ съ квадратомъ AI , и такъ какъ прямоугольники $BDEF$, $CDEG$, взятые вмѣстѣ, составляютъ квадратъ $BCGF$, то въ слѣдствіе этого квадратъ $BCGF$, построенный на гипотенузѣ, равенъ суммѣ квадратовъ $ABHI$, $ACIK$, построенныхъ на двухъ другихъ сторонахъ, или иначе $\overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AC}$.

Слѣдствіе I. Квадратъ одной изъ сторонъ прямого угла равенъ квадрату гипотенузы безъ квадрата другой стороны, что выражается чрезъ $\overline{AB} = \overline{BC} - \overline{AC}$.

Слѣдствіе II. Пусть $ABCD$ квадратъ, и AC его діагональ. Такъ какъ треугольникъ ABC есть прямоугольный и равнобедренный, то получимъ $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 2\overline{AB}$; слѣдовательно квадратъ построенный на діагонали AC равенъ удвоенному квадрату построенному на сторонѣ AB .

Можно пояснить это свойство, проводя изъ точекъ A и C линіи, параллельныя BD , а изъ точекъ B и D линіи, параллельныя AC : чрезъ это составится новый квадратъ $EFGH$, который будетъ квадратомъ AC . Но такъ какъ онъ заключаетъ въ себѣ восемь треугольниковъ равныхъ ABE , а квадратъ $ABCD$ только четыре, то въ

слѣдствіе этого квадрата $EFGH$ вдвое больше $ABCD$.

Такъ какъ $\overline{AC} : \overline{AB} = 2 : 1$, то извлекая квадратный корень, получимъ $\overline{AC} : \overline{AB} = \sqrt{2} : 1$; откуда видно, что *диагональ квадрата и сторона его не соизмѣримы*.

Это свойство будетъ изложено въ послѣдствіи гораздо пространнѣе.

Ф. 109. *Слѣдствіе III.* Уже доказано что квадратъ AH равноѣренъ съ прямоугольникомъ $BDEF$. Такъ какъ квадратъ $BCGF$ и прямоугольникъ $BDEF$ имѣютъ общую высоту BF , то они будутъ относиться какъ ихъ основанія, и слѣдовательно

$$\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 = BC : BD.$$

Отсюда видно, что *квадратъ гипотенузы относится къ квадрату одной изъ сторонъ прямого угла, какъ гипотенуза къ отрѣзку лежащему этой сторонѣ*. Здѣсь отрѣзкомъ называется часть гипотенузы, определяемая перпендикуляромъ опущеннымъ изъ прямого угла; такъ, на прим., BD есть отрѣзокъ лежащій сторонѣ AB , а DC отрѣзокъ лежащій сторонѣ AC . Равнымъ образомъ будемъ имѣть

$$\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 = BC : CD.$$

Слѣдствіе IV. Прямоугольники $BDEF$, $DCGE$, имѣющіе общую высоту, будутъ относиться какъ ихъ основанія BD , CD . Но такъ какъ эти прямоугольники равноѣрны съ квадратами AB , AC , то будемъ имѣть $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD : CD$.

И такъ, *квадраты сторонъ прямого угла относятся между собою какъ лежащіе имъ отрѣзки гипотенузы*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XII.

ТЕОРЕМА.

Если въ треугольникъ ABC , уголъ C острый, то квадратъ противолежащей стороны AB будетъ менше суммы квадратовъ сторонъ содержащихъ уголъ C ; и если опустимъ перпендикуляръ AD на BC , то разность будетъ равна удвоенному прямоугольнику $BD \times CD$, такъ что $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC} - 2BC \times CD$.

Здѣсь могутъ встрѣтиться два случая.

1. Если перпендикуляръ упадетъ внутри три-
ка ABC , то будемъ имѣть $BD = BC - CD$, и (9)
въ слѣдствіе этого, $BD = BC + CD - 2BC \times CD$.

Придавая съ одной и съ другой стороны $\overline{AD}$, и
приставъ въ соображеніе, что прямоугольные три-
ка ABD , ADC даютъ $\overline{AD} + \overline{BD} = \overline{AB}$ и $\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AC}$,
получимъ: $\overline{AB} = \overline{BC} + \overline{AC} - 2BC \times CD$.

2. Если перпендикуляръ AD упадетъ внѣ три-
угольника ABC , то будемъ имѣть $BD = CD - BC$,
и слѣдовательно (9) $\overline{BD} = \overline{CD} + \overline{BC} - 2CD \times BC$.
Придавая съ обѣихъ сторонъ по $\overline{AD}$, получимъ так-
же $\overline{AB} = \overline{BC} + \overline{AC} - 2BC \times CD$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XIII.

ТЕОРЕМА.

Если уголъ C , въ треугольникъ ABC , тупой, то квадратъ противолежащей стороны
будетъ больше суммы квадратовъ двухъ другихъ
сторонъ, такъ что, опустивъ перпендикуляръ
 AD на линію BC , получимъ разность равную
дважды взятому прямоугольнику $BC \times DC$, и бу-
демъ имѣть $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC} + 2BC \times DC$.

Перпендикуляр AD не можетъ упасть внутри треугольника; ибо, предположивъ, на пр., что онъ упадетъ въ точку E , получимъ треугольникъ ACE , который будетъ заключать въ одно и тоже время прямой уголъ E и тупой C , что невозможно (19, 1). Въ слѣдствіе этого перпендикуляръ упадетъ внѣ, и будемъ имѣть $BD = BC + CD$, откуда (8) $\overline{DB} = \overline{BC} + \overline{CD} + 2BC \times CD$. Прибавляя съ обѣихъ сторонъ AD и произведя сокращеніе, такъ какъ въ предыдущей теоремѣ, получимъ $\overline{AB} = \overline{BC} + \overline{AC} + 2BC \times DC$.

Замѣчаніе. Въ одномъ только прямоугльномъ треугольникѣ сумма квадратовъ двухъ сторонъ равна квадрату третьей стороны. Еслибъ уголъ при заключаемый былъ острый, то сумма квадратовъ была бы болѣе квадрата противоположной стороны, менѣе и еслибъ уголъ былъ тупой.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

ТЕОРЕМА.

Ф. 112. Если въ данномъ треугольникѣ ABC , соединимъ вершину съ серединою основанія AE , то будемъ имѣть $\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{AE} + 2\overline{BE}$.

Опустивъ перпендикуляръ AD на линію BC , треугольникъ AEC , даетъ (12)

$$\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC} - 2EC \times ED.$$

Треугольникъ AEB даетъ, по теоремѣ XIII,

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} + 2EB \times ED.$$

Слѣдовательно, складывая и замѣчая, что $EB = EC$, получимъ

$$\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{AE} + 2\overline{EB}.$$

Слѣдствіе. Во всякомъ параллелограммѣ, сумма квадратовъ сторонъ равна суммѣ квадратовъ діагоналей.

Діагонали AC , BD , взаимно пересѣкаются въ E на равныя части (31, 1), и триугольникъ ABC даетъ

$$\overline{AB} + \overline{BC} = 2\overline{AE} + 2\overline{BE}$$

Равнымъ образомъ, триугольникъ ADC даетъ

$$\overline{AD} + \overline{DC} = 2\overline{AE} + 2\overline{DE}$$

Складывая почленно и замѣчая, что $EB = DE$, получимъ

$$\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{DC} + \overline{BC} = 4\overline{AE} + 4\overline{DE}$$

Но $4\overline{AE}$ есть квадратъ $2AE$ или AC ; $4\overline{DE}$ есть квадратъ BD ; слѣдовательно сумма квадратовъ сторонъ равна суммѣ квадратовъ діагоналей.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

ТЕОРЕМА.

Линія DE , проведенная параллельно основанію триугольника ABC , раздѣляетъ стороны AB , AC , на части пропорціональныя, такъ что будемъ имѣть $AD : DB = AE : EC$. Ф. 116.

Проведа BE и DC , получимъ два триугольника BDE , DEC , имѣющіе общее основаніе DE и одинаковыя высоты, ибо вершины ихъ B и C находятся на линіи параллельной ихъ основанію; эти триугольники будутъ равномѣрны (2). Триугольники ADE , BDE , коихъ общая вершина находится въ E , имѣющъ одинаковыя высоты и опущенныя между собою какъ основанія (6) AD , BD , откуда получимъ:

$$ADE : BDE = AD : BD.$$

Триугольники ADE , DEC , коихъ общая верши-

на есть D , имѣюпъ также одинаковыя высоты
будутъ относиться какъ ихъ основанія AE , EC ,
въ слѣдствіе чего

$$ADE : DEC = AE : EC.$$

Но треугольникъ $BDE = DEC$, и по этому
изъ равенства отношеній въ пропорціяхъ заклю-
чаемъ, что $AD : BD = AE : EC$.

Слѣдствіе I. Отсюда, по свойству пропорцій,
получимъ $AD + DB : AD = AE + EC : AE$, или $AB :$
 $AD = AC : AE$, или $AB : BD = AC : CE$.

Слѣдствіе II. Если между двумя прямыми
ф. 113. AB , CD , проведется нѣсколько прямыхъ AC , EF ,
 GH , BD и проч., то эти линіи пересѣкутся на
части пропорціональныя и будемъ имѣть $AE :$
 $CF = EG : FH = GB : HD$.

Пусть O будетъ точкою встрѣчи прямыхъ
 AB , CD . Въ треугольникѣ OEF , гдѣ линія AC па-
раллельна основанію, будемъ имѣть $OE : AE = OF :$
 CF , или $OE : OF = AE : CF$. Равнымъ образомъ, въ
треугольникѣ OGH имѣемъ $OE : EG = OF : FH$, или
 $OE : OF = EG : FH$, и, по причинѣ общаго отношенія
 $OE : OF$, получимъ изъ этихъ двухъ пропорцій, $AE :$
 $CF = EG : FH$. Подобнымъ же образомъ докажется,
что $EG : FH = GB : HD$, и такъ дѣйствительно
линіи AB , CD , пересѣчены параллельными
 EF , GH и проч., на части пропорціональныя.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

ТЕОРЕМА.

ф. 116. *Обратно, если стороны AB , AC , пересѣкены
линіею ED на части пропорціональныя, такъ
что имѣемъ $AD : BD = AE : EC$, то линія DE
параллельна основанію BC .*

Ибо предположивъ, что не DE , а какая нибудь
линія DO параллельна BC , будемъ имѣть, въ слѣд-
ствіе предыдущей теоремы, $AD : BD = AO : OC$,
но, по предположенію, имѣемъ уже, что $AD : BD =$

$AE : EC$, то получимъ пропорцію $AO : OC = AE : CE$, которой истинность очевидна; ибо, съ одной стороны, предыдущій членъ AE больше AO , между темъ какъ съ другой стороны, послѣдующій членъ CE меньше OC . Отсюда слѣдуетъ, что линія DO , проходящая чрезъ точку D , не можетъ быть различна отъ DE .

Замѣчаніе. Тоже самое заключеніе выведется изъ пропорцій $AB : AD = AC : AE$; ибо эта пропорція даетъ: $AB - AD : AD = AC - AE : AE$ или $BD : AD = CE : AE$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

ТЕОРЕМА.

Линія AD , раздѣляющая пополамъ уголъ A въ $\triangle ABC$, раздѣлитъ его основаніе BC на два отрезка, пропорціональные прилежащимъ сторонамъ AB , AC , такъ что будемъ имѣть $BD : DC = AB : AC$.

Чрезъ точку C проведемъ линію CE , параллельную AD , до встрѣчи ея съ продолженною BA .

Изъ $\triangle BCE$, по параллелизму линій AD и CE , получимъ пропорцію (15)

$$BD : DC = AB : AE.$$

$\triangle ACE$ есть равнобедренный, ибо въ слѣдствіе параллелизма линій AD , CE , уголъ $ACE = DAC$, и уголъ $AEC = BAD$ (24, I); но $DAC = BAD$, по предположенію; слѣд. уголъ $ACE = AEC$, откуда $AE = AC$ (13, I), и выведенная пропорція пзмѣняется въ

$$BD : DC = AB : AC.$$

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

ТЕОРЕМА.

Въ двухъ равноугольныхъ треугольникахъ сход-

ственные стороны пропорциональны и треугольники подобны.

Ф. 119. Пусть ABC , CDE , два треугольника имеющие относительно равные углы, т. е. $BAC = CDE$, $ABC = DCE$, и $ACB = DEC$; сходственные или противоположные равным углам стороны этих треугольников будут пропорциональны, так что $BC : CE = AB : CD = AC : DE$.

Расположим сходственные стороны BC , CE в одном направлении и продолжим стороны BA , ED , до встречи их в F .

Так как BCE есть прямая линия и угол $BCA = CED$, то AC параллельна DE (24, I). Равным образом, по равенству углов ABC и DCE , линия AB параллельна DC , и следовательно фигура $ACDF$ будет параллелограмм.

В треугольнике BFE , линия AC параллельна основанию FE , и по этому будем иметь $BC : CE = BA : AF$ (15). Подставив вместо AF равную ей CD , получим:

$$BC : CE = BA : CD.$$

Если, в том же треугольнике BFE , примем за основание BF , то по параллелизму линий CD и BF , получим $BC : CE = FD : DE$. Подставляя вместо FD равную ей AC , будем иметь

$$BC : CE = AC : DE.$$

Наконец, из этих двух пропорций, имеющих общее содержание $BC : CE$, получим

$$AC : DE = BA : CD.$$

Отсюда следует, что в равноугольных треугольниках сходственные стороны пропорциональны; но, по определению II, две фигуры, чьих углы относительно равны и сходственные стороны пропорциональны, суть подобны; следовательно равноугольные треугольники BAC , CDE , подобны.

Слѣдствіе. Для подобія двухъ треугольниковъ достаточно, чтобъ два угла одного были равны двумъ соотвѣстственнымъ угламъ другаго, ибо тогда третій уголъ необходимо равенъ третьему и слѣдов. треугольники будутъ равноугольны.

Замѣчаніе. Должно замѣтить, что въ подобныхъ треугольникахъ, сходственные стороны противоположны равнымъ угламъ; такія образъ стороны АВ, лежащая противъ угла АСВ, соотвѣтствуетъ сторонѣ DC, лежащей противъ угла DEC = АСВ; также АС, DE, суть стороны сходственные, ибо лежатъ противъ равныхъ угловъ АВС, DCE. Зная сходственные стороны легко составить пропорцію

$$AB : DC = AC : DE = BC : CE.$$

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

ТЕОРЕМА.

Два треугольника имѣющіе пропорціональныя стороны равноугольны и подобны.

Если предположимъ, что $BC : EF = AB : DE = AC : DF$, то треугольники ABC, DEF, будутъ имѣть равные углы; именно $A = D$, $B = E$, $C = F$. Ф. 120.

Нанесемъ, при точкѣ E, уголъ $FEG = B$, и при точкѣ F, уголъ $EFG = C$; третій уголъ G будетъ равенъ третьему углу A, и два три-ка ABC, EFG, будутъ равноугольны. Въ этомъ случаѣ по предыдущей теоремѣ получимъ, что $BC : EF = AB : EG$; но, по предположенію, $BC : EF = AB : DE$; слѣд. $EG = DE$. Въ слѣдствіе той же теоремы будемъ имѣть $BC : EF = AC : FG$, а по предположенію имѣемъ $BC : EF = AC : DF$; слѣдов. $FG = DF$. Отсюда видно, что треугольники EGF, DEF, имѣя стороны относительно равныя, будутъ равны (11, I). Но треугольникъ EGF, равноугленъ съ треуголь-

нникомъ ABC , по построению; слѣд. треугольники DEF , ABC , равноугольны и подобны.

Замѣчаніе I. Изъ этихъ двухъ предложеній видно, что въ треугольникахъ равенство угловъ есть слѣдствіе пропорціональности сторонъ, и обратно, такъ что одного изъ этихъ условий достаточно, дабы удостовѣриться въ подобіи треугольниковъ. Подобное свойство не существуетъ въ фигурахъ имѣющихъ болѣе трехъ сторонъ; ибо, взявъ въ разсужденіе только четырехугольники, увидимъ, что можно измѣнять отношеніе его сторонъ не измѣняя угловъ, или неизмѣняя сторонъ измѣнять углы; откуда слѣдуетъ, что равенство сторонъ не будетъ слѣдствіемъ равенства угловъ, и обратно. Ясно, напримѣръ, что по проведеніи EF , параллельной BC , углы четырехугольника $ADEF$ равны угламъ четырехугольника $ABCD$, но отношеніе сторонъ измѣнилось; точно также, не измѣняя AB , BC , CD , AD , можно измѣнять положеніе точки B , относительно точки D , чрезъ что будутъ измѣнены углы.

Замѣчаніе II. Два предыдущія предложенія составляющія, собственно говоря, только одно, и предложеніе о квадратахъ гипотенузы, суть самыя важныя и самыя полезныя въ Геометріи. Они одни почти достаточны для всѣхъ приложений и для разрѣшенія всѣхъ задачъ. Причина состоитъ въ томъ, что всѣ фигуры могутъ быть раздѣлены на треугольники, а всякій треугольникъ на два прямоугольные треугольники; и потому общія свойства треугольниковъ заключаютъ въ себя свойства всѣхъ прочихъ фигуръ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

ТЕОРЕМА.

Два треугольника, которые имѣютъ по равно-

му углу заключающемуся между пропорциональными сторонами, подобны.

Пусть угол $A = D$, и $AB : DE = AC : DF$; три- ф. 132.
угольники ABC , DEF , будут подобны.

Возмемъ $AG = DE$, и проведемъ GH , параллельную BC . Уголъ AGH равенъ углу ABC (24, I), и тр. AGH будетъ равноуголенъ съ тр. ABC ; слѣд. будетъ имѣть, $AB : AG = AC : AH$; но, по предположенію, $AB : DE = AC : DF$, а по построению, $AG = DE$; слѣдов. $AH = DF$. Два триугольника AGH , DEF , равны, ибо имѣютъ по равному углу заключающемуся между равными сторонами, но триугольникъ AGH подобенъ ABC ; слѣдовательно тр. DEF подобенъ тр. ABC .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

ТЕОРЕМА.

Два триугольники подобны, когда ихъ сходственные стороны взаимно параллельны или перпендикулярны.

1. Если сторона AB параллельна DE и BC параллельна EF , то уголъ ABC равенъ углу DEF (27, I), а по параллелизму AC , DF , уголъ ACB будетъ равенъ DFE , и также $BAC = EDF$; слѣдовательно триугольники ABC , DEF , равноугольны и подобны. ф. 136.

2. Пусть DE перпендикулярна къ AB , и DF ф. 134.
къ AC . Въ четырехугольникѣ $AIDH$, углы I и II будутъ прямые; сумма четырехъ угловъ равна четырѣмъ прямымъ угламъ, и въ слѣдствіе этого остальные два IAH , IDH , равны двумъ прямымъ угламъ. Но какъ сумма угловъ EDF , IDH , равна также двумъ прямымъ угламъ, то уголъ EDF равенъ IAH , или BAC . Если третія сторона EF перпендикулярна къ третьей BC , то докажется подобнымъ образомъ, что уголъ $DFE = C$ и $DEF = B$;

слѣдовательно два тригугольника, ABC , DEF , имѣющіе взаимно перпендикулярныя стороны, равноугольны и подобны.

Замѣчаніе. Въ случаѣ параллелизма сторонъ, сходственныхъ сторонамъ будутъ стороны параллельныя; а въ случаѣ перпендикулярности, стороны взаимно перпендикулярныя. И такъ, въ послѣднемъ случаѣ имѣемъ, что AB соответствуетъ DE , DF соответствуетъ AC , и EF , BC .

Въ томъ случаѣ, когда стороны перпендикулярны, тригугольники могутъ имѣть совершенно другое отношеніе, нежели въ фигурѣ 124; но равенство соответствующихъ угловъ можно доказать всегда, или посредствомъ четырехгугольника $ADCE$, имѣющаго два прямые угла; или сравнивая тригугольники, которые, вмѣстѣ съ углами противоположными вершинамъ, будутъ имѣть по прямому углу. Кроме того, всегда можно предположить, что въ тригугольникѣ ABC , построимъ другой тригугольникъ DEF , котораго стороны параллельны сторонамъ тригугольника сравниваемаго съ тригугольникомъ ABC , и тогда доказательство будетъ совершенно одинаково съ доказательствомъ фигуры 124.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

ТЕОРЕМА.

Ф. 125. *Линіи AF , AG и прог., проведенныя произвольно изъ вершины тригугольника, раздѣляютъ основаніе BC и параллельную ему линію DE на части пропорціональныя, такъ что будемъ имѣть $DI : BF = IK : FG = KL : GH$, и прог.*

По параллелизму линій DI и BE , тригугольникъ ADI равноугуленъ съ тригугольникомъ ABE , и въ слѣдствіе этого будемъ имѣть пропорцію $DI : BF = AI : AF$. Равнымъ образомъ, по параллелизму IK и

FG, найдемъ, что $AI : AF = IK : FG$, откуда, по правилу общаго содержанія $AI : AF$, получимъ $DI : BF = IK : FG$. Подобнымъ же образомъ $IK : FG = KI : GI$ и проч., следовательно линія DE раздѣлена въ точкахъ I, K, L, точно такъ какъ и основаніе BC, въ точкахъ F, G, H.

Слѣдствіе. Отсюда можемъ заключить, что подраздѣленіи линіи BC на равныя части въ точкахъ F, G, H, параллельная ей DE раздѣлится также на равныя части въ точкахъ I, K, L.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

ТЕОРЕМА.

Если изъ вершины прямого угла A, въ прямоугольномъ треугольникѣ, опустимъ перпендикуляръ AD на гипотенузу, то:

1. Два частные треугольника ABD, ADC, будутъ подобны цѣлому треугольнику ABC, и подобны между собою.

2. Каждая изъ сторонъ AB, AC, будетъ средня пропорціональная между гипотенузою BC и прилежащими отрезками BD и DC.

3. Перпендикуляръ AD будетъ средня пропорціональная между двумя отрезками DB, CD.

Такъ какъ треугольники BAD и BAC, имѣютъ общій уголъ B и прямые углы BDA, BAC, то третій уголъ BAD одного равенъ третьему углу C другого, и, въ слѣдствіе равенства угловъ, треугольники подобны. Доказавъ такимъ же образомъ подобіе треугольниковъ DAC и BAC, заключаемъ, что всѣ три треугольника равноугольны и подобны.

2. Такъ какъ треугольники BAD, BAC, подобны, то соответственные ихъ стороны пропорціональны. Сторона BD малого треугольника, и BA большаго, суть соответственные, ибо онѣ ле-

жать противъ равныхъ угловъ $\angle BAD$, $\angle BCA$; гипотенуза BA малаго триугольника соотвѣтствуетъ гипотенузѣ BC большаго; и въ слѣдствіе этого можемъ составить пропорцію $BD : BA = BA : BC$. Точно такимъ же образомъ получимъ $DC : AC = AC : BC$; откуда 2-е, каждая изъ сторонъ BA , AC , есть средняя пропорціональная между гипотенузою и отрезкомъ прилежащимъ къ этой сторонѣ.

3. Наконецъ, подобіе триугольниковъ $\triangle ABD$, $\triangle ADC$, по сравненіи соотвѣтственныхъ сторонъ, даетъ $BD : AD = AD : DC$; откуда 3-е, перпендикуляръ AD есть средняя пропорціональная между отрезками гипотенузы BD , DC .

Замѣчаніе. Взявъ произведенія крайнихъ и среднихъ членовъ пропорцій $BD : AB = AB : CB$ и уравнивъ ихъ, получимъ $\overline{AB} = BD \times CB$. Подобнымъ образомъ будемъ имѣть, что $\overline{AC} = DC \times BC$; следовательно $\overline{AB} + \overline{AC} = DB \times CB + DC \times BC$, но второй членъ равенъ $(BD + DC) \times BC$, и приводится къ $BC \times BC$ или $\overline{BC}$; откуда $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC}$, то есть квадратъ построенный на гипотенузѣ BC равенъ суммѣ квадратовъ построенныхъ на двухъ другихъ сторонахъ AB , AC . И такъ мы достигли до предложенія о квадратѣ гипотенузы, путемъ совершенно различнымъ отъ употребленнаго нами, и видимъ отсюда, что это предложеніе есть, собственно говоря, слѣдствіе пропорціональности сторонъ въ равноугольныхъ триугольникахъ.

При выводѣ слѣдствій изъ одного или нѣсколькихъ предложеній, часто случается получать истины доказанныя прежде, чему примѣръ мы теперь видимъ. Вообще, соединяя различными образомъ предложенія и судя правильно, всегда достигнемъ выводовъ точныхъ, что служитъ отличительнымъ характеромъ геометрическихъ предложе-

ній и неоспоримымъ доказательствомъ ихъ вѣрно-
сти. Все это не имѣло бы мѣста, еслибы хотя
одно изъ предложеній было ложно, или только
близко къ истинѣ, и очень часто случается,
что чрезъ совокупленіе предложеній, погрѣшности
увеличиваются и дѣлаются ощутительными. При-
хоты этому можно видѣть во всѣхъ доказа-
тельствахъ, гдѣ мы употребляемъ *приведеніе къ недо-
пости*. Эти доказательства, имѣющія цѣлю убѣ-
дить въ равенствѣ двухъ величинъ, показываютъ,
что допуская меньшее неравенство между ве-
личинами, мы бы достигли, посредствомъ ряда
разсужденій, до явныхъ недопостей; и подобный
выводъ заставляетъ насъ заключить, что двѣ раз-
считываемыя величины равны.

Слѣствие. Если изъ точки А, взятой на окру- ф. 127.
жности, проведемъ къ концамъ діаметра ВС ли-
ніи АС, АВ, то триугольникъ АВС будетъ пря-
моугольный въ А (18, II). Отсюда, 1-е *перпенди-
куляръ AD есть средняя пропорціональная меж-
ду отрезками діаметра BD, DC*, или, что все
равно, квадратъ $\overline{AD}$ равенъ произведенію
 $BD \times DC$.

2. *Хорда АВ есть средняя пропорціональная
между діаметромъ ВС и прилежащимъ къ ней от-
резкомъ BD*, или, что одно и тоже, $\overline{AB} = \sqrt{BC \times BD}$.
Подобнымъ образомъ будемъ имѣть $\overline{AC} = \sqrt{BC \times DC}$;
въ слѣдствіе чего $\overline{AB} : \overline{AC} = BD : DC$, и срав-
нивъ $\overline{AB}$ съ $\overline{BC}$, получимъ $\overline{AB} : \overline{BC} = BD : BC$; такъ-
же могли бы получить $\overline{AC} : \overline{BC} = DC : BC$. Эти
отношенія квадратовъ сторонъ между собою или
съ квадратами гипотенузы, были уже доказаны
въ слѣдствіяхъ III и IV, предлж. XI.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV.

ТЕОРЕМА.

Ф. 123.

Два треугольника имѣющіе по равному углу, относятся между собою какъ прямоугольники изъ сторонъ содержащихъ равные углы, то есть треугольникъ ABC относится къ треугольнику ADE , какъ прямоугольникъ $AB \times AC$ относится къ прямоугольнику $AD \times AE$.

Если проведемъ BE , то треугольники ABE , ADE , имѣющіе общую высоту, будутъ относиться между собою какъ изъ основанія AB , AD (6), и слѣд. $ABE : ADE = AB : AD$. Подобнымъ образомъ имѣемъ $ABC : ABE = AC : AE$.

Перемножая эти пропорціи почленно, и уничтоживъ общій членъ ABE , получимъ

$$ABC : ADE = AB \times AC : AD \times AE.$$

Слѣдствіе. Отсюда слѣдуетъ, что два треугольника будутъ равносторонні, если прямоугольникъ $AB \times AC$ равенъ прямоугольнику $AD \times AE$, или $AB : AD = AE : AC$, что имѣетъ мѣсто въ случаѣ параллелизма линій DC , BE .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

ТЕОРЕМА.

Два подобные треугольника относятся между собою какъ квадраты сходственныхъ сторонъ.

Если уголъ $A = D$, $B = E$, то, по причинѣ равенства угловъ A и D , въ слѣдствіе предыдущей теоремы, будемъ имѣть:

$$ABC : DEF = AB \times AC : DE \times DF.$$

Сверхъ того, изъ подобія треугольниковъ имѣемъ

Ф. 123.

$$AB : DE = AC : DF.$$

Умножая ее почленно на тождественную пропорцію

$$AC : DF = AC : DF.$$

получимъ $AB \times AC : DE \times DF = AC : DF$,

откуда $ABC : DEF = AC : DF$.

И такъ, два подобные треугольника ABC, DEF , относятся между собою какъ квадраты сходственныхъ сторонъ AC, DF , или какъ квадраты какихъ нибудь сходственныхъ сторонъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVI.

ТЕОРЕМА.

Для подобныхъ многоугольниковъ, составлены изъ одинаковаго числа треугольниковъ подобныхъ и подобно расположенныхъ.

Проведемъ въ многоугольникѣ $ABCDE$, изъ угла A , діагонали AC, AD ; въ другомъ многоуголь- Ф. 120.
никѣ $FGHIK$, изъ угла F , соотвѣтствующаго углу A , проведемъ діагонали FH, FI .

Въ слѣдствіе подобія многоугольниковъ имѣемъ, что уголъ ABC равенъ соотвѣтственному углу FGH (опр. 2), и стороны AB, BC , пропорціональны сторонамъ FG, GH , такъ что $AB : FG = BC : GH$. Отсюда видно, что треугольники ABC, FGH , имѣя по равному углу заключающемуся между равными сторонами, будутъ подобны, (20) и слѣд. уголъ BCA равенъ углу GHI . Вычитая эти углы изъ равныхъ угловъ BCD, GHI , получимъ равные остатки ACD, FHI . Но такъ какъ треугольники ABC, FGH подобны, то $AC : FH = BC : GH$. Сверхъ того, изъ подобія многоугольниковъ (опред. 2), имѣемъ $BC : GH = CD : HI$; слѣдовательно $AC : FH = CD : HI$; но мы уже видали, что уголъ $ACD = FHI$, и по этому три-

ACD , FHI , пѣтя по равному углу заключающемуся между пропорціональными сторонами, будутъ подобны. Продолжая доказывать точно такимъ же образомъ подобіе триугольниковъ, при какомъ нѣсть числа сторонъ данныхъ многоугольниковъ, усмотримъ, что они составлены изъ одинаковаго числа подобныхъ и подобно расположенныхъ триугольниковъ.

Замѣчаніе. Обратное предположеніе равнымъ образомъ справедливо, и *многоугольники, составленные изъ триугольниковъ подобныхъ и подобно расположенныхъ, будутъ подобны.*

Изъ подобія соответственныхъ триугольниковъ будемъ имѣть, что углы $ABC = FGH$, $BCA = GHF$, $ACD = FHI$; слѣдов. $BCD = GHI$, $CDE = HIK$ и проч. Припомъ $AB : FG = BC : GH = AC : FH = CD : HI$ и проч., откуда видно, что многоугольники имѣютъ равные углы и пропорціональныя стороны, и въ слѣдствіе этого будутъ подобны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVII.

ТЕОРЕМА.

Обводы или периметры многоугольниковъ относятся между собою какъ сходственные стороны, а площади ихъ какъ квадраты сходственныхъ сторонъ.

129. Ибо, 1-е, по свойству подобныхъ фигуръ имѣемъ $AB : FG = BC : GH = CD : HI$ и проч., откуда слѣдуетъ, что сумма предыдущихъ $AB + BC + CD +$ и проч., или обводъ первой фигуры, относится къ суммѣ послѣдующихъ $FG + GH + HI +$ и проч., или къ обводу второй фигуры, такъ какъ одинъ изъ предыдущихъ членовъ къ своему послѣдующему, или какъ сторона AB къ сходственной сторонѣ FG .

2-е. Изъ подобія триугольниковъ ABC , FGH , будемъ имѣть (25) $ABC : FGH = AC^2 : FH^2$; точно

также, изъ подобія треугольниковъ ACD , FHI ,
 $ACD : FHI = AC' : FI'$, и какъ эти пропорціи имѣ-
 ютъ общее отношеніе $AC : FI$, то получимъ

$$ABC : FGH = ACD : FHI.$$

Разсуждая подобнымъ образомъ, выведемъ про-
 порцію $ACD : FHI = ADE : FIK$, и такъ далѣе, ес-
 ли будемъ имѣть большее число тр-ковъ. Изъ это-
 го ряда равныхъ отношеній заключаемъ, что сум-
 ма предыдущихъ $ABC + ACD + ADE$, или многоуг-къ
 $ABCDE$, относится къ суммѣ послѣдующихъ, FGH
 $+ FHI + FIK$, или къ многоуг-ку $FGHIK$, такъ
 какъ одинъ изъ предыдущихъ ABC къ своему пос-
 лѣдующему FGH , или какъ AB къ FG ; откуда слѣ-
 дуетъ, что площади подобныхъ многоуг-въ отно-
 сятся между собою какъ квадраты сходственныхъ
 сторонъ.

Слѣдствіе. Если построимъ три подобныя фи-
 гуры, которыхъ сходственныхъ стороны равны
 сторонамъ прямоугольнаго тр-ка, то фигура пос-
 троенная на большой сторонѣ будетъ равна сум-
 мѣ двухъ прочихъ фигуръ. Эти фигуры пропорці-
 ональны квадратамъ ихъ сходственныхъ сторонъ,
 но квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ
 прочихъ сторонъ; слѣд. и проч.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVIII.

ТЕОРЕМА.

*Две хорды AB , CD , пересѣкаются въ кругѣ Ф. 130.
 на части обратно пропорціональныя; такъ что
 $AO : DO = CO : OB$.*

Проведемъ AC и BD . Въ тр-кахъ ACO , BOD ,
 углы при точкѣ O будутъ равны какъ противо-
 положныя вершинами; уголъ A равенъ углу D , по-
 тому что оба вписаны въ одинъ сегментъ, и по-
 той же причинѣ уг. $C =$ уг. B , откуда слѣдуетъ

что эти треугольники подобны, и сходственные стороны ихъ составляютъ пропорцію $AO : BO = CO : OB$.

Слѣдствіе. Изъ этой пропорціи выведемъ, что $AO \times OB = BO \times CO$; следовательно прямоугольн. изъ двухъ частей одной хорды равенъ прямоугольн. изъ двухъ частей другой хорды.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIX.

ТЕОРЕМА.

Ф. 131. *Если изъ точки O, взятой внѣ круга, проведутся стѣкущія BO, CO, ограниченныя вогнутою другою BC, то цѣлыя стѣкущія будутъ обратно пропорціональны вѣдшимъ или частямъ OA, OD, то есть,*

$$OB : OC = OD : OA.$$

Ибо, проведя AC и BD, получимъ тр-ки OAC, OBD, въ которыхъ уг. O естьобщій, и уг. B = C, (18, II); слѣд. тр-ки OAC, OBD, будутъ подобны и сходственные ихъ стороны составятъ пропорцію

$$OB : OC = OD : OA.$$

Слѣдствіе. Отсюда видно, что прямоугольн. $OA \times OB$ равенъ прямоугольн. $OC \times OD$.

Замѣчаніе. Легко усмотрѣть, что это предположеніе являетъ большое сходство съ предыдущимъ, и различается отъ него только тѣмъ, что точка пересѣченія хордъ AB, CD, находится внѣ круга, а не внутри его. Слѣдующее предположеніе можетъ быть также разсматриваемо, какъ частный случай предыдущаго.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXX.

ТЕОРЕМА.

Ф. 132. *Если изъ точки O, взятой внѣ круга, проведется*

касательная AO и стягивающая OC , то касательная будетъ среднею пропорціональною между всею стягивающею и вышшею ея частию, такъ т.е. $OC : OA = OA : OD$, или, что одно и то же, $\overline{AO} = OC \times OD$.

Проведемъ AD и AC , получимъ треугольники AOB , AOC , имѣющіе общій уголъ O ; припомъ уг. AOB , составленный касательною и хордою, и уг. C равны, какъ лежащіеся половиною дуга AD (19, II); слѣд. треугольники подобны, и будетъ существовать пропорціа

$$OC : OA = OA : OD.$$

изъ которой $\overline{OA^2} = OC \times OD$,

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXI.

ТЕОРЕМА.

Если, въ треугольнике ABC , продолжимъ уголъ A пополамъ Ф. 163. прямою AD , то прямоугольникъ составленный изъ стороны AB , AC , будетъ равенъ прямоугольнику изъ отрезковъ BD , DC , сложенному съ квадратомъ стягивающей AD .

Черезъ три точки A , B , C , проведемъ окружность, продолжимъ линию AD до встрѣчи ея съ окружностію и соединимъ точки C , E .

Трѣхъ BAD будетъ подобенъ трѣху EAC ; ибо, по превазшедшему, уг. $BAD =$ уг. EAC ; припомъ углы B и E равны, какъ лежащіеся половиною дуга AC ; слѣд. трѣхъ будутъ подобны и стоящими на ихъ стороны составятъ пропорцію $AB : AE = AD : AC$, откуда $AB \times AC = AE \times AD$, но $AE = AD + DE$, и если помножимъ съ обѣихъ сторонъ на AD , то будемъ имѣть $AE \times AD = \overline{AD^2} + DE \times AD$; и такъ какъ припомъ $AD \times DE = BD \times DC$, (20) то

$$AB \times AC = \overline{AD^2} + BD \times DC.$$

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXII.

ТЕОРЕМА.

Во всякомъ треугольнике ABC , прямоугольникъ изъ двухъ Ф. 164. сторонъ AB , AC , равенъ прямоугольнику изъ диаметра CE , при описаннаго и перпендикуляра D къ оушеннаго на третью сторону BC .

Проведем AF , получимъ триа ABD , AEC , прямоугольныя въ D и A . Притомъ уг. $B \equiv$ уг. E ; слѣд. триа подобны и будутъ имѣть $AB : CE \equiv AD : AC$, отсюда $AB \times AC \equiv CE \times AD$.

Слѣствие. Если помножимъ эти равныя величины на одну и ту же величину BC , то получимъ $AB \times AC \times BC \equiv CE \times AD \times BC$. Но $AD \times BC$ есть удвоенная площадь триа ABC (6); слѣд. произведение трехъ сторонъ триа равно площади его, умноженной на удвоенный диаметръ описаннаго круга.

Произведение трехъ сторонъ называется иногда *плѣнью*, въ причинѣ, которыя мы изложимъ въ послѣдствіи. Легко составить себѣ понятіе о величинѣ плѣня, вообразивъ, что линіи выражены числами, и перемноживъ эти числа.

Замѣчаніе. Можно доказать также, что площадь триа равна ея периметру, умноженному на половину радиуса круга описаннаго.

Триа AOB , BOC , AOC , концы общая вершина изложимъ въ O , имѣютъ общую высоту радиуса круга вписаннаго, и въ сдѣланные этого сумма триахъ будетъ равна суммѣ оснований AB , BC , AC , умноженной на половину радиуса OD , или площадь триа ABC равна его обводу, умноженному на половину радиуса круга вписаннаго.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIII.

ТЕОРЕМА.

Во всякомъ вписанномъ четырехугольникѣ $ABCD$, прямоугольникомъ составленнымъ изъ диагоналей AC , BD , равенъ суммѣ прямоугольниковъ составленныхъ изъ противоположныхъ сторонъ, такъ что будетъ имѣть

$$AC \times BD \equiv AB \times CD + AD \times BC.$$

Возмемъ дугу $CO \equiv AD$, и проведемъ BO до встрѣчи съ радиусомъ AC , въ точкѣ I .

Углы ABD и $CB I$ равны, ибо одинъ изъ нихъ измѣряется половиною дуги AD , а другой половиною дуги CO , равной AD ; углы ADB и $BC I$ равны, ибо они вписаны въ одну дугу сегмента AOB , слѣд. тр. ABD подобенъ триау IBC , и будетъ имѣть $AD : CI \equiv BD : BC$, отсюда $AD \times BC \equiv CI \times BD$. Тр. ABI также будетъ подобенъ триау BDC ; ибо дуга AD равна CO , и если прибавимъ къ обѣимъ сторонамъ по OD , то получимъ, что дуга $AO \equiv DC$; слѣд. углы $ABI \equiv DBC$. Притомъ углы BAI и BDC равны, потому что они вписаны въ одну дугу сегмента, отсюда выйдетъ, что триа ABI , BDC подобны, и будетъ имѣть пропорцію $AB : BD \equiv AI : CD$, которая даетъ $AB \times CD \equiv AI \times BD$.

Складывая два издѣнные вывода и принимая въ соображеніе, что $AI \times BD + CI \times DB \equiv (AI + CI) DB \equiv AC \times BD$, получимъ

$$AD \times BC + AB \times CD \equiv AC \times BD.$$

Замѣчаніе. Подобнымъ образомъ можно доказать другую теорему, относительно вписаннаго четырехугольника.

Тр. ABD, итребным BIC, дмшт пропорцію $BD : BC = AB : BI$, азъ котороу получаеъ $BD \times BI = BC \times AB$. Если соединить точкѣ C и O, то тр. CIO, итребным ABI, будеть подобенъ BDC и дмшт пропорцію $BD : CO = DC : OI$, ошзуда $BD \times OI = CO \times DC$, или, по причинѣ равенства CO и AD, $OI \times BD = AD \times DC$. Складъ эти выводы и получимъ, что выраженіе $BI \times BD + OI \times BD$ равноется къ $BO \times BD$, получимъ $BO \times BD = AB \times BC + AD \times DC$.

Еслибъ взяли $BP = AD$, и провели CKP, то получимъ бы, равсудая подобнымъ образомъ, что

$$CP \times CA = AB \times AD + BC \times DC.$$

Такъ какъ дуга BP равно GO, то прибавивъ съ обѣихъ сторонъ BC, получимъ дугу CBP = BCO, въ сѣкъствіе чего хорда CP равна хордѣ BO, и произведеніи $BO \times BD$ и $CP \times CA$ относятся между собой какъ BD и CA, ошзуда

$$BD : CA = AB \times BC + AD \times DC : AD \times AB + BC \times CD.$$

И такъ, Паскалемъ вписанна въ четырехугольникъ относится между собой какъ суммѣ произведеній противоположныхъ сторонъ на сѣкъствіе ихъ хордъ.

Дѣйствіи теоремы могутъ служить для опредѣленія діагоналей, когда сторонамъ четырехугольника будутъ извѣстны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIV.

ТЕОРЕМА.

Пусть дана точка P внутри круга на радіусѣ AC; если возведемъ точку Q вне круга, на продолженіи радіуса, такъ чтобъ $CP : CA = CA : CQ$, и проведемъ изъ каждой изъ этихъ точекъ M, взятой на окружности, прямыя MP и MQ, къ суммѣ тангенса Р и Q, то эти прямыя линіи будутъ имѣть всегдѣ постоянное отношеніе $MP : MQ = CP : AQ$. Ф. 160.

Мы имѣемъ, по предположенію, $CP : CA = CA : CQ$, и возведемъ CM въсто CA, получимъ $CP : CM = CM : CQ$; ошзуда видно, что тр-амъ CPM, CQM, которые имѣютъ равныи углы C, заключающіеся между пропорціональными сторонами, подобны (30, III), и въ сѣкъствіе этого третійъ сторона MP относится къ третьейъ MQ, такъ какъ C' къ CM, или къ CA. Но пропорція $CP : CA = CA : CQ$ дмшт $CP : CA = CA : CQ = CA$, или $CP : CA = AP : QA$; слѣдов. $MP : MQ = AP : AQ$.

ЗАДАЧИ ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ТРЕТЬЕЙ КНИГѢ.

Задача I.

Раздѣлить данную прямую линію на произ-

вольное число равных частей, или на части пропорціональныя даннымъ линіямъ.

Ф. 157. 1. Предполагая, что должно раздѣлить линію АВ на пять равныхъ частей, проведемъ чрезъ точку А неопредѣленную прямую АС, и изъ точку А, произвольной величины, нанесемъ ее пять разъ на АС. Если соединимъ теперь послѣднюю точку дѣленія С съ концемъ В линіи АВ, и проведемъ СІ $\perp$ ВС, то линія АІ будетъ пятою частию линіи АВ, и по нанесеніи АІ пять разъ на АВ, эта линія раздѣлится на пять равныхъ частей. Такъ какъ СІ $\perp$ ВС, то стороны АВ, АС, раздѣлены пропорціонально въ С и І (15). Но АС есть пятая часть АС; слѣд. АІ будетъ пятою частию АВ.

Ф. 158. 2. Пусть предложено будетъ раздѣлить линію АВ, на части пропорціональныя даннымъ линіямъ Р, Q, R. Чрезъ конецъ А проведемъ неопредѣленную прямую АС, и возьмемъ на ней АС = Р, СD = Q, DE = R; соединимъ конечности В и Е, и чрезъ точки С и D проведемъ линіи СІ, DK, параллельныя ВЕ; АВ будетъ такимъ образомъ раздѣлена на части АІ, ІК, KB, пропорціональныя линіямъ Р, Q, R.

Ибо, по параллелизму линій СІ, DK, EB, части АІ, ІК, KB, будутъ раздѣлены пропорціонально частямъ АС, СD, DE (15), которыя равны по построенію даннымъ линіямъ Р, Q, R.

З а д а ч а II.

Ф. 139. *Къ тремъ даннымъ линіямъ А, В, С, найтить четвертую пропорціональную.*

Проведемъ двѣ неопредѣленныя линіи DE, DF, подъ произвольнымъ угломъ. На DE возьмемъ DA = А и DB = В; на DF возьмемъ DC = С, и соединивъ точки А и С, чрезъ точку В проведемъ ВХ $\perp$ АС. Линія DX будетъ искомою четвертою пропорціональною; ибо, по параллелизму

BX и AC , имѣемъ пропорцію $DA : BD = DC : DX$, но такъ какъ при первомъ членѣ пропорціи равны тремъ даннымъ прямымъ, то въ слѣдствіе этого X есть искома четвертая пропорціоная.

Слѣдствіе. Точно такимъ же образомъ получится и третья пропорціоная между двумя линіями A, B , ибо она будетъ равна четвертой пропорціоальной трехъ линій A, B, B .

Задача III.

Найти среднюю пропорціоальную между данными линіями A и B .

На неопредѣленной линіи DF , возьмемъ $DE = A$ и $EF = B$. Принявъ цѣлую линію DF за діаметръ, опишемъ полуокружность DGF , и въ точкѣ E возставимъ перпендикуляръ EG , встрѣчающій полуокружность въ точкѣ G . Этотъ перпендикуляръ GE будетъ искома средняя пропорціоальная линія.

Перпендикуляръ GE , опущенный изъ какой нибудь точки окружности на діаметръ, есть средняя пропорціоальная между отрѣзками діаметра DE, EF (23); а эти отрѣзки равны даннымъ линіямъ A и B .

Задача IV.

Линію AB раздѣлить на пять такія части, чтобы большая изъ нихъ была среднею пропорціоальною между всею линіею и меньшею частию.

На концѣ B , линіи AB , возставимъ перпендикуляръ BC , равный половинѣ AB ; изъ точки C , какъ центра, радіусомъ BC , опишемъ окружность; проведемъ линію AC , которая встрѣтитъ окружность въ точкѣ D , и возьмемъ линію $AF = AD$. Линія AB раздѣлится въ точкѣ F такъ, что будетъ имѣть $AB : AF = AF : FB$.

Линія AB , перпендикулярная къ концу радіуса BC , будетъ касательна къ кругу, и если продолжимъ линію AC , до встрѣчи ея съ окружностію въ точкѣ E , то будемъ имѣть (30) $AE : AB = AB : AD$, откуда $AE - AB : AB = AB - AD : AD$. Но такъ какъ радіусъ BC равенъ половинѣ линіи AB , то діаметръ ED равенъ AB , и отсюда слѣдуетъ, что $AE - AB = AD = AF$. Также $AB - AD = FB$, ибо $AD = AF$; слѣд. $AF : AB = FB : AB$ или AF , и наоборотъ $AB : AF = AF : FB$.

Замѣчаніе. Этотъ родъ діленія линіи AB называется діленіемъ ея въ *крайнемъ и среднемъ отношеніи*: мы увидимъ въ послѣдствіи его употребленіе. Здѣсь можно замѣтить, что сѣкущая AE раздѣлена въ точкѣ D въ *крайнемъ и среднемъ отношеніи*; ибо, по причинѣ равенства линій AB , DE , имѣемъ $AE : DE = DE : AD$.

ЗАДАЧА V.

Ф. 142. Чрезъ данную точку A , въ уголъ BCD , провести линію BD , такъ, чтобы части AB , AD , заключающіяся между данною точкою A и сторонами угла, были равны.

Чрезъ точку A проведемъ $AE \parallel CD$, возьмемъ $BE = CE$, и чрезъ точки A и B проведемъ прямую BAO , которая будетъ искомою.

Ибо, по параллелизму AE и CD , имѣемъ $BE : EC = BA : AD$; но $BE = EC$, и слѣд. $BA = AD$.

ЗАДАЧА VI.

Построить квадратъ равноуглярный данному параллелограмму или треугольнику.

Ф. 143. 1. Полагая, что $ABCD$ будетъ данный параллелограмъ, AB его основаніе и DE высота, найдемъ среднюю пропорціональную XU между AB и DE (зд. 3), и квадратъ построенный на линіи XU будетъ равноуглярнъ съ даннымъ параллелограмомъ $ABCD$. Ибо, имѣемъ по построенію $AB : XU =$

$XU : DE$, откуда $XU = AB \times DE$; но такъ какъ $AB \times DE$ есть жѣра даннаго параллелограма, а XU жѣра квадрата, то двѣ фигуры равновѣрны.

2. Пусть ABC будетъ данный треугольникъ, Φ 144.
 BC его основаніе, AD высота. Возьмемъ среднюю пропорціональную между BC и половиною AD , и если эта средняя пропорціональная будетъ XU , то квадратъ построенный на ней будетъ равновѣренъ съ трѣмъ ABC .

Такъ какъ имѣемъ $BC : XU = XU : \frac{1}{2} AD$, откуда $XU = BC \times \frac{1}{2} AD$, слѣд. квадратъ построенный на XU равновѣренъ съ трѣмъ ABC .

Задача VII.

На линіи AD построить прямоугольникъ Φ 145.
 $ADEX$, равновѣрный съ прямоугольникомъ $ABFC$.

Если положимъ, что AX будетъ четвертая пропорціональная къ линіямъ AD , AB , AC , то прямоугольникъ, построенный изъ AD и AX , будетъ равновѣренъ съ прямоугольн. $ABFC$; ибо имѣемъ $AD : AB = AC : AX$, откуда $AD \times AX = AB \times AC$, и слѣд. прямоугольн. $ADEX$ равновѣренъ съ прямоугольн. $ABFC$.

Задача VIII.

Найти линейное отношеніе прямоугольниковъ Φ 146.
 построенныхъ на линіяхъ A и B , C и D .

Если X будетъ четвертая пропорціональная къ линіямъ B , C , D , то отношеніе двухъ линій A и X будетъ равно отношенію прямоугольниковъ $A \times B$ и $C \times D$.

Изъ пропорціи $B : C = D : X$, получимъ $B \times X = D \times C$; слѣд. $A \times B : C \times D = A \times B : B \times X = A : X$.

Слѣдствіе. Дабы получить отношеніе квадратовъ построенныхъ на линіяхъ A и C , найдемъ третью пропорціональную X между линіями A и C , такъ что будемъ имѣть $A : C = C : X$; и слѣд. $\overline{A} : \overline{C} = A : X$.

ЗАДАЧА IX.

Ф. 149. *Найти линейное отношеніе произведенія трехъ данныхъ линій A, B, C , къ произведенію трехъ линій P, Q, R .*

Пусть X четвертая пропорціональная къ тремъ даннымъ линіямъ P, A, B ; Y четвертая пропорціональная къ линіямъ C, Q, R . Давъ линіи Y, X , будемъ относитья между собою какъ произведенія $A \times B \times C, P \times Q \times R$.

Ибо, имеемъ $P : A = B : X$, откуда $A \times B = P \times X$, и перемножая обе части на C , получимъ $C \times A \times B = C \times P \times X$. Подобнымъ же образомъ, изъ пропорціи $C : Q = R : Y$, получимъ $C \times Y = Q \times R$, и помножая съ обеихъ сторонъ на P , будемъ имѣть $P \times Q \times R = P \times C \times Y$; слѣд. произведеніе $A \times B \times C$ относится къ произведенію $P \times Q \times R$, такъ какъ $P \times C \times X$ къ $P \times C \times Y$, или какъ X къ Y .

ЗАДАЧА X.

Ф. 148. *Построить триугольникъ равнобѣдренный съ даннымъ многоугольникомъ.*

Пусть $ABCDE$ будетъ данный многоугольникъ. Проведемъ діагональ CE , которая отдѣляетъ триугольникъ CDE ; чрезъ точку D проведемъ $DF \parallel CE$, до встрѣчи ея съ продолженною AE ; соединимъ точки C, F , и многоугольникъ $ABCF$, проведенный оныя построения, будетъ равнобѣдренъ съ многоугольникомъ $ABCF$, коего съведъ одною стороною жесть.

Такъ какъ триаи CDE, CFE , имѣющіе общее основаніе, и равныя высоты (ибо вершины ихъ D и F расположены на прямой DF , параллельной основанію) будутъ равнобѣдренны, то прибавляя къ каждой фигуру $ABCE$, получимъ съ одной стороны многоугольникъ $ABCF$, а съ другой многоугольникъ $ABCF$, которые будутъ равнобѣдренны.

Можно подобнымъ образомъ уничтожить уголъ В, заменивъ пр-къ АВС равнобѣрнымъ пр-мъ АСС, чрезъ что многоугольникъ АВДЕ обратится въ пр-къ GCF.

Тоже самое дѣйствіе можетъ быть предложено ко всякой фигурѣ, пою, уменьшая каждый разъ единицею число сторонъ многоугольника, достигнемъ наконецъ до равнобѣрнаго треугольника.

Замѣчаніе. Мы уже видали, что каждый треугольникъ можно обратить въ равнобѣрный ему квадратъ (зад. 6). Такимъ образомъ опредѣлимъ всегда квадратъ равнобѣрный данной прямоугольной фигурѣ, или, какъ говоримся, найдемъ ея *квадратуру*.

Вопросъ о *квадратурѣ круга* сослѣдуетъ въ томъ, чтобъ найти квадратъ равнобѣрный кругу, коего діаметръ извѣстенъ.

Задача XI.

Построить квадратъ, равный суммѣ или разности двухъ данныхъ квадратовъ. φ 137.

Пусть А и В будутъ стороны двухъ данныхъ квадратовъ.

1-е. Если нужно найти квадратъ равный суммѣ двухъ данныхъ квадратовъ, то проведемъ двѣ неопредѣленныя линіи DE, EF, взаимно перпендикулярныя, возьмемъ ED = А, EG = В, и соединимъ точки D и G, линіею DG, которая будетъ сторона искомага квадрата.

Такъ какъ пр-къ DEG есть прямоугольный, то квадратъ, построенный на GD, равенъ суммѣ квадратовъ построенныхъ на ED и EG.

2-е. Если нужно построить квадратъ равный разности данныхъ квадратовъ, то сдѣлаемъ, какъ и прежде, прямой уг. FEN, возьмемъ EG, равную меньшей изъ данныхъ линій А и В, и изъ точки G, какъ центра, радіусомъ GN, равнымъ большей линіи, опишемъ дугу, пересѣкающую EN въ точку

Н; квадратъ построенный на линіи ЕН будетъ равенъ разности квадратовъ линій А и В. Тр-къ $ГЕН$ есть прямоугольный, гипотенуза его $ГН = А$, сторона $ГЕ = В$; откуда слѣдуетъ, что квадратъ построенный на ЕН, и проч.

Замѣчаніе. Такимъ образомъ можно найти сумму произвольнаго числа квадратовъ, ибо построение приводящее два квадрата къ одному, придетъ три къ двумъ, а эти два къ одному, и ш. д. Тоже самое будетъ имѣть мѣсто, если сколько квадратовъ должны быть вычтены изъ сумм другихъ.

ЗАДАЧА XII.

Ф. 160.

Построить квадратъ, который бы относился къ данному квадрату $ABCD$, какъ линія M относится къ N .

На неопредѣленной линіи EG , возьмемъ $FG = N$, и $EF = M$; на EG , какъ діаметръ, опишемъ полуокружность, и въ точкѣ F возставимъ перпендикуляръ FN . Изъ точки N проведемъ хорды $ЕН$, $ГН$, и продолживъ ихъ, отложимъ на первой линіи $НК$, равную сторонѣ AB даннаго квадрата, и чрезъ точку K проведемъ линію $KI \parallel EG$. Линія HI будетъ стороною искомаго квадрата.

Ибо, по параллелизму линій KI , GE , имѣемъ $HE : HK = HE : HG$; слѣд. $HI^2 : HK^2 = HE^2 : HG^2$; но въ прямоугольномъ тр-кѣ $ЕНГ$ (23), квадраты сторонъ HE и HG относятся между собою какъ отрезки EF и FG , или какъ M и N ; откуда $HI^2 : HK^2 = M : N$, и такъ какъ $HK = AB$, то въ слѣдствіе этого квадратъ построенный на HI относится по квадрату на AB , такъ какъ M къ N .

ЗАДАЧА XIII.

Ф. 129.

На линіи FG , соответственной AB , построить многоугольникъ подобный $ABCDE$.

Въ данномъ многоугольникѣ проведемъ діагонали AC , AD ; при точкѣ F нанесемъ уг-лъ $GFI = \angle BAC$, и при точкѣ G , уг. $FGH = \angle ABC$; линіи FI , GH , пересѣкутся въ точкѣ H , и тр-къ FGH будетъ подобенъ тр-ку ABC . Подобнымъ же образомъ, на линіи FI , соотвѣтствующей стороне AC , построимъ тр. FHI , подобный тр-ку ACD , и на сторонѣ FI , соотвѣтственной AD , построимъ тр. FHK подобный тр-ку ADE . Въ сдѣланное аното построеніе, многоугольникъ $FGHIK$ будетъ искомымъ и подобный $ABCDE$.

Справедливость аното очевидна, ибо многоу-
 глн состоятъ изъ триугольниковъ подобныхъ и
 подобно расположенныхъ (26).

Задача XIV.

*Построить фигуру подобную и равную сум-
 мѣ или разности двухъ данныхъ подобныхъ фи-
 гуръ.*

Полагая, что A и B будутъ двѣ сходственные
 стороны данныхъ фигуръ, построимъ квадраты
 равный суммѣ или разности квадратовъ постро-
 енныхъ на A и B , и пусть X сторона аното ква-
 драта, которая будетъ, въ искомой фигурѣ, сто-
 роню соотвѣтственною линіямъ A и B въ дан-
 ныхъ фигурахъ. Самая фигура построится по
 предыдущей задачѣ.

Подобныя фигуры относятся какъ квадраты
 сходственныхъ сторонъ; но такъ какъ квадратъ
 стороны X равенъ суммѣ или разности квадратовъ
 построенныхъ на сходственныхъ сторонахъ A и
 B , то фигура построенная на сторонѣ X , равна сум-
 мѣ или разности подобныхъ фигуръ построен-
 ныхъ на сторонахъ A и B .

Задача XV.

*Построить фигуру подобную данной, и при-
 φ. 161.*

тоже такъ, чтобъ онѣ находились въ данномъ отношеніи M и N .

Если A будетъ сторона данной фигуры, а X соответствующая ей въ искомой фигурѣ, то должно, чтобъ квадратъ изъ X относился къ квадрату изъ A , какъ M къ N (27). Найдя X , по задачѣ XII, довершивъ построение по задачѣ XIII.

ЗАДАЧА XVI.

Ф. 151. Построить фигуру подобную фигурѣ P и равноугльную съ фигурою Q .

Опишемъ сторону M , квадрата равноугльнаго съ фигурою P , и сторону N , квадрата равноугльнаго съ фигурою Q . Предположимъ потомъ, что X будетъ четвертая пропорціональная къ сторонамъ M , N , AB , на сторонѣ X , соответственной сторонѣ AB , построимъ фигуру, подобную фигурѣ P . Эта фигура будетъ равноугльна съ фигурою Q .

Ибо, означивъ чрезъ Y , фигуру построенную на сторонѣ X , будемъ имѣть $P : Y = AB^2 : X^2$, но по построенію имѣемъ $AB : X = M : N$, или $AB^2 : X^2 = M^2 : N^2$; откуда $P : Y = M^2 : N^2$. Также имѣемъ $P = M^2$, $Q = N^2$; слѣд. $P : Y = P : Q$; откуда заключаемъ, что $Y = Q$; то есть, фигура Y подобна фигурѣ P и равноугльна съ фигурою Q .

ЗАДАЧА XVII.

Ф. 152. Построить прямоугольникъ, равноугльный данному квадрату C , такъ, чтобъ сумма смежныхъ сторонъ прямоугольника равнялась данной линіи AB .

Принявъ линію AB за діаметръ, опишемъ полуокружность, и на разстояніи AD , равномъ сторонѣ данного квадрата C , проведемъ линію $DE \perp AB$. Если изъ E , точки встрѣчи этой линіи съ окружно-

стью, опустимъ перпендикуляръ EF на діаметръ, то линіи AF и FB будутъ сторонами искомага прямоугольника.

Такъ какъ сумма этихъ линій равна AB, и прямоугольникъ $AF \times BF$, изъ нихъ послѣдній, равенъ квадрату изъ EF (23), или квадрату изъ DA, то слѣдуетъ, что прямоугольникъ равноѣренъ съ даннымъ квадратомъ C.

Замычаніе. Для возможности рѣшенія этой задачи должно, чтобы разстояніе AD не превосходило радіуса, но если, чтобы сторона данного квадрата C не превосходила половины линіи AB.

Задача XVIII.

Построить прямоугольникъ равноѣрный съ даннымъ квадратомъ C такъ, чтобы разность смежныхъ сторонъ прямоугольника была равна данной линіи AB.

Ф. 155.

На данной линіи AB, какъ діаметръ, опишемъ окружность, чрезъ конецъ этого діаметра проведемъ касательную AD, равную сторонѣ квадрата C, а чрезъ точку D и центръ O, съющую DE. Линіи DE и DF будутъ смежныя стороны искомага квадрата.

Ибо 1-е, разность этихъ сторонъ равна діаметру EF или AB; 2-е, произведеніе $DE \times DF$ равно AD^2 (30); слѣд. прямоугольникъ равенъ данному квадрату C.

Задача XIX.

Найти общую мѣру между діагональю и стороною квадрата, если эта общая мѣра существуетъ.

Нусимъ ABCG какой ни есть квадратъ и AC Ф. 156. его діагональ.

Положимъ сначала линію CB на CA, столько разъ сколько она можетъ въ ней содержаться (17, II),

и для этого опишемъ изъ центра С, радиусомъ СВ, полукругъ DBE. Очевидно, что СВ содержится въ АС одинъ разъ съ остаткомъ АД, и потому выводъ перваго дѣйствія есть частное, съ остаткомъ АД, которой должно сравнивать съ линіею ВС, или равною ей АВ. Взявъ $AF = AD$, и накладывая въ самомъ дѣлѣ линію AF на АВ, мы увидимъ бы, что она содержится въ ней два раза съ остаткомъ; но какъ въпомнѣ остатковъ и слѣдующіе безпрестанно уменьшаются, и наконецъ могутъ быть пренебрежены, по причинѣ ихъ незначительности, то очевидно, что употребляя этотъ механическій и непочиный способъ, мы не въ состояніи бы были сдѣлать рѣшительнаго заключенія о томъ, существуютъ ли общій мѣра между линіями АС, СВ. Но есть весьма простое средство избѣжать уменьшающихся линій и произвести дѣйствіе съ линіями, которыя всегда сохраняютъ постоянную величину.

Дѣйствительно, такъ какъ уголъ ABC прямой, то АВ есть касательная и АЕ сѣкущая, проведенная изъ той же точки, такъ что имѣемъ $AD : AB = AB : AE$ (30). Иско, что въ этомъ вѣдомомъ дѣйствіи, гдѣ сравнивается АД съ АВ, можно взять, вмѣсто отношенія АД къ АВ, отношеніе АВ къ АЕ; но какъ АВ, или равная ей CD, содержится въ АЕ два раза съ остаткомъ АД, то выводъ втораго дѣйствія есть частное 2 съ остаткомъ АД, который должно сравнивать съ АВ.

Третье дѣйствіе, въ которомъ АД сравнивается съ АВ, приведеннаго подобнымъ образомъ къ сравненію линіи АВ, или равной ей CD, съ АЕ, и получится частное 2 съ остаткомъ АД.

Отсюда видно, что дѣйствіе никогда не кончится, и что по этому не будетъ общей мѣры между діагональю и стороною квадрата. Эта истина, доказанная уже арифметически (ибо разсматриваемыя нами линіи относятся между со-

К Н И Г А IV.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ И ИЗМѢРЕНИЕ КРУГА.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ.

Многоугольникъ имѣющій равныя стороны и углы называется *правильнымъ многоугольникомъ*.

Правильные многоугольники могутъ существовать при всевозможномъ числѣ сторонъ. Равносторонній треугольникъ есть многоугольникъ о трехъ сторонахъ; квадратъ, о четырехъ и т. д.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ I.

ТЕОРЕМА.

Два правильные многоугольника одинаковаго числа сторонъ подобны.

Ф. 159. Для примѣра возьмемъ два правильные шестиугольника $ABCDEF$, $abcdef$. Сумма угловъ одного изъ этихъ многоугл-въ одинакова съ суммою угловъ другаго и равна осьми прямымъ угламъ (28, I). Уг. A есть шестая часть этой суммы, равно какъ и уг. a ; слѣд. углы равны; тоже самое можно сказать и объ углахъ B и b , C и c , и проч.

Такъ какъ, по свойству многоугл-въ, стороны AB , BC , CD , и проч., равны между собою, подобно сторонамъ ab , bc , cd , и проч.; то очевидно, что будемъ имѣть пропорцію $AB : ab = BC : bc = CD : cd$

и проч. отсюда заключаемъ, что разсматриваемыя фигуры, имѣя равные углы и пропорціональныя сходственные стороны, подобны (Опред. 2, III).

Слѣдствіе Периметры или обводы двухъ правильныхъ многоуг-въ относятся между собою какъ сходственные стороны; а поверхности ихъ какъ квадраты ихъ же сторонъ (27, III).

Замѣчаніе Уголъ правильного многоуг-ка опредѣляется числомъ его сторонъ, какъ и въ равноугольномъ многоугольникѣ (20, I).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

ТЕОРЕМА.

Въ какій правильнѣй многоугольникъ можетъ быть вписанъ въ кругъ и описанъ около круга.

Пусть ABCDE и проч., данный многоуг-къ. Вообразивъ окружность, проведенную чрезъ три точки A, B, C, коей центръ будетъ O, и OP перпендикуляръ опущенный на средину стороны BC, соединивъ точки A, D, съ O.

Четыреугольники OPCD, OPBA, могутъ быть соизмѣнены, потому что сторона OP есть общая, а углы OPC и OPB равны, какъ прямые; по вѣтому сторона PC наложится на равную ей сторону PB, и точка C упадетъ въ B. Принимъ, по свойству многоуг-въ, уг. PCD = уг. PBA; слѣд. сторона CD приметъ направление стороны BA, точка D упадетъ въ точку A, по равенству CD и BA, и четырехугольники совершенно совмѣстятся. Отсюда разстояніе OD = AO, и по вѣтому очевидно, что окружность, проходящая чрезъ точки A, B, C, пройдетъ также чрезъ точку D. Подобнымъ же образомъ докажемъ, что окружность, проходящая чрезъ вершины B, C, D, пройдетъ чрезъ вершину E; слѣд. окружность, проходящая чрезъ точки

А, В, С, пройдетъ и чрезъ прочія вершинныя углы многоугла, и онъ будетъ вписанъ въ кругъ.

Во впороть случаѣ, стороны АВ, ВС, СD, суть равныя хорды описанной окружности, и слѣд. онъ равно удаленъ отъ центра (8, II). И такъ, по описанной окружности изъ центра О, радіусомъ PO , она коснется стороны ВС и всѣхъ прочихъ сторонъ въ ихъ срединѣ, откуда видимъ, что окружность будетъ вписана въ многоугль, или многоугль описанъ около круга.

Замѣчаніе I. Точка О, общій центръ описаннаго и вписаннаго круга, можетъ быть разсматриваема, какъ центръ многоугла; почему и называютъ *угломъ при центрѣ*, уг. АОВ, составленный двумя радіусами проведенными къ оконечностямъ одной стороны АВ.

Такъ какъ всѣ хорды АВ, ВС, и проч., равны, то очевидно, что углы при центрѣ лежащіе будутъ равны, а величина каждаго изъ нихъ определяется чрезъ раздѣленіе четырехъ прямыхъ угловъ на число сторонъ многоугольника.

Φ. 168. *Замѣчаніе II.* Для вписанія въ окружность правильнаго многоугла о нѣсколькихъ сторонахъ, надлежитъ раздѣлить окружность на столько равныхъ частей сколько сторонъ долженъ имѣть многоугль; ибо, по равенству дугъ, хорды АВ, ВС, СD и проч., будутъ равны. Тр-хи АВО, ВОС, СОD, и проч., также будутъ равны, ибо они равносторонніе; откуда видимъ, что углы АВС, ВСD, СDE и проч., равны; и слѣд. фигура ABCDE будетъ правильный многоугль.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Задача.

Φ. 167. *Въ данной окружности вписать квадратъ.*
Проведемъ два діаметра АС, ВD, взаимно пер-

пендикулярны; соединимъ ихъ оконечности A и B , C и D , и фигура $ABCD$ будетъ вписанный квадратъ: ибо, по равенству угловъ AOB , BOC , хорды AB , BC , также равны.

Замѣчаніе Изъ прямоугольнаго и равнобедреннаго тр-ка BOC получимъ (11, III), $BC : BO = \sqrt{2} : 1$; слѣд. сторона вписаннаго квадрата относится къ радіусу, какъ квадратный корень изъ 2 къ единицѣ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Задача.

Въ данной окружности вписать правильный шестигульникъ и равносторонній треугольникъ.

Предположимъ, что задача рѣшена, и пусть AB будетъ одна изъ сторонъ шестигулка. Если проведемъ радіусы AO , BO , то тр. AOB будетъ равносторонній. p. 110.

Такъ какъ уг. AOB есть шестая часть четырехъ прямыхъ угловъ, то принимая прямой уголъ за единицу, получимъ $AOB = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Два другіе угла ABO , BAO , равны $2 - \frac{1}{2}$ или $\frac{5}{6}$; но по взаимному равенству, каждый изъ нихъ $= \frac{5}{12}$, откуда видно, что тр. AOB есть равносторонній, и слѣд. сторона вписаннаго шестигулка равна радіусу.

Изъ этого заключаемъ, что для вписанія шестигулка въ данной окружности, должно отложить радіусъ шесть разъ по окружности. Если шестигулкъ $ABCDEF$ вписать, то соединяя углы его черезъ центръ, составимъ равносторонній тр. ACE .

Замѣчаніе. Фигура $ABCO$ есть параллелограммъ и въ тоже время ромбъ, ибо $AB = BC = CO = AO$; слѣд. (14, III) сумма квадратовъ діагоналей $AC +$

BO равна суммѣ квадратовъ сторонъ 4 AB или 4 BO . Вычитая съ общихъ сторонъ по BO , останется $AC = 3 BO$; слѣд. $AC : BO = 3 : 1$, или $AC : BO = \sqrt{3} : 1$; отсюда видимъ, что сторона вписаннаго равносторонняго треугольника относится къ радиусу, такъ какъ $\sqrt{3}$ къ единицѣ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Задача.

Въ данномъ кругѣ вписать десятиугольникъ, пятиугольникъ и пятнадцатиугольникъ.

Если раздѣлимъ радиусъ AO въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, въ точкѣ M (зад. 4, III), и возьмемъ хорду AB , равную большому отрѣзку OM , то эта хорда AB будетъ стороною десятиугла, и помѣстится десять разъ на окружности.

Ибо, соединимъ точки M и B , имѣемъ, по построению, $AO : OM = OM : AM$; или, по причинѣ $AB = OM$, $AO : AB = AB : AM$. Отсюда слѣдуетъ, что тр-ки ABO , AMB , которые имѣютъ общій уг. A , заключающійся между пропорціональными сторонами, будутъ подобны (20, III). Такъ какъ тр. DAV есть равнобедренный, то AMB будетъ также равнобедренный, и потому $AB = BM$. Кроме того $AB = OM$; слѣд. $BM = OM$, и тр. BMO есть равнобедренный. Внѣшній уг. AMB , тр-ка BMO , равенъ удвоенному внутреннему уг. O (19, I), но уг. $AMB = \text{уг. } MAB$; слѣд. тр. OAB таковъ, что каждый изъ угловъ его OAB , OBA , при основаніи, вдвое болѣе угла при вершинѣ O ; отсюда видно, что при углахъ тр-ка будутъ равны пять разъ вѣшному углу O ; и потому уг. O есть пятая часть двухъ или десятая часть четырехъ прямыхъ угловъ, дуга AB есть десятая

часть окружности, а хорда АВ сторона правильного десятиуголка.

Слѣствие I. Соединяя вершины десятиуголка чрезъ одну, составимъ правильный пятиугольникъ ACEGI.

Слѣствие II. Такъ какъ АВ есть сторона десятиуголка, то AL будетъ стороною пятиуголка; а дуга BL, въ отношеніи къ окружности, будетъ $\frac{1}{10}$, или $\frac{1}{20}$. Отсюда слѣдуетъ, что хорда BL есть сторона пятинадцатугольника. Въ то же время видимъ, что дуга CL есть трепь СВ.

Замѣчаніе Раздѣливъ, въ какомъ ни есть вписанномъ правильномъ многоуглѣ, дугу стягивающую стороною многоугла, на двѣ равныя части, усмотримъ, что хорды стягивающія эти полуугла составляютъ также правильный многоуглъ вдвое большаго числа сторонъ. Отсюда видно, что квадраты можеть служить ко вписанію многоугла о 8, 16, 32 и т. д., сторонахъ. Точно также шестигульникъ можеть служить ко вписанію многоугла о 12, 24, 48 и т. д., сторонахъ; пятиугольникъ о 10, 20, 40 и проч., сторонахъ; пятинадцатугульникъ о 30, 60, 120 и проч., сторонахъ (*).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

ТЕОРЕМА.

Поданному вписанному многоугольнику ABCD и проч., описать около той же окружности подобный многоугольникъ.

(*) Долгое время полагали, что эти многоугольники суть единственные, которые можно вписывать въ кругъ по способу изъ чина Гевеншринга, или, что приводится къ одному, посредствомъ рѣшенія уравненій первой и второй степени: но Г. Гауссъ доказалъ въ своемъ сочиненіи *Disquisitiones Arithmeticae, Lipsiae, 1801*, что можно вписать подобныя средстvomъ многоугольника о семнадцати, и вообще, о $2^n + 1$ сторонахъ, если только $2^n + 1$ будетъ простое число.

Въ точку T , срединѣ дуги AB , проведемъ касательную GH , которая будетъ параллельна AB (10, II). Сдѣлаемъ тоже самое въ срединѣ каждой изъ дугъ BC , CD и проч., и эти касательныя составимъ, по пересѣченіи, описанный многоуголъ GHK , подобный вписанному.

Легко замѣтить, что три точки O , B , N находятся на одной прямой, по равенству прямоугольныхъ тр-ъ OTH , ONN , которые имѣютъ общую гипотенузу ON , и сторону $OT = ON$ (18, I), откуда видно, что уг. $TON = NON$, и слѣд. линія ON проходитъ чрезъ точку B , средину дуги TN ; по той же причинѣ точка I будетъ находиться на продолженіи линіи OC и проч. Но такъ какъ $GH \parallel AB$ и $HN \parallel BC$, то уг. $GHN = \text{уг. } ABC$ (26, I); также уг. $HKI = \text{уг. } BCD$, и проч.; слѣд. углы многоугла описаннаго равны угламъ многоугла вписаннаго. Примемъ, по параллелизму тѣхъ же сторонъ, имѣемъ $GH : AB = ON : OB$, и $HN : BC = ON : OB$; откуда $GH : AB = HN : BC$; но какъ $AB = BC$, то GH будетъ равна HN , и по той же причинѣ, $HN = IK$ и проч., откуда видимъ, что стороны описаннаго многоугла равны между собою; слѣд. онъ есть правильный и подобный вписанному многоугольнику.

Слѣдствіе I. Обратно, если данъ будетъ описанный многоуголъ GHK и проч., для построения посредствомъ его вписаннаго многоугла $ABCD$ и проч., то очевидно, что достаточно будетъ провести къ вершинамъ G , H , I и проч., даннаго многоугла, линіи GO , HO , IO и т. д., которая встрѣтитъ окружность въ точкахъ A , B , C и проч. Хорды AB , BC и т. д., соединяющія эти точки, составятъ вписанный многоуголъ. Можно также соединить однѣ только точки касанія T , N , P и проч., и линіи соединяющія ихъ составятъ вписанный многоугольничекъ подобный описанному.

Слѣдствіе II. Основываясь на вышесказанномъ.

можно описать около данного круга всѣ правильные многоугольники, которые мы уже умѣемъ вписывать, и наоборотъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

ТЕОРЕМА.

Площадь правильного многоугольника равняется $\frac{1}{2}$ произведенію изъ его обвода на половину радіуса круга описаннаго.

Пусть GHIK и проч. данный многоу-хъ. Тр. GON имѣетъ мѣрою $GI \times \frac{1}{2} ON$; пр. OHI имѣетъ мѣрою $HI \times \frac{1}{2} ON$; но $ON = OT$; слѣд. два тр-ка имѣютъ мѣрою $(GI + HI) \times \frac{1}{2} OT$. Продолжая поступать такимъ образомъ и съ прочими тр-ми, увидимъ, что сумма ихъ, или цѣлый многоугольникъ, будетъ имѣть мѣрою сумму основаній GI, HI, IK и проч.; т. е. обводъ многоугольника умноженный на $\frac{1}{2} OT$, или половину радіуса круга описаннаго.

Замѣчаніе Радіусъ OT, круга описаннаго, есть перпендикуляръ опущенный изъ центра на сторону многоугольника. Иногда его называютъ апо-темою многоугольника.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

ТЕОРЕМА.

Обводы правильныхъ многоугольниковъ одинаковаго числа сторонъ относятся между собою какъ радіусы круговъ описанныхъ или описанныхъ, а площади ихъ какъ квадраты радіусовъ.

Пусть АВ сторона одного изъ многоугольниковъ, О его центръ, и въ слѣдствіе этого, АО радіусъ круга описаннаго, а OD $\perp$ къ АВ,

радіусъ круга вписаннаго; пусть также ab будетъ сторона другаго подобнаго многоуг-ка, o его центръ, ao и od радіусы круговъ описаннаго и вписаннаго. Обводы этихъ многоуг-въ относятся между собою какъ сходственные ихъ стороны AB и ab : но уголъ A равенъ углу a , ибо каждый изъ нихъ составляетъ половину угла многоуг-ка, и почво также уг. $B = \text{уг. } b$; слѣд. тр-ки ABO , abo , подобны, равно какъ и прямоугольные тр-ки ADO , ado , откуда получимъ $AB : ab = AO : ao = OD : od$; и въ слѣдствіе этого, периметры многоугольниковъ будутъ относиться какъ радіусы AO и ao , круговъ описанныхъ, и также какъ радіусы OD и od , круговъ вписанныхъ.

Площади многоуг-въ относятся какъ квадраты сходственныхъ сторонъ AB , ab , и по этому будутъ относиться также какъ квадраты радіусовъ AO , ao , круговъ вписанныхъ, и какъ квадраты радіусовъ OD , od , круговъ описанныхъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Лемма

Всякая кривая или многоугольная линія, обертывающая отъ одного конца до другаго выпуклую линію AMB , длиннее обернутой линіи AMB .

Мы уже сказали, что подъ выпуклою линіею мы будемъ разумѣть кривую или многоугольную, или частію кривую, а частію многоугольную, и при томъ такую, что прямая линія будетъ пересѣкать ее только въ двухъ точкахъ. Еслибъ линія AMB имѣла входящія частія или изгибы, то не была бы выпуклою; ибо легко усмотрѣть, что прямая линія могла бы пересѣчь ее болѣе чѣмъ въ двухъ точкахъ.

Дуги круговъ будутъ существенно выпуклы-

ли линіямъ, но предложеніе нами разсматриваемое распространяется равно на всѣ линіи удовлетворяющія вышеприведенному условію. Еслибъ теперь линія AMB не была менѣе всякой другой ее обертывающей, то между симъ послѣдними будетъ существовать самая крайняя, которая менѣе AMB , или, по крайней мѣрѣ, равна ей. Пусть $ACDEB$ будетъ обертывающая линія. Проведемъ между этими линіями произвольную прямую PQ , которая не встрѣнитъ AMB , или только къ ней коснется. Такъ какъ прямая PQ короче $PCDEQ$, то взявъ PQ , вмѣсто части $PCDEQ$, получимъ, что обертывающая $APQB$ будетъ короче $APDOB$. Но, по предположенію, послѣдняя должна быть короче всѣхъ прочихъ; слѣд. это предположеніе не имѣетъ мѣста, и всякая обертывающая линія будетъ менѣе AMB .

Замѣчаніе. Подобнымъ же образомъ докажемъ, Ф. 103. что всякая выпуклая линія AMB короче всякой другой обертывающей ее со всѣхъ сторонъ; будетъ ли обертывающая FGH касаться AMB въ одной или нѣсколькихъ точкахъ, или обертывать ее не касаясь къ ней.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X

Лемма.

Если даны двѣ концентрическія окружности, то всегда можно вписать въ большей изъ нихъ правильный многоугольникъ, котораго стороны не встрѣтятъ меньшей окружности или описать около меньшей второй многоугольникъ, котораго стороны не встрѣтятъ большей окружности; такъ что, въ томъ и другомъ случаѣ, стороны описаннаго многоугольника будутъ заключаться между окружностями.

Пусть CA и CB , радіусы двухъ данныхъ окруж. Ф. 104.

ностей. Въ точкѣ А, проведемъ касательную DE, встрѣчающую большую окружность въ точкахъ D и E; впишемъ въ большей окружности одинъ изъ правильныхъ многоуг-лъ, руководствуясь предыдущими правилами; потомъ раздѣлимъ пополамъ дуги сплгиваемыя сторонами, проведемъ хорды полудугъ, и чрезъ это получимъ правильный многоугольникъ, имѣющій число сторонъ вдвое большее нежели первый. Будемъ продолжать дѣленіе дугъ до тѣхъ поръ, пока не получимъ дугу меньшую DBE, и если MBN будетъ эта дуга, которой середина предполагается въ B, то очевидно, что хорда MN будетъ болѣе удалена отъ центра чѣмъ DE; и слѣд. многоуг-лъ, котораго сторона есть MN, не встрѣнитъ окружности описанной радіусомъ AC.

Если, сохраняя тѣ же положенія, соединимъ CM, CN, встрѣчающія касательную DE въ точкахъ P и Q, то линія PQ будетъ стороною многоуг-ка описаннаго около меньшей окружности и подобнаго вписанному въ большей, коего сторона есть MN. Очевидно, что описанный многоуг-лъ не встрѣтитъ болѣе большую окружность, пошому что CP менѣе CM. И такъ, можно вписать въ большей окружности, и описать около меньшей правильные многоуг-ки подобные между собою, коихъ стороны будутъ заключаться между данными окружностями.

Замычаніе. Если имѣемъ два концентрическіе сектора FCG, ICH, то можемъ вписать въ болѣешемъ изъ нихъ часть правильного многоульника, или описать около меньшаго часть многоуг-ка, подобнаго первому, такъ что обводы ихъ будутъ заключаться между двумя окружностями: для этого должно только дѣлить дугу FBG постепенно на 2, 4, 8, 16 и проч., частей, до тѣхъ поръ, пока не получимъ часть меньшую DBE.

Частью правильного многоугольника мы назыв-

взять фигуру, ограниченную рядом равных хорд вписанных въ дугъ GF , отъ одной конечности ея до другой. Эта часть имѣетъ всѣ главныя свойства правильныхъ многоуг-въ; стороны и углы ея равны между собою, и она можетъ быть вписана въ окружности, или описана около ней. Но, впрочемъ, она только тогда составляетъ часть правильного многоуг-ка, когда дуга, соединяющая одно изъ сторонъ, будетъ aliquotною (aliquote) частью окружности.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

ТЕОРЕМА.

Окружности круговъ относятся между собою какъ ихъ радіусы, а площади какъ квадраты радіусовъ.

Означивъ, для краткости, чрезъ окр. CA , окр-ть окружность имѣющую радіусомъ CA , должно доказать, что окр. $CA : \text{окр. } OB = CA : OB$.

Если эта пропорція не имѣетъ мѣста, то должно допустить, что CA относится къ OB такъ какъ окр. CA къ целому числу, большому или меньшему окр. OB , и пусть, если возможно, $CA : OB = \text{окр. } CA : \text{окр. } OD$, гдѣ окр. $OD < \text{окр. } OB$.

Впишемъ въ окружности, имѣющей радіусомъ OB , правильный многоуг-къ $EFGKLE$, коего стороны не встрѣчались бы окружности имѣющей радіусомъ OD (10); и также подобный ему многоуг-къ $MNPISM$ въ окружности, описанной радіусомъ CA .

Изъ подобія вписхъ многоуг-въ имѣемъ, что обводы $MNPISM$, $EFGKE$, относятся между собою какъ радіусы CA , OB , круговъ описанныхъ (8), то есть $MNPISM : EFGKE = CA : OB$. Но, по предположенію, $CA : OB = \text{окр. } CA : \text{окр. } OD$; слѣд.

$MNPSM : EFGKE = \text{окр. } CA : \text{окр. } OD$, что невозможно; ибо обводъ $MNPSM$ меньше окр. CA (9), а обводъ $EFGKE$ больше окр. OD . Отсюда заключаемъ, что пропорція $CA:OB = \text{окр. } CA:\text{окр. } OD$ нелѣпа, или, въ болѣе общихъ выраженіяхъ, невозможно, чтобы радіусъ относился къ другому, какъ окружность описанная первымъ, къ окружности меньшей, нежели окружность описанная вторымъ радіусомъ. Невозможно также, чтобы CA относился къ BO , такъ какъ окр. CA относится къ окружности болѣе окр. OB ; ибо, допустивъ это и обративъ отношеніе, получили бы, что OB относится къ CA , такъ какъ окружность болѣе окр. OB , къ окр. CA , или, что одно и тоже, такъ какъ окр. OB къ окружности меньшей окр. CA . Отсюда слѣдовало бы, что радіусы будутъ относиться между собою такъ какъ окружность описанная первымъ относится къ окружности меньшей нежели окружность описанная вторымъ, нелѣпость чего уже была доказана.

Такъ какъ четвертый членъ пропорціи $CA : OB = \text{окр. } CA : X$, неможетъ быть ни меньше и ни болѣе окр. OB , то онъ долженъ ей равняться, и слѣд. окружности круговъ относятся между собою какъ ихъ радіусы.

Тѣже самыя разсужденія и построенія могутъ быть употреблены для доказательства того, что площади круговъ относятся между собою какъ квадраты радіусовъ. Мы не будемъ входить въ подробности этого предложенія, которое впрочемъ есть только слѣдствіе предложенія XII.

Ф. 116. *Слѣдствіе.* Подобныя дуги AB , DE , относятся какъ ихъ радіусы AC , DO ; а подобные секторы ACB , DOE , какъ квадраты радіусовъ.

Ибо, по подобію дугъ, уголъ C будетъ равенъ углу O (опр. 3, I); но такъ какъ уголъ C относится къ четыремъ прямымъ угламъ, какъ дуга AB къ цѣлой окружности, описанной радіусомъ

АС (17, II), и уголъ О относился къ четырёмъ прямымъ угламъ, какъ дуга ЕД къ цѣлой окружности, описанной радіусомъ ОД; по въ слѣдствіе этого дуги АВ, DE, относились какъ окружности, къ которымъ они принадлежатъ, а окружности относились какъ радіусы, и потому будемъ имѣть: дуга АВ : дуга DE = АС : ОД.

По той же причинѣ, секторы АСВ, DOE, относятся какъ круги, а круги какъ квадраты радіусовъ; слѣд. сект. АВС : сект. DOE = АС : ОД.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

ТЕОРЕМА.

Площадь круга равна окружности умноженной на половину радіуса.

Если означимъ чрезъ пл. СА, площадь круга описаннаго радіусомъ СА, то пл. СА = $\frac{1}{2}$ СА × окр. СА. Ф. 167.

Предполагая, что $\frac{1}{2}$ СА × окр. СА не будетъ выраженіемъ площади круга, котораго радіусъ есть АС, мы должны допустить, что эта величина должна быть мѣрою круга большаго, или меньшаго. Если она будетъ мѣрою круга большаго, то пусть, когда это возможно, $\frac{1}{2}$ СА × окр. СА = пл. СВ.

Опишемъ около круга, имѣющаго радіусомъ СА, правильный многоугольникъ DEFG и проч., коего стороны не вслѣдуютъ окружности описанной радіусомъ ВС (10). Площадь этого многоугольника будетъ равна обводу его DE + EF + FG + и проч., умноженному на $\frac{1}{2}$ СА (7); но обводъ многоугла болѣе окружности въ немъ вписанной, потому что онъ ее совершенно обертываетъ; слѣд. поверхность многоугла DEFG и проч., болѣе выраженія $\frac{1}{2}$ АС × окр. АС, которое, по предположенію, есть мѣра круга имѣющаго радіусомъ ВС, и отсюда слѣдуетъ, что многоугла болѣе круга. Но какъ напротивъ онъ менѣе кру-

га, ибо въ немъ заключенъ, но невозможно, чтобы выраженіе $\frac{1}{2} AC \times \text{окр. } AC$ было больше п. AC , или, другими словами, невозможно, чтобы окружность круга умноженная на половину своего радіуса была мѣрою круга большаго нежели данный.

Дабы доказать, что это произведеніе не можетъ быть мѣрою круга меньшаго, но избытокъ переизбытка фигуры, положимъ, что будемъ разсматривать кругъ описанный радіусомъ BC , и докажемъ, что $\frac{1}{2} CB \times \text{окр. } CB$ не можетъ быть мѣрою круга меньшаго; на прихѣтъ, круга вмѣщающаго радіусомъ CA . Пустъ, въ самомъ дѣлѣ, если это возможно, $\frac{1}{2} CB \times \text{окр. } CB = \text{п. } CA$.

Повторимъ вышешоказанное поспросимъ, увидимъ, что площадь многоугла $DEFG$ и проч., будетъ имѣть мѣрою $(DE + EF + FG + \text{и проч.}) \times \frac{1}{2} AC$; но отъ $DE + EF + FG$ и п. д., менѣе окружности CB ; слѣд. площадь многоугла менѣе $\frac{1}{2} AC \times \text{окр. } CB$, и по большей причинѣ, менѣе $\frac{1}{2} CB \times \text{окр. } CB$. Но слѣдняя величина, по предположенію, есть мѣра круга описаннаго радіусомъ CA ; и въ слѣдствие этого, многоугла будетъ менѣе круга въ немъ вписаннаго, что неистинно. И такъ не возможно, чтобы окружность круга умноженная на половину своего радіуса была мѣрою круга меньшаго, и отсюда видно, что произведеніе окружности на половину радіуса есть мѣра площади круга.

Слѣдствіе I. Поверхность сектора равна дугѣ его, умноженной на половину радіуса.

Секторъ ACB относится къ цѣлому кругу, такъ какъ дуга AMB къ цѣлой окружности ABD (17, II); или, такъ какъ $AMB \times \frac{1}{2} AC$ къ $ABD \times \frac{1}{2} AC$. Но цѣлый кругъ $= ABD \times \frac{1}{2} AC$; слѣд. секторъ будетъ имѣть мѣрою $AMB \times \frac{1}{2} AC$.

Слѣдствіе II. Назовемъ π окружность, которой діаметръ есть единица. Такъ какъ окружности находятся между собою въ отношеніи

діаметровъ, но можемъ составить слѣдующую пропорцію: діаметръ 1 относится къ своей окр. л, какъ какъ діаметръ 2 AC относится къ окр. описанной радіусомъ AC, то есть чпо $1 : \pi = 2 AC : \text{окр. AC}$, откуда $\text{окр. AC} = 2 \pi \times AC$. 4. 166
 Помножая съ обѣихъ сторонъ на $\frac{1}{2} AC$, получимъ: $\frac{1}{2} AC \times \text{окр. AC} = \pi \times \overline{CA}$, или ил. $AC = \pi \times AC$, слѣдовательно площадь круга равняется квадрату радіуса умноженному на постоянную величину π , которая представляетъ окружность діаметромъ 1, или отношеніе діаметра къ окружности.

Подобнымъ же образомъ площадь круга, имѣющаго радіусомъ OB, равняется $\pi \times \overline{OB}$ или $\pi \times \overline{CA} : \pi \times \overline{BO} = AC : OB$; слѣд. площади круговъ относятся между собою какъ квадраты ихъ радіусовъ, что согласуется съ предыдущею теоремою.

Замѣчаніе. Мы уже сказали, что задача квадратуры круга состоитъ въ опредѣленіи квадрата, имѣющаго одинакую площадь съ кругомъ; но выше доказано, что кругъ равняется прямоугольнику составленному изъ окружности и половины радіуса, который можно обратить въ квадратъ, взявъ среднюю пропорціональную между его сторонами (6); и поэтому описаніе квадратуры круга приводится къ опредѣленію окружности по извѣстному радіусу, а для того достаточно знать отношеніе окружности къ радіусу или діаметру.

До сихъ поръ еще не могли опредѣлить это отношеніе иначе какъ по приближенію; но приближеніе было просвершено такъ далеко, что знаніе точнаго отношенія окружности къ діаметру не представляло бы ни какой существенной выгоды предъ приближенными. Инакъ, вѣрно въ вопросъ, занимавшій многихъ

Геометровъ въ то время, когда способы приращенія были менѣе извѣстны, относятся теперь къ числу вопросовъ совершенно безполезныхъ. Архимедъ нашелъ, что отношеніе окружности къ діаметру заключается между $3\frac{1}{6}$ и $3\frac{1}{7}$; и отсюда видно, что $3\frac{1}{6}$, или $\frac{22}{7}$, есть величина весьма приближенная къ той, которую мы назвали π , и она весьма часто употребляется по простотѣ своей. Менцій нашелъ для того же числа величину $\frac{355}{113}$, еще болѣе приближающуюся къ истиной. Наконецъ величина π , вычисленная до извѣстнаго порядка десятичныхъ цифръ, была выражена числомъ 3,1415926535897932 и проч., и это вычисленіе было продолжено до ста двадцати семи, и даже до ста сорока десятичныхъ цифръ.—Очевидно, что такое приближеніе почти неразличаемо отъ истиннаго, и мы незнаемъ точнѣе корней изъ не полныхъ степеней.

Въ слѣдующихъ задачахъ будутъ изложены двѣ самыя простыя начальныя способа для опредѣленія этихъ приближенныхъ отношеній.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Задача

По даннымъ площадямъ двухъ правильныхъ многоугольниковъ, одного вписаннаго а другого описаннаго, найти площади двухъ другихъ правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ удвоенное число сторонъ.

Ф. 169. Пусть АВ будетъ сторона вписаннаго многоугла, а линія EF, параллельная ей, сторона описаннаго многоугла, подобнаго первому, и С центръ круга. Если проведемъ хорду АМ и касательныя AP, BQ, то хорда АМ будетъ стороною вписаннаго многоугла имѣющаго удвоенное число сторонъ, а PQ, вдвое большая PM, будетъ стороною многоугла описаннаго и подобнаго впи-

санному (6). Положивъ это, мы можемъ разсматривать одинъ уг. АСМ; ибо во всѣхъ прочихъ углахъ непоррился то же построение, и тр-ки въ немъ заключающіеся будутъ относиться между собою какъ цѣлые многоуг-ки. Означимъ чрезъ А, площадь многоугольника имѣющаго стороною АВ; чрезъ В, площадь подобнаго ему описаннаго многоуг-ка; чрезъ А', площадь многоуг-ка, коего сторона есть АМ; чрезъ В', площадь многоуг-ка описаннаго и подобнаго предыдущему. Теперь должно найти А' и В', по известнымъ А и В.

1. Тр-ки АСД, АСМ, имѣющіе общую вершину А, будутъ относиться какъ ихъ основанія СД, СМ; сверхъ того, эти тр-ки относятся между собою какъ многоуг-ки А и А', ибо они суть части этихъ многоуг-въ; слѣд. $A : A' = CD : CM$. Тр-ки САМ, СМЕ, имѣющіе общую вершину М, относятся какъ ихъ основанія СА, СЕ, или какъ многоуг-ки А' и В; откуда $A' : B = CA : CE$. Но, изъ параллелизма линий АД, МЕ, имѣемъ $CD : CM = CA : CE$; слѣд. $A : A' = A' : B$, и потому многоуг-къ А, одинъ изъ искомымъ, есть средній пропорціональный между известными А и В, откуда $A = \sqrt{A \times B}$.

2. Тр-ки СРМ и СРЕ, имѣющіе общую высоту СМ, относятся между собою какъ РМ и РЕ; и такъ какъ линия СР раздѣляетъ пополамъ уг. МСЕ, то будемъ имѣть (17, III) $PM : PE = CM : CE = CD : CA = A : A'$; слѣд. $CRM : CRE = A : A'$, откуда $CRM : CRM + CRE$, или $CME, = A : A + A'$; но СМРА, или 2 СМР и СМЕ относятся между собою какъ многоуг-ки В' и В; слѣд. $B' : B = 2A : A + A'$. Такъ какъ А уже опредѣленъ, то эта новая пропорція будетъ служить къ опредѣленію В', и въ слѣдствіе этого получимъ $B' = \frac{2A \times B}{A + A}$. Отсюда видно, что посредствомъ многоуг-въ А и В, легко найти многоуг-ки А' и В', имѣющіе вдвое бо́лье сторонъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

ЗАДАЧА.

Найти приближенное отношеніе окружности къ діаметру.

Если радіусъ круга $\equiv 1$, то сторона квадрата вписаннаго выразится $\sqrt{2}$ (3), а сторона квадрата описаннаго будетъ равна діаметру 2; сѣд. площадь вписаннаго квадрата $\equiv 2$, а описаннаго $\equiv 4$. Предполагая теперь, что $A \equiv 2$ и $B \equiv 4$, найдемъ по предыдущей задачѣ, что вписанный осьмуг-къ $A' \equiv \sqrt{8} \equiv 2,8284271$, а описанный осьмуг-къ $B' \equiv \frac{16}{2 + \sqrt{8}} \equiv 3,3137085$. Такимъ образомъ, зная вписанный и описанный осьмуг-ки, найдемъ посредствомъ ихъ многоуг-ки вдвое большаго числа сторонъ, и для того снова только снова предположимъ, что $A \equiv 2,8284271$, и $B \equiv 3,3137085$, откуда получимъ $A' \equiv \sqrt{A \times B} \equiv 3,0614674$, и $B' \equiv \frac{2 A \times B}{A + A'} \equiv 3,1825979$. Многоуг-ки о 16 сторонахъ послужатъ къ опредѣленію многоуг-въ о 32 сторонахъ, и подобное дѣйствіе должно продолжаться до тѣхъ поръ, пока вычисленія не будутъ представлять разности между многоугольниками вписаннымъ и описаннымъ, покрайней мѣрѣ до пятизнаго порядка десятичныхъ цифръ, на которомъ сочтемъ за нужное остановиться, наприм. до седьмаго. Достигнувъ этого заключимъ, что кругъ равенъ послѣднему выводу, ибо онъ содержится всегда между многоугольниками вписаннымъ и описаннымъ; и какъ эти многоуг-ки не разнятся между собою до известнаго порядка цифръ, то и самый кругъ не будетъ разниться отъ нихъ до того же порядка.

Здѣсь прилагается исчисленіе многоугольниковъ продолженное до тѣхъ поръ, пока не будетъ существовать разности между семью десятичными цифрами.

Число страниц	Многоуг. числ	Мног. числ
1	2,0000000	4,0000000
8	2,8281271	3,3137083
16	3,0611671	3,1825979
32	3,1214151	3,1517219
64	3,1365185	3,1411181
128	3,140511	3,1422256
256	3,1412772	3,1417501
512	3,1415158	3,1416521
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415911
4096	3,1415914	3,1415955
8192	3,1415925	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926

Отсюда заключаемъ, что поверхность круга $\approx 3,1415926$. Можно бы было сомнѣваться въ точности послѣдней десятичной цифры, по причинѣ погрѣшностей, которыя могли вкрасѣсь онѣ пренебреженныхъ частей, но такъ какъ вычисленіе произведено было съ одною лишнею десятичною цифрою, то мы можемъ быть увѣрены въ справедливости найденнаго вывода до послѣдней цифры.

Такъ какъ площадь круга равняется полуокружности умноженной на радіусъ, то при радіусѣ равномъ 1, полуокружность $\approx 3,1415926$; нп, при діаметрѣ ≈ 1 , окружность будетъ $3,1415926$; слѣд. отношеніе окружности къ діаметру, означенное выше чрезъ π , $\approx 3,1415926$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Л Е М М А.

Триугольникъ $СAB$ разсмотрѣнъ равнобедренн. а со-
вмѣстѣ триугольнику DCE , имѣющему съ нимъ
общій уголъ C , и котораго сторона CE , равная
сторонѣ CD , есть средняя пропорціональная
между CA и CB .

Сверхъ того, если уг. CAB есть прямой, то перпендикуляр CF , опущенный на основаніе равнобедреннаго триугольника, будетъ средня пропорціональная между стороною CA и полусуммою сторонъ CA и CB .

Ибо 1-е, тр-ки ABC и DCE , имѣющіе общій уг. C , относятся между собою, какъ произведенія $AC \times CB$ и $DC \times CE$, или DC (24, III); и слѣд. будутъ равносторонны, когда $DC = AC \times BC$, или, когда DC будетъ средня пропорціональная между AC и CB .

2. Перпендикуляр CGF , раздѣляющій пополамъ ACB , дастъ (17, III) $AG : GB = AC : CB$, откуда получимъ $AG : AG + GB$, или $AB = AC : AC + CB$; но AG относится къ AB какъ тр. ACG къ тр. ACB или 2 CDF ; сверхъ того, если уголъ A прямой, то прямоугольные тр-ки ACG , CDF , будутъ подобны, откуда $ACG : CDF = AC : CF$, и въ слѣдствіе этого $AC : 2 CF = AC : AC + CB$.

Черезъ помноженіе многаго отношенія на AC , предыдущіе члены сдѣлаются равными, откуда $2CF = AC \times (AC + CB)$, или $CF = AC \times \left(\frac{AC + CB}{2}\right)$. И такъ 2-е, когда уг. A прямой, то перпендикуляр CF есть средня пропорціональная между стороною AC и полусуммою сторонъ AC , CB .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Задача.

Найти кругъ, которой бы разнился отъ даннаго многоугольника величиною меньшею всякой данной.

Пусть данъ будетъ квадратъ $BMNP$; опустимъ изъ центра C , перпендикуляр CA на сторону MB и проведемъ CB .

Кругъ, описанный радіусомъ CA , будучи вписанъ въ квадратъ, менше его; а кругъ описанный радіусомъ CB , будучи описанъ около того же квадрата, болше его; но здесь дѣло состоитъ въ томъ, чтобы сблизить эти предѣлы.

Возмемъ CD и CE , равныя средней пропорціо-
нальной между CA и CB , и проведемъ ED ; равно-
бедренный тр. CDE будетъ равноугленъ съ тр. ABC (15). Сдѣлавъ такое самое съ каждымъ изъ
всѣми тр-въ составляющихъ квадратъ, получимъ
равильный осьмьугольникъ, равноугленный съ квад-
ратомъ $BMNP$. Кругъ описанный радіусомъ CE ,
или среднею пропорціональною линіею между CA и
 $\frac{CA \times CB}{CA + CB}$, будетъ вписанъ въ осьмьуг-къ, а кругъ,
имѣющій радіусомъ CD , описанъ около него. И
такъ первый будетъ менше, а второй болше дан-
наго квадрата.

Превращая, подобнымъ же образомъ, прямоу-
гольный тр-къ CDF въ равнобедренный ему рав-
ноугленный, составимъ правильный многоуг-къ о
шестнадцати сторонахъ, равноугленный съ предло-
женнымъ квадратомъ. Кругъ вписанный въ этотъ
многоуг-къ будетъ менше, а описанный болше дан-
наго квадрата.

Если продолжимъ дѣйствіе до нѣхъ поръ, пока
разность между радіусами круговъ вписаннаго и
описаннаго будетъ менше всякой данной величины,
то можно разсматривать каждыя изъ круговъ
какъ равноугленный съ предложеннымъ квадратомъ.

Замѣчаніе. Опредѣленіе послѣдовательныхъ ра-
діусовъ приводится къ слѣдующему. Пусть a
будетъ радіусъ круга вписаннаго въ одно изъ
найденныхъ многоуг-въ, b радіусъ круга описаннаго;
пусть a' и b' подобные радіусы для слѣдующаго
многоуг-ка, имѣющаго вдвое большее число сто-
ронъ.

Изъ вышедоказаннаго видно, что b есть сред-

няя пропорціональная между a и b , и a' средняя пропорціональная между a и $\frac{a \times b}{2}$; такъ что $b' =$

$\sqrt{a \times b}$, и $a' = \sqrt{a \times \frac{a+b}{2}}$; слѣд. зная радіусы a и b одного многоугла, опредѣлимъ легко радіусы a' и b' слѣдующаго, и будемъ продолжаться это дѣйствіе до нѣхъ поръ, пока разность между радіусами сдѣлается нечувствительною; тогда каждый изъ нихъ будетъ радіусъ круга равноуглаго съ даннымъ квадратомъ или многоуголь.

Легко сдѣлать приложеніе этого способа въ числахъ, ибо все дѣйствіе приведется къ нахожденію среднихъ пропорціональныхъ между известными линиями; но онъ можетъ быть произведенъ еще съ большимъ удобствомъ въ числахъ и есть одинъ изъ самыхъ простыхъ способовъ, представляемыхъ начальною Геометріею, для опредѣленія приближеннаго отношенія окружности къ діаметру. И такъ, если сторона квадрата $= 2$, то первый вписанный радіусъ CA будетъ 1, и первый описанный радіусъ CB равенъ $\sqrt{2}$, или 1,4142136. Поэтому сдѣлавъ $a = 1$, $b = 1,4142136$, найдемъ $b' = 1,1892071$, $a' = 1,0986841$. Эти числа послужатъ къ опредѣленію слѣдующихъ.

Здѣсь прилагаются выводы вычисленій, сдѣланныхъ по табллицамъ обыкновенныхъ логарифмовъ, до 7 или 8 цифръ.

Радіусы круговъ описанныхъ

Радіусы круговъ вписанныхъ

1,4142136	1,0000000.
1,1892071	1,0986841.
1,1470300	1,1210865.
1,1320449	1,1265659.
1,1292862	1,1279257.
1,1286065	1,1282637.

Достигнувъ выводовъ, въ коихъ первая половина цифръ одинакова съ обѣихъ сторонъ, мы мо-

жесть употреблать вмѣсто геометрическихъ способъ ариметическіе, которые разнятся отъ предыдущихъ только въ низшемъ разрядѣ десятичныхъ цифръ.

Въ слѣдствіе этого, дѣйствіе весьма сокращается, и полученные выводы будутъ

1,1281760	1,1285508.
1,1285954	1,1285721.
1,1285827	1,1285771.
1,1285891	1,1285787.
1,1285794	1,1285791.
1,1285792	1,1285792.

И такъ, число 1,1285792 почти равно радіусу круга, равнобѣрнаго съ площадью квадрата, коего сторона равна 2. Отсюда весьма легко вывести отношеніе окружности къ діаметру; ибо мы доказали уже, что площадь круга равна квадрату радіуса умноженнаго на π ; слѣд. раздѣливъ площадь 4 на квадратъ 1,1285792, получимъ величину π , которая выразится чрезъ 3,1415926 и проч., что уже было найдено прежде другими способами.

ПРИЛОЖЕНІЕ КЪ КНИГѢ IV.

О П Р Е Д Ъ Л Е Н І Я.

I. *Наибольшею* (maximum) величиною называется самая большая величина изъ всѣхъ одного съ нею рода; *наименьшею* (minimum), самая меньшая. Такъ діаметръ есть *наибольшая* изъ всѣхъ линий, соединяющихъ двѣ точки окружности, а перпендикуляръ есть *наименьшая* изъ всѣхъ прямыхъ проведенныхъ изъ данной точки къ данной линіи.

II. Фигуры *равнообводными* (isopérimètres) называются тѣ, которыхъ обводы или периметры равны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ

ТЕОРЕМА.

Изъ всѣхъ триугольниковъ одинаковаго основанія и обвода, наиболѣйшій есть тотъ, въ которомъ двѣ неопредѣленныя стороны равны.

Если $AC = CB$, и $AM + MB = AC + CB$; то равнобедренный тр. ACB будетъ болѣе тр-ка AMB , имѣющаго съ нимъ одинаковое основаніе и обводъ.

Изъ точки C , какъ центра, радіусомъ $CA = CB$, опишемъ окружность, которая въ прѣсѣченіи продолженную линію AC въ точку D ; проведемъ DB , и тогда уг. DBA , вписанный въ полуокружности, будетъ прямою (15, II). Продолжимъ перпендикуляръ DB до N , возьмемъ $MN = MB$, и проведемъ AN . Наконецъ, изъ точекъ M и C , опустимъ на линію ND перпендикуляры PM и CG . Такъ какъ $CB = CD$ и $MN = MB$, то $AC + CB = AD$ и $AM + MB = AM + MN$; но $AC + CB = AM + MB$; слѣд. $AD = AM + MN$, откуда $AD > AN$. Если же наклонная AD длиннѣе другой наклонной AN , то она должна удаляться болѣе отъ перпендикуляра AB ; слѣд. $DB > BN$, и BG , равная половинѣ BD (12, I), будетъ болѣе BP , половинны BN . Но тр-ки ABC , ABM , имѣющіе общее основаніе AB , относятся между собою какъ ихъ высоты BG , BP ; слѣд., при $BG > BP$, равнобедренный тр. ABC болѣе неравнобедреннаго тр. ABM , имѣющаго съ нимъ одинаковое основаніе и обводъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

ТЕОРЕМА.

Наиболѣйшій изъ всѣхъ многоугольниковъ имѣющихъ равный обводъ и одинаковое число сторонъ, есть равносторонній.

Пусть многоуг-къ $ABCDEF$ будетъ *наибольшій*. Ф. 178.
 Если сторона BC неравна CD , то построимъ, на основаніи BD , равнобедренный тр. BOD , равнаго об-
 вода съ BCD . Первый будетъ болѣе второго (пред. 1),
 и въ слѣдствіе этого, многоуг-къ $ABODEF$
 болѣе многоуг-ка $ABCDEF$; откуда видно, что
 послѣдній не есть *наибольшій* изъ всѣхъ мно-
 гоуг-въ пилющихъ одинаковое число сторонъ и
 равные обводы, что противно предположенію. И
 такъ должно, чтобы $BC = CD$, и по той же при-
 чинѣ $CD = DE$, $DE = EF$, и проч.; слѣд. всѣ сто-
 роны многоуг-ка, который есть *наибольшій*, дол-
 жны быть равны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

ТЕОРЕМА.

*Изъ всѣхъ треугольниковъ построенныхъ по
 двум даннымъ прямымъ, составляющимъ между
 собою разные углы, наибольшій есть тотъ,
 въ которомъ данныя линіи пересѣкаются подъ
 прямымъ угломъ.*

Пусть будутъ даны два тр-ка BAC , BAD ,
 имѣющіе общую сторону AB и $AC = AD$; если уг.
 BAC прямой, то тр. BAC будетъ болѣе тр-ка
 BAD , въ которомъ уг. A тупой или острый.

Эти тр-ки. имѣя общее основаніе, будутъ оп-
 воспаться между собою какъ высоты AC , DE ; но
 перпендикуляръ DE короче наклонной AD , или ра-
 вной ей AC ; слѣд. тр. BAD менѣе тр-ка BAC .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

ТЕОРЕМА.

Изъ всѣхъ многоугольниковъ построенныхъ по

даннымъ сторонамъ и одной произвольной, наибольшій есть тотъ, котораго углы могутъ быть вписаны въ полуокружности описанной на діаметръ равномъ произвольной сторонѣ.

Ф. 178. Положивъ, что $ABCDEF$ будетъ наибольшій изъ многоуг-въ составленныхъ по даннымъ сторонамъ AB, BC, CD, DE, EF , и произвольной AF , проведемъ діагонали AD, DF . Еслибъ уг. ADF не былъ прямой, то обращая его въ прямой, можнобъ было увеличить пр. ADF , равно какъ и многоуг-къ, не измѣняя частей $ABCD$ и DEF , въ слѣдствіе предыдущей теоремы; но такъ какъ, по предположенію, этотъ многоуг-къ есть наибольшій, то уг. ADF долженъ быть прямой. Тоже самое можно сказать и объ углахъ ABF, ACF, AEF , слѣд. всѣ углы A, B, C, D, E, F , наибольшаго многоуг-ка могутъ быть вписаны въ полуокружности описанной на діаметръ, равномъ неопредѣленной прямой AF .

Замычаніе. Изложенная теперь теорема даетъ мѣсто слѣдующему вопросу: существуетъ ли итъ-сколько способовъ для построения многоугольника по даннымъ сторонамъ и одной произвольной, равной діаметру полуокружности, въ которой можно вписать всѣ прочія стороны? Непроступная къ разрѣшенію атого вопроса, должно замѣтить, что если одна и таже хорда AB стягиваетъ дуги описанныя различными радіусами AC, AD , то уголъ Ф. 179. при центрѣ, опирающійся на эту хорду, будетъ наименьшій въ кругѣ, коего радіусъ есть наибольшій, и потому $ACB < ADB$. Дѣйствительно, уголъ $ADO = ACD + CAD$ (27, I); слѣд. $ACD < ADO$, п. по удвоеніи съ обѣихъ сторонъ, $ACB < ADB$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

ТЕОРЕМА.

Существуетъ только одинъ способъ для пос-

построил многоугольника $ABCDIEF$, по данным сторонам и одной произвольной, равной диаметру полуокружности, в которой бы были вписаны все прочие стороны.

Предположимъ, что найденъ кругъ удовлетворяющій этому вопросу. Если возьмемъ кругъ большій, то хорды AB , BC , CD , и проч., будутъ соответствовать меньшимъ угламъ при центръ. Сумма этихъ угловъ будетъ меньше двухъ прямыхъ и оконечности данныхъ сторонъ не будутъ опираться на оконечности діамetra. Пропиавъ этому вписаннымъ, взявъ кругъ меньшій, откуда слѣдуетъ, что предложенное построение многоугольника можетъ быть совершено только въ одномъ кругѣ.

Замѣчаніе. Можно измѣнять произвольно порядокъ сторонъ, неизмѣняя діамetra круга описаннаго, и, равнымъ образомъ, площади многоугольника, ибо, при какомъ бы то не было порядкѣ дугъ AB , BC , и проч., достаточно, чтобы сумма ихъ сослала полуокружность, и многоугольникъ сохранилъ одну и ту же площадь, потому что она равняется площади полукруга уменьшенной сегментами AB , BC , и проч., которыхъ сумма всегда постоянна.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Теорема.

Изъ всѣхъ многоугольниковъ построенныхъ по даннымъ сторонамъ, наибольшій есть тотъ, который можетъ быть вписанъ въ кругъ.

Пусть $ABCDEFGG$ будетъ вписанный мноуг-къ, а ab, bc, cd, de, ef, fg такой, который вписать нельзя и который составленъ изъ сторонъ равныхъ сторонамъ перваго, такъ что $AB = ab$, $BC = bc$, и проч.

Должно доказать теперь, что многоуг. къ вписанный будетъ болѣе вписанаго.

Проведемъ діаметръ EM и линіи AM и MB ; изъ линіи $ab = AB$, построимъ тр. abt равный тр. ABM , и проведемъ et .

По предположенію IV, многоуг. $EFGAM$ болѣе многоуг. $efgat$, если только послѣдній не можетъ быть равнымъ образомъ вписанъ въ полуокружность пмѣющей діаметромъ et ; ибо, въ противномъ случаѣ, многоуг.-ки будутъ равны (пред. 5). По тѣмъ же причинамъ, многоуг.-къ $EDCBM$ болѣе $edcbm$, исключая только тотъ случай, въ которомъ бы они были равны. Но это равенство не можетъ имѣть мѣста, потому что одинъ изъ нихъ вписанъ, а другой, по предположенію, не можетъ быть вписанъ въ кругъ; слѣд. вписанный многоугольникъ есть болѣе. Вычитая съ обѣихъ сторонъ равные тр. ABM , abt , получимъ, что вписанный многоуг. $ABCDEFG$ болѣе невписываемаго $abcdefg$.

Замѣчаніе. Точно такимъ образомъ какъ и въ V предположеніи, докажется, что можетъ существовать только одинъ кругъ, а слѣд. и одинъ наибольшій многоугольникъ удовлетворяющій вопросу, и притомъ такой, что площадь его не измѣнится съ измѣненіемъ порядка сторонъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

ТЕОРЕМА.

Правильный многоугольникъ есть наибольшій изъ всѣхъ имѣющихъ съ нимъ одинаковый обводъ и одинаковое число сторонъ.

Ибо, по пред. 2, наибольшій многоугольникъ есть тотъ, который имѣетъ всѣ стороны равныя, а по предыдущему, тотъ, который можетъ быть

вписанъ въ кругъ; откуда слѣдуетъ, что этотъ многоугольникъ есть правильный.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII

Лемма.

Два угла при центрѣ, взятые въ различныхъ кругахъ, относятся между собою какъ частныя, происшедшія отъ раздѣленія дугъ ими заключаемыхъ на радіусы.

Такъ, уг. С относится къ уг. О, какъ частное $\frac{AB}{AC}$ къ частному $\frac{DE}{DO}$. Ф. 178.

Радіусы OF, равныя AC, опишемъ дугу FG, заключающуюся между продолженными сторонами DO, OE, и, по причинѣ равенства радіусовъ, будемъ имѣть, во первыхъ, $C : O = AB : FG$ (17), или $\frac{AB}{AC} : \frac{FG}{FO}$. Но, въ слѣдствіе подобія дугъ FG, DE (11), имѣемъ $FG : DE = FO : DO$; слѣд. отношеніе $\frac{FG}{FO}$ равно отношенію $\frac{DE}{DO}$, и наконецъ, $C : O = \frac{AB}{AC} : \frac{DE}{DO}$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Теорема.

Изъ двухъ правильныхъ равнообводныхъ многоугольниковъ, больший есть тотъ, который имлетъ большее число сторонъ.

Пусть DE будетъ полусторона одного изъ двухъ данныхъ многоуглв., O его центръ, а OE апогея. Пусть AB будетъ полусторона другаго Ф. 179. многоугла, C его центръ и CB апогея. Если предположимъ, что центры C и O находятся на разстояніи OC, и что апогеи OE, CB, расположены

по направлению ОС, то DOE и ACB будутъ половины угла въ многоугла при центръ лежащихъ, и такъ какъ эти углы не равны, то продолженныя линіи СА, OD, встрѣтятся въ точкѣ F. Изъ этой точкѣ опустимъ перпендикуляръ FG, на линію ОС, изъ точекъ O, C, какъ центровъ, опишемъ дуги GI и GH, ограниченные сторонами OF, CF.

Положивъ это, будетъ имѣть, по предыдущей леммѣ, $O : C = \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$; но DE относится къ периметру перваго многоугла, какъ уг. O къ четырѣмъ прямымъ угламъ, и АВ къ обводу втораго какъ уг. C такъ же къ четырѣмъ прямымъ; слѣд. по равенству обводовъ многоуг-въ, $DE : AB = O : C$, или $DE : AB = \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$. Помножая предыдущіе члены пропорціи на OG, а послѣдующіе на CG, получимъ $DE \times OG : AB \times CG = GI : GH$. Но изъ подобія трѣхъ ODE, OFG, имѣемъ $OE : OG = DE : FG$, откуда $DE \times OG = FG \times OE$; также будемъ имѣть $AB \times CG = CB \times FG$; слѣд. $OE \times FG : CB \times FG = GI : GH$, или, $OE : CB = GI : GH$. И такъ, доказавъ, что дуга GI болѣе дуги GH, получимъ, что апогема OE болѣе CB.

Пусть, съ другой стороны CF, будетъ построена фигура CKx, совершенно равная фиг. CGx, такъ, чтобъ CK = CG, углы HCK = HCG и дуга Kx = xG. Въ этомъ случаѣ кривая KxG обернется дугу KHG и будетъ болѣе этой дуги (9). И такъ Gx, половина кривой, болѣе GH, половины дуги, и по болѣеи причинѣ, GI болѣе GH.

Отсюда слѣдуетъ, что апогема OE болѣе CB; но такъ какъ два многоугла одинаковаго обвода находятся между собою въ отношеніи ихъ апогема (7), то многоуг-къ, въ коемъ полусторопа равняется DE, болѣе многоуг-ка имѣющаго полу-

стороною АВ. Первый имѣеть болѣе сторонъ ибо уголъ его при центрѣ менѣе; и слѣд. изъ двухъ правильныхъ равнообводныхъ многоугольн-ковъ болѣеший есть тотъ, который имѣеть большее число сторонъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

ТЕОРЕМА.

Кругъ болѣе всѣхъ многоугольниковъ одинаковаго съ нимъ обвода.

Ч. 180.

Уже доказано, что правильный многоуг-къ есть наибольшій изъ всѣхъ многоуг-въ равнаго съ нимъ обвода и равнаго числа сторонъ, и потому, стоимъ только сравнить кругъ съ правильнымъ равнообводнымъ многоуг-мъ. Пусть АІ будетъ полусторона впаго многоуг-ка, и С его центръ; пусть въ кругъ одинаковаго съ нимъ обвода, уголъ $\angle DOE = \angle ACl$, и слѣд. дуга DE равна полусторонѣ АІ. Многоуг-къ Р относится къ кругу С такъ какъ тр-ка АСІ къ сектору ODE; поэтому будемъ имѣть, что $P : C = \frac{1}{2} AI \times CI : \frac{1}{2} DE \times OE = CI : OE$.

Проведемъ, въ точкѣ Е, касательную EG, встрѣчающую въ точкѣ G, продолженную линію OD; подобныя тр-ки АСІ, GOE дадутъ $CI : OE = AI$ или $DE : GE$; слѣд. $P : C = DE : GE$, или, какъ $DE \times \frac{1}{2} OE$, представляющее мѣру сектора DOE, относится къ $GE \times \frac{1}{2} OE$, мѣрѣ тр-ка GOE. Но секторъ болѣе тр-ка, и слѣд. Р менѣе С, то есть, кругъ болѣе многоугольника имѣющаго съ нимъ одинаковыи обводъ.

К Н И Г А V.

ПЛОСКОСТИ И МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ.

О П Р Е Д Ъ Л Е Н І Я

I. Прямая линія *перпендикулярна* къ плоскости, когда она перпендикулярна ко всѣмъ прямымъ проходящимъ чрезъ ея *основаніе* въ плоскости (4). И взаимно, плоскость перпендикулярна къ прямой.

Основаніемъ перпендикуляра вазывается точка встрѣчи его съ плоскостію.

II. Линія *параллельна* плоскости, когда она не встрѣчаетъ плоскость, сколько бы ни продолжали ту и другую. И взаимно, плоскость *будетъ* параллельна линіи.

III. Двѣ *плоскости параллельны*, когда онѣ не встрѣчаются, будучи продолжены на какое бы то ни было разстояніе.

IV. Въ послѣдствіи будетъ доказано (пред. 3), что пересѣченіе двухъ плоскостей есть прямая линія; допустивъ это, мы назовемъ *угломъ* или *взаимнымъ наклоненіемъ* *двухъ плоскостей*, большую или меньшую величину ихъ взаимнаго отдаленія. Она измѣряется (пред. 7) *угломъ*, который составленъ изъ двухъ перпендикуляровъ къ общему пересѣченію, проведенныхъ въ каждой плоскости. Этотъ уголъ можетъ быть острый, прямой и тупой.

V. Если онъ прямой, то плоскости взаимно перпендикулярны.

VI. Многогранный уголъ называется угловое пространство, заключающееся между нѣсколькими плоскостями, которые встрѣчаются въ одной точкѣ.

И такъ, многогранный уголъ S образуется соединеніемъ плоскостей ASB, BSC, CSD, DSA.

Для составленія многограннаго угла необходимы, по крайней мѣрѣ, три плоскости.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

ТЕОРЕМА.

Прямая линія не можетъ находиться частію въ плоскости, и частію внѣ плоскости.

Ибо, изъ опредѣленія самой плоскости видно, что прямая линія, имѣющая двѣ общія точки съ плоскостію, вся заключается въ плоскости.

Замѣчаніе. Дабы удостовѣриться въ томъ, будетъ ли поверхность плоскою, стоитъ только накладывать на нее прямую линію въ различныхъ направленіяхъ, и замѣчать, совмѣщается ли она съ поверхностію во всехъ своихъ точкахъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

ТЕОРЕМА.

Двѣ пересѣкающіяся прямая линіи находятся въ одной плоскости и опредѣляютъ ея положеніе.

Пусть АВ, АС, будутъ двѣ прямая пересѣкающіяся въ точкѣ А. Можно предсказать себѣ, что чрезъ прямую АВ проведемъ плоскость, и что она обращается около этой прямой, до тѣхъ поръ, пока не пройдетъ чрезъ точку С. Тогда линія АС, Ф. 181.

прямая съ плоскостію двѣ общія точки A, C , будетъ въ ней находиться; и слѣд. положеніе плоскости опредѣляется однимъ условіемъ заключающъ въ себѣ двѣ прямыя AB, AC .

Ф. 182. *Слѣдствіе I.* Тр. ABC , или три точки A, B, C , не находящіяся на прямой линіи, опредѣляютъ положеніе плоскости.

Слѣдствіе II. Двѣ параллельныя прямыя AB, CD , также опредѣляютъ положеніе плоскости; ибо, въ проведеніи стѣущей EF , плоскость, заключающая двѣ прямыя AE, EF , будетъ заключать AB, CD .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

ТЕОРЕМА.

Пересѣченіе двухъ плоскостей есть прямая линія.

Еслибъ между точками общими оубыимъ плоскостямъ, были три, не находящіяся на прямой линіи, то плоскости, имѣя три общія точки, совпали бы (2), что противно предположенію.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

ТЕОРЕМА.

Ф. 183. *Если прямая AP перпендикулярна къ двумъ прямымъ PB, PC , пересѣкающимся при ея основаніи, въ плоскости MN , то она будетъ перпендикулярна ко всякой прямой PQ , проведенной чрезъ ея основаніе въ той же плоскости, и къ самой плоскости MN .*

Чрезъ произвольно взятую точку Q , на линіи PQ , проведемъ прямую BC въ углѣ BPC , такъ чтобы $BQ = QC$ (зад. 5, III); проведемъ AB, AQ и AC .

Такъ какъ основаніе BC раздѣлено пополамъ въ точкѣ Q, то изъ тр-ка BPC получимъ (14, III)

$$\overline{PC} + \overline{PB} = 2\overline{PQ} + 2\overline{QC}.$$

Тр. BAC дѣлеть равнымъ образомъ

$$\overline{AC} + \overline{AB} = 2\overline{AQ} + 2\overline{QC}.$$

Вычитая первое равенство изъ втораго, и взявъ въ соображеніе, что тр-ки APC, APB, прямоугольные въ P, дадимъ $\overline{AC} - \overline{PC} = \overline{AP}$, и $\overline{AB} - \overline{PB} = \overline{AP}$; будемъ имѣть $\overline{AP} + \overline{AP} = 2\overline{AQ} - 2\overline{PQ}$. Взявъ половину одной и другой части, получимъ $\overline{AP} = \overline{AQ} - \overline{PQ}$, или $\overline{AQ} = \overline{AP} + \overline{PQ}$; отсюда видимъ, что тр. APQ будетъ прямоугольнымъ въ P (13, III), и слѣд. $\overline{AP} \perp$ къ $\overline{PQ}$.

Замѣчаніе Отсюда видно не только то, что прямая линия можетъ быть перпендикулярна ко всѣмъ прямымъ находящимся въ плоскости и проходящимъ чрезъ ее основаніе, но что это имѣетъ мѣсто всегда, какъ скоро прямая перпендикулярна къ двумъ прямымъ находящимся въ плоскости (опр. 1).

Слѣдствіе I. Такъ какъ перпендикуляръ AP короче всякой наклонной AQ, то онъ будетъ измѣрять истинное разстояніе точки A отъ плоскости PQ.

Слѣдствіе II. Изъ точки P, взятой на плоскости, невозможно возстановить къ ней двухъ перпендикуляровъ; ибо, допустивъ это, мы провели бы чрезъ перпендикуляры плоскость, которая бы встрѣшила плоскость MN въ прямой PQ; въ такомъ случаѣ, разсматриваемые нами перпендикуляры будутъ перпендикулярны къ прямой PQ, въ одной точкѣ и въ одной плоскости, что невозможно.

Равнымъ образомъ невозможно, изъ точки взя-

той вѣѣ плоскости опустить на нее два перпендикуляра; ибо, предположивъ, что AP , AQ , эти перпендикуляры, тр. APQ будетъ имѣть два прямые угла APQ , AQP , что невозможно.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

ТЕОРЕМА.

Наклонныя равноудаленныя отъ перпендикуляра равны; а изъ двухъ наклонныхъ неравноудаленныхъ, болѣе удаленная отъ перпендикуляра длиннѣе.

Ф. 184. Такъ какъ углы APB , APC , APD , прямые, то предположивъ, что разстоянія PB , PC , PD , равны между собою, получимъ, въ трѣхъ APB , APC , APD , по равному углу, заключающемуся между равными сторонами; въ слѣдствіе этого трѣхъ будутъ равны и отсюда примемъ, что гипотенузы, или наклонныя AB , AC , AD , равны между собою. Равнымъ образомъ, если разстояніе PE болѣе PD , или равной ему PB , то очевидно, что наклонная AE будетъ болѣе AB , или равной ей AD .

Слѣдствіе. Всѣ равнонаклонныя AB , AC , AD и проч., окончиваются на окружности BCD , имѣющей центромъ точку P , или основаніе перпендикуляра; слѣд. еслибъ по данной точкѣ A вѣѣ плоскости, хотѣли найти на плоскости точку P , въ которую упадетъ перпендикуляръ опущенный изъ A , то для этого должно замѣтить на плоскости трѣхъ точки B , C , D , равно удаленныя отъ точки A , и опредѣлить потомъ центръ круга проходящаго чрезъ эти точки, который будетъ искомая точка P .

Замѣчаніе. Уголъ ABP называется *наклопеніемъ* линіи AB къ плоскости MN . Очевидно, что это наклоненіе одинаково для всѣхъ наклонныхъ

AB, AC, AD, и проч., равноудаленныхъ отъ перпендикуляра; ибо всѣ три-ки ABR, ACR, ADR, и проч., равны между собою.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

ТЕОРЕМА.

Пусть линія AP перпендикулярна къ плоскости MN, и пусть BC какая нибудь прямая находящаяся въ этой плоскости. Если изъ точки P, основанія перпендикуляра, проведемъ PD, перпендикулярную къ BC, и соединимъ точки A и D, то AD будетъ перпендикулярна къ BC. Ф. 100.

Возмемъ DB = DC, проведемъ PB, PC, AB, AC. Такъ какъ BD = DC, наклонная PB = PC, и, относительно перпендикуляра AP, наклонная AB = AC, то въ слѣдствіе равенства PB и PC (3), двѣ точки A и D, прямой AD, равно удалены отъ оконечностей B и C, и AD $\perp$ къ BC въ ея среднѣ.

Слѣдствіе. Очевидно, что прямая BC перпендикулярна къ плоскости APD, ибо она перпендикулярна къ двумъ прямымъ AD, PD.

Замѣчаніе. Двѣ линіи AE, BC, не встрѣчаются, потому что находятся въ различныхъ плоскостяхъ. Кратчайшее разстояніе между этими линіями есть прямая PD, перпендикулярная въ одно и тоже время къ линіямъ AP и BC. Разстояніе PD есть кратчайшее, ибо, соединивъ двѣ другія точки, на прим. A и B, получимъ AB > AD, AD > PD; слѣд., по большей причинѣ, AB > PD.

Хотя линіи AE, CB, не находятся въ одной плоскости, но предполагается, что онѣ составляютъ между собою прямой уголъ; ибо AD и прямая, проведенная чрезъ одну изъ ея точекъ параллельно линіи BC, составили бы между собою прямой уголъ. Также линіи AB и PD, которыя представ-

лиютъ двѣ какія ни есть прямыя не находящіяся въ одной плоскости, предполагаются составляющими между собою тотъ же уголъ, который бы составила АВ съ линіею параллельною РD, и проведенною чрезъ какую нибудь точку прямой АА

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

ТЕОРЕМА.

Ф. 186. *Если линія AP перпендикулярна къ плоскости MN, то всякая линія DE, параллельная AP, будетъ перпендикулярна къ этой плоскости.*

Чрезъ параллельныя линіи AP и DE проведемъ плоскость, которая пересѣчетъ плоскость MN въ прямой PD. Въ плоскости MN проведемъ BC $\perp$ къ PD, и соединимъ точки A, D.

Прямая BC будетъ $\perp$ къ плоскости APDE (слѣд. пред. 6), слѣд. уг. BDE прямой; но уг. EDP также прямой, потому что AP $\perp$ къ PD, а DE $\parallel$ AP; слѣд. линія DE $\perp$ къ двумъ прямымъ DP, DB, и къ плоскости MN, или определяемой.

Слѣдствіе I. И обратно, если прямыя AP, DE, перпендикулярны къ одной плоскости MN, то онѣ будутъ параллельны между собою. Еслибы это не имѣло мѣста, то проведя чрезъ точку P прямую параллельную AP, имѣли бы въ точкѣ D двѣ прямыя перпендикулярныя къ плоскости MN, что невозможно (4).

Слѣдствіе II. Двѣ линіи A и B параллельныя третьей C, параллельны между собою; ибо, вообразивъ плоскость перпендикулярную къ линіи C, параллельныя ей линіи A и B будутъ перпендикулярны къ этой же плоскости и, по предыдущему слѣдствію, параллельны между собою.

Здѣсь предполагается, что три прямыя не находятся въ одной плоскости, ибо противный случай былъ уже доказанъ (25, I).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

ТЕОРЕМА.

Прямая АВ параллельная другой прямой φ 187. CD, находящейся в плоскости MN, будетъ параллельна самой плоскости.

Еслибъ линія АВ, заключающаяся въ плоскости ABCD, встрѣчала плоскость MN, то это можетъ случиться только въ какой нибудь точкѣ прямой CD, ихъ общаго пересѣченія но какъ АВ не можетъ встрѣтиться CD, по причинѣ параллелизма этихъ линій, то она не встрѣтитъ плоскости MN, в слѣд. будетъ ей параллельна (опр. 2).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX

ТЕОРЕМА.

Двѣ плоскости MN, PQ, перпендикулярныя φ 188. къ прямой АВ, параллельны между собою.

Допустивъ, что эти плоскости гдѣ нибудь встрѣчаются, положимъ, что О будетъ одною изъ ихъ общихъ точекъ, и проведемъ прямыя АО, ОВ. Линія АВ, перпендикулярная къ плоскости MN, будетъ $\perp$ къ прямой АО, проведенной чрезъ основіе ея въ плоскости; по той же причинѣ линія АВ будетъ $\perp$ къ ОВ, откуда видно, что АО и ОВ суть два перпендикуляра опущенные изъ одной точки О на прямую АВ, что невозможно; и такъ плоскости MN и PQ не встрѣчаются и слѣд. будутъ параллельны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

ТЕОРЕМА.

Пересѣченія EF, GH, двухъ параллельныхъ φ 189.

плоскостей MN , PQ , третьею плоскостію FG , параллельны между собою.

Еслибъ линіи EF , GH , находящіяся въ одной плоскости, не были параллельны, то онѣ бы встрѣтились по продолженіи; а въ слѣдствіе этого, и плоскости MN , PQ , ихъ содержащія, также бы встрѣтились и не были бы параллельны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI

ТЕОРЕМА.

Ф. 101. Прямая AB перпендикулярна къ плоскости MN , перпендикулярна также къ плоскости PQ , параллельной MN .

Черезъ произвольно взятую прямую BC , в плоскости PQ , и прямую AB , проведемъ плоскость ABC , пересѣкающую плоскость MN въ прямой $AD \nparallel BC$ (10). Но линія AB , перпендикулярна къ плоскости MN , перпендикулярна къ AD ; слѣд. она будетъ перпендикулярна къ параллельной ей CB ; и такъ какъ линія $AB \perp$ ко всякой прямой BC , проведенной чрезъ ся основаніе въ плоскости PQ , то она будетъ перпендикулярна къ самой плоскости PQ .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII

ТЕОРЕМА.

Ф. 102. Параллельныя EG , FN , заключающіяся между двумя параллельными плоскостями MN , PQ , равны между собою.

Черезъ параллельныя EG , FN , проведемъ плоскость $EGNF$, которая встрѣтитъ параллельныя плоскости въ прямыхъ EF , GN . Пересѣченія EF , GN будутъ параллельны (10), также какъ и прямыя EG , FN , и составятъ параллелограммъ; откуда $EG = FN$.

Слѣдствіе. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что двѣ параллельныя плоскости вездѣ равно отстоятъ одна отъ другой; ибо EG и FN , перпендикулярныя къ двумъ плоскостямъ MN , PQ , будутъ параллельны между собою (7), и слѣд. равны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

З а д а ч а.

Два угла CAE , DBF , не находящіеся въ одной Ф. 190. плоскости, но имѣющіе стороны параллельныя и обращенныя въ одну сторону, будутъ равны между собою, а плоскости изъ заключающихъ параллельны.

Возмемъ $AC = BD$, $AE = BF$, и проведемъ CE , DF , AB , CD , EF . Такъ какъ $AC \parallel BD$ и равна ей, то $ABCD$ будетъ параллелограммъ (11, III), и слѣд. CD равна и параллельна AB . По тойже причинѣ, $EF \parallel AB$ и равна ей, что влечетъ за собою параллелизмъ и равенство линий CD и EF . Отсюда видно, что $CEFD$ будетъ параллелограммъ, и сторона CE равна и параллельна DF ; а въ слѣдствіе этого, триг. CAE , DBF , суть равносторонніе, и уг. $CAE = DBF$.

Во вторыхъ, плоскость ACE параллельна плоскости BDF ; ибо, если предположимъ, что плоскость параллельная и проходящая чрезъ точку A , встрѣтитъ линіи CD , EF , не въ точкахъ C и E , а въ G и H , то (12) линіи AB , GD , FN , будутъ равны; но по известному уже равенству линіи AB , CD , EF , имѣли бы $CD = GD$, и $FN = EF$, что невозможно. Отсюда видно, что плоскость ACE параллельна BDF .

Слѣдствіе. Если двѣ параллельныя плоскости MN , PQ , встрѣчаютъ двѣ другія плоскости $CABD$, $EABF$, то углы, CAE , DBF , составленные изъ пересѣченій параллельныхъ плоскостей, будутъ

равны; ибо, пересѣченіе $AC \cap BD$ (10), $AE \cap BF$,
и слѣд. уг. $\angle CAE = \angle DBF$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

ТЕОРЕМА.

Ф. 190. Если три прямых AB, CD, EF , не находящаяся въ одной плоскости, равны и параллельны, то треугольники ACE, BDF , составленные съ обѣихъ сторонъ грезъ соединеніе оконечностей прямыхъ, будутъ равны, и плоскости ихъ заключающія параллельны.

Такъ какъ $AB \cap CD$ и равна ей, то $ABDC$ будетъ параллелограммъ, и въ слѣдствіе этого сторона AC равна и параллельна BD . По той же причинѣ стороны AE, BF , равны и параллельны, равно какъ CE и DF ; слѣд. тр-ки ACE, BDF равны. Такимъ же образомъ, какъ и въ предыдущемъ предположеніи, докажется, что плоскости ихъ заключающія параллельны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

ТЕОРЕМА.

Ф. 191. Две прямыхъ пересѣкаются тремя параллельными плоскостями на части пропорціональныя.

Предполагая, что прямая AB встрѣчаетъ параллельныя плоскости MN, PQ, RS , въ точкахъ A, E, B , а прямая CD встрѣчаетъ тѣ же плоскости въ точкахъ C, F, D ; проведемъ линію AD , встрѣчающую плоскость PQ въ точкѣ G , и соединимъ точки A и C, E и G, G и F, B и D . Сѣченія EG, BD , параллельныхъ плоскостей PQ, RS , плоскостію ABD , будутъ параллельны (10); слѣд. $AE : EB = AG : GD$, равныхъ образомъ, въ параллельн-

из прямых AC , GF , будемъ имѣть $AG : GD = CF : FD$, и отсюда, по прпчпнѣ общаго отношенія $AG : GD$, получимъ $AE : EB = CF : FD$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

ТЕОРЕМА.

Пусть $ABCD$ будетъ какой ни есть четыре-ф. 102.
угольникъ, заключающійся, или не заключающійся
въ одной плоскости; если переслѣмъ пропорціо-
нально противоположныя стороны прямыми EF ,
 GH , такъ что $AE : EB = DF : FC$ и $BG : GC =$
 $AH : HD$, то прямыя EF , GH пересѣкутся въ
точкѣ M , и дадутъ пропорціи $MH : MG = AE :$
 EB , и $ME : MF = AH : HD$.

Проведемъ чрезъ AD произвольную плоскость
 $ABcD$, которая непроходитъ чрезъ GH , изъ точекъ
 E , B , C , F , проведемъ прямыя Ee , Bb , Cc , Ff , паралель-
ныя GH , и встрѣчающія плоскость въ точкахъ e , b ,
 c , f . По параллелизму прямыхъ Bb , GH , Cc (15, III),
будемъ имѣть $bB : Bc = BG : GC = AH : HD$; слѣд.
(20, III) тр-ки ABb , DHc , подобны. Потомъ полу-
чимъ $Ae : eb = AE : EB$ и $Df : fc = FD : FC$; откуда $Ae :$
 $eb = Df : fc$, или, $Ae : Df = Ab : Dc$; но, по подобію
тр-въ ABb , DHc , имѣемъ $Ab : Dc = AH : HD$; слѣд. $Ae :$
 $Df = AH : HD$; а изъ подобія тр-въ ABb , cHD , уголъ
 $BAb = HDf$; слѣд. тр-ки AHe , DHf подобны (20, III),
и уг. $AHe = DHf$. Отсюда же видно, что cHf
есть прямая линія, и что параллельныя Ee , GH , Ff ,
находятся въ одной плоскости, содержащей пря-
мыя GH , EF ; и потому послѣднія должны пере-
сѣкаться въ точкѣ M . Потомъ, изъ параллелизма
 Ee , MH , Ff , будемъ имѣть $EM : MF = eH : Hf =$
 $AH : HD$.

Сдѣлавъ подобное построеніе относительно
сторонъ AB , докажемъ, что $HM : MG = AE : EB$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

ТЕОРЕМА.

Ф. 108.

Уголъ заключающійся между двумя плоскостями MAN , MAP , можетъ измѣряться, сообразно опредѣленію, угломъ NAP , составленнымъ двумя перпендикулярами AN , AP , проведенными въ каждой изъ плоскостей къ общему стыженію AM .

Для удостовѣренія въ справедливости этой теоремы, должно доказать: 1-е, что она постоянна, или что она останется одна и та же, въ какой бы точкѣ общаго пересѣченія ни провели два перпендикуляра.

Дѣйствительно, если возьмемъ другую точку M , и проведемъ въ плоскостяхъ MN , MP , линіи MC и MB , перпендикулярныя къ общему пересѣченію AM ; то линіи MB и AP , перпендикулярныя къ одной прямой AM , будутъ параллельны между собою. По той же самой причинѣ MC и AN и уг. $BMC = PAN$ (13); откуда слѣдуетъ, что можно проводить перпендикуляръ произвольно чрезъ точку M или A , ибо уголъ заключающійся между ними будетъ имѣть всегда величину постоянную.

2-е. Должно доказать, что при увеличаніи или уменьшеніи угла, составленнаго двумя плоскостями, въ извѣстномъ отношеніи, уг. PAN будетъ увеличиваться или уменьшаться въ томъ же отношеніи.

Опишемъ въ плоскости PAN , изъ точки A , какъ центра, произвольнымъ радіусомъ дугу NDP , изъ точки M , какъ центра, и тѣмъ же радіусомъ опишемъ дугу CEB , и проведемъ произвольно AD . Двѣ плоскости PAN , BMC , перпендикулярныя къ одной прямой MA , будутъ параллельны (9); пересѣченія AD , ME , этихъ плоскостей съ шпирею MAD , также параллельны; и слѣд. уг. $BME =$ уг. PAD (13).

Если назовемъ уголъ, составленный плоскостями MN , MP , *двуграннымъ угломъ* (coin), то очевидно, что въ случаѣ равенства угловъ DAP и DAN , двугранный уголъ $DAMP$ равнялся бы двугранному углу $DAMN$; ибо основаніе DAP могло бы совѣститься съ равнымъ ему DAN , а высота оставалась бы одна и таже; слѣд. двугранные углы также бы совѣстились. Равнымъ образомъ видно, что еслибъ уг. DAP заключался точное число разъ въ углѣ DAN , то двугранный уголъ $DAMP$ заключался бы столько же разъ въ двугранномъ углѣ $DAMN$.

Замычаніе. Углы составленные плоскостями имѣютъ тѣ же свойства, какъ и углы составленные прямыми. И такъ, когда двѣ плоскости взаимно пересѣкаются, то углы противоположные вершинами равны, а смежные составляютъ два прямыхъ угла; отсюда слѣдуетъ, что если плоскость будетъ перпендикулярна къ другой плоскости, то и обратно, вторая перпендикулярна къ первой. Подобнымъ образомъ, при пересѣченіи двухъ параллельныхъ плоскостей третьею существуютъ тѣ же равенства и тѣ же свойства, какъ и при пересѣченіи двухъ параллельныхъ прямыхъ третьею прямою.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

ТЕОРЕМА.

Если линія AP перпендикулярна къ плоскости MN , то всякая плоскость APB , проведенная чрезъ прямую AP , будетъ перпендикулярна къ MN .

Пусть BC изображаетъ пересѣченіе плоскостей MN , AB ; если въ плоскости MN проведемъ $DE \perp$ къ BP , то линія AP , перпендикулярная къ плоскости MN , будетъ перпендикулярна къ каж-

дой изъ прямыхъ BC , DE ; но уг. APD , составленный перпендикулярами PA , PD , къ общему сѣченію BP , измѣряетъ уголъ составленный плоскостями MN , AB ; и такъ какъ послѣдній уголъ есть прямой, то плоскости будутъ перпендикулярны (опр. 5).

Замѣчаніе. Когда три прямыхъ, какъ AP , BP и DP , взаимно перпендикулярны, то каждая изъ нихъ перпендикулярна къ плоскости двухъ другихъ, и плоскости перпендикулярны между собою.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

ТЕОРЕМА.

Ф. 106. *Если плоскость AB перпендикулярна къ плоскости MN , и если въ плоскости AB проведемъ прямую AP , перпендикулярную къ общему сѣченію PB , то прямая AP будетъ перпендикулярна къ плоскости MN .*

Ибо, по проведеніи въ плоскости MN прямой $PD \perp$ къ PB , уголъ APD будетъ прямой, потому что плоскости взаимно перпендикулярны. Въ слѣдствіе этого, линія AP , перпендикулярная къ двумъ прямымъ PB , PD , будетъ перпендикулярна къ самой плоскости MN .

Слѣдствіе. Если плоскость AB перпендикулярна къ плоскости MN , то перпендикуляръ возставленный къ послѣдней, въ точкѣ P общаго ихъ пересѣченія, будетъ заключаться въ плоскости AB . Предполагая, что это не пѣтеть мѣста, можно бы было провести, въ плоскости AB , линію AP , перпендикулярную къ общему сѣченію PB , которая въ тоже время будетъ перпендикулярна къ плоскости MN ; слѣд. въ точкѣ P имѣли бы два перпендикуляра къ плоскости MN , что невозможно (4).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

ТЕОРЕМА.

Если две плоскости AB , AD , перпендикулярны къ третьей MN , то AP , общее сечение двухъ первыхъ, будети перпендикулярно къ третьей плоскости.

Если проведемъ перпендикуляръ чрезъ точку P , къ плоскости MN , то онъ долженъ находиться въ одно и тоже время въ обѣихъ плоскостяхъ AB , AD (слѣдст. пред. 10), и слѣд. будетъ ихъ общимъ пересѣченіемъ AP .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

ТЕОРЕМА.

Если многогранный уголъ составленъ изъ трехъ плоскихъ угловъ, то сумма двухъ которыхъ нибудь изъ нихъ будетъ болѣе третьяго.

Это предложеніе нужно доказать только въ томъ случаѣ, когда одинъ плоскій уголъ, сравниваемый съ суммою двухъ другихъ, будетъ болѣе каждаго изъ нихъ. Возьмемъ многогранный уголъ S , составленный изъ трехъ плоскихъ угловъ ASB , ASC , BSC , и предположимъ, что уголъ ASB будетъ болѣе изъ нихъ; должно доказать что $ASB < ASC + BSC$.

Въ плоскости ASB , построимъ уголъ $BSD = BSC$; проведемъ произвольную прямую ADB , и взявъ $SC = SD$, проведемъ AC и BC . Стороны BS , SD , равны сторонамъ BS , CS , уг. $BSD =$ уг. BSC ; откуда видимъ, что тр-ки BSC , BSD равны, и слѣд. сторона $BD = BC$. Но мы имѣемъ, что $AB < AC + BC$, и вычитая съ одной стороны BD , а съ другой равную ей BC , получимъ $AD < AC$. Стороны AS , DS равны сторонамъ AS , SC , но третія $AD < AC$, слѣд. (10, I) уг. $ASD <$ уг. ASC . Придавъ

$BSD = BSC$, будетъ нѣтъ $ASD + BSD$, или $ASB < ASC + BSC$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

ТЕОРЕМА.

Сумма плоскихъ угловъ составляющихъ многогранный уголъ всегда менѣе четырехъ прямыхъ угловъ.

Ф. 196. Пересѣчемъ многогранный уголъ S плоскостію $ABCDE$; изъ точки O , взятой на плоскости, проведемъ прямыя OA, OB, OC, OD, OE .

Сумма угловъ въ тр-хъ ASB, BSC , и проч., составленныхъ около точки S , одинакова съ суммою угловъ того же числа тр-въ AOB, BOC , и проч., составленныхъ около точки O . Но въ точкѣ B , углы ABO, OBC , взятые вмѣстѣ, составляютъ уг. ABC , меньшій суммы угловъ ABS, SBC (21); также нѣтъ, въ точкѣ C , $BCO + OCD < BCS + SCD$, и то же самое для всѣхъ угловъ многоугла $ABCDE$. Отсюда слѣдуетъ, что сумма угловъ при основаніи, въ треугольникахъ имѣющихъ вершиною точку O , менѣе суммы угловъ при основаніи, въ тр-хъ имѣющихъ вершиною точку S ; и потому, для удовлетворенія вышеозначеннаго условія, должно, чтобы сумма угловъ при O была болѣе суммы угловъ при S . Но сумма угловъ около O равна четыремъ прямымъ угламъ (5, I); слѣд. сумма плоскихъ угловъ образующихъ многогранный уголъ менѣе четырехъ прямыхъ угловъ.

Замѣчаніе Въ этомъ доказательствѣ предполагается, что многогранный уголъ есть выпуклый, или, что продолженная плоскость грани не пересѣкаетъ многогранный уголъ. Если это условіе не имѣетъ мѣста, то сумма плоскихъ угловъ будетъ неопредѣленная и можетъ имѣть всѣ возможныя величины.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XXIII.

ТЕОРЕМА

Если два многогранные углы составлены из трех соответственно равных плоских углов, то плоскости заключающая равные углы будут равнонаклонны.

Пусть уг. $ASC = DTF$, уг. $ASB = DTE$, и уг. $BSC = ETF$; плоскости ASC , ASB , будут иметь наклонение одинаковое съ наклонением плоскостей DTF , DTE . Ф. 107.

Взявъ BS произвольно, проведемъ перпендикуляръ BO къ плоскости ASC ; изъ точки O , гдѣ выпоть перпендикуляръ встрѣчаетъ плоскость, проведемъ $AO \perp$ къ SA , и $OC \perp$ къ SC . Проведемъ AB и BC , возьмемъ потомъ $TE = BS$, проведемъ EP , перпендикулярную къ плоскости DTF ; изъ точки P проведемъ $PD \perp$ къ TD , $PF \perp$ къ TF , и наконецъ соединимъ D , E и E , F .

Тр. SAB есть прямоугольный въ A , и тр. TDE прямоугольный въ D (6), и такъ какъ уг. $ASB = DTE$, то имѣемъ уг. $SBA = TED$. Сверхъ того $SB = TE$; слѣд. тр. SAB равенъ тр. TDE (5, 1) и сторона $SA = TD$, а $AB = DE$. Подобнымъ образомъ докажемъ, что $SC = TF$ и $BC = EF$. Положивъ это, четырехсторонникъ $SAOC$ будетъ равенъ четырехстороннику $TDPF$; ибо, наложивъ уг. ASC на равный ему DTF , по причинѣ $SA = TD$, $SC = TF$, точка A упадетъ въ D и точка C въ F . При томъ $AO \perp$ къ SA , упадетъ на $DP \perp$ къ TD и также OC на PF ; слѣд. точка O упадетъ въ P , и будемъ имѣть $AO = DP$. Но тр-ки AOB , DPE , прямоугольные въ O и P , по равенству гипотенузъ AB , DE , и сторонъ AO и DP , будутъ равны (18, 1), откуда уг. $OAB = PDE$. Уг. OAB есть наклоненіе плоскостей ASB , ASC , а уголъ PDE наклоненіе плоскостей DTE , DTF ; слѣд. наклоненія равны.

Должно однакожь замѣтить, что уг. A , тр-ка OAB , иногда только будетъ собственно наклоненіемъ плоскостей ASB , ASC , когда перпендикуляръ BO упадетъ, относительно AS , съ той же стороны какъ и SC . Если бы онъ надалъ съ другой стороны, то уголъ составленный плоскостями былъ бы тупой, и по присоединеніи его къ углу A , тр-ка BAO , составила бы два прямые угла. Въ этомъ же случаѣ, уголъ составленный плоскостями TDE , TDF , будетъ также тупой, и по соединеніи съ угломъ D , тр-ка DPE , составитъ два прямые угла; но такъ какъ уголъ A будетъ всегда равенъ углу D , то отсюда слѣдуетъ, что наклоненіе двухъ плоскостей ASB , ASC , равно наклоненію плоскостей TDE , TDF .

Замѣчаніе. Если два многогранные углы составлены каждый изъ трехъ плоскихъ соответственно равныхъ угловъ, и если, сверхъ того, равные или сходственные углы расположены одинаковымъ образомъ въ многогранныхъ углахъ, то они будутъ равны между собою и, при наложеніи одного на другой, совершенно совпадутся. Мы уже видали, что четырехсторонникъ $SAOC$ можетъ быть наложенъ на равный ему $TDPF$, и потому, по наложеніи SA на TD , CS упадетъ на TF , и точка O въ точку P . По равенству же тр-въ AOB , DPE , перпендикуляръ OB къ плоскости ASC , равенъ перпендикуляру PE къ плоскости TDF , и притомъ они обращены въ одну сторону; слѣд. точка B упадетъ въ точку E , линія SB на TE , и два многогранные углы совершенно совпадутся.

Это сошествіе можетъ существовать только при предположеніи, что плоскіе равные углы расположены одинаковымъ образомъ въ двухъ многогранныхъ углахъ; но въ томъ случаѣ когда равные плоскіе углы будутъ расположены въ обратномъ порядкѣ, или, что все равно, когда перпен-

дикуляры BO , PE , не обращены въ одну сторону, относительно плоскостей ASC , DTE , но будутъ направлены въ противоположныя стороны, то невозможно совѣстить два многогранные угла. Но не менѣе справедливо, по смыслу теоремы, что плоскости заключающія равные углы суть равнонаклонны между собою; такъ что многогранные углы будутъ равны во всѣхъ частяхъ ихъ составляющихъ, хотя совѣщеніе ихъ невозможно. Эпонтъ родъ равенства, которое нельзя доказать по наложенію, долженъ быть отличенъ особеннымъ названіемъ: мы назовемъ его *симметрическимъ равенствомъ*.

И такъ, два многогранные угла составленные изъ трехъ плоскихъ угловъ соответственно равныхъ, но расположенныхъ въ обратномъ порядкѣ, называются *симметрически равными*, или просто *симметрическими* углами.

То же замѣчаніе относится къ многограннымъ угламъ, составленнымъ болѣе чѣмъ изъ трехъ плоскихъ угловъ. Такимъ образомъ два многогранные угла, одинъ составленный изъ плоскихъ A , B , C , D , E , а другой составленный изъ тѣхъ же угловъ расположенныхъ въ обратномъ порядкѣ, т. е. A , E , D , C , B , могутъ быть таковы, что плоскости заключающія равные углы будутъ равнонаклонны между собою. Эти равные многогранные углы, которыхъ совѣщеніе невозможно, называются *многогранными углами симметрически равными*, или просто, *симметрическими многогранными углами*.

Въ фигурахъ плоскихъ не существуетъ симметрическаго равенства, и каждое равенство, которому хотѣли бы дать это названіе, будетъ или независимое, или равенство по наложенію. Причина состоитъ въ томъ, что всякую плоскую фигуру можно обращать, и принимать произвольно верхнюю часть ея за нижнюю. Другія условія пѣ-

юмъ мѣсто въ тѣлахъ, гдѣ третье измѣреніе можетъ быть взято въ двухъ различныхъ направленіяхъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV

Задача.

По даннымъ тремъ плоскимъ угламъ составляющимъ многогранный уголъ, найти, гдѣ построение на плоскости, уголъ составляемый двумя изъ данныхъ плоскостей.

Ф. 108. Пусть S будетъ предложенный многогранный уголъ, который составленъ извѣстными плоскими углами ASB , ASC , BSC , должно найти уголъ составляемый двумя плоскостями ASB , ASC .

Если вообразимъ, что сдѣлано тоже построение какъ и въ предыдущей теоремѣ, то уголъ OAB будетъ искомымъ. Теперь должно найти этотъ же самый уголъ посредствомъ построенія на плоскости.

Для этого построимъ на плоскости углы $B'SA$, ASC , $B''SC$, равные угламъ BSA , ASC , BSC , въ фигурѣ многограннаго угла; возьмемъ BS и $B'S$ равные BS въ той же фигурѣ; изъ точекъ B' и B'' опустимъ перпендикуляры $B'A$ и $B''C$, на SA и SC , которые встрѣятся въ точкѣ O . Изъ точки A , какъ центра, радіусомъ AB' опишемъ полуокружность $B'E$; въ точкѣ O возставимъ перпендикуляръ Ob къ $B'E$, встрѣчающій окружность въ b , и проведемъ Ab , уголъ EAb будетъ искомымъ наклономъ плоскостей ASC , ASB , въ многогранномъ уголѣ.

Все дѣйствіе приводится теперь къ доказательству того, что кр. AOb плоской фигуры равенъ кр-ку AOB въ фигурѣ многограннаго угла. Въ тр-хъ $B'SA$, BSA , прямоугольныхъ въ A , по равенству угловъ при S , углы B и B' будутъ такъ-

же равны. Притомъ гипотенуза SB' равна гипотенузе SB ; слѣд. три-ки будутъ равны, и отсюда SA , въ плоской фигурѣ, будетъ равна SA , въ фигурѣ многограннаго угла, и также AB' , или равная ей Ab , въ плоской, будетъ равна AB , въ другой фигурѣ. Доказавъ подобнымъ образомъ равенство SC въ обоихъ фигурахъ, увидимъ, что четырехугольникъ $SAOC$ въ нихъ равенъ, и такимъ образомъ AO , въ плоской фигурѣ, равняется AO , въ фигурѣ многограннаго угла; откуда, какъ въ одной такъ и въ другой, прилежающіе три-ки AOb , AOB , будутъ, кромѣ равныхъ гипотенузъ, по равной сторонѣ; слѣд. они равны, и уг. EAb , найденный чрезъ построение на плоскости, равенъ включенію плоскостей ASB , ASC , въ многогранномъ углѣ.

Когда точка O падаетъ между A и B , въ плоской фигурѣ, то уголъ EAb дѣлается тупымъ и измѣрять по прежнему истинное наклоненіе плоскостей: но въ той причинѣ мы и означили чрезъ EAb , а не чрезъ OAb , истинное наклоненіе, дабы одно и тоже рѣшеніе могло быть приложено ко всѣмъ случаямъ безъ исключенія.

Замѣчаніе. Мы считаемъ нужнымъ приложить здѣсь краткое разсужденіе о томъ, можно ли, взявъ произвольно три плоскіе угла, построить изъ нихъ многогранный уголъ.

Для этого должно, во первыхъ, чтобы сумма трехъ данныхъ угловъ была менѣ четырехъ прямыхъ угловъ; ибо, въ противномъ случаѣ, многогранный уголъ не можетъ быть составленъ (22). Сверхъ того должно, чтобы при двухъ произвольно взятыхъ углахъ $B'SA$, ASC , третий CSB' былъ таковъ, чтобы линія $B'C \perp$ къ SC , встрѣчала діаметръ BE между его концами B и E . И такъ, предѣлы величины угла CSB' суть тѣ, которые составляютъ перпендикуляръ $B'C$ прикосающійся къ точкамъ B , E . Опустивъ изъ этихъ

точекъ, на прямую CS , перпендикуляры $B'I$ и EK , встрѣчающіеся въ точкахъ I , K , окружность описанную радіусомъ $B'S$, получимъ предѣлы угла CSB'' , которые будутъ CSI и CSK .

Но въ равнобедренномъ тр-хъ $B'SI$, продолженная линия CS даетъ, по перпендикулярности своей къ основанію BI , уг. $CSI = CSB' = ASC + ASB'$; а въ равнобедренномъ тр-хъ ESK , въ слѣдствіе перпендикулярности линій CS и EK , уг. $CSK =$ уг. CSE . Сверхъ того, по причинѣ равенства тр-въ ASE , ACB' , уг. $ASE = ASB'$; слѣд. CSE или $CSK = ASC - ASB'$.

Отсюда видно, что рѣшеніе задачи всегда будетъ возможно, какъ скоро третій уг. CSB' будетъ менѣе суммъ двухъ прочихъ ASC , ASB' , и болѣе ихъ разности. Это условіе сходствуетъ съ XXI теоремою; ибо, въ слѣдствіе ея должно, чтобы $CSB' < ASC + ASB'$, и также, чтобы $ASC < CSB' + ASB'$, или $CSB' > ASC - ASB'$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

Задача.

По даннымъ двумъ изъ трехъ плоскихъ угловъ составляющихъ многогранный уголъ, и по углу составляемому ихъ плоскостями, найти третій плоскій уголъ.

Ф. 109. Пусть ASC , ASB' , два данные плоскіе угла, и если предположимъ на время, что, CSB'' будетъ третій искомый уголъ, то, по произведеніи построенія подобнаго изложенному въ предыдущей теоремѣ, уголъ заключающійся между плоскостями двухъ первыхъ будетъ EAb . Но такъ какъ уголъ EAb определяется посредствомъ угла CSB'' , при извѣстныхъ остальныхъ двухъ углахъ, то можно также определить уг. CSB'' посредствомъ EAb , чрезъ что предложенная задача рѣшится.

Взявъ произвольно SB' , опустимъ на SA неопределенный перпендикуляръ BE , построимъ уголъ EAB , равный углу составляемому двумя данными плоскостями; изъ точки B , въ которой сторона AB встрѣчается окружность описанную изъ точки A какъ центра, радиусомъ AB' , опустимъ на AE перпендикуляръ EO , а изъ точки O , на прямую SC , неопределенный перпендикуляръ OCB'' , ограничивъ его въ B'' такъ, чтобы $SB' = SB''$, уг. CSB'' будетъ искомый третій плоскій уголъ.

Ибо, составивъ многогранный уголъ изъ трехъ угловъ BSA , ASC , CSB'' , наклоненіе плоскостей, содержащихъ данные углы ASB' , ASC , будетъ равно данному углу EAB .

Замѣчаніе. Если многогранный уголъ составленъ изъ четырехъ плоскихъ угловъ ASB , BSC , CSD , DSA , то зная плоскіе углы, мы не въ состояніи будемъ опредѣлить взаимнаго наклоненія плоскостей, потому что изъ одинакъ и тѣхъ же плоскихъ угловъ можно составить безчисленное множество угловъ многогранныхъ. Но если прибавить еще одно условіе, напр., если дадутъ наклоненіе двухъ плоскостей ASB , BSC , то въ этомъ случаѣ, многогранный уголъ совершенно опредѣлился, и можно будетъ найти наклоненіе двухъ какихъ нибудь изъ составляющихъ его плоскостей. Действительно, представимъ себѣ многогранный уголъ, составленный тремя плоскими углами ASB , BSC , ASC ; если два первые угла даны и наклоненіе ихъ плоскостей извѣстно, то, по рѣшенной нами задачѣ, мы можемъ опредѣлить третій уг. ASC . Взявъ потомъ въ соображеніе пригнанный уголъ, составленный плоскими углами ASC , ASD , DSC , увидимъ, что эти три угла извѣстны, и попомому многогранный уголъ совершенно опредѣленъ. Но четырехгранный уголъ составленъ чрезъ соединеніе двухъ пригнанныхъ угловъ нами рассмотрѣнныхъ;

сльд. цѣлый уголъ также будетъ извѣстенъ и опредѣленъ, поному что частные углы его извѣстны и опредѣлены.

Уголъ двухъ плоскостей ASD, DSC, найдется посредствомъ втораго частнаго многограннаго угла. Что касается до угла плоскостей BSC, CSD, то должно въ частномъ многогранномъ углѣ искать уголъ плоскостей ASC, DSC, а въ другомъ уголъ заключающійся между плоскостями ASC, BSC; сумма этихъ двухъ угловъ составитъ уголъ заключающійся между плоскостями BSC, DSC.

Точно такимъ же образомъ найдемъ, что для опредѣленія пятиграннаго угла, должно знать, кромѣ пяти плоскихъ угловъ его сооснавливающихъ, два взаимныя наклоненія ихъ плоскостей; три, въ шестигранномъ углѣ, и такъ далѣе.

КНИГА VI.

МНОГОГРАННИКИ.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

I. *Многограннымъ тѣломъ*, или *многогранникомъ*, называютъ всякое тѣло, ограниченное плоскостями, или плоскими гранями. Эти плоскости необходимо ограничиваются прямыми линіями. *Тетраэдромъ*, или *четырегранныкомъ*, называютъ, въ частности, тѣло о четырехъ граняхъ; *экспеди́дромъ* или *шестигранникомъ*, о шести; *октаэдромъ* или *осмигранникомъ*, объ осми; *додэкаэдромъ* или *двѣнадцатигранникомъ* о двѣнадцати; *икосаэдромъ*, или *двадцатигранникомъ*, о двадцати граняхъ, и проч.

Четырегранныкъ, или *тетраэдръ*, есть самый простѣйшій изъ многогранниковъ; ибо при плоскости, составляющей многогранный уголъ, образуютъ пустоту, для ограниченія которой необходима, по меньшей мѣрѣ, еще одна четвертая плоскость.

II. Пересѣченіе двухъ смежныхъ граней многогранника называется *ребромъ* его.

III. *Правильнымъ многогранникомъ* называется тотъ, въ коемъ грани правильные многоугольники и многогранные углы равны между собою. Такихъ правильныхъ многогранниковъ считается пять. (См. приложение къ VI и VII книгамъ).

IV. *Призма* есть тѣло, заключающееся между вѣсколькими параллелограммами, и ограничен-

ное сверху и снизу двумя равными и параллельными многоугольниками.

Ф. 100. Для построения этого тела, возьмем какой нибудь многоугольник $ABCDE$; проведемъ въ плоскости параллельной ABC , линіи FG , GH , HI и проч., равныя и параллельныя AB , BC , CD и проч., и составимъ многоугольникъ $FGHIK$, равный $ABCDE$. Соединивъ вершины сходственныхъ угловъ прямыми AF , BG , CH и проч., получимъ грани $ABGF$, $BCGH$ и проч., которыя будутъ параллелограммы, и тело $ABCDEFGHIK$, составленное такимъ образомъ, есть призма.

V. Равные и параллельные многоугольники $ABCDE$, $FGHIK$, называются *основаніями призмы*; а параллелограммы, взятые вместе, составляютъ *выпуклую поверхность призмы*. Прямые AF , BG , CH и проч., называются *ребрами призмы*.

VI. *Высота призмы* есть разстояніе между двумя ея основаніями, или перпендикуляръ опущенный изъ произвольной точки верхняго основанія на плоскость нижняго.

VII. Призма называется *прямою*, когда ребра ея AF , BG и проч., перпендикулярны къ плоскостямъ основаній. Во всякомъ другомъ случаѣ ее называютъ *наклонною*, и высота ея есть ребро.

VIII. Призмы бываютъ *треугольныя*, *четыреугольныя*, *пятиугольныя*, *шестиугольныя* и проч.; смотря по тому, будутъ ли онѣ имѣть основаніемъ треугольникъ, пятиугольникъ, шестиугольникъ, и т. д.

Ф. 206. IX. Призма, коей основаніе параллелограммъ, имѣетъ всѣ грани параллелограммы и называется *параллелепипедомъ*.

Параллелепипедъ называется *прямоугольнымъ*, когда всѣ грани его суть прямоугольники.

X. Между прямоугольными параллелепипедами отличаютъ *кубъ*, или *правильный шестигранникъ* ограниченный шестью равными квадратами.

XI. *Пирамида* есть тело ограниченное несколькими треугольными плоскостями, начинающимися в одной точке S , и прилегающими къ различнымъ сторонамъ многоугольной плоскости $ABCDE$.

Многоугольникъ $ABCDE$ называется *основаніемъ* пирамиды, точка S ея *вершиною*, а грани ASB , BSC и проч., въсѣмъ vizныя, составляютъ *внѣшнюю поверхность* пирамиды.

XII. *Высота* пирамиды есть перпендикуляръ опущенный изъ вершины ея на плоскость основанія, продолженную въ случаѣ надобности.

XIII. Пирамида называется *треугольною*, *четыреугольною* и проч., смотря по тому, будетъ ли она имѣть основаніемъ треугольникъ, четырехугольникъ и т. д.

XIV. Пирамида называется *правильною*, когда имѣетъ основаніемъ правильный многоугольникъ, и когда, въ то же время, перпендикуляръ опущенный изъ вершины на основаніе проходитъ чрезъ центръ его; въ этомъ случаѣ высота называется *осью* пирамиды.

XV. *Диагональ* многогранника есть прямая линия, соединяющая вершины двухъ не смежныхъ многогранныхъ угловъ.

XVI. *Симметрическими многогранниками* мы будемъ называть многогранники, имѣющіе общее основаніе, и построенные одинъ сверху, а другой снизу плоскости основанія, при томъ условіи, чтобъ вершины сходственныхъ угловъ были расположены на равныхъ расстояніяхъ отъ плоскости основанія, и находились на одной прямой перпендикулярной къ этой плоскости.

На примѣръ, если прямая ST перпендикулярна къ плоскости ABC , и въ точкѣ O , вспрѣчи съ плоскостію, раздѣлена пополамъ, то двѣ пирамиды $SABC$, $TABC$, имѣющія общее основаніе, будутъ симметрическими многогранниками.

XVII. Двѣ *триугольныя пирамиды подобны*, когда имѣютъ подобныя сходственные грани одинаково расположенныя, и имѣющія одинаковое наклоненіе.

И такъ, если предположимъ, что уг. $ABC =$ Ф. 203. уг. DEF , уг. $BAC =$ уг. EDF , уг. $ABS =$ уг. DET , уг. $BAS =$ уг. EDT , и что наклоненіе плоскостей ABS , ABC , одинаково съ наклоненіемъ сходственныхъ плоскостей DTE , DEF , то пирамиды $SABC$, $TDEF$, будутъ подобны.

XVIII. Составивъ *триугольникъ* изъ вершинъ трехъ угловъ, взятыхъ на одной изъ граней, или на основаніи многогранника, можно представить, что вершины многогранныхъ угловъ, находящихся въ плоскости, будутъ вершинами тогоже числа *триугольных пирамидъ*, имѣющихъ общій основаніемъ означенный *триугольникъ*, и каждая изъ этихъ пирамидъ опредѣлитъ положеніе каждаго угла многогранника относительно его основанія.

Положивъ это, два *многогранника подобны*, когда имѣютъ одинаковыя основанія, и когда сходственные углы ихъ, находящіеся въ основаніи, опредѣлены *триугольными пирамидами* соответственно подобными.

XIX. *Вершинами* многогранника мы будемъ называть точки, находящіяся въ вершинахъ его многогранныхъ угловъ.

Примѣчаніе. Многограннымъ или разнотравнымъ сущимъ *ликамъ*, или имѣющимъ исходящіе углы. Подъ этимъ названіемъ должно разумѣть также и тѣ, коихъ поверхность пересѣкается прямою только въ двухъ точкахъ. Въ этомъ родѣ многогранниковъ, продолженная плоскость одной изъ граней не пересѣкаетъ тѣла, и поэтому многогранникъ не можетъ быть разсѣченъ частію сверху, и частію снизу плоскости одной изъ граней, но весь находящійся съ одной стороны плоскости.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

ТЕОРЕМА.

Два многогранника не могутъ имѣть одинако-

ваго числа однихъ и тѣхъ же вершинъ, не совмѣщалась между собою.

Предположимъ, что одинъ изъ многогрвъ уже построенъ, и если хотимъ построить другой, который бы имѣлъ нѣ же вершины и въ одинаковомъ числѣ, то плоскости его не должны проходить чрезъ одиѣ точки съ плоскостями перваго, ибо, въ противномъ случаѣ, многогр-ки не разнѣлись бы между собою. Но тогда очевидно, что нѣкоторые изъ новыхъ плоскостей пересѣкаи бы первый многогр-къ, и имѣли бы вершины сверху и снизу плоскостей, что не можетъ имѣть мѣста въ выпукломъ многогр-кѣ, и поэтому два многогр-ка, имѣющіе одинаковое число однихъ и тѣхъ же вершинъ, совмѣщаются.

Замѣчаніе. По данному положенію точекъ *А, В, С, К*, и проч., долженствующихъ служить вершинами многогранника, легко его построить.

Возмемъ при сосѣдственныхъ точки *D, E, H*, и при томъ замѣтимъ, чтооъ плоскость *DEH* проходитъ, если возможно, чрезъ другія точки *K, C*, но оставила всѣ прочія съ одной стороны, сверху или снизу плоскости; опредѣленная такимъ образомъ плоскость *DEH*, или *DEHKC*, будетъ гранью многогр-ка. Чрезъ *EH*, одно изъ реберъ, проведемъ плоскость, и обращая ее до тѣхъ поръ пока она не встрѣнитъ другую, будемъ имѣть другую вершину *F*, или нѣсколько вершинъ *F, I*, и другую грань *FEH*, или *FEHI*. Теперь остается проводить такимъ же образомъ плоскости чрезъ найденныя ребра до совершеннаго ограниченія нѣла, и это нѣло будетъ искомый многогранникъ, ибо, не существуетъ двухъ неравныхъ нѣлъ, которыя бы могли имѣть общія вершины.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

ТЕОРЕМА.

Въ двухъ симметрическихъ многогранникахъ, соответственные грани равны и наклоненіе двухъ смежныхъ граней равно наклоненію соответственныхъ граней другого многогранника.

Ф. 206. Пусть $ABCDE$ общее основаніе двухъ многогр-въ; M и N вершины двухъ многогранныхъ угловъ одного изъ многогр-въ, M' и N' соответственные вершины другого. Въ слѣдствіе опредѣленія 16, должно, чтобы прямыя MM' , NN' , были перпендикулярны къ плоскости ABC , и чтобы въ точкахъ m и n , встрѣчи ихъ съ плоскостію, раздѣлялись пополамъ: въ этомъ случаѣ разстояніе MN будетъ равно разстоянію $M'N'$.

Если будемъ обращать трапецію mMn около m , до совмѣщенія съ плоскостію mMn , то, по причинѣ прямыхъ угловъ m и n , сплывающій M' упадетъ на равную ей mM , и N' на равную ей nN , и трапеціи совмѣстятся, откуда будемъ имѣть $MN = M'N'$.

Положивъ, что P будетъ третья вершина верхняго многогранника и P' соответственная ей въ другомъ, найдемъ, что $MP = M'P'$ и $NP = N'P'$; слѣдовательно тр. MNP , соединяющій три какія ни есть вершины верхняго многогранника, будетъ равенъ тр-ку $M'N'P'$, соединяющему три сходственныхъ вершины во второмъ многогранникѣ.

Если между всеми этими тригонометрическими разсматривать только нѣ, которые находятся на поверхности многогр-въ, то можно уже заключить, что поверхности ихъ составлены изъ тр-въ соответственно равныхъ.

Теперь, если тр-ки находятся на поверхности той тѣла въ одной плоскости и составляютъ од-

ну многоугольную грань, то соответственные тр-ки на другой поверхности будутъ находиться въ одной плоскости и составлять многоугольную грань равную первой.

Дѣйствительно, пусть MPN , NPQ , два смежные тр-ка, предполагаемые въ одной плоскости, а $M'P'N'$, $N'P'Q'$, имъ соответственные. Уголъ $MNP = \text{уг. } M'N'P'$, уг. $PNQ = \text{уг. } P'N'Q'$, если проведемъ MQ и $M'Q'$, то тр. MNQ будетъ равенъ тр-ку $M'N'Q'$, откуда уг. $MNQ = \text{уг. } M'N'Q'$. Но такъ какъ $MPNQ$ есть одна плоскость, то уг. $MNQ = MNP + PNQ$; слѣд. будемъ имѣть также $M'N'Q' = M'N'P' + P'N'Q'$. Еслибы три плоскости $M'N'P'$, $P'N'Q'$, $M'N'Q'$, не совмѣщались въ одну, то они составили бы пригранный уголъ, и мы имѣли бы (20, V) $M'N'Q' < M'N'P' + P'N'Q'$; но такъ какъ это условіе не существуетъ, то два тр-ка $M'N'P'$, $P'N'Q'$, находясь въ одной плоскости.

Отсюда видно, что всякая приугольная или многоугольная грань одного многогр-ка соответствуетъ ей равной въ другомъ, и такимъ образомъ два многогр-ка ограничиваются однимъ числомъ плоскостей относительно равныхъ.

Остается доказать, что наклоненіе двухъ какихъ нибудь смежныхъ граней одного многогр-ка равно наклоненію имъ соответствующихъ граней другаго.

Пусть MPN , NPQ , два тр-ка составленные на общемъ ребрѣ NP , въ плоскостяхъ двухъ смежныхъ граней; пусть $M'P'N'$, $N'P'Q'$, имъ соответственные тр-ки. Можно вообразить въ N пригранный уголъ составленный изъ трехъ плоскихъ угловъ MNQ , MNP , PNQ , и ему соответственный въ N' , составленный изъ трехъ плоскихъ угловъ $M'N'Q'$, $M'N'P'$, $P'N'Q'$. Но, по доказанному выше, плоскіе углы относительно равны; слѣд. наклоненіе плоскостей MNP , PNQ , равно наклоненію соответственныхъ имъ $M'N'P'$, $P'N'Q'$ (22, V).

И такъ, въ симметрическихъ многогранникахъ соотвѣтственные грани равны, и двѣ смежныя грани одного многогранника пѣкутъ тоже самое наклоненіе какъ и соотвѣтствующія имъ грани другого.

Замѣчаніе. Можно замѣтить, что углы одного многогранника суть симметрическіе относительно угловъ другого, ибо многогранный уголъ N соснавленъ изъ плоскостей MNP , PNO , QNB и проч., а соотвѣтственный ему N' изъ плоскостей $M'N'P'$, $P'N'Q'$, $Q'N'R'$ и проч. Последнія кажутся расположенными въ томъ же порядкѣ какъ и первыя, но такъ какъ многогранные углы расположены обратно одинъ въ отношеніи другого, то слѣдуетъ, что истинное расположеніе граней соснавливающихъ уголъ N' , есть обратное тому, которое пѣтеть мѣсто въ соотвѣтственномъ ему уголъ N . Сверхъ того, наклоненіе последовательныхъ плоскостей одинаково какъ въ одномъ такъ и въ другомъ уголѣ, и поэтому разсматриваемые многогранные углы суть симметрическіе одинъ въ отношеніи другого (23, V, приж.).

Это замѣчаніе доказываетъ, что *какой ни есть многогранникъ можетъ имѣть только одинъ многогранникъ ему симметрическій*. Еслибъ построили на другомъ основаніи другой многогр-къ, симметрическій съ даннымъ, то многогранные углы его будутъ симметрическіе въ отношеніи къ угламъ даннаго, и слѣд. будутъ равны угламъ симметрическаго многогр-ка, построеннаго на первомъ основаніи. Кроме того соотвѣтственные грани всегда будутъ равны, и поэтому два многогр-ка на одномъ или на другомъ основаніи, пѣтъ бы равныя грани и равные многогранные углы, и, въ слѣдствіе этого, совѣтвшіеся между собою, соснавлили бы только одинъ многогран-

ПРЕДЛОЖЕНИЕ III.

ТЕОРЕМА.

Две призмы равны, если имѣютъ по равно-
ному многогранному углу, заключающемуся меж-
ду тремя относительно равными и подобно рас-
положенными плоскостями.

Если основаніе $ABCDE$ будетъ равно основа- Ф. 200.
нію $abcde$, параллелограммъ $ABFG$ равенъ паралле-
лограмму $abfg$, а параллелограммъ $BCHG$ равенъ
 $bchg$, то призма $ABCG$ будетъ равна призме $abcg$.

Основаніе $ABCDE$ и равное ему $abcde$ совме-
стятся по наложеніи, но такъ какъ три пло-
скіе угла, составляющіе многогранный уголъ B ,
равны плоскимъ угламъ, составляющимъ много-
гранный уголъ b , именно $ABC = abc$, $ABG = abg$,
и $GBC = gbc$, и сверхъ того подобно расположе-
ны, то, въ слѣдствіе этого, многогранные углы
 Bb , равны и сторона BG упадетъ на равную ей
 bg . Очевидно, что по равенству параллелограм-
мовъ $ABGF$, $abgf$, сторона GF упадетъ на рав-
ную ей gf , и подобнымъ образомъ GH на gh ; слѣ-
дующее основаніе $FGHIK$ совершенно совмести-
ся съ равнымъ ему $fg hik$, и два тѣла составятъ
одно, потому что будутъ имѣть одиъ и тѣже
вершины (1).

Слѣдствіе. Две прямая призмы имѣющія рав-
ныя высоты и основанія равны. По равенству
сторонъ AB и ab , и высотъ BG и bg , прямоуг-
лъ $ABGF$ будетъ равенъ прямоуг-ку $abgf$; тоже мож-
но сказать о прямоуг-лѣ $BCHG$, $bchg$, и такимъ
образомъ три плоскости, образующія уголъ B ,
будутъ равны тремъ плоскостямъ образующимъ
уголъ b . Отсюда слѣдуетъ, что призмы равны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

ТЕОРЕМА.

Во всякомъ параллелоипсѣдѣ противоположнѣя сѣраки равны и параллельны.

Изъ опредѣленія параллелоипсѣда слѣдуетъ, что основанія $ABCD$, $EFGH$, суть равныя параллелограммы, коихъ стороны параллельны, и потому остается доказать тоже самое, относительно противоположныхъ боковыхъ граней, каковы $AEND$, $BFGC$. Но какъ $AD \parallel BC$ и равна ей, ибо $ABCD$ есть параллелограммъ, и по подобной причинѣ $AE \parallel BF$ и равна ей, слѣд. уг. DAE равенъ уг. CBF , (13, V), и плоскость DAE параллельна плоскости CBF ; отсюда видно, что параллелограммъ $DAEN$ равенъ параллелограмму $CBFG$. Такимъ же образомъ докажется, что противоположнѣя параллелограммы $ABFE$, $DCGH$, равны и параллельны.

Слѣдствіе. Такъ какъ параллелоипсѣдъ есть тѣло ограниченное шестью плоскостями, между коими противоположнѣя равны и параллельны, то очевидно, что каждая изъ его граней и противоположная ей, могутъ быть приняты за основанія параллелоипсѣда.

Замѣчаніе. По даннымъ тремъ прямымъ AB , AE , AD , проходящимъ чрезъ точку A , и составляющимъ между собою извѣстные углы, можно построить параллелоипсѣдъ. Для этого стоитъ только, чрезъ оконечность каждой прямой, провести, плоскость, параллельную плоскости двухъ прочихъ; именно: чрезъ точку B , плоскость параллельную DAE ; чрезъ точку D , плоскость параллельную BAE , и чрезъ точку E , плоскость параллельную BAD . Взаимное пресѣченіе этихъ плоскостей образуетъ искомый параллелоипсѣдъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

ТЕОРЕМА.

*Во всякомъ параллелоипеде, противоположные углы суть симметрическіе одинъ въ отноше- ч. 206.
ніи другаго, и діагонали продолжая трезъ верши-
ны ихъ взаимно пересѣкаются на двѣ равныя ча-
сти.*

Сравнивая, на примѣръ, уголъ А съ противо-
положнымъ ему G, найдемъ, что уг. EAB равенъ
EFB и также равенъ HGC, уг. DAE = DHE =
CGF, и уг. DAB = DCB = HGF; сѣд. три плос-
кіе углы, составляющіе приграний уголъ А,
равны тремъ плоскимъ угламъ составляющимъ
приграний уголъ G. Сверхъ того легко замѣ-
тить, что ихъ расположеніе въ каждомъ изъ мно-
гогранныхъ угловъ различно; и сѣд. 1-е, пригран-
ные углы А и G суть симметрическіе (23, V).

Во вторыхъ, вообразимъ двѣ діагонали EC, AG, про-
веденныя чрезъ противоположныя вершины: такъ
какъ AE $\square$ CG и равна ей, то фиг. AEGC будетъ парал-
лелограммъ, и діагонали EC, AG, взаимно пересѣкут-
ся на двѣ равныя части. Подобнымъ же образомъ
докажется, что діагонали EC и DF также взаимно
пересѣкутся пополамъ; и сѣд. 2-е, четыре діагонали
пересѣкаются пополамъ въ одной точкѣ, кото-
рую можно принять за центръ параллелоипеда.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

ТЕОРЕМА.

*Плоскость BDNF, проходящая трезъ два па- ч. 207.
раллельныя ребра BF, DN, раздѣляетъ паралле-
лоипедъ AG на двѣ триугольныя призмы,
ABDNEF, GHFBCD, взаимно симметрическія.*

Такъ какъ тр-ки ABD, EFN, имѣющіе равныя
и параллельныя стороны, равны между собою, и,

въ то же время, боковыя грани $ABFE$, $ADHE$, $BDHF$ суть параллелограммы, но тѣло $ABDHEF$ будетъ призма, равно какъ и тѣло $GHFBCD$. Должно доказать теперь, что эти призмы будутъ симметрическія одна относительно другой.

На основаніи ABD построимъ призму $ABDE'F'H'$, симметрическую съ $ABDHEF$. Изъ доказаннаго выше (2) слѣдуетъ, что плоскость $ABF'E'$ равна $ABFE$, а плоскость $ADH'E'$ равна $ADHE$; но сравнивая призмы $GHFBCD$, $ABDHE'F'$, найдемъ, что основаніе GHF равно ABD , параллелограммъ $GHDC$ равенъ $ABFE$ и также равенъ $ABF'E'$, а параллелограммъ $GFBC$, равный $ADHE$, равенъ также $ADH'E'$; отсюда видно, что плоскости, образующія тригранный уголъ G , въ призмѣ $GHFBCD$, равны плоскостямъ образующимъ тригранный уголъ A , призмы $ABDHE'F'$, и сверхъ того подобно расположены, отсюда слѣдуетъ что призмы равны (3) и могутъ быть совмѣщены. Но одна изъ нихъ $ABDHE'F'$ есть симметрическая съ $ABDHEF$; слѣд. и другая $GHFBCD$, будетъ симметрическая съ $ABDHEF$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Лемма

Ф. 201. *Во всякой призмѣ $ABCI$, сѣченія $MOPQR$, $STNXY$, сдѣланныя параллельными плоскостями, суть равные многоугольники.*

Ребра MO , ST , параллельны, какъ сѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей третьейю $ABGF$; и такъ какъ они заключаются между параллельными MS , OT , которыя суть ребра призмы, то $MO=ST$. По той же причинѣ, линіи OP , PQ , QR , сѣченія $MOPQR$, соответственно равны прямымъ TN , NX , XY и проч. сѣченія $STNXY$. Сверхъ того, по параллельности равныхъ сторонъ, углы MOP , OPQ и проч., перваго сѣченія, соответственно рав-

ны угламъ STN , TNX и проч., втораго. Отсюда слѣдуетъ, что сѣченія $MOPQR$, $STNX$, суть равныя многоугольники.

Слѣдствіе. Всякое сѣченіе, сдѣланное параллельно основанію, равно основанію.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

ТЕОРЕМА.

Двѣ симметрическія треугольныя призмы $ABDNEF$, $BCDFGH$, составляющія параллелоипедъ AG , равномѣрны между собою.

Черезъ вершины B и F , проведемъ плоскости Φ . 203. $Bacd$, $Fehg$, перпендикулярныя къ ребру BF и вскрѣщающія, съ одной стороны въ точкахъ a , c , d , а съ другой въ e , h , g , прочія ребра AE , DN , CG , тогоже параллелоипеда. Сѣченія $Bade$, $Fehg$, будутъ во первыхъ равны, ибо онѣ сдѣланы плоскостями перпендикулярными къ одной прямой и сдѣл. параллельными (7); а во вторыхъ, онѣ суть параллелограммы, потому что двѣ противоположныя стороны одного сѣченія aB , de , суть сѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей $ABFE$, $DCGH$, третьею.

Но имѣя же причинамъ, $BacF$ будетъ параллелограммъ, равно какъ и боковыя грани $BFGc$, $edhg$, $adhe$, тѣла $BacdeFehg$; откуда видно, что это тѣло есть призма (опр. 4), и притомъ прямая, потому что ребро BF перпендикулярно къ основанію.

Положивъ это, вообразимъ, что прямая призма Bh раздѣлена плоскостію $BFND$ на двѣ триуг. прямыя призмы $aBdeFh$, $BdcFhg$; въ этомъ случаѣ наклонная триуг. призма $ABDEFN$ будетъ равномѣрна съ прямою призою $aBdeFh$.

Такъ какъ эти призмы имѣютъ общую часть $ABDheF$, то достаточно будетъ доказать, что

остальныя части, то есть тѣла $BaADd$, $FcEHh$, равномѣрны между собою.

Если примемъ въ соображеніе, что фигуры $ABFE$, $aBFe$, суть параллелограммы, то стороны AE , ae , равны и параллельны BF , будутъ равны между собою, и потому, отнявъ общую часть Ac , останется, что $Aa = Ec$. Такимъ же образомъ докажемъ, что $Dd = Hh$.

Дабы произвести наложеніе тѣлъ $BaADd$, $FcEHh$, помѣстимъ основаніе Fch на равное ему Bad ; тогда точка c упадетъ въ a , точка h въ d , и стороны cE , hH , упадутъ на равныя имъ aA , dD , потому что онѣ перпендикулярны къ одной и той же плоскости Bad . Отсюда видно, что разсматриваемыя нами тѣла совершенно совмѣстятся, и, въ слѣдствіе этого, наклонная призма $BADFEH$ равномѣрна призмѣ $BadFeh$.

Точно такимъ же образомъ докажемъ, что наклонная призма $BDCFHG$ равномѣрна съ прямою призмою $BdcFhg$. Но прямая призма $BadFed$, $BdcFhg$ равны между собою, потому что онѣ имѣютъ одинаковую высоту BF , а основанія ихъ Bad , Bdc суть половины одного и того же параллелограмма (3, слѣд.); слѣд. триут. призмы $BADFEH$, $BDCFHG$, равномѣрныя двумъ равнымъ призмамъ, равномѣрны между собою.

Слѣдствіе. Всякая триут. призма $ABDNEF$ есть половина параллелоппеда AG , имѣющаго съ нею общій пригнанный уголъ A , и одинаковыя ребра AB , AD , AE .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

ТЕОРЕМА.

Если два параллелоппеда AG , AL , имѣютъ общее основаніе $ABCD$, и если ихъ верхнія основанія $EFGH$, $IKLM$, находятся въ одной плоскости и между двумя параллельными пря-

ными EK , HL , то параллелопипеды будутъ равномѣрны между собою.

Здѣсь можетъ быть при случаѣ, когда по тому, будетъ ли EL больше, меньше, или равна EF , но доказательство основано на неизмѣняемыхъ для всѣхъ случаевъ и состоящихъ въ томъ, что приуг. призма $AEIDIM$ равна приуг. призмѣ $BKCGIL$.

Въ самомъ дѣлѣ, по параллельности AI и BF , HE и GF , уг. $AEI = BFK$, $HEI = GFK$ и $HEA = GFB$. Изъ этихъ шести угловъ, три первые составляютъ многогранный уголъ E , а три послѣдніе многогранный уголъ F , и такъ какъ плоскіе углы равны и подобно расположены, то отсюда слѣдуетъ, что многогранные углы E и F равны. Если теперь, взявъ призму AEM и призму BFL , наложимъ основаніе AEI на основаніе BFK , то эти основанія по равенству своему совмѣстятся, и такъ какъ пригнанный уголъ E равенъ уг. F , то сторона EH упадетъ на сторону FG . Этого достаточно для доказательства совершеннаго совмѣщенія призмы, ибо основаніе AEI и ребро EH опредѣляютъ призму AEM , также какъ основаніе BFK и ребро FG опредѣляютъ призму BFL (3); слѣд. призмы равны между собою.

Вычптая изъ шѣла AL призму AEM , получимъ параллелопипедъ AIL , а вычптая изъ тогоже шѣла призму BFL , получимъ параллелопипедъ $AEGL$; отсюда слѣдуетъ, что параллелопипеды AIL , $AEGL$ равномѣрны между собою.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

ТЕОРЕМА.

Два параллелопипеда одной высоты и одного основанія равномѣрны между собою.

Пусть $ABCD$ будетъ общее основаніе двухъ параллелопипедовъ AG , AL , и такъ какъ они имѣ-

юсть одинаковую высоту, то ихъ верхнія основанія $EFGH$, $IKLM$, будутъ находиться въ одной плоскости. Сверхъ того, стороны EF и AB равны и параллельны, также какъ и стороны IK и AB ; слѣд. $EF \parallel IK$ и равна ей, и по той же причинѣ $GF \parallel LK$ и равна ей, и если продолжимъ стороны EF, GH , также какъ LK, IM , до тѣхъ поръ пока они своимъ пересѣченіемъ составятъ параллелограммъ $NOPQ$, то очевидно, что этотъ параллелограммъ будетъ равенъ каждому изъ оснований $EFGH$, $IKLM$. Представимъ себѣ третій параллелоппедъ, который бы, при томъ же нижнемъ основаніи $ABCD$, имѣлъ верхнимъ $NOPQ$. Этотъ параллелоппедъ будетъ равномѣренъ съ параллелоппедомъ AG (9), ибо имѣетъ съ нимъ общее нижнее основаніе, тогда какъ верхнія заключаются въ одной плоскости и находятся между параллельными прямыми GQ, FN . По той же причинѣ, третій параллелоппедъ будетъ равномѣренъ съ параллелоппедомъ AL ; и слѣд. два параллелоппеда AG, AL , имѣющіе одинаковыя высоты и основанія, равномѣрны между собою.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

ТЕОРЕМА.

Всякой параллелоппедъ можетъ быть обращенъ въ прямой, имѣющій съ нимъ одинаковое основаніе и высоту.

ф. 210. Пусть AG будетъ предложенный параллелоппедъ; проведя чрезъ точки A, B, C, D , прямыя AI, BK, CL, MD , перпендикулярныя къ плоскости основанія, составимъ параллелоппедъ AG , коего боковыя грани AK, BI и проч., будутъ прямоугольниками. Если основаніе $ABCD$ есть прямоуг.-къ, то параллелоппедъ AL будетъ прямоугольный и равномѣрный съ предложеннымъ параллелоппедомъ AG . Но если $ABCD$ не будетъ прямоуг.-къ,

ф. 211.

по проведи AO и BN , перпендикулярныя къ CD и потомъ OQ и NP , перпендикулярныя къ основанію, получимъ тѣло $ABNOIKPQ$, которое будетъ прямоугольный параллелепипедъ, ибо, по построению, основаніе $ABNO$ и противоположное ему $IKPQ$, суть прямоуголки, также какъ и боковыя грани, по перпендикулярности реберъ AI , OQ и проч., къ плоскости основанія, и слѣд. тѣло AP есть прямоугольный параллелепипедъ. Но параллелепипеды AP и AI могутъ быть разсѣкены, какъ имѣющіе одинаковое основаніе $ABKI$ и одну высоту AO ; слѣд. они равновѣсны. Отсюда видимъ, что параллелепипедъ AG , измѣненный въ равновѣсный ему AL , снова измѣненъ въ равновѣсный параллелепипедъ AP , имѣющій одинаковую высоту AI , и того основаніе $ABNO$ равновѣсно съ $ABCD$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

ТЕОРЕМА.

Два прямые параллелепипеды AG , AL , имѣющіе одинаковыя основанія, относятся между собою какъ ихъ высоты AE , AI .

Предположивъ сначала, что высоты AE , AI , относятся между собою какъ цѣлыя числа, наприм., какъ 15 и 8, раздѣлимъ AE на 15 равныхъ частей, изъ коихъ 8 будутъ содержаться въ AI , и чрезъ точки дѣленія x , y , z и проч., проведемъ плоскости, параллельныя основанію. Эти плоскости раздѣлятъ тѣло AG на 15 частныхъ параллелепипедовъ, которые равны между собою, ибо имѣютъ равныя высоты и основанія. Высоты равны здѣсь потому, что онѣ суть дѣленія AE , xy , yz , и проч., а основанія потому, что всякое сѣченіе $MIKL$ призмы, параллельное основанію, равно ему (7). Но такъ какъ восемь изъ 15 рав-

ныхъ параллелоипедовъ, заключающагося въ тѣлѣ AL , но въ сдѣланные выше, тѣла AG и AL относятся между собою какъ числа 15 и 8, или вообще, какъ высота AE къ высотѣ AI .

Въ томъ случаѣ, когда отношеніе высотъ AE , AI , не можетъ быть выражено въ числахъ пропорціи: тѣло AG : тѣлу $AL = AE$: AI , остается справедливымъ. Еслибъ эта пропорція не была справедливою, то положимъ, что тѣло AG : тѣл. $AL = AE$: AO , и раздѣливъ AE на равныя части, пзъ коихъ бы каждая была менше OI , получимъ хотя одну пзъ точекъ дѣленія m между точками O и I . Назовемъ чрезъ P параллелоипедъ имѣющій основаніемъ $ABCD$, а высотой Am , и какъ высоты AE и Am находятся между собою въ отношеніи цѣлыхъ чиселъ, то получимъ, что тѣло AG : $P = AE$: Am . Но, по предположенію, тѣло AG : тѣлу $AL = AE$: AO ; откуда тѣло AL : $P = AO$: Am . Здѣсь $AO > Am$, и поэтому, для справедливости пропорціи должно, чтобы тѣло AL было больше P ; но такъ какъ оно напротивъ того менше, сдѣ. невозможно, чтобы четвертый членъ пропорціи: тѣло AG : тѣлу $AL = AE$: X былъ больше AI . Разсуждая подобнымъ образомъ, найдемъ, что четвертый членъ не можетъ быть менше AI , и поэтому будетъ равенъ AI : откуда заключаемъ, что два прямые параллелоипеда имѣющіе одинаковыя основанія относятся какъ ихъ высоты.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ. XIII.

ТЕОРЕМА.

Два прямоугольные параллелоипеда AG , AK , имѣющіе одинаковую высоту AE , относятся между собою какъ ихъ основанія $ABCD$, $AMNO$.

Ф. 113. Помѣстивъ тѣла одно возлѣ другаго, какъ представляеть эта фигура, продолжимъ плоскость

ONKL, до встрѣчи ея съ плоскостію DCGH, въ прямой PQ, и получимъ прѣсѣкъ параллелоипсидъ AQ, который можно сравнивать съ каждымъ изъ параллелоипсидовъ AG, AK. Но два тѣла AG, AQ, имѣющія общее основаніе AEND, относятся между собою какъ ихъ высоты AO, AB, и равнымъ образомъ, два тѣла AQ, AK, имѣющія общее основаніе AOIE, относятся между собою какъ ихъ высоты AD, AM; слѣд. будемъ имѣть двѣ пропорціи.

$$\text{Тѣло AG : тѣлу AQ} = \text{AB : AO.}$$

$$\text{Тѣло AQ : тѣлу AK} = \text{AD : AM.}$$

Перемножая эти пропорціи почленно, и уничтожая въ выводѣ общій членъ, тѣло AQ, получимъ

Тѣло AG : тѣлу AK = $\text{AB} \times \text{AD} : \text{AO} \times \text{AM}$.
Но $\text{AB} \times \text{AD}$ представляетъ основаніе ABCD, а $\text{AO} \times \text{AM}$ основаніе AMNO; слѣд. прямоугольные параллелоипсиды, имѣющіе одинаковую высоту, относятся между собою какъ ихъ основанія.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ. XIV.

ТЕОРЕМА.

Два какіе ни есть прямоугольные параллелоипсиды относятся между собою, какъ произведенія изъ основаній на высоты, или какъ произведенія изъ изъ прѣсѣкъ измѣреній.

Помѣстимъ тѣла AG, AZ, такимъ образомъ, 4. 213. чтобъ ихъ поверхности имѣли общій уголъ BAE, продолжимъ плоскости необходимыя для образованія третьяго параллелоипсиды AK, одинаковой высоты съ параллелоипсидомъ AG, и по предыдущей теоремѣ, будемъ имѣть

$$\text{тѣло AG : тѣлу AK} = \text{ABCD : AMNO.}$$

Но два параллелоипсиды AK, AZ, имѣющіе об-

щее основаніе $AMNO$, относится какъ ихъ высоты AE , AX , въ слѣдствіе чего

$$\text{Тѣло } AK : \text{тѣлу } AZ = AE : AX.$$

Перемноживъ эти пропорціи почленно, и умноживъ въ произведеніи общій множитель, тѣло AK , получимъ : тѣло $AG : \text{тѣлу } AZ = ABCD \times AE : AMNO \times AX$. Теперь, вѣсно основаній $ABCD$, $AMNO$, можно подставить $AB \times AD$ и $AO \times AM$, что дастъ

$$\text{Тѣло } AG : \text{тѣлу } AZ = AB \times AD \times AE : AO \times AM \times AX, \text{ что и надлежало доказать.}$$

Замѣчаніе. Отсюда слѣдуетъ, что можно взять за мѣру прямоугольнаго параллелепипеда произведеніе изъ его основанія на высоту, или произведеніе трехъ его размѣреній. Основываясь на этомъ началѣ, мы будемъ опредѣлять мѣру всѣхъ прочихъ тѣлъ.

Для полученія надлежащаго понятія объ этой мѣрѣ, должно припомнить, что подъ произведеніемъ двухъ или нѣсколькихъ линій, разумѣютъ произведеніе чиселъ представляющихъ эти линіи и записанныхъ оныя единицы линейной, которую можно брать произвольно.

Положивъ это, произведеніе трехъ размѣреній параллелепипеда будетъ число, которое само по себѣ ничего не означаетъ и измѣняется, если возьмемъ другую линейную единицу. Но взявъ, подобнымъ образомъ, произведеніе трехъ размѣреній другаго параллелепипеда, и опредѣливъ величину ихъ, относительно той же линейной единицы, получимъ два произведенія, которыя будутъ относиться между собою какъ самыя тѣла и дадутъ понятіе объ ихъ взаимной величинѣ.

Величина тѣла, или его протяженіе, составляетъ то, что называется *объемомъ*, и это слово *объемъ* употребляется въ особенности для означенія мѣры тѣла. Такимъ образомъ говорятъ, что объемъ прямаго параллелепипеда равенъ произведе-

нію изъ его основанія на высоту, или произведе-
нію прехъ его измѣреній.

Такъ какъ при измѣреніи куба равны между собою, то при ребрѣ $= 1$, объемъ будетъ равенъ $1 \times 1 \times 1$, или 1; если ребро $= 2$, то объемъ выйдетъ $2 \times 2 \times 2$ или 8; если ребро $= 3$, то объемъ будетъ равенъ $3 \times 3 \times 3$, или 27, и т. д. Откуда видяъ, что если стороны куба относятся какъ числа 1, 2, 3 и проч., то самые кубы или ихъ объемы будутъ относиться какъ числа 1, 8, 27 и проч. Отсюда происходитъ, что въ арифметикѣ называютъ *кубическими* числа, произведение трехъ множителей равныхъ этому числу.

Если бы предложено было найти кубъ вдвое болышій даннаго, то должно, чтобъ сторона искомага куба относилась къ сторонѣ даннаго, какъ кубическіе корни изъ 2 и 1. Легко найти помощію геометрическаго построенія квадратный корень изъ 2, но кубическій невозможно, по крайней мѣрѣ посредствомъ простыхъ дѣйствій начальной геометріи, гдѣ употребляются только прямыя линіи, коихъ двѣ точки извѣстны, и круги, коихъ центры и радіусы опредѣлены.

По причинѣ этой трудности, задача объ удвоеніи куба пріобрѣла большую извѣстность между древними геометрами, такъ какъ и задача о раздѣленіи угла на три равныя части, почти одного рода съ предыдущею. Но уже съ давняго времени извѣстны рѣшенія, коимъ задачи подобнаго рода могутъ быть подвержены, и хотя они не столь просты, какъ построенія начальной геометріи, но между нѣмъ представляютъ всю возможную точность и чистоту.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

ТЕОРЕМА.

Объемъ параллелепипеда, и вообще объемъ ка-

кой ни есть призма равенъ произведенію изъ основанія на высоту.

Ибо 1-е, какой ни есть параллелоиппедъ равнотѣренъ съ прямоугольнымъ параллелоиппедомъ, имѣющимъ съ нимъ одинаковую высоту и равнотѣрное основаніе (11). Но такъ какъ объемъ послѣдняго равняется основанію умноженному на высоту, то въ слѣдствіе этого, объемъ перваго также равенъ произведенію изъ основанія на высоту.

2-е Всякая треугольная призма есть половина параллелоиппеда имѣющаго съ нею одинаковую высоту и вдвое большее основаніе (8). Но такъ какъ объемъ послѣдняго равенъ основанію умноженному на высоту, то, въ слѣдствіе этого, объемъ приуг. призмы равенъ ея основанію; равному половинѣ основанія параллелоиппеда, умноженному на высоту призмы.

3-е Какая ни есть призма можетъ быть раздѣлена на столько треугольныхъ призмъ одинакой съ нею высоты, сколько можно сослѣдовать тр-въ, въ многоугольнике служащемъ ей основаніемъ. Но такъ какъ объемъ каждой приуг. призмы равенъ ея основанію умноженному на высоту, то, по прічинѣ общей высоты, слѣдуетъ, что сумма частныхъ призмъ равна суммѣ тр-въ, служащихъ имъ основаніями, умноженной на общую высоту. Отсюда видимъ, что объемъ многоугольной призмы равенъ произведенію изъ основанія на высоту.

Слѣдствіе. Сравнивая двѣ призмы имѣющіе общую высоту, найдемъ, что произведенія изъ ихъ основаній на высоту будутъ относиться какъ ихъ основанія, и поэтому двѣ призмы имѣющія одинаковую высоту относятся между собою какъ изъ основанія; и въ слѣдствіе подобной же причины, двѣ призмы имѣющія одинакія основанія относятся какъ изъ высоты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XII

Лемма.

Если пирамида $SAB CDE$ разсѣчена плоскостію abd , параллельною основанію, то:

1. Стороны $SA, SB, SC \dots$ и высота SO будутъ ч. III. разсѣчены пропорціонально въ $a, b, c, \dots$ и o .
2. Слѣніе $abcde$ будетъ многоугольникомъ, подобный основанію $ABCDE$.

1. Въ слѣдствіе параллелизма плоскостей ABC, abc (10, V), тр-ки SAB, Sab , подобны и дадутъ пропорцію $SA : Sa = SB : Sb$, по тому же самому $SB : Sb = SC : Sc$, и т. д., откуда видно, что всѣ стороны SA, SB, SC и проч., раздѣляются въ точкахъ a, b, c и проч., на части пропорціональныя. Высота SO раздѣлена въ точкѣ o въ томъ же отношеніи, ибо BO и bo параллельны, и по тому $SO : SO = CB : Sb$.

2. По параллелизму ab и AB, bc и BC, cd и CD , уг. $abc = ABC$, уг. $bcd = BCD$, и т. д. Сверхъ того, изъ подобія тр-въ SAB, Sab , имѣемъ $AB : ab = SB : Sb$, а изъ подобія тр-въ SBC, Sbc , $SB : Sb = Bc : bc$; слѣд. $AB : ab = Bc : bc$, и также $BC : bc = CD : cd$, и проч. Отсюда видно, что въ многоугольникахъ $ABCDE, abcde$, соотвѣтственные углы равны и стороны пропорціональны; слѣд. многоугольники подобны.

Слѣдствіе. Пусть $SAB CDE, SXYZ$, будутъ двѣ пирамиды имѣющія общую вершину и одинаковую высоту. Такъ, какъ, въ слѣдствіе этого, ихъ основанія будутъ находиться въ одной плоскости, то разсѣкая пирамиды плоскостію параллельною плоскости ихъ основаній получимъ слѣнія $Abcde, xyz$, которые будутъ относиться между собою, какъ основанія $ABCDE, XYZ$. Такъ какъ многоуглы $ABCDE, abcde$, подобны, то ихъ поверхности относятся какъ квадраты сходственныхъ сторонъ AB, ab , по $AB : ab = SA : Sa$; слѣд. $ABCDE$:

$abcde = SA : Sa$. По той же причинѣ, будемъ имѣть $XYZ : xyz = SX : Sx$; но какъ $abcxyz$ есть одна и таже плоскость, то имѣемъ $CA : Ca = SX : Sx$, и $ABCDE : abcde = XYZ : xyz$: откуда видно, что сѣченія $abcde$, xyz , относятся между собою какъ основанія $ABCDE$, XYZ . Еслибъ основанія $ABCDE$, XYZ , были равнобѣрны, то и сѣченія, сдѣланные на одинаковой высотѣ, были бы подобными образомъ равнобѣрны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII

ТЕОРЕМА.

Ф. 218. Дать триугольныя пирамиды, имѣющія одинаковыя основанія и высоты, равнобѣрныя.

Пусть $SABC$, $sabc$ будутъ пирамиды, имѣющія одинаковую высоту AT . Предположимъ, что основанія ихъ равнобѣрны и находятся въ одной плоскости, и если эти пирамиды не равнобѣрны, то пусть $sabc$ будетъ меньшая изъ нихъ, и At высота призмы, построенной на основаніи ABC , которая будетъ разностию пирамидъ.

Раздѣливъ общую высоту AT на части равныя и меншія At , и пусть k будетъ одна изъ этихъ частей; чрезъ точки дѣленія высоты проведемъ плоскости, параллельныя плоскостямъ основаній, и сѣченія сдѣланныя каждою плоскостію въ двухъ пирамидахъ будутъ равнобѣрны (16. слѣд.): таковы DEF и def , GHI и ghi , и проч. Положивъ это, построимъ на тр-кахъ ABC , DEF , GHI , и впроч., взятыхъ за основаніе, вѣтшія призмы, которыя бы имѣли ребрами части AD , DG , GK и проч., ребра SA . Подобнымъ образомъ, на тр-хъ def , ghi , klm , и проч., взятыхъ за основанія, построимъ во второй пирамидѣ внутреннія призмы, которыя бы имѣли ребрами части соответствующія ребру sa ; всѣ эти частныя призмы будутъ имѣть общую высоту k .

Сумма вѣшнихъ призмъ пирамиды $SABC$ больше, а сумма внутреннихъ призмъ пирамиды $sabc$ меньше пирамиды, и слѣд., поѣмимъ двумя причинами разность между двумя суммами призмъ должна быть больше разности между двумя пирамидами. Начиная съ основаній ABC , abc , увидимъ, что вторая вѣшная призма $DEFG$ равнотѣрна съ первой внутреннею $defa$, ибо основанія ихъ DEF , def , равнотѣрны и высота k есть общая: по той же причинѣ третія вѣшная призма $GHIK$ равнотѣрна съ второю внутреннею $ghik$, четвертая вѣшная равна третьей внутренней, и т. д., до послѣдней между внутренними и вѣшными призмами. Отсюда слѣдуетъ что всѣ вѣшныя призмы пирамиды $SABC$, исключая первой $ABCD$, имѣютъ соответственные и равнотѣрные имъ между внутренними призмами пирамиды $sabc$, и поэтому призма $ABCD$ есть разность между суммою вѣшныхъ призмъ пирамиды $SABC$ и суммою внутреннихъ призмъ пирамиды $sabc$. Между тѣмъ разность этихъ суммъ меньше разности пирамиды слѣд. призма $ABCD$ должна быть больше призмъ $ABCH$; но такъ какъ, напротивъ, она меньше, по причинѣ общаго основанія ABC , и по тому, что высота k первой призмъ меньше высоты $Ах$ второй, то отсюда видно, что предположеніе, сдѣланное нами въ началѣ, не можетъ имѣть мѣста, и, въ слѣдствіе этого, пирамиды имѣющія одинаковыя основанія и высоты, равнотѣрны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Теорема.

Всякая треугольная пирамида есть треть призмъ одинаковаго съ нею основанія и одинаковой высоты.

Пусть $SABD$ будетъ треугольная пирамида, 216.

а $ABCDE$ триугольная призма одинаковаго основанія и одинакой высоты съ пирамидою; должно доказать, что пирамида составляетъ третъ призмъ.

Вычипимъ изъ призмъ пирамиду $SABC$, получимъ въ остаткѣ тѣло $SACDE$, которое можно разсматривать какъ четырехугольную призму, имѣющую вершиною точку S , а основаніемъ параллелограмъ $ACDE$. Проведемъ діагональ CE и вообразимъ плоскость SCE , раздѣляющую четырехугольную пирамиду на двѣ триугольныя пирамиды $SACE$, $SDCE$, которыя имѣютъ общую высоту перпендикуляръ, опущенный изъ вершины S на плоскость $ACDE$, и также равныя основанія, ибо тр-ки ACE , DCE , суть половинны одного параллелограмма; откуда слѣдуетъ, что пирамиды $SACE$, $SDCE$, будутъ равномѣрны между собою. Но пирамиды $SDCE$, $SABC$, имѣютъ равныя основанія ABC , DEC , и равныя высоты, ибо эти высоты измѣряютъ разстоянія двухъ параллельныхъ плоскостей ABC , DES , и по этому двѣ пирамиды $SABC$, $SDEC$ равномѣрны. Такъ какъ уже доказано, что пирамида $SDCE$ равномѣрна съ пирамидою $SACE$, то видимъ, что три пирамиды $SABC$, $SACE$, $SDCE$, составляющія призму ABD , равномѣрны между собою; и слѣд. пирамида $SABC$ есть третъ призмъ ABD , имѣющей съ нею одинаковое основаніе и высоту.

Слѣдствіе. Объемъ триугольной пирамиды равняется третъ произведенія изъ ея основанія на высоту.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

ТЕОРЕМА.

Всякая пирамида $SABCDE$ измѣрляется третью произведенія изъ основанія $ABCDE$ на высоту AO .

Проведа плоскости SEB , SEC , чрезъ діагона- Ф. 214.
ли EB , EC , раздѣлимъ многоугольную пирамиду
 $SABCDE$ на нѣсколько приугольныхъ пирамидъ
имѣющихъ общую высоту SO . Но каждая изъ
пирамидъ измѣряется произведеніемъ каждого ос-
нованія ABE , BCE , CDE , на третью высоты SO
(пред. 18); слѣд. сумма приуг. пирамидъ, или
многоугольная пирамида $SABCDE$, будетъ имѣть
мѣрою сумму приугольныхъ основаній ABE , BCE ,
 CDE , или многоу-хъ $ABCDE$ умноженный на $\frac{1}{3} SO$;
откуда видно, что всякая пирамида измѣряется
третью произведенія изъ основанія на высоту.

Слѣдствіе I. Всякая пирамида есть треть
призмы одинаковаго съ нею основанія и одной вы-
соты.

Слѣдствіе II. Двѣ пирамиды имѣющія общую
высоту, относятся между собою какъ ихъ осно-
ванія, а двѣ пирамиды, имѣющія одинаковыя осно-
ванія, относятся между собою какъ ихъ высоты.

Замѣчаніе. Можно опредѣлить объемъ всякаго
многогранника, раздѣляя его на пирамиды, и это
раздѣленіе можетъ быть совершенно различными
способами. Одинъ изъ простѣйшихъ состоитъ въ
проведеніи плоскостей чрезъ вершину котораго
впобудъ изъ многогранныхъ угловъ, чрезъ что бу-
демъ имѣть столько частныхъ пирамидъ, сколько
находящихся граней въ многогранникѣ, кромѣ со-
ставляющихъ многогранный уголъ и чрезъ кото-
рыя проведены плоскости дѣленія.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

ТЕОРЕМА.

Два симметрическіе многогранника равномѣрны, Ф. 202.
или имѣютъ равный объемъ.

1. Двѣ приугольныя симметрическія пирамиды,
каковы $SABC$, $TABC$, имѣютъ общую мѣрою про-

изведеііе изъ основанія ABC на третью высоты SO или TO , и слѣд. равномѣрны между собою.

2. Раздѣливъ одинъ изъ симметрическихъ многогранниковъ на триугольныя пирамиды, можемъ точно также раздѣлить и другой многогранникъ на столько же симметрическихъ триугольныхъ пирамидъ. Но такъ какъ соотвѣтственные симметрическія триугольныя пирамиды равномѣрны между собою, то и многогранники будутъ также равномѣрны.

Замѣчаніе. Эта теорема могла бы быть выведена непосредственно изъ предположенія II, гдѣ было доказано, что въ двухъ симметрическихъ многогранникахъ, всѣ части соснапавляющія одинъ изъ нихъ, равны соотвѣтствующимъ имъ частямъ другого. Впрочемъ, не менѣе необходимо было доказать это строгимъ образомъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

ТЕОРЕМА.

Если пирамида разсѣчена плоскостію параллельною основанію, то усѣченная часть происшедшая по отнятіи малой пирамиды, равна тремъ пирамидамъ имѣющимъ общую высоту съ усѣченной частью и которыхъ основанія будутъ верхнее основаніе усѣченной пирамиды, нижнее основаніе той же пирамиды, и среднее пропорціональное между основаніями.

117. Пусть $SABCDE$ будетъ пирамида разсѣченная плоскостію abd , параллельною основанію; пусть $TFGH$ будетъ триугольная пирамида имѣющая одинаковую высоту и равномѣрное основаніе съ пирамидою $SABCDE$. Можно предположить, что основаніе пирамидъ находится на одной плоскости, и тогда продолженная плоскость abd опредѣлитъ въ триугольной пирамидѣ сѣченіе fgh , на одномъ разстояніи сверху общей плоскости осно-

валій. Отсюда слѣдуетъ, что сѣченіе fgh относится къ сѣченію abd , какъ основаніе FGH къ основанію ABD (16); но такъ какъ основанія равносторонны, то и сѣченія будутъ также равносторонны. Здѣсь виднѣтъ, что пирамиды $Sabcde$, $Tfgh$, равносторонны, по равенству высотъ и равносторонности основаній. Цѣлыя пирамиды $SABCDE$, $TFGH$, будутъ равносторонны по той же причинѣ, отсюда слѣдуетъ равносторонность усѣченныхъ пирамидъ $ABDdab$, $FGHhfg$ и по тому же логично, что достаточно будетъ доказать предложеніе только въ случаѣ приугольной усѣченной пирамиды.

Пусть $FGHhfg$ будетъ усѣченная приугольная пирамида, коей основанія параллельны; чрезъ три точки F , g , H , проведемъ плоскость FgH , которая отдѣлитъ отъ усѣченной пирамиды, приугольную пирамиду $gFGH$. Эта пирамида будетъ имѣть основаніемъ нижнее основаніе FGH усѣченной пирамиды, и высотой высоту одинаковую съ послѣднею, потому что точка g находится на плоскости верхняго основанія fgh . Ф. 210.

Отдѣливъ эту пирамиду, получимъ четырехугольную пирамиду $gfhHf$, которой вершина есть точка g , а основаніе $fghHf$. Чрезъ три точки f , g , H , проведемъ плоскость fgH , раздѣляющую четырехугольную пирамиду на двѣ приугольныя gF/H , $gfhH$. Последняя имѣетъ основаніемъ верхнее основаніе gfh усѣченной пирамиды, а высотой высоту послѣдней, ибо точка H находится на плоскости нижняго основанія, и по тому же мы имѣемъ теперь уже двѣ пирамиды, изъ числа трехъ составляющихъ усѣченную.

Останется разсмотрѣть третью gF/H . Еслибы мы провели $Kg \parallel fF$, и представили бы себѣ другую пирамиду $fFHK$, которой вершина находится въ точкѣ K , а основаніе есть F/H , то двѣ эти пирамиды будутъ имѣть общее основаніе F/H и общую высоту, ибо вершины ихъ g и K находят-

ся на прямой линіи $Kg \parallel Ff$, и слѣд. параллельной плоскости основанія; откуда видно, что пирамиды равнобѣдрны. Но пирамида $fFKH$ можетъ быть разсматриваема, какъ имѣющая вершиною точку f , и поэтому будетъ имѣть одинаковую высоту съ усѣченной пирамидою; что же касается до основанія FKH , то оно есть среднее пропорціональное между основаніями FGH , fgh . Въ самомъ дѣлѣ, трѣхъ FHK , fgh , имѣющіе уг. $F = f$, и стороны $FK = fg$, даютъ пропорцію (24, III) $FHK : fgh = FH : fh$. Имѣемъ также $FHG : FHK = FG : FK$ или fg . Но изъ подобныхъ трѣхъ FGH , fgh , $FG : fg = FH : fh$, слѣд. $FHG : FHK = FHK : fgh$, и по этому основаніе FHK есть среднее пропорціональное между основаніями FGH , fgh . И такъ, приугольная пирамида, усѣченная параллельно своему основанію, равнобѣдрна тремъ пирамидамъ одинаковой съ нею высоты, и коихъ основанія суть: нижнее и верхнее основаніе усѣченной пирамиды и среднее пропорціональное между этими основаніями.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

ТЕОРЕМА.

Ф. 216.

Если разсмотримъ приугольную призму, имѣющую основаніемъ ABC , плоскостію DES , наклонною къ основанію, то тѣло $ABCDES$, происшедшее отсюда, будетъ равно суммѣ трехъ пирамидъ, имѣющихъ основаніемъ ABC , а вершинами точки D , E , S .

Черезъ три точки C , A , S , проведемъ плоскость SAC , которая отдѣлитъ отъ усѣченной призмы приугольную пирамиду $SABC$, имѣющую основаніемъ ABC , а вершиною точку S .

Отнявъ эту пирамиду, получимъ въ остаткѣ четырехъугольную пирамиду $SACDE$, которой

вершина находится въ точкѣ S, а основаніе есть ACDE. Чрезъ три точки S, C, E, проведемъ плоскость SCE, которая раздѣлитъ четырехугольную пирамиду на двѣ тригоны SACE, SCDE.

Пирамида SAEC, имѣющая основаніемъ пр. AEC, и вершиною точку S, равнотѣрна съ пирамидою EABC, имѣющею основаніемъ пр. AEC, а вершиною точку B. Эти пирамиды имѣютъ одинаковое основаніе; ихъ высоты также равны, потому что линія BS $\perp$ линіямъ AE и CD, параллельна также плоскости ACE, ихъ содержащей слѣд. пирамида SAEC равнотѣрна съ пирамидою EABC, которая можетъ быть разсмотрѣваема, какъ имѣющая основаніемъ ABC, а вершиною точку E.

Третья пирамида SCDE можетъ быть замѣнена пирамидою ASCD, ибо онѣ имѣютъ общее основаніе SCD, и одинаковыя высоты, по параллелизму линій AE и CD. Пирамида ASCD можетъ быть замѣнена пирамидою ABCD; онѣ имѣютъ общее основаніе ACD и равныя высоты, потому что S и B находятся на прямой параллельной основанію.

Отсюда видно, что пирамида SCDE, равнотѣрная съ ASCD, равнотѣрна также съ пирамидою ABCD, которая можетъ быть разсмотрѣваема, какъ имѣющая основаніемъ ABC и вершиною точку D.

И такъ, усѣченная призма ABCDES равна суммѣ трехъ пирамидъ имѣющихъ общимъ основаніемъ ABC, а вершинами точки D, E, S.

Слѣдствіе Если ребра AE, BS, CD, перпендикулярны къ плоскости основанія, то они будутъ въ тоже время высотами пирамидъ составляющихъ усѣченную призму, такъ что объемъ ея выразится чрезъ $\frac{1}{3} ABC \times AE + \frac{1}{3} ABC \times BS + \frac{1}{3} ABC \times CD$, или $\frac{1}{3} ABC \times (AE + BS + CD)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XXIII

ТЕОРЕМА.

Въ двухъ подобныхъ триугольныхъ пирамидахъ, соответственные грани подобны и многогранные углы равны.

Ф. 304.

По опредѣленію, двѣ пруг. пирамиды $SABC$, $TDEF$, подобны, если два тр-ка SAB , ABC , подобны двумъ тр-мъ TDE , DEF , и подобно расположены, т. е. если уг. $ABS = DET$, $BAS = EDT$, $ABC = DEF$, $BAC = EDF$, и если, сверхъ того, взаимное наклоненіе плоскостей SAB , ABC , равно наклоненію плоскостей TDE , DEF . При этомъ предположеніи, пирамиды будутъ имѣть подобныя грани и равныя соответственные многогранные углы.

Если возьмемъ $BG = ED$, $BI = EF$, $BI = ET$, и проведемъ GI , GI , II , то пирамида $TDEF$ будетъ равна пирамидѣ $IGBI$; ибо стороны GB , BI , равны сторонамъ ED , EF , и такъ какъ уг. GBI равенъ уг. DEF , по предположенію, то тр. GBI равенъ тр-ку DEF . Отсюда слѣдуетъ, что для совмѣщенія одной изъ пирамидъ съ другою, можно сперва совмѣститъ основаніе DEF съ равнымъ ему GBI , и такъ какъ взаимное наклоненіе плоскостей DTE , DEF , одинаково съ наклоненіемъ плоскостей SAB , ABC , то очевидно, что плоскость DET совмѣстится съ плоскостію ABS . Но какъ, по предположенію, уг. $DET = GBI$, то сторона ET совмѣстится съ равною ей BI , и четыре точки D , E , F , T , будутъ находиться въ точкахъ G , B , II , I ; слѣд. пирамида $TDEF$ совмѣстится съ пирамидою $IGBI$.

Но изъ равенства тр-въ DEF , GBI , имѣемъ, что уг. $BGI = EDF = BAC$; откуда видно, что сторона $GI \nparallel AC$, и, по той же причинѣ, $IG \nparallel AS$; слѣд. плоскость $GI \nparallel$ плоскости SAC (13, V). По этому тр. IGI , или равный ему TDE , будетъ по-

добеиъ пр. SAC (15), а пр. IBH, или равный ему TEF, подобеиъ пр. SBC. Отсюда слѣдуетъ, что двѣ подобныя пирамиды SABC, TDEF, имѣютъ подобныя сходственные грани; кромѣ того, ихъ сходственные многогранные углы равны между собою. Ибо, мы уже совместили многогранный уголъ E съ его сходственнымъ B, и могли бы сдѣлать тоже самое съ двумя другими сходственными многогранными углами, но и безъ того видно, что соответственные многогранные углы, на пр. T и S, равны между собою, потому что они оба составлены изъ трехъ равныхъ и подобно расположенныхъ плоскихъ угловъ.

И такъ, двѣ подобныя треугольныя пирамиды имѣютъ подобныя соответственные грани и равные многогранные углы.

Слѣдствіе I. Подобныя тр-ки, въ выше означенныхъ пирамидахъ, даютъ пропорцію $AB : DE = BC : EF = AC : DF = AS : DT = SB : TE = SC : FT$, откуда видно, что въ подобныя треугольныя пирамиды соответственные ребра пропорциональны.

Слѣдствіе II. Изъ равенства многогранныхъ угловъ слѣдуетъ, что взаимное наклоненіе двухъ граней пирамиды равно взаимному наклоненію соответственныхъ граней другой ей подобной.

Слѣдствіе III. Если разсѣжемъ треугольную пирамиду SABC плоскостію GH, параллельною одной изъ граней SAC, то отсѣченная пирамида BGH будетъ подобна цѣлой SABC: ибо тр-ки BGI, BGH, относителъно подобны тр-мъ BAS, BAC, и подобно расположены; сверхъ того, взаимное наклоненіе плоскостей одинаково какъ съ той такъ и съ другой стороны, и слѣд. пирамиды подобны.

Слѣдствіе IV. Вообще, если разсѣжемъ какую

Ф. 314. *нибудь пирамиду $SABCDE$ плоскостію $abcde$, параллельною основанію, то отсѣженная пирамида $Sabcde$ будетъ подобна цѣлой $SABCDE$. Ибо, основанія $ABCDE$, $abcde$, подобны, и по проведеніи AC и ac , тр-уг. пирамида $SABC$ будетъ подобна пирамидѣ $Sabc$, что мы уже доказали. Въ свѣдѣніе этого, точка S расположена относительно основанія ABC , точно такъ какъ и относительно основанія abc (опред. 18); и поему двѣ пирамиды $SABCDE$, $Sabcde$, подобны.*

Замѣчаніе. Можно бы было замѣнить пять данныхъ, необходимыхъ для подобія двухъ триугольныхъ пирамидъ, пятью другими данностями, и тогда получили бы такое же число теоремъ, между коими замѣчательна слѣдующая: *Двѣ триугольныя пирамиды подобны, когда ихъ сходственные ребра пропорціональны.*

Ф. 303. Если вѣдемъ пропорціи $AB : DE = BC : EF = AC : DF = AS : DT = SB : TE = SC : TF$, заключающія въ себѣ пять условій, то тр-ки ABS , ABC , будутъ подобны тр-мъ DET , DEF , и подобно расположены. Тр. SBC будетъ также подобенъ тр. TEF ; откуда видно, что три плоскіе угла, составляющіе тригранный уголъ B , равны соответственнымъ плоскимъ угламъ, составляющимъ тригранный уголъ E , и поему взаимное наклоненіе граней SAB , ABC , равно взаимному наклоненію соответственныхъ имъ граней TDE , DEF , откуда слѣдуетъ, что пирамиды подобны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV.

ТЕОРЕМА.

Въ двухъ подобныхъ многогранникахъ сходственные грани подобны, и многогранные сходственные углы равны.

Пусть $ABCDE$ будетъ основаніе многогранника, а M и N вершины двухъ угловъ, находящихся въ основаніи и определенныхъ двумя треугольными пирамидами $MABC$, $NABC$, которыя имѣютъ общее основаніе ABC ; пусть въ другомъ многогранникѣ будетъ основаніе $abede$, соотвѣтственное или подобное основанію $ABCDE$, m и n вершины соотвѣтственные вершинамъ M и N и определенные пирамидами $mabc$, $nabc$, подобными пирамидамъ $MABC$, $NABC$. Должно доказать, во первыхъ, что разстоянія MN , mn , будутъ пропорціональны сходственнымъ ребрамъ AB , ab .

Такъ какъ пирамиды $MABC$, $mabc$, подобны, то взаимное наклоненіе плоскостей MAC , BAC , будетъ равно взаимному наклоненію плоскостей mac , bac ; равнымъ образомъ, изъ подобія пирамидъ $NABC$, $nabc$, слѣдуетъ что взаимное наклоненіе плоскостей NAC , BAC , равно взаимному наклоненію плоскостей nac , bac ; и поэтому, взаимная наклоненіе первыхъ изъ наклоненій вторыхъ, получимъ взаимное наклоненіе плоскостей NAC , MAC , равное взаимному наклоненію плоскостей nac , mac . Но, въ слѣдствіе подобія тѣхъ же пирамидъ, три угла MAC , NAC , подобны угламъ mac , nac , откуда видимъ, что двѣ пирамиды $MNAC$, $mnac$, имѣютъ по двѣ подобныя сходственные грани, одинаково расположенныя, и имѣющія одинаковое наклоненіе; слѣд. пирамиды подобны (21), и сходственные ребра ихъ дадутъ пропорцію $MN : mn = AM : am$. Но $AM : am = AB : ab$, и поэтому $MN : mn = AB : ab$.

Если P и p , будутъ двѣ другія соотвѣтственные вершины многогранниковъ, то будемъ имѣть $PN : pn = AB : ab$, $PM : pm = AB : ab$, и въ слѣдствіе этого $MN : mn = PN : pn = PM : pm$. Отсюда видно, что $три$ PMN , соединяющій три какихъ нѣ есть вершины одного многогранника,

подобенъ тр. $ртп$, соединяющему три соответственныхъ вершины другаго многогранника.

Если возьмемъ еще двѣ соответственныхъ вершины Q и q , то тр. PQN будетъ подобенъ тр. pqn . Сверхъ того взаимное наклоненіе плоскостей PQN , PMN , равно взаимному наклоненію плоскостей pqn , pmt .

Ибо, по проведеніи QM , qm , тр-ки QNM , qnt , будутъ подобны, и слѣд. уг. QNM равенъ уг. qnt . Вообразимъ въ точкѣ N пригранный уголъ, составленный плоскими углами QNM , QNP , PNM , а въ точкѣ n пригранный уголъ, составленный плоскими углами qnt , qnp , pnt ; такъ какъ соответственные плоскіе углы равны между собою, то пригранные будутъ также равны. Отсюда слѣдуетъ, что наклоненіе плоскостей PNQ , PNM , будетъ равно наклоненію соответственныхъ плоскостей pnp , pmt , и еслибъ два тр-ка PNQ , PNM , находились въ одной плоскости, при чемъ уг. QNM былъ бы равенъ $QNP + PNM$, то были бы также, что уголъ $qnt = qnp + pnt$, и два тр-ка qnp , pnt , находились бы въ одной плоскости.

Все доказанное выше имѣетъ мѣсто, каковы бы ни были углы M , N , P , Q , сравниваемые съ ихъ сходственными углами m , n , p , q .

Если предположимъ теперь, что поверхность одного изъ многогранниковъ раздѣлена на тр-ки ABC , ACD , MNP , NPQ и проч., то очевидно, что поверхность другаго многогранника будетъ содержать одинакое число тр-въ abi , acd , mnp , pqr и проч., подобныхъ и подобно расположенныхъ, и если нѣсколько тр-въ, какъ MNP , NPQ и проч., принадлежатъ къ одной и той же грани и находятся въ одной плоскости, то ихъ сходственные тр-ки mnp , pqr , и проч., будутъ также находиться въ одной плоскости. И такъ, каждая многоугольная грань въ одномъ многогранникѣ будетъ соответствовать

многоугольной грани въ другомъ многогранникѣ, и два многогранника будутъ заключаться между одинаковыми числомъ плоскостей подобными и подобно расположенными. Сверхъ того, соотвѣстные многогранные углы будутъ равны.

Ибо, если многогранный уголъ N , на примѣръ, составленъ изъ плоскихъ угловъ QNP , PNM , MNR , QNR , то сходственный уголъ n будетъ составленъ изъ плоскихъ угловъ qnr , rnt , int , qnt ; но какъ эти плоскіе углы относительно равны и наклоненіе двухъ смежныхъ плоскостей равно наклоненію двухъ имъ сходственныхъ, то и многогранные углы равны, ибо они могутъ быть совмѣщены.

Отсюда видно, наконецъ, что въ подобныхъ многогранникахъ сходственные грани подобны и сходственные многогранные углы равны.

Слѣствие. Изъ предыдущаго доказательства слѣдуетъ, что если составимъ изъ четырехъ вершинъ одного многогранника триугольную пирамиду, и такимъ же образомъ другую, посредствомъ четырехъ сходственныхъ вершинъ въ подобномъ многогранникѣ, то двѣ пирамиды будутъ подобны, ибо ихъ сходственные ребра пропорціональны (21, зам.).

Въ то же время видно, что двѣ сходственные діагонали (17, II), какъ на пр. AN , an , относятся между собою какъ сходственные ребра AB , ab .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

ТЕОРЕМА.

Два подобные многогранники могутъ быть раздѣлены на одинаковое число триугольных пирамидъ подобныхъ и подобно расположенныхъ. ♦. 213.

Мы уже видѣли, что поверхности двухъ подобныхъ многогранниковъ могутъ быть раздѣлены на одинакое число тръ въ подобныхъ и подобно расположенныхъ.

Если примемъ теперь всѣ приугольники, включая и тѣхъ, которые составляютъ уголъ A , за основанія приугольных пирамидъ, вѣтующихъ общему вершинному точку A , то совокупность пирамидъ образуетъ многогранникъ. Раздѣливъ, такимъ же образомъ, и другой многогранникъ на пирамиды вѣтующія общему вершинному уг. a , сходственный углу A , увидимъ, что пирамида, соединяющая четыре вершины одного многогранника, будетъ подобна пирамидѣ, соединяющей четыре сходственных вершины другого многогранника, и проч.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVI.

ТЕОРЕМА.

Ф. 114. *Двѣ подобныя пирамиды относятся между собою какъ кубы сходственныхъ реберъ.*

Такъ какъ пирамиды подобны, то меньшая изъ нихъ можетъ быть помѣщена въ большей такимъ образомъ, что многогранный уголъ S будетъ ихъ общимъ угломъ. Очевидно, что основанія ихъ $ABCDE$, $abcde$, параллельны; ибо, по подобію сходственныхъ граней (22), уголъ Sab равенъ углу SAB , также какъ уг. $Sbc =$ уг. SBC ; слѣд. плоскость $abc \parallel$ плоскости ABC (13, V). Положивъ вѣно, пусть SO будетъ перпендикуляръ, опущенный изъ вершины S на плоскость ABC , и o точка встрѣчи его съ плоскостію abc ; въ слѣдствіе прежде доказаннаго (15), будемъ имѣть $SO : So = SA : Sa = AB : ab$, а отсюда

$$\frac{1}{3} SO : \frac{1}{3} SO = AB : ab.$$

Но основанія $ABCDE$, $abcde$, суть фигуры подобныя и даютъ пропорцію

$$ABCDE : abcde = AB^3 : ab^3.$$

Перемноживъ вѣни двѣ пропорціи почленно, получимъ третію

$$ABCDE \times \frac{1}{3} SO : abcde \times \frac{1}{3} So = \overline{AB} : \overline{ab}.$$

Но $ABCDE \times \frac{1}{3} SO$ есть объемъ пирамиды $SABCDE$ (18), а $abcde \times \frac{1}{3} So$ объемъ пирамиды $Sabcde$; сдѣд. двѣ подобныя пирамиды относятся между собою какъ кубы ихъ сходственныхъ реберъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

ТЕОРЕМА.

Два подобныя многогранники относятся между собою какъ кубы сходственныхъ реберъ.

Подобныя многогранники могутъ быть раздѣлены на одинаковое число подобныхъ треугольныхъ пирамидъ (23). Но двѣ подобныя пирамиды $APNM$, *прит.*, относятся какъ кубы сходственныхъ реберъ AM , *от.*, или, какъ кубы сходственныхъ реберъ AB , *ab*. Это же отношеніе будетъ существовать между двумя какими нибудь другими сходственными пирамидами, и сдѣд. сумма пирамидъ составляющихъ многогранникъ, или самый многогранникъ, будетъ относиться къ другому многограннику, какъ кубъ какой ни есть стороны одного, къ кубу сходственной стороны другого.

ОБЩЕЕ ЗАМѢЧАНІЕ.

Можно представить алгебраическими членами, т. е. самыми сокращенными образомъ, выводы главныхъ предложеній этой книги, относящихся къ объемамъ многогранниковъ.

Пусть V основаніе призмы и H ея высота; объемъ призмы будетъ $V \times H$, или VH .

Пусть V основаніе пирамиды и H ея высота; объемъ пирамиды будетъ $V \times \frac{1}{3} H$, или $H \times \frac{1}{3} V$, или $\frac{1}{3} VH$.

Пусть H высота усѣченной пирамиды съ параллельными основаніями, A , B , ея основанія. Среднее пропорціональное между ними будетъ $\sqrt{AB}$, и объемъ усѣченной пирамиды выразится чрезъ $\frac{1}{3} H \times (A + B + \sqrt{AB})$.

Пусть B основаніе усѣченной приугольной призмы; H , H' и H'' , высоты трехъ ея вершинъ въ основанія; объемъ призмы будетъ $\frac{1}{3} B (H + H' + H'')$.

Пусть наконецъ P и p объемы двухъ подобныхъ многогранниковъ, A и a двѣ сходственныхъ стороны или двѣ діагонали ихъ; въ этомъ случаѣ будемъ имѣть $P : p = A^3 : a^3$.

К Н И Г А VII.

Ш А Р Ъ.

О П Р Е Д Ъ Л Е Н І Я.

I. *Шаръ* есть тѣло ограниченное кривою по 4-120верхностію, кою всѣ точки равно удалены отъ внутренней точки, называемой *центромъ*.

Можно представивъ, что шаръ произведенъ обращеніемъ полукруга DAE около діаметра DE, ибо всѣ точки поверхности, описанной при этомъ движеніи кривою DAE, будутъ равно удалены отъ центра C.

II. *Радіусъ шара* есть прямая линія проведенная изъ центра къ какой нибудь точкѣ поверхности; *діаметръ* или *ось*, есть прямая проходящая чрезъ центръ и ограниченная съ обѣихъ сторонъ поверхностію.

Всѣ радіусы шара и всѣ діаметры, какъ удвоенные радіусы, равны между собою.

III. Въ послѣдствіи будетъ доказано (пр. 1), что всякое сѣченіе шара плоскостію есть кругъ; допустивъ это, *большимъ кругомъ* называютъ сѣченіе шара плоскостію проходящею чрезъ центръ, а *малымъ кругомъ*, сѣченіе шара плоскостію не проходящею чрезъ центръ.

IV. *Плоскость касательна* къ шару, если вѣдетъ только одну общую точку съ поверхностію его.

V. *Полюсомъ круга въ шарѣ*, называется точка шаровой поверхности равно удаленная отъ всѣхъ точекъ окружности этого круга. Въ послѣдствіи

увидимъ (пред. 6), что каждый кругъ, большой или малый, имѣетъ два полюса.

VI. *Сферическимъ треугольникомъ* называется часть поверхности шара заключающаяся между тремя дугами большихъ круговъ.

Эти дуги, называемыя *сторонами* треугольника, предполагаются всегда меньшими полуокружностей. Углы составляемые между собою ихъ плоскостями, суть углы треугольника.

VII. Сферическій треугольникъ принимаетъ названіе *прямоугольнаго, равнобедреннаго и равносторонняго*, въ тѣхъ же самыхъ случаяхъ какъ и прѣмолинейный треугольникъ.

VIII. *Сферическимъ многосторонникомъ, или многоугольникомъ*, называется часть поверхности шара заключающаяся между нѣсколькими дугами большихъ круговъ.

IX. *Сферическій двусторонникъ* (lune) есть часть поверхности шара, которая заключается между двумя большими полуокружностями, имѣющими общій діаметръ.

X. Можно предложить названіе *сферическаго клина* (coin sphérique) для той части шара, которая заключается между двумя большими полуокружностями и имѣетъ основаніемъ сферическій двусторонникъ.

XI. *Сферическою пирамидою* называется часть объема шара заключающаяся между плоскостями многограннаго угла, коего вершина находится въ центрѣ. *Основаніе* этой пирамиды есть сферическій многоугольникъ, опредѣляемый тѣми же самыми плоскостями.

XII. *Поясомъ* называется часть поверхности шара заключающаяся между двумя параллельными кругами, которые служатъ ей основаніями. Одна изъ этихъ плоскостей можетъ быть касательна къ шару, и въ такомъ случаѣ поясъ будетъ имѣть только одно основаніе.

XIII. *Шаровымъ сегментомъ или отръзкомъ*

называется часть объема шара заключающаяся между двумя параллельными плоскостями, концы служащъ ему основаніямъ.

Если одна изъ плоскостей касательна къ шару, то сегментъ будетъ имѣть только одно основаніе.

XIV. *Высота отръзки или сегмента* есть разстояніе плоскостей служащихъ ему основаніямъ.

XV. При произведеніи шара полукругомъ DAE, обращающимся около своего діаметра DE, вслѣдствіе секторъ DCF, или FCH, производитъ тело называемое шаровымъ секторомъ или вырѣзкомъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ

ТЕОРЕМА.

Всякое сѣченіе шара плоскостію есть кругъ.

Пусть AMB будетъ сѣченіе сдѣланное плоскостію въ шаръ, коего центръ есть С. Изъ точки С опустимъ перпендикуляръ на плоскость AMB, и проведемъ къ различнымъ точкамъ кривой AMB, ограничивающей сѣченіе, прямыя СА, СМ.

Наклонныя СА, СМ, СВ, равны, какъ радіусы шаровъ, и слѣд. равно удалены отъ основанія перпендикуляра СО (3, V). Поэтому линіи ОА, ОМ, ОВ, равны между собою, и отсюда видно, что сѣченіе AMB есть кругъ, коего центръ находится въ точкѣ О.

Слѣдствіе. I. Если сѣченіе проходитъ чрезъ центръ шара, то радіусъ его будетъ радіусомъ шара, и поэтому всѣ большіе круги равны между собою.

Слѣд. II. Два большіе круга пересѣкаются на равныя части, потому что общее ихъ сѣченіе проходитъ чрезъ центръ шара и есть его діаметръ.

Слѣд. III. Всякій большой кругъ раздѣляетъ шаръ и его поверхность на равныя части. Еслибъ, отдѣливъ одно полушаріе отъ другаго, мы положили ихъ на общее основаніе, обращая выпуклостями въ одну сторону, то двѣ шаровыя поверхности должны сойтись; поному чиню, въ противномъ случаѣ, существовала бы точка болѣе или менѣе другихъ удаленная отъ центра.

Слѣд. IV. Центръ малаго круга и центръ шара находящаяся на прямой перпендикулярной къ плоскости малаго круга.

Слѣд. V. Малые круги уменьшаются по мѣрѣ ихъ удаленія отъ центра шара; ибо съ увеличеніемъ распоянія CO , уменьшается хорда AB , то есть, діаметръ круга AMB .

Слѣд. VI. Чрезъ двѣ точки данныя на поверхности шара, можно провести дугу большаго круга, поному чиню двѣ данныя точки и центръ шара опредѣляютъ положеніе плоскости. Если же данныя точки находящаяся на оконечностяхъ діаметра, то центръ шара будетъ находится на одной прямой съ ними, и отсюда видно, что безчисленное множество большихъ круговъ можетъ проходить чрезъ двѣ данныя точки.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II

ТЕОРЕМА.

Ф. 222. Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ ABC , одна изъ сторонъ менѣе суммы двухъ прочихъ.

Пусть O будетъ центръ шара, а OA, OB, OC , радіусы. Если вообразимъ плоскости AOB, AOC, COB , то онѣ образуютъ многогранный уголъ при точкѣ O , и плоскіе углы AOB, AOC, COB , будутъ вѣтъ мѣрою стороны AB, AC, CB , сферическаго тр. ABC . Но каждый плоскій уголъ триграннаго

угла менше суммы двухъ прочихъ угловъ (21, V), слѣд. каждая сторона сферическаго шрѣка менше суммы двухъ прочихъ сторонъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

ТЕОРЕМА.

Кратчайшее разстояніе между двумя точками на поверхности шрѣка, есть дуга большаго круга соединяющая данныя точки.

Пусть ANB будетъ дуга большаго круга, соединяющая точки A и B , и пусть еще M , если возможно, точка, принадлежащая крайнейшей линіи между A и B . Проведемъ, чрезъ точку M , дуги большаго круга MA , MB , и возьмемъ $BN = MB$.

По предыдущей теоремѣ, дуга ANB менше $AM + MB$, и вычитая съ обѣихъ сторонъ $BN = MB$, получимъ $AN < AM$. Но разстояніе отъ M до B , совпадаетъ ли оно съ дугою MB , или будетъ какою ни есть другою линіею, равно разстоянію отъ B до N ; ибо, обращая плоскость большаго круга BM около діаметра, проходящаго чрезъ точку B , можно будетъ привести точку M къ точкѣ N , и въ этомъ положеніи кратчайшее разстояніе между M и B , каково бы оно ни было, совпадешетъ съ кратчайшимъ разстояніемъ между точками N и B , откуда видно, что два разстоянія отъ A до B , одно проходящее чрезъ точку M , и другое чрезъ точку N , нѣтъ равныя части отъ M до B , и отъ N до B . Но первое разстояніе, по предположенію, есть кратчайшее, слѣд. разстояніе отъ A до M короче разстоянія отъ A до N , что нелѣзно, ибо дуга AM болѣе дуги AN . Поэтому никакая точка крайняго разстоянія отъ A до B не можетъ находиться вне

дуги ANB, и слѣд. впа дуга будетъ кратчайшимъ разстояніемъ между ея оконечностями.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

ТЕОРЕМА.

Сумма сторонъ сферическаго треугольника менше окружности большаго круга.

Ф. 224. Взявъ какой нибудь сферическій тр. ABC, продолжимъ стороны его AB, AC, до встрѣчи ихъ въ точкѣ D. Дуги ABD, ACD, будутъ полуокружностями, потому что большіе круги пересѣкаются по поламъ (1); изъ тр. BCD имѣемъ $BC < BD + CD$ (2), и придавъ съ обѣихъ сторонъ $AB + AC$, получимъ, что $AB + AC + BC < ABD + ACD$, то есть менше окружности круга.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

ТЕОРЕМА.

Сумма сторонъ всякаго сферическаго многосторонника менше окружности большаго круга.

Ф. 225. Взявъ, на примѣръ, пятиугольникъ ABCDE, продолжимъ стороны AB, DC, до встрѣчи ихъ въ F; и такъ какъ $BC < BF + FC$, то обводъ многосторонника ABCDE будетъ менше обвода четырехъ сторонника AEDF. Продолживъ снова стороны AE, FD, до встрѣчи ихъ въ точкѣ G, будемъ имѣть $ED < EG + GD$, откуда обводъ четырехъ сторонника AEDF менше обвода тр-ка AFG; но такъ какъ послѣдній менше окружности большаго круга, то, по бѣльшей причинѣ, обводъ многосторонника ABCDE менше окружности.

Замѣчаніе. Это предложеніе одинаково, въ сущности, съ XXII предложеніемъ книги V, потому что, принявъ о за центръ шара, можно вообразить при немъ многогранный уголъ, состав-

ленный плоскими углами AOB , BOC , COB и проч., коихъ сумма должна быть менѣ четырехъ прямыхъ угловъ, что совершенно согласно съ предыдущою теоремою.

Доказательство данное нами здѣсь различно отъ изложеннаго въ книгѣ V, но въ обоихъ предполагается, что многосторонникъ есть выпуклый, или, что ни одна изъ продолженныхъ сторонъ не перестыкается его.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

ТЕОРЕМА.

Если проведемъ диаметръ DE , перпендикулярный къ плоскости большаго круга AMB , то оконечности его D , E , будутъ полюсами большаго круга AMB и всѣхъ малыя круговъ, какъ FNG , ему параллельныхъ.

Линія DC , перпендикулярная къ AMB , будетъ перпендикулярна ко всѣмъ прямымъ CA , CM , CB и проч., находящимся въ плоскости и проведеннымъ чрезъ ея основаніе: слѣд. дуги DA , DM , DE , и пр., будутъ четвертями окружности. То же самое можно сказать объ дугахъ EA , EM , EB и пр., откуда видно, что точки D и E , равно удалены отъ всѣхъ точекъ окружности AMB , суть полюсы окружности (опред. 5).

Во вторыхъ, радіусъ DC , перпендикулярный къ плоскости AMB , перпендикуляренъ къ плоскости FNG , ей параллельной, и поэтому проходитъ чрезъ центръ O круга FNG (1). Слѣд., проводя прямыя DF , DN , DG , мы увидимъ, что онѣ равно удалены отъ перпендикуляра DO и будутъ равны между собою. Но когда хорды равны, то и дуги DF , DN , DG , и проч., ими стягиваемыя, будутъ равны между собою; и отсюда слѣдуетъ, что точка D есть полюсъ малаго круга FNG , ко-

торого другой полюсъ, по тойже причинѣ, будетъ точка *E*.

Слѣдствіе I. Всякая дуга *DM*, проведенная изъ какой нибудь точки большаго круга *AMB* къ его полюсу, равняется четверти окружности, которую можно называть для краткости *квадрантомъ*. Этимъ квадрантъ составляетъ въ тоже время прямой уголъ съ дугою *AM*; ибо линія *BC* перпендикулярна къ плоскости *AMC*, а всякая плоскость *DMC*, проходящая чрезъ линію *BC*, перпендикулярна къ плоскости *AMC* (18, VI); слѣд. уголъ вписъ плоскостей, или уголъ *AMD*, по опр. VI, есть прямой.

Слѣдствіе II. Чтобъ найти полюсъ данной дуги *AM*, проведемъ неопредѣленной длины дугу *MD* $\perp$ къ *AM*, и возьмемъ *MD* равную четверти окружности; въ слѣдствіе этого построенія, точка *D* будетъ полюсомъ дуги *MD*. Или, другимъ образомъ, проведемъ изъ точекъ *A* и *M* дуги *AD* и *MD*, перпендикулярныя къ *AM*, и тогда точка *D* ихъ встрѣчи будетъ искомый полюсъ.

Слѣдствіе III. Обратно, если точка *D* отстоитъ отъ точекъ *M* и *A* на четверть окружности, то она будетъ полюсомъ дуги *AM*, и въ то же время углы *DAM*, *AMD*, будутъ прямые.

Ибо, пусть *C* центръ шара, и *CA*, *CD*, *CM*, радиусы; такъ какъ углы *ACD*, *MCD*, суть прямые, то линія *CD* будетъ перпендикулярна къ двумъ прямымъ *CA*, *CM*, и повтому перпендикулярна къ плоскости заключающей эти прямыя. Отсюда слѣдуетъ, что точка *D* есть полюсъ дуги *AM*, и углы *DAM*, *AMD*, суть прямые.

Замѣчаніе. Свойства полюсовъ доставляютъ возможность чертить на сферическихъ поверхностяхъ дуги круговъ столь же легко какъ и на плоскихъ поверхностяхъ. Очевидно, на пр., что при обращеніи дуги *DE*, или другой какой нибудь линіи равнаго отворстія, около точки *D*, окончат-

ность F опишетъ малый кругъ FNG , и если будемъ обращаться четверть окружности DFA около точки D , то оконечность A опишетъ дугу большаго круга AM . Въ томъ случаѣ, когда нужно продолжитъ дугу AM , или когда даны только двѣ точки A и M , чрезъ которыя проходитъ дуга, должно опредѣлить сначала полюсъ D пересѣченіемъ двухъ дугъ, описанныхъ изъ точекъ A и M , какъ центровъ, описаніемъ четверти окружности. Опредѣливъ полюсъ D , опишемъ изъ него какъ центра и тѣмъ же описаніемъ дугу AM и ея продолженіе.

Наконецъ, если должно изъ точки P провести дугу перпендикулярную къ данной дугѣ AM , то продолжитъ послѣднюю до точки S , такъ, чтобы разстояніе PS равнялось четверти окружности. опишемъ полюсъ изъ точки S , тѣмъ же описаніемъ, дугу MP , которая будетъ искоюмою дугою.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

ТЕОРЕМА.

Всякая плоскость перпендикулярная къ концу радіуса касательна къ шару.

Пусть плоскость FAG будетъ перпендикулярна къ концу радіуса OA . Если возьмемъ какую нибудь точку M на плоскости и проведемъ линіи OM , AM , то уг. OAM будетъ прямой, и такимъ образомъ разстояніе OM будетъ больше OA . Отсюда видно, что точка M находится внѣ шара, и такъ какъ тоже самое можно сказать о всякой другой точкѣ плоскости FAG , то ясно, что плоскость будетъ имѣть только одну точку A общую съ шаромъ, и слѣд. будетъ касательна къ его поверхности (опред. 4).

Замѣчаніе. Можно также доказать, что два шара имѣютъ только одну точку общую, и слѣд.

касаются между собою, когда разстояніе центровъ ихъ равно суммѣ или разности радіусовъ. Въ одномъ случаѣ центры шаровъ и точка касанія будутъ находиться на одной прямой линіи.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

ТЕОРЕМА.

Уголъ BAC , составленный двумя дугами большаго круга AB , AC , равенъ углу FAG , составленному двумя касательными къ дугамъ въ точкѣ A , и имѣть мѣру дугу DE , описанную изъ точки A , какъ полюса, и заключающуюся между продолженными, если нужно, сторонами AB , AC .

Касательная AF , проведенная въ плоскости дуги AB , перпендикулярна къ радіусу AO ; касательная AG , проведенная въ плоскости дуги AC , перпендикулярна къ радіусу AO . Отсюда слѣдуетъ, что FAG есть уголъ плоскостей OAB , OAC (17, V), или уголъ дугъ AB , AC , который называется чрезъ BAC .

Подобнымъ образомъ, если дуга AD равна квадрату, также какъ и AE , то линіи OD , OE , будутъ перпендикулярны къ AO , и уголъ DOE будетъ равенъ углу плоскостей AOD , AOE , откуда слѣдуетъ, что дуга DE есть мѣра угла этихъ плоскостей, или мѣра угла CAB .

Слѣдствіе. Углы сферическихъ треугольниковъ могутъ быть сравниваемы между собою посредствомъ дугъ большаго круга, описанныхъ изъ вершинъ ихъ, какъ полюсовъ, и заключающихся между ихъ сторонами. Отсюда видно, что весьма легко построить уголъ равный данному.

Замѣчаніе. Углы противоположные вершина

ни, на пр. $\angle ACO$, $\angle BCN$, равны, потому что оба составлены из плоскостей ACB , CCN .

Очевидно также, что при встрече двух дуг ACB , OCN , два принадлежащие угла $\angle ACO$, $\angle OCB$, всегда равны двум прямым углам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ IX.

ТЕОРЕМА.

Если в данном тр. ACB , из точек A , B , C , 4 227
как полюсов, опишем дуги EF , FD , DE ,
составляющие тр. DEF , то обратно, точки
 D , E , F , будут полюсами дуг BC , AC , AB .

Такъ какъ точка A есть полюсъ дуги EF , то
расстояніе AE будетъ квадрантъ, равно какъ и
расстояніе CE . ибо точка C есть полюсъ дуги
 DE , откуда видно, что точка E находящаяся на
расстояніи квадранта отъ точекъ A и C , и слѣд.
она есть полюсъ дуги AC (6, слѣд. 3). Такимъ
же образомъ докажется, что точка D есть по-
люсъ дуги AC , а точка F полюсъ дуги AB .

Слѣдствіе. Изъ доказаннаго слѣдуетъ, что
тр. ABC можетъ быть построенъ посредствомъ
тр. DEF , такъ же какъ и DEF посредствомъ ABC .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ X.

ТЕОРЕМА.

При положеніяхъ предыдущей теоремы, ка-
дый изъ угловъ тр-ва ABC , DEF , будетъ имѣть
мѣрою полуокружность безъ стороны противо- 4 228
положной ему въ другомъ треугольнике.

Пусть стороны AB , AC , будутъ продолжены,
если нужно, до встречи съ EF , въ точкахъ G и H ;
такъ какъ точка A есть полюсъ дуги GH , то
уг. A будетъ мѣряться этою дугою. Но дуга

ЕН равна четверти круга, также какъ и GF, ибо Е есть полюсъ дуги АН, а F полюсъ дуги АС, слѣд. $ЕН + GF$ составляютъ полуокружность. Но такъ какъ $ЕН + GF = EF + GN$, то дуга GN, взмѣряющая уголъ А, равна полуокружности безъ стороны EF. Подобнымъ образомъ уг. В будетъ взмѣряться $\frac{1}{2}$ окруж. DF, а уг. С $\frac{1}{2}$ окруж. DE.

Оба триугольника должны взаимно пользоваться этимъ свойствомъ, ибо каждый изъ нихъ строится посредствомъ другаго и одинаковымъ образомъ. Въ слѣдствіе этого найдемся, что углы D, E, F, тр. DEE, имѣютъ относительно мѣрами $\frac{1}{2}$ окруж. BC, $\frac{1}{2}$ окр. AC, $\frac{1}{2}$ окр. AB. Въ самомъ дѣлѣ, уг. D, на примѣръ, взмѣрится дугою MI, но $MC + BC = MC + BI = \frac{1}{2}$ окр.; слѣд. дуга MI, или мѣра угла D, $= \frac{1}{2}$ окр. BC, и такъ дѣлѣ.

Замѣчаніе. Должно замѣтить, что кромѣ тр. DEF, можно бы было рассмотреть еще три другіе, чрезъ пересѣченіе трехъ дугъ DE, EF, DF. Но это предположеніе будетъ имѣть мѣсто только въ центральномъ триугольникѣ, который отличается отъ прочихъ тѣмъ, что два угла его А и D расположены по одну сторону дуги BC, углы В и Е по одну сторону AC, а углы С и F по одну сторону AB.

Триугольникамъ ABC, DEF, даютъ различныя названія; мы будемъ называть ихъ *полярными триугольниками*.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Л Е М М А.

Если въ данномъ триугольникѣ ABC, изъ полюсовъ А и В, отвѣрстіями AC, AC, опишемъ дуги DEC, DFC, и изъ точки D, ихъ пересѣченія, проведемъ дуги большихъ круговъ AD, DB, то построенный такимъ образомъ тр. ADB бу-

дети имѣть части равныя частямъ тр. ABC .

Такъ какъ, по построению, стороны $AD = AC$, $DB = BC$, и AB есть общая, то въ предположенныхъ тр-хъ соответственные стороны равны. Докажемъ теперь равенство угловъ противоположныхъ равнымъ сторонамъ.

Предполагая, что центръ шара находится въ точкѣ O , легко можно представить себѣ такую точку многогранный уголъ, составленный тремя плоскими углами AOB , AOC , BOC , и также другой, составленный тремя плоскими углами AOB , AOD , BOB .

Такъ какъ стороны тр. ABC равны сторонамъ тр. ADB , то отсюда слѣдуетъ, что плоскіе углы, составляющіе одинъ изъ многогранныхъ угловъ, равны соответственнымъ плоскимъ угламъ другого многограннаго угла. Но уже было доказано (23, V), что, въ подобномъ случаѣ, плоскости заключающія равные углы равнонаклонны между собою; слѣд. углы сферическаго тр. DAB равны угламъ тр. ABC , какъ то: $DAB = BAC$, $DBA = ABC$ и $ADB = ACB$. Отсюда углы и стороны тр. ADB равны угламъ и сторонамъ тр. ACB .

Замѣчаніе. Должно замѣтить, что равенство этихъ треугольниковъ не есть равенство по совмѣщенію, потому что возможно наложить точнымъ образомъ одинъ изъ нихъ на другой только тогда, когда они суть равнобедренные. Равенство разсматриваемое нами есть не самое, которое мы называли *симметрическимъ*, и въ слѣдствіе этого мы будемъ называть тр-ки ACB , ADB , *симметрическими*.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

ТЕОРЕМА.

Детъ треугольника находящиеся на одной

шаръ, или на равныхъ шарахъ, равны во всѣхъ частяхъ своихъ, когда имѣютъ по равному углу заключающемуся между равными соответственными сторонами.

Ф. 230. Пусть сторона $AB = EF$, сторона $AC = EG$, и уг. $BAC = FE\dot{G}$. Тр. EFG можетъ быть положенъ на тр. ABC , или на симметрической ему ABD , точно такимъ же образомъ, какъ накладываются прямоугольные тр-ки, которые имѣютъ по равному углу заключающемуся между равными сторонами. Въ слѣдствіе этого, всѣ части тр. EFG равны частямъ тр. ABC , и кромѣ трехъ частей равныхъ по предположенію, будемъ имѣть, что сторона $BC = FG$, уг. $ABC = EFG$, и уг. $ACB = EGF$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

ТЕОРЕМА.

Два треугольника находящіеся на одномъ шарѣ, или на двухъ равныхъ шарахъ, равны во всѣхъ частяхъ, когда имѣютъ по равной сторонѣ прилежащей къ равнымъ соответственнымъ угламъ.

Ибо, одинъ изъ этихъ тр-въ можетъ быть положенъ на другой, или на симметрической ему, точно такимъ образомъ какъ это дѣлается, въ подобномъ же случаѣ, съ прямоугольными треугольниками (7, I).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

ТЕОРЕМА.

Если два треугольника находящіеся на одномъ шарѣ, или на равныхъ шарахъ, имѣютъ равныя стороны, то углы ихъ будутъ также равны и противоположны равнымъ сторонамъ.

Это слѣдуетъ очевидно изъ теоремы XI, гдѣ показано, что по трѣхъ даннымъ сторонамъ, АВ, АС, ВС, можно построить только два тр-ка АСВ, АВD, различные относительно положенія, но равные по величинѣ своихъ частей. И такъ, два равносноровные тр-ка или совершенно равны между собою, или, по крайней мѣрѣ, равны эмпирически. Какъ въ первомъ, такъ и во второмъ случаѣ они равноугольны и равные углы противоположны равнымъ сторонамъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

ТЕОРЕМА.

Во всякомъ равнобедренномъ сферическомъ треугольникѣ, углы противоположные равнымъ сторонамъ равны, и обратно, если въ сферическомъ треугольникѣ два угла равны, то треугольникъ будетъ равнобедренный.

1-е. Если сторона $AB = AC$, то уг. $C = B$; ибо, по проведеніи дуги AD, изъ вершины A, къ точкѣ D, срединѣ основанія, два тр-ка ABD, ADC, будутъ имѣть равныя соотвѣтственные стороны, какъ то: общую AD, $BD = DC$, $AB = AC$. и слѣд. (13) равные углы, откуда $B = C$. ф. 261.

2-е Полагая $B = C$, будемъ имѣть $AC = AB$. ибо, если АВ не равна АС, то приложъ ея за большую изъ двухъ, возьмемъ $BO = AC$. и проведемъ ОС. Дѣя стороны ВО, ВС, равны АС, ВС, и уг. ОВС, заключающіеся между двумя первыми, равенъ уг. АСВ, заключающему между двумя вторыми; отсюда слѣдуетъ, что два тр-ка АСВ, ВОС, имѣютъ и протія части равныя (21) и уг. $OCB = ABC$, но такъ какъ, по предположенію, уг. ABC равенъ уг. ACB , то имѣли бы $OCB = ACB$, что невозможно. Поэтому нельзя предполагать, чтобы АВ была отлнчна отъ АС, и слѣд. стороны АВ, АС,

противоположныя равнымъ угламъ B и C , равны.

Замѣчаніе. Изъ предыдущаго доказательства видно еще, что уг. $BAD = DAC$, и уг. $BDA = ADC$. Отсюда слѣдуетъ, что эти послѣдніе углы суть прямые, и дуга проведенная изъ вершины сферическаго равнобедреннаго треугольника къ серединѣ основанія, перпендикулярна къ основанію и раздѣляетъ пополамъ углы при вершинѣ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

ТЕОРЕМА.

ф. 332. Если въ сферическомъ треугольникѣ ABC , уголъ A больше угла B , то сторона BC , противоположная углу A , будетъ больше стороны AC , противоположной углу B , и обратно, если сторона BC больше стороны AC , то уголъ A будетъ больше угла B .

1-е. Если уг. $A > B$, то сдѣлаемъ уг. $BAD = B$, и получимъ $AD = DB$ (15). Но $AD + DC > AC$, и подставляя DB мѣсто AD , будемъ имѣть $DB + DC$, или $BC > AC$.

2-е. Если допустимъ, что $BC > AC$, то уг. BAC будетъ больше угла ABC , ибо, предполагая $BAC = ABC$, будемъ имѣть $BC = AC$, и еслибы имѣли $BAC > ABC$, то отсюда слѣдовало бы, по доказанному выше, что $BC < AC$, что противно предположенію. И такъ уг. BAC больше уг. ABC .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

ТЕОРЕМА.

ф. 333. Если дать стороны AB , AC , сферическаго тре-ка ABC , равны двумъ сторонамъ DE , DF , тре-ка DEF , находящагося на равномъ шарѣ, и въ то же время уголъ A больше угла D , то третія сторо-

на BC первого будет также больше третьей стороны EF второго.

Доказательство этого предположенія совершенно одинаково съ доказательствомъ предлож. 10, книги I.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

ТЕОРЕМА.

Если два треугольника накладываются на одномъ ширѣ, или на разныхъ шарахъ, равноугольны между собою, то стороны ихъ будутъ также равны.

Пусть A и B будутъ два данныхъ, $\triangle P$ и Q ихъ полярные треугольники. Такъ какъ въ тр-кахъ A , B , углы равны, то стороны полярныхъ тр-въ P и Q будутъ также равны (10); но изъ взаимнаго равенства сторонъ тр-въ P и Q слѣдуетъ, что они равноугольны (14), и наконецъ, по равенству угловъ тр-въ P и Q (10), стороны ихъ полярныхъ тр-въ A и B равны между собою. И такъ равноугольные тр-ки суть въ тоже время и равносторонніе.

Это же самое можетъ быть доказано, безъ помощи полярныхъ треугольниковъ, слѣдующимъ образомъ.

Пусть ABC , DEF , два равноугольные треуголь- Ф 266
ника, такъ что имѣемъ $A = D$, $B = E$, $C = F$; должно доказать, что $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$.

На продолженіи сторонъ AB , AC , возьмемъ $AG = DE$ и $AK = DF$; проведемъ GH и продолжимъ дуги BP , GH , до встрѣчи ихъ въ I и K . Стороны AG , AK , равны, по построенію, сторонамъ DE , DF ; уг. GAK составленный ими равенъ $BAC = EDF$; слѣд. (12) тр-ки AGK , DEF , равны во всѣхъ своихъ частяхъ; откуда уг. $AGK = DEF = ABC$, а уг. $AKG = DFE = ACB$. Въ тр-хъ IBG , KBG , сторона BG есть общая, уг. $IGB = GBK$, и такъ какъ

$\angle BGV + \angle BCK$ составляютъ два прѣмые угла, также какъ $\angle GBK + \angle BGV$, по видимъ отсюда, что $\angle BCK = \angle BGV$. Въ слѣдствіе этого, прѣ-ки BG, CK , равны (15), и $IG = BK$, а $IB = GK$.

Подобнымъ образомъ, изъ равенства угловъ $\angle ANG, \angle ACB$, заключимъ, что прѣ-ки IC, BK , имѣющіе по равной сторонѣ прилежащей къ равнымъ угламъ, равны, отсюда $IB = CK$, а $IK = IC$. Вычитая теперь изъ равныхъ BK, IG , равныя CK и IB , получимъ равные остатки BC, GI . Сверхъ того, уг. $\angle BCA = \angle AGI$, и $\angle ABC = \angle AGI$, и поштому прѣ-ки ABC, AIG , которые имѣютъ по равной сторонѣ прилежащей къ равнымъ угламъ, суть равны; но такъ какъ прѣ. DEF равенъ во всѣхъ своихъ частяхъ прѣ-ку AIG , то онъ будетъ также равенъ прѣ. ABC , отсюда видно, что $AB = DE, AC = DF, BC = EF$.

Замѣчаніе. Это предположеніе не имѣетъ мѣста въ прямолинейныхъ треугольникахъ, гдѣ равенство угловъ влечетъ за собою только пропорціональность сторонъ. Но весьма легко данъ отчетъ въ такомъ различіи между сферическими и прямолинейными треугольниками. Въ предыдущемъ предположеніи, также какъ и въ предлож. XII, XIII, XIV и XVII, гдѣ дѣлаются сравненія прѣ-въ, сказано, что сравниваемые прѣ-ки находятся на одномъ шарѣ или на равныхъ шарахъ. Но такъ какъ подобныя дуги пропорціональны радіусамъ, то два прѣ-ка, находящіеся на равныхъ шарахъ, не могутъ быть подобны, не бывъ равны между собою, и поштому весьма естественно, что здѣсь равенство угловъ влечетъ за собою равенство сторонъ.

Совершенно противоположное имѣло бы мѣсто, еслибы треугольники находились на неравныхъ шарахъ: тогда изъ равенства угловъ следовало бы подобіе прѣ-въ и соотвѣстственные стороны относились бы между собою какъ радіусы шаровъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

ГЕОРЕМА.

Сумма угловъ сферическаго треугольника меньше шести прямыхъ и болѣе двухъ прямыхъ угловъ.

Такъ какъ, во первыхъ, каждый уголъ сферическаго тр-ка меньше двухъ прямыхъ угловъ (см. замѣчаніе слѣдующее ниже,) то сумма трехъ угловъ будетъ меньше шести прямыхъ угловъ.

Во вторыхъ, мѣра каждаго угла сферическаго тр-ка равна полуокружности безъ соизмѣстившей стороны полярнаго тр-ка (10); слѣд. сумма трехъ угловъ будетъ измѣряться тремя полуокружностями безъ суммы сторонъ полярнаго тр-ка. Но такъ какъ она послѣдняя сумма меньше окружности (4), то вычитая ее изъ трехъ полуокружностей, получимъ остатокъ болѣе полуокружности, которая есть мѣра двухъ прямыхъ угловъ, и поэтому 2-е, сумма угловъ сферическаго треугольника болѣе двухъ прямыхъ угловъ.

Слѣдствіе. I. Сумма угловъ сферическаго тр-ка не остается постоянною, какъ въ прямолинейныхъ тр-хъ, но измѣняется и переходитъ отъ двухъ до шести прямыхъ угловъ, не будучи никогда равна которому нибудь изъ этихъ предѣловъ. Отсюда слѣдуетъ, что два угла сферическаго тр-ка не определяютъ третій уголъ.

Слѣдствіе. II. Сферическій треугольникъ можетъ имѣть два или три прямые, также какъ два или три тупые угла.

Если тр. ABC имѣетъ два прямыхъ угла C и B, то вершина A будетъ полюсомъ основанія BC (6), и каждая изъ сторонъ AB, AC, будетъ равна четверти окружности.

Если, кромѣ того, уголъ A также прямой, то при трехъ прямыхъ углахъ, каждая изъ сторонъ тр. ABC

будетъ равна четверти окружности. Триугольникъ пятиюшій всѣ углы прямые содержащій восемь разъ въ поверхности шара, что можно видѣть на фиг. 236, предполагая дугу MN равною четверти окружности.

Замѣчаніе. Во всемъ предыдущемъ допускалось, согласно съ опредѣленіемъ VI, что стороны сферическихъ тр-въ менѣе полуокружности, и отсюда слѣдуетъ, что углы ихъ всегда менѣе двухъ прямыхъ угловъ $\text{по} \text{б} \text{о}$, предполагая сторону AB меншею полуокружности, также какъ и AB , должно бѣ было продолжитъ ихъ, дабы онѣ встрѣтились въ точкѣ D . Но какъ два угла ABC , CBD , взятые вмѣстѣ, равны двумъ прямымъ, то, въ слѣдствіе этого, одинъ уголъ ABC менѣе двухъ прямыхъ.

Мы замѣтимъ однако, что существуютъ сферическіе триугольники, гдѣ нѣкоторыя изъ сторонъ болѣе полуокружности, и нѣкоторыя изъ угловъ болѣе двухъ прямыхъ; $\text{л} \text{б} \text{o}$, продолживъ AC до полной окр. ACE , и вычитая тр. ABC изъ полушара, получимъ новый сферическій тр-къ, который можно означить чрезъ ABC , и коего стороны будутъ AB , BC , $AEDC$. Отсюда видно, что сторона $AEDC$ болѣе полуокр. AED , но въ тоже время уг. B , ей противоположный, превосходитъ два прямые угла количествомъ CB .

Впрочемъ, если мы и исключимъ изъ опредѣленія нѣ триугольники, коихъ стороны и углы такъ велики, то это сдѣлано именно потому, что ихъ разрѣшеніе, или опредѣленіе ихъ часней, всегда приводится къ тр-мъ, помѣщеннымъ въ опредѣленіи. Въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что по извѣстнымъ сторонамъ и угламъ тр. ABC , будемъ знать непосредственно углы и стороны тр-ка того же названія, который составляетъ остатокъ полушара.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XX.

ТЕОРЕМА.

Двусторонникъ $AMBNA$ относится къ поверхности шара, такъ какъ уголъ MAN двусторонника къ четыремъ прямымъ угламъ, или, какъ дуга MA , измѣряющая этотъ уголъ, къ окружности.

Предположимъ сначала, что дуга MN и полуокр. $MNPQ$ находились въ неизмѣримомъ отношеніи чиселъ 5 и 48. Раздѣливъ окр. $MNPQ$ на 48 равныхъ частей, изъ концы MN будемъ заключать въ себя 5, и соединяя попомъ полюсъ A съ точками дѣленія такимъ же числомъ квадратовъ, будемъ имѣть, въ полушарѣ $AMNPQ$, 48 прямоугольниковъ равныхъ между собою, попому что все части ихъ равны. Цѣлый шаръ будемъ заключать 96, а двусторонникъ $AMBNA$ 10 такихъ пр-въ, откуда слѣдуетъ, что двусторонникъ относится къ поверхности шара какъ 10 къ 96, или какъ 5 къ 48; но есть, какъ дуга MN къ окружности.

Если дуга MN не неизмѣрима съ окружностію, то можно доказать разсужденіями подобными имѣмъ, конорыя встрѣчались намъ нѣсколько разъ прежде, что всегда двусторонникъ относится къ шару, какъ дуга MN къ окружности.

Слѣствие I. Два двусторонника относятся между собою какъ ихъ соотвѣтственные углы.

Слѣствие II. Мы уже видали, что поверхность шара равна 8 прямоугольнымъ пр-мъ (19), и попому, принявъ поверхность одного изъ пр-въ за единицу, можнобы было выразить поверхность шара числомъ 8. Допустивъ это, поверхность двусторонника, коего уголъ равенъ A , изобразился $2A$ (если только уголъ A будемъ выраженъ въ частяхъ прямого угла принятаго за единицу), ибо имѣемъ $2A : 8 = A : 4$. Здѣсь имѣемъ двѣ различ-

ныя единицы, одну для угловъ, или прямой уголъ; а другую для поверхностей, или сферическій градусъ, въ которомъ всѣ углы прямые и каждая изъ сторонъ равна четверти окружности. Мы будемъ называть его *три прямоугольнымъ* (tri-rectangle), или просто *прямоугольнымъ*.

Замѣчаніе. Сферическій клинъ заключающійся между плоскостями ABM , ANB , относится къ объему цѣлаго шара, какъ уголъ A къ четыремъ прямымъ угламъ. Такъ какъ изъ равенства двусторонниковъ слѣдуетъ равенство двугранныхъ угловъ, то сферическіе клинья относятся между собою какъ углы образуемые плоскостями ихъ заключающими.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

ТЕОРЕМА.

4. 317. *Два симметрическіе сферическіе треугольника имѣютъ равныя поверхности.*

Пусть ABC , DEF , будутъ два симметрическіе, или такіе тр-ка, которые имѣютъ равныя стороны $AB = DE$, $AC = DF$, $CB = EF$, и при томъ не могутъ быть совмѣщены; должно доказать равенство ихъ поверхностей.

Пусть P будетъ полюсъ малаго круга проходящаго чрезъ точки A , B , C (*); проведемъ изъ этой точки равныя дуги (6) PA , PB , PC , при точкѣ F построимъ $DFQ = ACP$, слѣздемъ дугу $FQ = CP$, и проведемъ DQ , EQ .

Стороны DF , FQ , равны сторонамъ AC , CP , и уг. $DFQ = ACP$; тр-ки DFQ , ACP , равны во всѣхъ своихъ частяхъ (12), и потому сторона $DQ = AP$, а уг. $DQE = APC$.

(*) Кругъ проходящій чрезъ три точки A , B , C , или описанный около тр. ABC , можетъ быть только однимъ кругомъ шара; ибо, въ противномъ случаѣ, сторонамъ AB , BC , AC , находящимся бы въ одной плоскости и треугольникъ обратился бы въ одну изъ своихъ сторонъ.

Въ предложенныхъ тр-хъ DEF , ABC , углы DFE , ACB , равны, какъ противоположные равнымъ сторонамъ DE , AB (11). Если изъ этихъ равныхъ угловъ вычтемъ углы DFQ , ACP , равные по построению, то остатки QFE , PCB , будутъ также равны. Сверхъ того стороны QF , FE , равны сторонамъ PC , CB , и следовательно тр-ки QFE , CPB , равны во всѣхъ своихъ частяхъ, откуда сторона $QE = PB$, а уг. $FOE = CPB$.

Если мы обратимъ теперь вниманіе на то, что тр-ки DFQ , ACP , имѣя стороны равныя, суть въ тоже время равнобедренныя, то увидимъ, что они могутъ быть совмѣщены; ибо, по положеніи AP на равную ей QF , сторона PC упадетъ на равную ей QD , и тр-ки совмѣстятся; слѣд. они равны и поверхности $DQF = APC$. По той же причинѣ, поверх. $FOE = CPB$, а поверх. $DOE = APB$; слѣд. $DQF + FOE + DOE = APC + CPB + APB$, или $DFE = ABC$; то есть, поверхности двухъ симметрическихъ тр-въ ABC , DEF , равны между собою.

Замѣчаніе. Такъ какъ полюсы P и Q могутъ находиться внутрѣ тр-въ ABC , DEF , то въ этомъ случаѣ должно брать сумму тр-въ DQF , FQE , DOE , дабы получить тр. DEF , и равнымъ образомъ сумму тр-въ APC , CPB , APB , для тр. ABC ; впрочемъ доказательство и заключеніе остаются безъ всякой перемѣны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

ТЕОРЕМА.

Если два большіе круги AOB , COD , пересѣкутся какъ нибудь на полушарѣ $AOCBD$, то суммы противоположныхъ тр-въ AOC , BOD , будутъ равны двустороннику, коего угломъ есть BOC .

Ибо, по продолженіи дугъ BO , OD , въ другое полушаріе, до встрѣчи ихъ въ точкѣ N , OVN бу-

дети полукружностей, равно какъ и $\angle AOB$, и выпуклая съ обѣихъ сторонъ OB , получимъ $BN = AO$. По такой же причинѣ $DN = CO$ и $BD = AC$; слѣд. тр-ки AOC , BDN , имѣютъ равныя стороны, и такъ какъ, сверхъ того, они расположены симметрически, одинъ въ отношеніи другого, то поверхности ихъ равны (21), а сумма тр. AOC , BOB , равносѣрна съ двусторонникомъ $OBND$, коего уголъ есть BOB .

Замѣчаніе. Весьма легко также, что сумма двухъ сферическихкихъ пирамидъ, имѣющихъ основаніями тр-ки AOC , BOB , равносѣрна съ сферическимъ клиномъ, коего уголъ есть BOB .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

ТЕОРЕМА.

Поверхность всякаго сферическаго триугольника измѣряется избыткомъ суммы всѣхъ трехъ его угловъ предъ двумя прямыми углами.

Пусть ABC будетъ предложенный тр-къ; продолжимъ стороны его до встрѣчи съ большимъ кругомъ $DEFG$, проведеннымъ произвольно въ тр-ка.

Въ слѣдствіе предыдущей теоремы, два тр-ка ADE , AGH , взятые вмѣстѣ, равносѣрны двустороннику, котораго уголъ есть A , а мѣра $2A$ (20). Такимъ образомъ будемъ имѣть $ADE + AGH = 2A$, и, по той же причинѣ, $BGF + BID = 2B$, $CIH + CFE = 2C$. Но сумма этихъ шести тр-въ превышаетъ полушаріе дважды взятымъ тр. ABC , и такъ какъ полушаръ выражается 4, то удвоенный тр. ABC равенъ $2A + 2B + 2C - 4$, а отсюда $ABC = A + C + B - 2$; то есть, всякій сферическій триугольникъ измѣряется избыткомъ суммы трехъ его угловъ предъ двумя прямыми углами.

Слѣдствіе I. Сколько въ найденной мѣрѣ будутъ прямыхъ угловъ, столько предложенный шръ къ будетъ заключать въ себѣ *прямоугольных* шръ-тъ, или осей шарика, принятыхъ за единицу поверхности (20). На шр., если каждый изъ угловъ равенъ $\frac{1}{2}$ прямого угла, то сумма шрехъ угловъ будетъ равна 4 прямымъ и предложенный шръ-тъ выразится чрезъ $4 - 2$ или 2, и сѣд. будетъ равенъ двумъ *прямоугольным* шръ-тамъ, или четверти поверхности шара.

Слѣдствіе II. Сферическій шръ ABC равношренъ двустороннику, котораго уголъ есть $\frac{A+B+C}{2} - 1$, и точно также сферическая пирамида, пмѣющая основаніемъ триугольникъ ABC, равношрена сферическому клину, котораго уголъ есть $\frac{A+B+C}{2} - 1$.

Замѣчаніе. Сравнивая сферическій шръ ABC съ *прямоугольнымъ*, можно въ тоже время сравнивать сферическую пирамиду, пмѣющую основаніемъ шръ ABC, съ пирамидою о трехъ прямыхъ углахъ, и вывести тоже отношеніе.

Многогранный уголъ при вершинѣ пирамиды можетъ сравниваться подобнымъ образомъ съ многограннымъ угломъ при вершинѣ три-прямоугольной пирамиды, и дѣйствительно, сравненіе производится чрезъ соизмѣщеніе частей. Но если основанія пирамидъ соизмѣщаются, то ясно, что и самыя пирамиды, равно какъ и ихъ многогранные углы при вершинѣ, соизмѣстятся. Отсюда выводятся многія сѣдствія.

1. Двѣ триугольныя сферическія пирамиды относятся между собою какъ ихъ основанія, и такъ какъ многоугольная пирамида можетъ раздѣляться на нѣсколько триугольныхъ, то отсюда слѣдуетъ, что двѣ какіа либо сферическія пирамиды относятся между собою, какъ многоугольные служащіе пмѣ основаніями.

2. Многогранные углы при вершинѣ ихъ де пирамидъ находящіяся равнымъ образомъ въ отношеніи ихъ основаній, и сѣд., для сравненія двухъ какихъ нибудь многогранныхъ угловъ, надлежитъ расположить ихъ вершины въ центрахъ двухъ равныхъ шаровъ, и тогда многогранные углы будутъ относиться между собою, какъ сферическіе многоугольники заключающіеся между ихъ плоскостями или гранями.

Уголъ при вершинѣ триугольной пирамиды, составленный изъ трехъ плоскостей взаимно перпендикулярныхъ, и называемый *прямымъ многограннымъ угломъ*, можетъ служить мѣрою удобно единицею мѣры для другихъ многогранныхъ угловъ. При этомъ положеніи, то же число, которое даетъ площадь сферическаго многоугольника, дастъ мѣру соответствующаго многограннаго угла. На пр., если площадь сферическаго многоугольника равна $\frac{1}{2}$, то есть составляетъ $\frac{1}{2}$ триугольника съ тремя прямыми углами, то соответственный многогранный уголъ будетъ также составлять $\frac{1}{2}$ прямого угла.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV.

ТЕОРЕМА.

Поверхность сферическаго многосторонника имѣетъ мѣрою разность между суммою его угловъ и произведеніемъ двухъ прямыхъ угловъ на число сторонъ многосторонника безъ двухъ.

Проводя изъ точки А, ко всѣмъ другимъ вершинамъ, діагонали АС, АД, мы раздѣлимъ многоуг.
 • 340. АВСДЕ на столько тр-хъ, сколько въ многоуголь-
 никѣ сторонъ безъ двухъ. Но поверхность каждаго тр-ка имѣетъ мѣрою сумму своихъ угловъ безъ двухъ прямыхъ угловъ, и такъ какъ ясно, что сум-
 ма всѣхъ угловъ въ тр-хъ равна суммѣ угловъ мис-

гоугла, но отсюда следует, что поверхность многоугла равна сумме его угловъ уменьшенной двумя прямыми углами взятыми столько разъ сколько въ многоуглѣ сторонъ безъ двухъ.

Замѣчаніе. Если z сумма угловъ сферическаго многоугла и n число его сторонъ, то принимая прямой уголъ за единицу, поверхность многоугла будетъ имѣть мѣроу $z - 2 (n - 2)$, или $z - 2n + 4$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

ТЕОРЕМА.

Пусть S число угловъ многогранника, n число граней, l число его реберъ; при этомъ положениіи всегда будетъ имѣть $l + n = S + 2$.

Возьмемъ внутри многогранника точку и проведемъ изъ нея прямыя линіи къ вершинамъ всѣхъ его угловъ; наоборотъ покажемъ, что изъ этой же точки, какъ центры, описана сферическая поверхность, которая встрѣтится со всѣми проведенными прежде линіями въ точкахъ де числа шестехъ; соединивъ эти точки дугами большаго круга, и составивъ такимъ образомъ на поверхности шара многоугольники соотвѣствующіе и одного числа съ гранями многогранника.

Пусть $ABCDE$ одинъ изъ этихъ многоугловъ, и n число его сторонъ, поверхность его будетъ $z - 2n + 4$, гдѣ z есть сумма угловъ A, B, C, D, E . ● 240.

Выразимъ подобнымъ образомъ поверхность каждаго изъ остальныхъ сферическихъ многоугловъ, и соединивъ изъ всѣхъ между собою, заключимъ, что изъ суммы, или поверхность шара, выразимая S , равна суммѣ угловъ въ многоуглѣ, безъ удвоеннаго числа сторонъ, съ 4 единицами, взятыми столько разъ, сколько есть граней. Но какъ всѣ углы сходящіеся въ одной точкѣ равны четверти прямыхъ угловъ, то сумма всѣхъ угловъ въ многоуглѣ равна 4 единицамъ, взятымъ столько разъ сколько есть многогранныхъ угловъ, слѣд. равна $4S$. Наконецъ, двойное число сторонъ AB, BC, CD , и проч., равно четыремъ разамъ вѣщному числу реберъ, или $4A$; ибо одно изъ этихъ реберъ принадлежитъ въ двумъ гранямъ; отсюда получимъ $S = 4S - 4A + 4n$; или, взявъ четверть каждаго члена, $S = S - A + n$; отсюда $S + n = A + 2$.

Слѣдствіе. Отсюда слѣдуетъ, что сумма плоскихъ угловъ составляющихъ углы многогранника равна четыремъ прямымъ угламъ, столько разъ сколько заключено единицъ въ $S - 2$, гдѣ S представляетъ число угловъ многогранника. Если развѣснривая грань, число сторонъ которой есть n , увидимъ, что сумма угловъ этой грани будетъ равна $2n - 4$ прямымъ угламъ (26, 1). Но сумма всѣхъ $2n$, или удвоенное число сторонъ всѣхъ гра-

чем $\equiv 4A$, и 4 азимутных столько раз столько граней, т. е. $\equiv 4H$, слѣд. сумма угловъ всѣхъ граней $\equiv 4A - 4H$. Но такъ вышеозначенной теоремъ, имѣемъ $A - H \equiv S - 2$, и поэтому $4A - 4H \equiv 4(S - 2)$, откуда сумма плоскихъ угловъ и прит.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVI.

ТЕОРЕМА.

Ф. 272. Пусть есть сферическій треугольникъ, составленный по двумъ даннымъ сторонамъ CB , CA , и третьей дугею произвольно, наибольшій есть тотъ, въ которомъ углы C , заключенный между двумя данными сторонами, равенъ сумме двухъ другихъ угловъ A и B .

Продолживъ двѣ стороны AC , AB , до встрѣчи ихъ въ D , получимъ сферическій шр. BCD , въ которомъ уг. BDC будетъ шже равенъ суммѣ двухъ прочихъ угловъ BDC , BCD , ибо, въ слѣдствіе того, что $BCD + BCA$, равно какъ и $CBD + CBA$, составляють двѣ прямыхъ угла $BCD + BCA \equiv CBA + CBD$; и приравнявъ съ томъ и другой стороны $BDC \equiv BAC$, получимъ $BCD + BCA + BCD \equiv CBA + CBD + BAC$. Но, по предположенію, $BCA \equiv CBA + BAC$, слѣд. $CBD \equiv BCD + BDC$. Проведемъ теперь BE , которая бы составила уг. $CBE \equiv BCD$, и, въ слѣдствіе этого, $EBD \equiv BDC$, получимъ двѣ равнобедренныя шра BEC , EDB , и будемъ имѣть $EC \equiv EB \equiv ED$. И такъ, точка E , середина BC , находится въ равномъ разстояніи отъ трехъ точекъ B , C , D ; по тойже причинѣ O , середина AB , будетъ равно удалена отъ трехъ точекъ A , B , C .

Ф. 273. Пусть теперь $CA' \equiv CA$, и уг. $BCA' > BCA$; если проведемъ AB , и продолжимъ дуги $A'C$, $A'B$, до ихъ пересѣченія въ D' , то дуга $D'CA'$ будетъ равна полуокружности, такъ какъ и DCA , и слѣд. по равенству $CA' \equiv CA$, будетъ имѣть шже $CD' \equiv CD$. Но въ шр. CID' имѣемъ $CI + ID' > CD'$; слѣд. $ID' > CD - CI$, или $ID' > ID$.

Въ равнобедренномъ шр. CIB , раздѣлимъ уголъ I , при вершинѣ, на двѣ части дугою EIF , которая будетъ перпендикулярна къ средней BC . Если возьмемъ точку L между I и E , то разстояніе BL , равное LC , будетъ меньше BI ; ибо можно доказать (Ф. 1), что имѣемъ $BL + LE < BI + IC$; слѣд. взявъ половину съ томъ и другой стороны, получимъ $BL < BI$. Но въ шр. $D'LC$ имѣемъ $D'L > DC - CL$, и, по большей причинѣ, $D'L > DC - CI$, или $D'L > DI$, слѣд. $D'L > BI$, и наконецъ $D'L > BI$. Итакъ, если будемъ искать на дугѣ EIF точку равно удаленную отъ трехъ точекъ B , C , D' , то она не можетъ находиться шже въ продолженіи EI къ F . Пусть F' искома точка, такъ что имѣемъ $D'I' \equiv E'I' \equiv C'I'$, изъ равнобедренныхъ шр въ $F'CB$, $F'CD'$, $F'BD'$, получимъ равные углы $F'EC \equiv F'CE$, $F'BD \equiv F'D'B$, $F'CD' \equiv F'D'C$. Но углы $D'BC + CBA'$ равны двумъ прямымъ угламъ, такъ какъ и $D'CB + BCA'$, слѣд.

$$\begin{aligned} D'BI' + F'BC + CBA' &\equiv 2, \\ BCI' + F'CD' + BCA' &\equiv 2. \end{aligned}$$

Соединив эти точки, и приняв за соображение, что $\angle B'BC = \angle BCI$ и $\angle B'BI' = \angle CBI' = \angle BBI' = \angle BIC = \angle B'BI' = \angle CBI'$, получим

$$2\angle BIC + \angle CAB + \angle CBA' + \angle BCA' = 4.$$

След. $\angle CAB + \angle CBA' + \angle BCA' = 4$ (четыре площади шр. $\angle ABC = 2 - 2\angle BIC$, так как эти четыре площади $\angle ABC = 2 - 2 \angle BIC$; подобный образчик, в шр. $\angle ABC$, некий бы площадь $\angle ABC = 2 - 2 \angle BIC$. Но так как доказано уже, что угол $\angle B'BC$ больше $\angle BIC$, следовательно площадь $\angle B'BC$ больше $\angle BIC$.

Тот же доказательством и заключение некий бы некто, следов. Φ 174. принимая всегда дугу $CA' = CA$, сделали бы уг. $\angle BCA' < \angle BCA$, откуда следует, что шр. $\angle ABC$ есть наибольший из всех построенных по дугам данных и по третьему произвольно взятой стороне.

Замечание 1. Шр. $\angle ABC$, наибольший из всех построенных по трем данным сторонам CA , CB , может бысть вписан в полуокруж., кою диаметр есть хорда третьим сторонам AB . Так как мы видели, что радиусы OC , OB , равны, то окружность малого круга, описанного из точки O , аказ былась, охватывала бы OB , прошедши чрез три точки A , B , C . Кроме того, приняв дугу BA есть диаметр малого круга, кою диаметр, кою радиус должен выходить вкруг в плоскости малого круга и в плоскости дуги большого круга BOA (пред. 1, след. 4), будет выходить на пересечении двух плоскостей, т. е. на прямом BA , и по этому BA будет диаметр.

Замеч. II. В шр. $\angle ABC$, угол C равен сумме двух углов A и B , откуда следует, что сумма трех углов вдвое больше угла C . Но эта сумма всегда больше двух прямых углов (10) следовательно, уг. C больше прямого угла.

Замеч. III. Если продолжим стороны CB , CA , до встречи их в E , то шр. BAE будет равен четверти поверхности шара. Ибо, уг. $E = C = \angle ABC + \angle CAB$, след. три угла шр. BAE равны четверти $\angle ABC$, $\angle ABE$, $\angle CAB$, $\angle BAE$, коих сумма составляет четыре прямых угла; след. поверхность шр. BAE (21) $= 4 - 2 = 2$, что составляет четверть поверхности шара.

Замеч. IV. Построение наибольшего прямоугольника не можно бы некий некто, если бы сумма двух данных сторон CA , CB , равнялась, или была больше полуокружности большого круга. Ибо, тогда шр. $\angle ABC$ должен быль вписан в шаровую полуокруж., по сумме двух сторон CA , CB , будет некто полуокр. BOA (3), и в следствие этого, некто полуокружности большого круга.

Притом, по построению существовать невозможно триа, когда сумма двух данных сторон больше полуокружности большого круга, состояща в том, что шр. $\angle ABC$ увеличивается по шр. $\angle ABC$, углы заключаются между данными сторонами, и когда этот угол становится равен двум прямым углам, то три стороны, находясь в одной плоскости, составляют некую окружность, и следовательно шр. $\angle ABC$ обратится в полуокруж.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XXVII.

ТЕОРЕМА.

Изъ всѣхъ сферическихъ треугольниковъ составленныхъ по данной сторонѣ и данному периметру, наибольшій есть тотъ, въ котораго всѣ неизмѣняемые стороны равны.

Пусть АВ сторона данная и общая двумъ тр-мъ АСВ, АDB, и ф. 242. $AC + CB = AD + DB$; должно доказать, что равнобедренны тр. АСВ, въ которыхъ $AC = CB$, болѣе неравнобедреннаго тр. АDB. Такъ какъ эти тр-я имѣютъ общую часть АОВ, то достаточно показать, что тр. BOD не больше AOC. Уг. CBA, равный CAB, болѣе OAB, такъ какъ стороны АО болѣе OB (21), и если возмемъ $OI = OB$, сдѣлаемъ $OK = OD$, и соединимъ KI, то тр. OKI будетъ равенъ DOB (21). Еслибъ утверждали теперь, что тр. DOB, или равный ему KOI, будетъ не больше OCA, то должно, чтобы онъ равнялся ему, или превосходилъ его величиною; и такъ какъ точка I находится между точками A и O, то въ томъ и другомъ случаѣ должно, чтобы точка K находилась на продолженіи OC, безъ чего тр. OKI будетъ содержаться въ тр. CAO, и поштому будетъ не больше его. Допустивъ это и зная, что вращающееся разстояніе отъ C до A, есть CA, имѣемъ $CK + KI + IA > CA$. Но $CK = OD = CO$, $AI = AO - OB$, $KI = BD$, слѣд. $OD - CO + AO - OB + BD > CA$, и по сокращенію, $AD - CB + BD = CA$, или $AD + BD > AC + CB$. Но это противное неравенство противно предположенію $AD + BD = AC + CB$; слѣд. точка K не можетъ упасть на продолженіе OC, а падаетъ между O и C, и поштому тр. KOI, или равный ему ODB, не больше ACO; откуда видно, что равнобедренны тр. АСВ болѣе неравнобедреннаго АDB, имѣющаго одно основаніе и одинъ периметръ.

Замѣчаніе. Для послѣднія теоремы сходимъ съ I и III теоремою приложенія къ книгѣ IV. Поштому изъ нихъ можно извлечь, въ отношеніи къ сферическимъ многоуг-мъ, слѣдствія, которыя были исты въ приложеніи къ многоугольникамъ.

Вотъ главные изъ нихъ:

1. Наибольшій изъ всѣхъ сферическихъ многоуг-въ даннаго периметра и одинаковаго числа ступицъ, есть многоугольникъ равно-сторонній.

Тотъ доказательство какъ и для предположенія II, помѣщеннаго въ приложеніи къ книгѣ IV.

2. Изъ всѣхъ сферическихъ многоуг-въ, составленныхъ по илмъ стокъ числу ступицъ и по одной произвольной сторонѣ, наибольшій есть тотъ, который можно вписать въ полукругъ, взявъ за діаметръ его хорду неопреѣленной стороны.

Доказательство выводится изъ предположенія XXVI, какъ уже видѣли выше, въ пред. IV, приложенія къ IV книгѣ, и для существа званія наибольшаго величинъ необходимо, чтобы сумма данныхъ сторонъ была не больше полуокружности (вымытаго круга).

3. Наибольшій изъ сферическихъ многоуг-въ составленныхъ по даннымъ сторонамъ, есть тотъ, который можно вписать въ кругъ шара.

Тогда докажем, что, если n и m взаимно просты, то nm делится на 24.

4. Номинатив и звательный падежи, а также и все
наименее переносные и самые простые случаи, есть только, дательный
и четыре разные формы родительного.

¹በወደ ሰላሳ ሺህ ያሳደገው ስርዓተ ልማት ስራ ለጥቅምት 10 ቀን ያህል ይቆያል፡፡

[illegible]

ПРИБАВЛЕНИЕ

КЪ VI И VII КНИГАМЪ

О ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКАХ

ПРЕДЛОЖЕНИЕ ПЕРВОЕ.

ТЕОРЕМА.

Может существовать только пять приемлемых способов

Мы назвали правильными членами функции т.е. которые, при равных многогранных углах, имеют грани правильные многоугольники. Эти условия могут быть также и верно в весьма редких случаях.

[illegible]

2. Если грани суть квадраты, то можно считать углы на по шир, и отсюда вывести $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ и $\alpha = 30^\circ$.

Четыре угла квадрата являются четырьмя прямыми углами, а
вспомог. не могут составлять многоугольника угла

3. Наконец, если грани сфер взаимно перпендикулярны, то
сфера в углах или по трем, по крайней мере, сторонам.

Нельзя простирасть для составления правильных географических карт, потому что при этом вся шестигонная часть, а еще и шестигонная шестигонная часть четыре правые угла.

И тогда, когда ты существовал только и был привязан к во-

гогранныковъ, въ числѣ коихъ три составляются изъ равностороннихъ тр-хъ, одинъ изъ квадратовъ, и одинъ изъ пятиугольниковъ.

Замѣчаніе. Въ слѣдующемъ предположеніи будетъ доказано, что эти пять многогранныковъ можно существовать, и что можно предѣлать всѣ ихъ извѣрженія, по одной лишней грани.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Задача.

По данному грани, или по данному ребру произвольнаго многогранника, построить многогранникъ.

Это предположеніе содержитъ въ себѣ пять задачъ, которыя будутъ здѣсь последовательно разрѣшены.

Построеніе тетраэдра.

Ф. 243. Пусть ABC равносторонній тр-хъ, который долженъ быть одною изъ граней тетраэдра; изъ точки O , центра этого тр-хъ, возмемъ изъ плоскости ABC перпендикуляръ OS , и продолжимъ его до точки S , такъ чтобы $AS = AB$; соединимъ SB , SC , и пирамида $SABC$ будетъ искомымъ тетраэдромъ.

По причинѣ разныхъ разстояній OA , OB , OC , наклонныя SA , SB , SC , равно удалены отъ перпендикуляра (и суть равны). Одна изъ нихъ $SA = AB$; слѣд. четыре грани пирамиды суть тр-хи равныя данному тр. ABC . Кроме этого многогранные углы пирамиды равны между собою, какъ составленные каждымъ изъ трехъ равныхъ плоскихъ угловъ, и слѣд. пирамида есть правильный тетраэдръ.

Построеніе эксаэдра.

Ф. 244. Пусть $ABCD$ данный квадратъ; на основаніи $ABCD$ построимъ прямую призму, коей высота AE равна сторонѣ AB . Ясно, что грани этой призмы суть равные квадраты, и что многогранные углы ея равны, ибо они составлены изъ трехъ прямыхъ угловъ. отсюда слѣдуетъ, что призма есть правильный эксаэдръ или кубъ.

Построеніе октаэдра.

Ф. 245. Пусть AMB даннымъ равносторонній тр-хъ. На сторонѣ AB построимъ квадратъ $ABCD$; изъ точки O , центра этого квадрата, проведемъ изъ плоскости его перпендикуляръ TS , ограниченный съ той и другой стороны въ точкахъ T и S , такъ что $OT = OS = AO$; проведемъ пошомъ SA , SB , TA , и ш. д., получимъ тѣло $SABCDT$, составленное изъ двухъ четырехуг. пирамидъ $SABCD$, $TABCD$, соединяющихся въ общемъ изъ основаній $ABCD$, это тѣло будетъ искомымъ правильнымъ октаэдромъ.

Въ самомъ дѣлѣ, тр. AOS есть прямоугольный въ O , такъ какъ и тр. AOB ; стороны AO , OS , OB , суть равны; слѣд. тр-хи равны

и $AS \equiv AD$. Подобным образом докажем, что все другие взаимнопараллельные стороны AOE , BOS , COI , и проч., суть равны стороне AOE , откуда все стороны AB , AS , AI и проч., равны между собой, и, вследствие этого, многоугольник $SABCDI$ является правильным. Кроме того углы многоугольника равны между собой на пр. уг. S равен уг. I . Но, очевидно, что при SAC равен угол DAC , и уг. AM есть прямой, следовательно SAC есть квадрат равный квадрату ABO . Сравнивая стороны BAM с сторонами $SABCD$, увидим, что основание AM первого может быть положено на основании $ABCD$ вторым, и тогда все стороны O будут общими центрами, то основания OB первого пирамиды совпадут с основанием OB вторым, и две пирамиды обратятся в одну. Очевидно, что многогранный угол S равен многогранному углу I , и, вследствие этого, многоугольник $SABCDI$ есть правильным октаэдром.

Замечание. Если три равные прямые AC , BD , SI , суть взаимно перпендикулярны и пересекаются в их средине, то описанные прямые будут вершинами правильного октаэдра.

Построение додекаэдра.

Пусть $ABCOE$ один из правильных пятиугольников, пусть ABP , CBP , два плоские угла равные углу ABC , составлены из плоских углов многогранного угла P , и определим $(24, V)$ отношение наклонения двух из этих плоскостей, назовем его K . Составим, подобным образом, в точках C , D , E , A , многогранные углы равные углу P , и одинаково расположенные плоскости CBP будут одинаковы с плоскостью BCO , но наклонение той и другой, в отношении к плоскости $ABCO$, есть одно и то же количество K . И так, в плоскости $PCBO$ можно описать пятиугольник $BCGFP$ равный пятиугольнику $ABCOE$. Сделав то же самое во каждой из других плоскостей CDI , DEI , и проч., получим выпуклую поверхность $PCGPI$ и проч., составленную из шести правильных равных пятиугольн. в, концы взаимное наклонение есть одно количество K .

Пусть $ifgh$ и проч., будет вторая поверхность равная $PCGPI$ и проч.; для этих поверхностей могут быть составлены такие фигуры, что составив только одну непрерывную выпуклую поверхность. Демонстрируем, угол epf , из вершины может быть присоединен к двум углам OPB , OPF , для составления многогранного угла P равного углу P , и при этом соединении наклонение плоскостей FPB , FPD , не изменился, потому что оно есть то самое, которое нужно для составления многогранного угла. Но в одно время с составлением многогранного угла P , стороны if наложится на равную ей GF , и в точку F соединятся три плоские углы PFG , pfh , ife , которые образуют многогранный угол равный каждому из прежде составленных углов. Это соединение произойдет без влияния угла P , или поверхности $ifgh$, и проч.,

ибо плоскости PFG , *ср.*, уже соединены в P , и имеют надлежащее взаимное наклонение K , такъ какъ и плоскости *с/к*, *с/р*. Продолжая этиже образцы, увидимъ, что двѣ поверхности, по взаимной соединеніи, образуютъ одну непрерывную поверхность. Эта поверхность есть правильный додекаэдръ, ибо она составлена изъ двѣнадцати правильныхъ равныхъ пятиугольниковъ и имѣетъ взаимно равные многогранные углы.

Построеніе икосаедра.

Пусть ABC одна изъ граней икосаедра; должно сначала составить многогранный уголъ изъ пяти плоскостей равныхъ ABC и имѣющихъ равное взаимное наклоненіе. Для этого, на сторонѣ BC равной BC , составивъ правильный пятиугольникъ $BCNPD$, чрезъ центръ пятиугольника провести въ плоскости его перпендикуляръ, ограниченный въ A' такъ, что $BA' = BC$; соединивъ $A'C$, AN , $A'P$, $A'D$, и многогранный уголъ A' , составленный пятия плоскостями $BA'C$, $CA'N$, и проч., будемъ искомымъ. Такъ какъ наклонныя AB , $A'C$ и проч., суть равны, и одна изъ нихъ AB равна сторонѣ BC , то всѣ шри $BA'C$, $CA'N$, и проч., равны между собою и равны линіи *пр.* ABC .

Очевидно, что плоскости $BA'C$, $CA'N$, и проч., равнонаклонны въ отношеніи каждой прилегающей плоскости, ибо многогранный уголъ B , C , и проч., равны между собою, и составлены каждый изъ двухъ угловъ принадлежащихъ равностороннему шри и одного принадлежащаго правильному пятиуглу. Назовемъ чрезъ K наклоненіе двухъ плоскостей, въ коняхъ находящихся равные углы. (Это наклоненіе можно опредѣлить посредствомъ пред. XXIV, леммъ V). Уголъ K будетъ въ тоже время наклоненіе каждой изъ плоскостей составляющихъ многогранный уголъ A , въ отношеніи къ прилегающей плоскости.

Положивъ это, если сдѣлать въ точкахъ A , B , C , многогранные углы, равные каждому углу A , то получится выпуклую поверхность $DEFG$, и проч., составленную изъ десяти равностороннихъ шри, коняхъ взаимное наклоненіе равно K , и углы D , E , F , и проч., его обвода, будутъ соединены попеременно двѣ и при углахъ равностороннихъ шри. Вообразимъ вторую поверхность равную поверхности $DEFG$ и проч.: эти двѣ поверхности могутъ быть взаимно сложены, если соединимъ каждый тройной уголъ одной съ двойнымъ угломъ другой, и такъ какъ плоскости угловъ имѣютъ надлежащее взаимное наклоненіе K , для составленія пятиграннаго угла равнаго углу A , то при этомъ соединеніи не послѣдуетъ никакого измѣненія въ каждой изъ поверхностей въ чистотѣ, и совокупленіе ихъ образуетъ одну непрерывную поверхность, составленную изъ 20 равностороннихъ шри. Эта поверхность есть правильный икосаэдръ, попомни что, кромѣ равныхъ граней, всѣ многогранные углы равны между собою.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ III

Задача.

Найти максимумъ угла прилежащихъ граней призма, вписанной въ тетраэдръ.

Это предложение выводится непосредственно изъ предыдущаго предложения пяти правильныхъ многогранниковъ: въ силу додого присоединить предложение XXIV, книги V, по отношению к шарику, по линии шреихъ плоскостей угловъ, составляющихъ многогранный уголъ, определяются углы соприкасаемыхъ двуплоскостныхъ угловъ между собою.

Въ тетраэдръ. Даннымъ многограннымъ угломъ составленъ изъ трехъ угловъ равностороннихъ шреихъ, и въ слѣдствіе этого одно изъ нихъ (24, V) уголъ с соприкасаемыхъ двуплоскостныхъ угловъ между собою, этотъ уголъ будетъ искомъ: максимумъ двухъ прилежащихъ граней тетраэдра.

Въ октаэдръ. Уголъ двухъ прилежащихъ граней есть прямой.

Въ октаэдръ. Составленъ многогранный уголъ, искомъ для этого для угла равностороннихъ шреихъ и прямой уголъ, максимумъ двухъ плоскостей, въ коихъ находятся углы шреихъ, будетъ равно максимумъ двухъ прилежащихъ граней октаэдра.

Въ додекаэдръ. Даннымъ многограннымъ угломъ составленъ изъ трехъ угловъ правильныхъ пентагоновъ: и пошону максимумъ плоскостей двухъ изъ угловъ будетъ равно максимумъ двухъ прилежащихъ граней додекаэдра.

Въ икосаэдръ. Составленъ многогранный уголъ изъ двухъ угловъ равностороннихъ шреихъ и одного угла правильного пентагона, максимумъ двухъ плоскостей, въ которыхъ находятся углы шреихъ, будетъ равно максимумъ двухъ прилежащихъ граней икосаэдра.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ IV.

Задача.

По данной сферѣ вписать правильный многогранникъ, найти радиусъ шара описаннаго въ многогранникъ и радиусъ шара описаннаго около многогранника.

Должно доказать сначала, что всякій правильный многогранный можетъ быть вписать въ шаръ и описать около него. Пусть AB сторона общаа двухъ прилежащихъ граней, пусть C и E центры этихъ граней, и CD , ED , перпендикуляры опущенные изъ центровъ на общую сторону AB , которые упадутъ въ точку D , среднюю этой стороны. Два перпендикуляра CD , ED , составятъ между собою уголъ известный и равны максимумъ двухъ прилежащихъ граней (пред. 8). Пошону, если въ плоскости CDE , перпендикуляры къ AB , проведемъ къ CD и ED , неопредѣленные перпендикуляры CO и EO , встрѣчающіеся въ O , то точка O будетъ центромъ

шара вписанного и шара описанного, радіусъ перваго есть OC и радіусъ втораго AO .

Въ самомъ дѣлѣ, по равенству аполей CD , DE , и общей гипотенузы DO , прямоугольный триъг. CDO равенъ прямоугольному триъг. ODE (16, 1), и перпендикуляръ OC равенъ перпендикуляру OE . Но такъ $AB \perp$ къ CDE (17, V), или CDE къ ABC , и аронъ того CO , въ плоскости CDE , перпендикуляренъ къ CD , общему пересѣченію плоскостей CDE , ABC ; слѣд. $CO \perp$ къ плоскости ABC . По той же причинѣ, $EO \perp$ къ плоскости ABE ; слѣд. два перпендикуляра CO , EO , проведенные къ плоскостямъ двухъ прилежащихъ граней, чрезъ центры этой грани, встрѣчаются въ одномъ точкѣ O , и суть равны. Если положить теперь, что ABC и ABE представляли бы двѣ другія прилежащія грани, то аполея CD сохранили бы всегда равную величину, такъ какъ и уг. CDO , равный аполю CDE ; слѣд. прямоугольный триъг. CDO и сторона его CO будутъ равны для всѣхъ граней многогранника, и поименовъ шаръ описанный изъ точки O , какъ центра, радіусомъ OC , касается всѣхъ граней многогранника въ ихъ центрахъ (потому что плоскости ABC , ABE , будутъ перпендикулярны къ окончанію радіуса) и будетъ вписанъ въ многогранникъ, или многогранникъ описанъ около шара.

Соединимъ теперь OA , OB . По причинѣ $CA = CB$, двѣ наклонныя OA , OB , равно удалены отъ перпендикуляра, будутъ равны; то же самое можно сказать и для двухъ какихъ нибудь линий, проведенныхъ изъ центра O къ окончанію одной стороны, слѣд. всѣ эти линии равны между собою, и поэтому, если изъ точки O , какъ центра, описатьъ радіусомъ OA шаровую поверхность, то она пройдетъ чрезъ вершины всѣхъ угловъ многогранника и шаръ будетъ описанъ около многогранника, или многогранникъ вписанъ въ шаръ.

Допустимъ это, раздѣленіе предложенной задачи не представитъ ни какой трудности, и можетъ быть произведено такимъ образомъ.

По другой сторонѣ грани многогранника, составивъ грань, и пусть CD ея аполея. Найдешь, по предыдущей задачѣ, взаимовѣдѣ двухъ прилежащихъ граней многогранника и составивъ уголъ CDE , равный этому взаимовѣдѣ. Возмешь DE равную CD , проведешь CO и EO , перпендикулярныя къ CD и ED , эти два перпендикуляра встрѣчатся въ точкѣ O , и CO будетъ радіусъ шара вписаннаго въ многогранникъ.

На продолженіи DC возмешь CA , равную радіусу круга описаннаго около грани многогранника, и OA будетъ радіусъ шара описаннаго около того же слагаго многогранника. Прягоугольные триъг. CDO , CAO , въ фиг. 249, равны триъг. того же названія въ фигурѣ 248, потому CD и CA суть радіусы круговъ вписаннаго и описаннаго около грани многогранника, и OC и OA суть радіусы шаровъ вписаннаго и описаннаго около того же слагаго многогранника.

Замѣчаніе. Можно вывести изъ предыдущихъ теоремъ слѣдующія слѣдствія:

1. Всякій правильный многогранникъ можетъ быть раздѣленъ изъ столько же правильныхъ пирамидъ, сколько многогранникъ имѣетъ граней. Общая вершина этихъ пирамидъ будетъ центръ многогранника и, въ то же время, центръ шара вписаннаго и описаннаго.

2. Объемъ правильнаго многогранника равенъ его поверхности умноженной на треть радиуса шара, вписаннаго,

3. Для правильнаго многогранника одного названія суть два шара, вписаннаго и описаннаго, и соотношенныя ихъ диаметры пропорциональны, отсюда слѣдуетъ, что радиусы шаровъ вписаннаго и описаннаго относятся между собою какъ ребра многогранниковъ.

4. Если вписать правильный многогранникъ въ шаръ, то поверхность вписаннаго шаръ ошара, чрезъ различные ребра, раздѣлитъ поверхность шара на столько соотвѣствующихъ ребрамъ и сторонамъ многогранниковъ, сколько многогранникъ имѣетъ граней.



К Н И Г А VIII.

О ТРЕХЪ КРУГЛЫХЪ ТѢЛАХЪ.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

Ф. 250. I. *Цилиндромъ* называется тѣло, произведенное воображаемымъ обращеніемъ прямоугольника ABCD, около неподвижной стороны AB.

При этомъ движеніи, стороны AD, BC, оставаясь перпендикулярными къ AB, описываютъ равныя круговыя площади DHP, CGQ, которыя называются *основаніями цилиндра*, а сторона CD опишетъ *выпуклую поверхность цилиндра*.

Неподвижная линія AB называется *осью цилиндра*.

Всякое сѣченіе KLM, сдѣланное въ цилиндръ перпендикулярно къ оси, есть кругъ равный каждому изъ основаній, потому что, при обращеніи правоуг. ABCD около AB, линія IK, перпендикулярная къ AB, описываетъ круговую плоскость равную основанію, и эта плоскость есть нечто иное, какъ сѣченіе сдѣланное перпендикулярно къ оси въ точкѣ I.

Всякое сѣченіе PQGH, сдѣланное по направленію оси, есть прямоугольникъ равный удвоенному производящему правоуг. ABCD.

Ф. 251. II. *Конусомъ* называется тѣло, произведенное воображаемымъ обращеніемъ прямоугольнаго тр. SAB, около неподвижной стороны SA.

Въ этомъ движеніи, сторона AB опишетъ круговую площадь BDCE, называемую *основаніемъ конуса*, а гипотенуза SB *выпуклую поверхность конуса*.

Точка S называется *вершиною конуса*, SA *осью* или *высотой*, и SB *ребром* или *апофемой*.

Всякое сечение $HKFI$, сделанное перпендикулярно къ оси, есть кругъ; всякое сечение SDE , по оси, есть равнобедренный треугольникъ, равный удвоенному произвольному $\text{пр. } SAB$.

III. Если отделить отъ конуса $SCDB$, сечениемъ параллельнымъ основанию, конусъ $SIKH$, то остающееся тѣло $CBHF$ называется *услыннымъ конусомъ*.

Можно предположить, что это тѣло произведено обращениемъ трапеции $ABHG$, въ которой углы A и G прямые, около стороны AG . Неподвижная линия AG называется *осью* или *высотой услыннаго конуса*, круги BDC , HFK , его *основаниями*, и BH *ребромъ*.

IV. Два цилиндра или два конуса *подобны*, когда ихъ оси относятся такъ какъ диаметры оснований.

V. Если, въ кругъ ACD , который служитъ Ф. 162. основаниемъ цилиндру, впишемъ многоуг. къ $ABCDE$, и построимъ на основаніи $ABCDE$, прямую призму, равную высотой цилиндру, то призма называется *вписанною въ цилиндръ*, или, цилиндръ *описаннымъ около призмы*.

Ясно, что ребра призмы AF , BG , CH , и проч., будучи перпендикулярны къ плоскости основанія, находяща въ выпуклой поверхности цилиндра; отсюда слѣдуетъ, что призма и цилиндръ соприкасаются въ вѣсѣхъ ребрахъ.

VI. Подобнымъ, образомъ, если $ABCD$ есть Ф. 163. многоугольникъ описанный около основанія цилиндра, и если, на основаніи $ABCD$, построимъ прямую призму одной высоты съ цилиндромъ, то призма называется *описанною около цилиндра*, или цилиндръ *вписаннымъ въ призму*.

Пусть M , N , и проч., будутъ точки касанія сторонъ AB , BC , и проч. Если возставимъ изъ

впихъ точекъ перпендикуляры, MX , NY , и проч., къ плоскости основанія, но ясно, что они будутъ находиться другъ на поверхности цилиндра и описанной призмы, и слѣд. будутъ линіями ихъ сопркосновенія.

Примѣт. Цилиндръ, конусъ шаръ суть три рода *тѣлъ*, которыя разширяются въ изначальныхъ основаніяхъ Геометріи.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ ЛЕММЫ О ПОВЕРХНОСТЯХЪ.

I.

Ч. 254. *Плоская поверхность $OABCD$ менше всякой другой поверхности $PABCD$, ограниченной тѣмъ же обводомъ $ABCD$.*

Это предложеніе само посебѣ довольно очевидно, для помѣщенія его въ число аксіомъ, можно предполагать, что плоскость есть тоже между поверхностями, что прямая линія между линіями, и такъ какъ прямая линія есть кратчайшая между двумя точками, то и плоскость есть наименьшая изъ всѣхъ поверхностей ограниченныхъ однимъ обводомъ. Между нѣмъ, придерживаясь правила ограничиваться возможно меньшимъ числомъ аксіомъ, мы помѣщаемъ здѣсь разсужденіе, которое будетъ вполне достаточно для доказательства этого предложенія.

Такъ какъ поверхность есть протяженіе въ длину и ширину, то нельзя представить одной поверхности большей нежели другая, не допуская того, что измѣренія первой превосходятъ въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ измѣренія второй, и если случается, что измѣренія одной поверхности будутъ во всѣхъ отношеніяхъ менше измѣреній другой поверхности, то очевидно, что первая поверхность есть меньшая изъ двухъ. И такъ, въ какомъ бы направленіи не провели мы

плоскость BDP , которая пересѣчетъ плоскую поверхность въ BD , и другую поверхность въ BP , но прямая линия BD будетъ всегда меньше BP , слѣд. плоская поверхность $OABCD$ меньше поверхности $PABCD$.

II.

Вогнутая выпуклая поверхность $OABCD$ меньше другой какой нибудь поверхности, которая обертывается поверхку, имѣя одинъ и тотъ же обводъ $ABCD$.

Повторимъ здѣсь, что мы называемъ *выпуклою поверхностью* такую, которая можетъ вскрѣстись съ прямою линіею только въ двухъ точкахъ, хотя, впрочемъ, возможно и то, что прямая линія наложится совершенно въ известномъ направленіи на выпуклую поверхность; примѣры этому видимъ въ поверхностяхъ конуса и цилиндра. Замѣтимъ также, что названіе выпуклой поверхности не принадлежитъ только однимъ кривымъ поверхностямъ: оно содержитъ поверхности *многогранныя*, или составленныя изъ многихъ плоскостей, равно какъ частію кривыя и частію многогранныя.

Допустимъ это, если поверхность $OABCD$ не будетъ меньшая изъ всѣхъ обертывающихъ ее, то пусть между ними будетъ $PABCD$, поверхность наименьшая и притомъ равная $OABCD$.

Черезъ какую нибудь точку O проведемъ плоскость, которая касается къ поверхности $OABCD$, но не пересѣкаетъ ее; эта плоскость вскрѣстится съ поверхностью $PABCD$, и отдѣлитъ отъ нее часть большую плоскости ограниченной такою же поверхностью (лем. 1); слѣд., сохраняя осязательность поверхности $PABCD$, можно замѣнить плоскостію отдѣленную часть, и получить новую поверхность,

которая бы обертывала всегда поверхность $OABCD$ и была меньше $PABCD$.

Но такъ какъ, по предположенію, эта поверхность есть наименьшая изъ всѣхъ, то предположеніе не можетъ имѣть мѣста, и выпуклая поверхность $OABCD$ меньше всякой другой поверхности обертывающей $OABCD$, и ограниченной одними обводами $ABCD$.

Замѣчаніе. Совершенно подобнымъ образомъ докажется, что

1. Если выпуклая поверхность, ограниченная двумя обводами ABC , DEF , обертывается другою какою нибудь поверхностью, ограничекою теми же обводами, то обернутая поверхность будетъ меньшая изъ двухъ.

2. Если выпуклая поверхность AB обернута со всѣхъ сторонъ другою поверхностью MN , то обернутая поверхность всегда меньше обертывающей поверхности, будутъ ли онѣ имѣть, или нѣтъ, общія точки, линіи и плоскости соприкосновенія.

Между обертывающими поверхностями не можетъ существовать ни одной меньшей всѣхъ прочихъ, ибо всегда можно провести къ выпуклой поверхности касательную плоскость CD , которая будетъ меньше поверхности CMD (лемма 1), и такимъ образомъ поверхность CND была бы меньше MN , что прямо противно предположенію, по которому MN есть меньшая изъ всѣхъ. Въ слѣдствіе этого, выпуклая поверхность AB меньше всѣхъ ее обертывающихъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

ТЕОРЕМА.

Объемъ цилиндра равенъ произведенію изъ его основанія на высоту.

Пусть CA радиусъ основанія дающаго цилиндра и H его высота, если изобразимъ чрезъ $пл. CA$, площадь круга имѣющаго радиусомъ CA , то объемъ цилиндра будетъ выражаться чрезъ $пл. CA \times H$. Теперь, если произведеніе $пл. CA \times H$ не есть мѣра дающаго цилиндра, то пусть оно будетъ мѣрою цилиндра большаго или меньшаго.

Предположимъ сначала, что оно будетъ мѣрою цилиндра меньшаго нежели данный, на пр. цилиндра, въ которомъ CD есть радиусъ основанія и H высота.

Опишемъ около круга, имѣющаго радиусомъ CD , правильный многоуг. $GHPR$, косяго стороны не вступаютъ въ окружности описанной радиусомъ CA (10, IV), и вообразимъ потомъ прямую призму имѣющую основаніемъ многоуг. $GHPR$, высоту H , и описанную около цилиндра, гдѣ CD есть радиусъ основанія. Мы знаемъ, что объемъ призмы (14) равенъ ея основанію $GHPR$, помноженному на высоту H ; но такъ какъ основаніе $GHPR$ менше круга описаннаго радиусомъ CA , то объемъ призмы менше нежели $пл. CA \times H$. Между тѣмъ $пл. CA \times H$ есть, по предположенію, объемъ цилиндра вписаннаго въ призму; слѣд. призма была бы менше цилиндра; но такъ какъ, напротивъ, цилиндръ менше призмы, потому что онъ въ ней содержится, то невозможно, что бы выраженіе $пл. CA \times H$ было мѣрою цилиндра, въ которомъ CD есть радиусъ основанія и H высота; или, въ болѣе общихъ выраженіяхъ, *произведеніе изъ основанія цилиндра на его высоту не можетъ служить мѣрою меншему цилиндру.*

Должно доказаны теперь, что это самое произведеніе не можетъ быть мѣрою цилиндра большаго нежели данный; вбо, пусть CD радиусъ основанія дающаго цилиндра, и пусть, если возможно, $пл. CD \times H$ будетъ мѣрою цилиндра большаго,

на пр. цилиндра, въ которомъ CA есть радіусъ основанія и H высота.

Произведя тоже построеніе какъ и въ первомъ случаѣ, получимъ призму описанную около даннаго цилиндра, которая будетъ имѣть мѣру $GHP \times H$, но какъ GHP болѣе *пл.* CD , то объемъ разсматриваемой призмы болѣе *пл.* $CD \times H$, и призма будетъ болѣе цилиндра одной съ нею высоты, имѣющаго основаніемъ *пл.* CA . Но, напротивъ, призма менѣе цилиндра, потому что въ неѣ содержится; слѣд. невозможно, чтобы произведение основанія цилиндра на его высоту было мѣрою большаго цилиндра.

И такъ, наконецъ, объемъ цилиндра равенъ произведенію изъ его основанія на высоту.

Слѣд. I. Цилиндры одного основанія относятся между собою какъ ихъ высоты, а цилиндры одной высоты какъ ихъ основанія.

Слѣдствіе II. Подобные цилиндры относятся между собою какъ кубы высотъ, или кубы діаметровъ основаній. Ибо, основанія относятся между собою, какъ квадраты ихъ діаметровъ, и такъ какъ цилиндры подобны, то діаметры основаній находятся въ отношеніи высотъ (опред. 4); слѣд. основанія относятся между собою какъ квадраты высотъ, и наконецъ, произведенія основаній на высоты, или самые цилиндры, относятся какъ кубы высотъ.

Замѣчаніе. Если R есть радіусъ основанія цилиндра и H его высота, то площадь основанія будетъ πR^2 (12, IV), и объемъ цилиндра выразится чрезъ $\pi R^2 \times H$, или $\pi R^2 H$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Лемма.

Выпуклая поверхность прямой призмы равна периметру ея основанія умноженному на высоту призмы.

Такъ какъ она поверхность равна суммѣ прямоугольн. $AFGB$, $BGHC$, $CHPD$, и проч., изъ которыхъ Ф. 232. она составлена, то высоты AF , BG , CH , и проч., равны высотѣ призмы, и ихъ основанія AB , BC , CD , и проч., будучи взяты вѣсть, составляютъ периметръ основанія призмы. И такъ, сумма прямоугольн., или выпуклая поверхность призмы, равна периметру основанія умноженному на высоту призмы.

Слѣдствіе. Если двѣ прямыя призмы имѣютъ одну высоту, то выпуклая поверхности призмы будутъ относиться какъ периметры ихъ основаній.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Л е м м а.

Выпуклая поверхность цилиндра болѣе выпуклой поверхности всякой призмы вписанной и менѣе поверхности всякой призмы описанной.

Выпуклая поверхность цилиндра и вписанной Ф. 233. призмы $ABCDEF$ могутъ быть разсѣпаемы, какъ имѣющія одну длину, поному что всякое сѣченіе, сдѣланное въ одной и въ другой параллельно AF , равно AF ; и если, для полученія ширины этихъ поверхностей, пересѣчемъ ихъ плоскостями параллельными основанію, или перпендикулярными къ ребру AF , то одно изъ сѣченій будетъ равно окружности основанія, а другое обводу многоугла $ABCDE$ меньшему окружности. И такъ какъ, при равной длинѣ, ширина цилиндрической поверхности превосходитъ ширину призматической поверхности, то отсюда слѣдуетъ, что первая поверхность болѣе второй.

Совершенно подобнымъ образомъ докажется, Ф. 234. что выпуклая поверхность цилиндра менѣе поверхности всякой описанной призмы $BCKLH$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

ТЕОРЕМА.

Выпуклая поверхность цилиндра равна произведению окружности его основанія на высоту цилиндра.

Ф. 255.

Пусть CA радіусъ основанія даннаго цилиндра и H его высота; если назовемъ *окр.* CA , окружность нѣтующую радіусомъ CA , то *окр.* $CA \times H$ будетъ выражать выпуклую поверхность цилиндра. Отвергая это предположеніе, должно допустить что *окр.* $CA \times H$ будетъ поверхностью большаго или меньшаго цилиндра. Положимъ, на прихѣтъ, что *окр.* $CA \times H$ представляетъ выраженіе поверхности меньшаго цилиндра, въ которомъ CD есть радіусъ основанія и H высота.

Опишемъ около круга, нѣтующаго радіусомъ CD , правильный многоуг. GHP , коего стороны не встрѣчаютъ окружности нѣтующей радіусомъ CA , и вообразимъ попомъ прямую призму, которая нѣтеть высотой H , и основаніемъ многоуг. GHP .

Выпуклая поверхность этой призмы будетъ равна произведенію нѣз оѵвода многоуг. GHP на высоту H (2), и такъ какъ этотъ оѵводъ менѣе окружности нѣтующей радіусомъ CA , то выпуклая поверхность призмы менѣе *окр.* $CA \times H$. Но *окр.* $CA \times H$ есть, по предположенію, выпуклая поверхность цилиндра вписаннаго въ призму, въ которомъ CD есть радіусъ основанія; слѣд. выпуклая поверхность призмы была бы менѣе выпуклой поверхностью вписаннаго цилиндра. Но такъ какъ, напротивъ, она должна бытъ болѣе (3), то сдѣланное нами предположеніе нелѣпно, и попому т-е, *окружность основанія цилиндра умноженная на его высоту не можетъ быть мѣрою выпуклой поверхности цилиндра меньшаго нежели даннаго.*

Во вторыхъ, это же самое произведение не можетъ измѣрять поверхности бѣльшаго цилиндра. Оставляя нуде фигуру, положимъ, что CD есть радиусъ основанія даннаго цилиндра, и пусть, если это возможно, $окр. CD \times H$ выпуклая поверхность цилиндра, котораго, при той же высотѣ, имѣлъ бы основаніемъ кругъ бѣльшій; на пр. кругъ описанный радиусомъ CA . Но произведеніи такого же построенія, какъ и въ первомъ случаѣ, выпуклая поверхность призмы будетъ всегда равна обводу многоуг. GHK умноженному на высоту H . Новинотъ обводъ бѣлье $окр. CD$; слѣд. поверхность призмы бѣлье $окр. CD \times H$, котораго, по предположенію, есть поверхность цилиндра равной высоты, гдѣ CA есть радиусъ основанія. Отсюда слѣдуетъ, что поверхность призмы была бы бѣлье поверхности цилиндра. Но еслибъ даже призма была вписана въ цилиндръ, то поверхность ея была бы менѣе поверхности цилиндра (3), и особенно въ томъ случаѣ, когда призма не достигаетъ цилиндра. И такъ, второе предположеніе не можетъ имѣть мѣста, откуда 2-е, *окружность основанія цилиндра умноженная на его высоту не можетъ измѣрять поверхности бѣльшаго цилиндра.*

Слѣд., наконецъ, выпуклая поверхность цилиндра равна окружности его основанія помноженной на высоту цилиндра.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

ТЕОРЕМА.

Объемъ конуса равенъ произведенію изъ его основанія на треть высоты.

Пусть SO высота даннаго конуса и AO радиусъ основанія; если означимъ чрезъ $пл. AO$, площадь основанія, то объемъ конуса будетъ равенъ $пл. AO \times \frac{1}{3} SO$.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, во первыхъ, что п.л. $AO \times \frac{1}{3} SO$ будетъ объемомъ конуса большаго, на пр. конуса имѣющаго ту же высоту SO , но гдѣ радіусъ основанія OB болѣе AO .

Опишемъ около круга, имѣющаго радіусомъ AO , правильный многоугольникъ $MNPT$, который не вслѣдуетъ окружности описанную радіусомъ OB , (10, IV), и вообразимъ потомъ пирамиду, имѣющую основаніемъ многоуг-къ, а вершиною точку S . Объемъ этой пирамиды (19, VI) равенъ площади многоуг. $MNPT$, помноженной на третью высоты SO . Но многоуг-къ болѣе чѣмъ вписанный кругъ изображаемый п.л. AO ; слѣд. пирамида болѣе п.л. $AO \times \frac{1}{3} SO$, которая, по предположенію, есть мѣра конуса имѣющаго вершиною точку S и радіусомъ основанія линію OB . Но, напротивъ, пирамида менѣе конуса, потому что въ ней содержится; слѣд. 1-е, невозможно, чтобы основаніе конуса помноженное на третью его высоты было мѣрою большаго конуса.

Во вторыхъ, это произведеніе не можетъ быть мѣрою меньшаго конуса. Ибо, не переменяя фигуры, пусть BO радіусъ основанія даннаго конуса, и пусть, если впо возможно, п.л. $OB \times \frac{1}{3} SO$ выражаетъ объемъ конуса имѣющаго высоту SO и основаніемъ кругъ, ксого радіусъ AO . Сдѣлавъ построеніе подобное предыдущему, получимъ пирамиду $SMNPT$, которая будетъ имѣть мѣрою площадь $MNPT$ умноженную на $\frac{1}{3} SO$. Но площадь $MNPT$ менѣе п.л. OB ; слѣд. пирамида имѣла бы мѣру меньшую п.л. $OB \times \frac{1}{3} SO$, и была бы менѣе конуса, гдѣ AO есть радіусъ основанія и SO высота. Но, напротивъ, пирамида болѣе конуса, потому что конусъ въ ней содержится; слѣд. 2-е, невозможно, чтобы основаніе конуса умноженное на третью его высоты было мѣрою меньшаго конуса.

И такъ, наконецъ, объемъ конуса равенъ произведенію пзъ его основанія на высоту.

Слѣдствіе. Конусъ есть треть цилиндра одного основанія и одной высоты, откуда слѣдуетъ,

1. Что конусы равныхъ высотъ относятся между собою какъ ихъ основанія;

2. Что конусы равныхъ основаній относятся какъ ихъ высоты;

3. Что подобные конусы относятся какъ кубы діаметровъ ихъ основаній, или какъ кубы ихъ высотъ.

Замѣчаніе. Если R есть радіусъ основанія конуса и H его высота, то объемъ конуса будетъ $\frac{1}{3} \pi R^2 \times H$, или $\frac{1}{3} \pi R H$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

ТЕОРЕМА.

Усѣченный конусъ $ADEB$, въ коемъ AO , DP , ^{2. 260} суть радіусы основаній и PO высота, имѣетъ площадь $\frac{1}{2} \pi (AO + DP + AO \times DP)$.

Пусть $TFGH$ трѣхгр. пирамида одной высоты съ конусомъ SAB , которой основаніе FGH равноѣрно съ основаніемъ конуса. Если предположить, что эти два основанія положены на одну плоскость, то вершины S и T будутъ въ равномъ разстояніи отъ плоскости основаній, и продолженная плоскость EPD сдѣлаетъ въ пирамидѣ сѣченіе IKL . Это сѣченіе IKL равноѣрно основанію DE , потому что основанія AB , DE , относятся между собою какъ квадраты радіусовъ AO и DP (11, IV), или какъ квадраты высотъ SO , SP , а трѣхгр. FGH , IKL , относятся какъ квадраты тѣхъ же высотъ (15, VI); слѣд. круги AB , DE , относятся между собою какъ трѣхгр. FGH , IKL . Но, по предположенію, тр. FGH равноѣренъ кругу AB , и слѣд. тр. IKL равноѣренъ кругу DE .

Теперь, основаніе AB умноженное на $\frac{1}{2} SO$, есть

объемъ конуса SAB , а основаніе FGH умноженное на $\frac{1}{3} SO$, объемъ пирамиды $TFGH$; слѣд., по причинѣ равностороннихъ основаній, объемъ пирамиды равенъ объему конуса. По одинаковой причинѣ, пирамида TKL равносторонна конусу SDE ; слѣд. усѣченный конусъ $ADEB$ равностороненъ усѣченной пирамидѣ $FGHKL$. Но основаніе FGH , равносторонное кругу, коего радиусъ есть AO , имѣетъ мѣрою $\pi \times AO$; основаніе $IKL = \pi \times DP$, и среднее пропорциональное число между $\pi \times AO$ и $\pi \times DP$ есть $\pi \times AO \times DP$; слѣд. объемъ усѣченной пирамиды, или усѣченного конуса, имѣетъ мѣрою $\frac{1}{3} OP \times (\pi \times AO + \pi \times DP + \pi \times AO \times DP)$ (20, VI), или, что все равно, $\frac{1}{3} \pi \times OP \times (AO + DP + AO \times DP)$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

ТЕОРЕМА.

Выпуклая поверхность конуса равна произведенію изъ окружности его основанія на половину ребра.

Ф. 259. Пусть AO радиусъ основанія данного конуса, S его вершина, и SA его ребро; поверхность конуса выразится $окр. AO \times \frac{1}{2} SA$. Ибо, пусть, если это возможно, $окр. AO \times \frac{1}{2} SA$ представляетъ поверхность конуса, который бы имѣлъ вершинною точку S и основаніемъ кругъ, описанный радиусомъ OB , большимъ нежели AO .

Опишемъ около малаго круга правильный многоуг. $MNPQ$, коего стороны не встрѣчаютъ окружности описанной радиусомъ OB , и пусть $SMNPQ$ правильная пирамида, имѣющая основаніемъ многоуг. и вершинною точку S . Тр. SMN , одинъ изъ составляющихъ выпуклую поверхность пирамиды, имѣетъ мѣрою свое основаніе MN , умноженное на

половину высоты SA , которая, в то же время, есть ребро данного конуса; из равенства этой высоты во всех других нрхъ SNP , SPQ , и проч., слѣдуетъ, что выпуклая поверхность пирамиды равна обводу $MNPTM$ помноженному на $\frac{1}{2}SA$.

Но обводъ $MNPTM$ болѣе *окр.* AO ; слѣд. выпуклая поверхность пирамиды болѣе *окр.* $AO \times \frac{1}{2}SA$, и позному болѣе выпуклой поверхности конуса, который, при одной вершинѣ S , имѣлъ бы основаніемъ кругъ описанный радіусомъ OB . Но, напротивъ, выпуклая поверхность конуса болѣе поверхности пирамиды, позному что, соединяя двѣ равныя пирамиды и два равные конуса, посредствомъ ихъ основаній, увидимъ, что поверхность двухъ конусовъ обернется со всехъ сторонъ поверхность двухъ пирамидъ, и слѣд. первая будетъ болѣе второй (лемма 2), откуда поверхность конуса болѣе поверхности пирамиды въ немъ содержащейся. Противный выводъ былъ слѣдствіемъ нашего предположенія, которое, поэтому, не можетъ имѣть мѣста, и слѣд. 1-е, произведение окружности основанія конуса на половину его ребра не можетъ измѣрять поверхности большаго конуса. Ф. 281.

Во вторыхъ, то же самое произведение не можетъ измѣрять поверхность меньшаго конуса. Для доказательства, пусть BO радіусъ основанія даннаго конуса, и пусть, если это возможно, *окр.* $BO \times \frac{1}{2}SB$ поверхность конуса, котораго вершина S , и радіусъ AO , меньшій OB , радіуса основанія. Сдѣлавъ построеніе подобное прежнему, увидимъ, что поверхность пирамиды $SMNPT$ будетъ всегда равна обводу $MNPT \times \frac{1}{2}SA$. Но обводъ $MNPT$ менѣе *окр.* BO , и $SA < SB$: слѣд., по этой двойной причинѣ, выпуклая поверхность пирамиды будетъ менѣе *окр.* $BO \times \frac{1}{2}SB$, которая, по предположенію, есть поверхность конуса, гдѣ AO есть радіусъ основанія, и отсюда слѣдуетъ, что поверхность пирамиды была бы менѣе поверхности описаннаго конуса. Но, на-

противъ, она болѣе, потому что, соединяя основаніями двѣ равныя пирамиды и два равные конуса, увидимъ, что поверхность пирамидъ обернется поверхность конусовъ и будетъ болѣе послѣдней.

И такъ 2-е, невозможно, чтобы произведение изъ окружности основанія даннаго конуса на половину его ребра, превышало поверхность меньшаго конуса.

Отсюда слѣдуетъ, что выпуклая поверхность конуса равна окружности его основанія умноженной на половину ребра.

Замѣчаніе. Если L ребро конуса, и R радіусъ его основанія, то окружность основанія будетъ $2\pi R$ и поверхность конуса выразится чрезъ $2\pi R \times \frac{1}{2} L$, или πRL .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII

ТЕОРЕМА.

Ф. 261. Выпуклая поверхность усеченнаго конуса $ADEB$ равна ребру его AD , умноженному на полусумму окружностей двухъ основаній конуса AB, DE .

Въ плоскости SAB , проходящей чрезъ ось SO , проведемъ, перпендикулярно къ SA , линію AF , равную окружности описанной радіусомъ AO ; соединимъ SF , и проведемъ $DH \parallel AF$. Изъ подобія трѣхъ SAO, SDC , будемъ имѣть $AO : DC = SA : SD$, а изъ подобія SAF и SDH , $AF : DH = SA : SD$; слѣд. $AF : DH = AO : DC$, или $= \text{окр. } AO : \text{окр. } DC$ (11, IV). Но, по построенію, $AF = \text{окр. } AO$; слѣд. $DH = \text{окр. } DC$. Положимъ это, тр. SAF , имѣющій мѣрою $AF \times \frac{1}{2} SA$, равенъ поверхности конуса SAB , имѣющаго мѣрою $\text{окр. } AO \times \frac{1}{2} SA$. По такой же причинѣ тр. SDH равенъ поверхности конуса SDE ,

Отсюда поверхность усеченного конуса $ADEB$ равна поверхности трапеции $ADBF$. Но такъ какъ трапеція имѣетъ ширину $(7, III) AD \times \left(\frac{AD + BF}{2}\right)$, то поверхность усеченного конуса $ADEB$ равна его ребру AD , умноженному на полусумму окружностей двухъ оснований конуса.

Слѣдствіе. Проведя чрезъ точку I , среднюю AD , $IKL \perp AB$, и $IM \perp AF$, докажемъ, подобно предыдущему, что $IM = \text{окр. } IK$. Но трапеція $ADBF = AD \times IM = AD \times \text{окр. } IK$, и поэтому можно сказать еще, что поверхность усеченного конуса равна произведенію изъ его ребра на окружность сѣченія, сдѣланнаго въ равномъ разстояніи отъ обоихъ оснований.

Замѣчаніе. Если линія AD , находящаяся во всемъ протяженіи съ одной стороны линіи OC и въ одной съ нею плоскости, совершаетъ обращеніе около OC , то поверхность, произведенная движеніемъ AD , будетъ имѣть ширину $AD \times \left(\frac{\text{окр. } AD + \text{окр. } DC}{2}\right)$, или $AD \times \text{окр. } IK$, гдѣ линіи AO , DC , IK , суть перпендикуляры опущенные изъ конечностей и середины линіи AD на ось OC . Ибо, продолживъ AD и OC до встрѣчи ихъ въ точкѣ S , будетъ ясно, что поверхность описанная линіею AD есть поверхность усеченного конуса, въ коемъ OA и DC суть радіусы оснований, тогда какъ точка S представляетъ вершину цѣлаго конуса. Отсюда слѣдуетъ, что поверхность выразится вышеприведенною широтою. Эта шіра будетъ имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ когда бы точка D упала въ S , что дастъ цѣлый конусъ, и когда линія AD параллельна оси, что дастъ цилиндръ. Въ первомъ случаѣ, DC будетъ равна нулю, а во второмъ она равна AO и IK .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Л Е М М А.

✱ 262

Пусть AB, BC, CD , и несколько последовательныхъ сторонъ правильнаго многоугольника, O его центръ и OI радиусъ вписаннаго круга; если предположимъ, что часть многоуг. $ABCD$, находящаяся съ одной стороны діаметра FG , обращается около него, то поверхность описанная $ABCD$ будетъ имѣть мѣру $MQ \times \text{окр. } OI$, гдѣ MQ есть высота поверхности, или часть оси заключающаяся между перпендикулярами AM, DO .

Такъ какъ точка I есть середина AB , и IK перпендикуляръ опущенный на ось изъ точки I , то поверхность описанная AB будетъ имѣть мѣру $AB \times \text{окр. } IK$ (8). Проведя AX , параллельную оси, получимъ тр-ки ABX, OIK , которыхъ стороны взаимно перпендикулярны, т. е. $OI \perp$ къ AB , IK къ AX , и OK къ BX , и изъ подобія ихъ будемъ имѣть пропорцію $AB : AX$ или $MN = OI : IK$, или $\text{окр. } OI : \text{окр. } IK$; слѣд. $AB \times \text{окр. } IK = MN \times \text{окр. } OI$. Отсюда видно, что поверхность, описанная линією AB , равна произведенію своей высоты на окружность вписаннаго круга. Точно также, поверхность описанная линією $BC = NP \times \text{окр. } OI$, и поверхность описанная линією $CD = PQ \times \text{окр. } OI$. И такъ поверхность, описанная частию многоуг. $ABCD$, имѣетъ мѣру $(MN + NP + PQ) \times \text{окр. } OI$, или $MQ \times \text{окр. } OI$, и поэтому равна произведенію своей высоты на окружность вписаннаго круга.

Слѣдствіе. Если цѣлый многоугольникъ имѣетъ четное число сторонъ, и если ось FG проходитъ чрезъ двѣ противоположныя вершины F и G , то цѣлая поверхность, описанная при обращеніи полу-многоугольника $FACG$, будетъ равна его оси FG , умноженной на окружность вписаннаго кру-

га. Эта ось FG будетъ въ то же время діаметромъ круга описаннаго.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

ТЕОРЕМА.

Поверхность шара равна произведенію его діаметра на окружность большаго круга.

Должно доказать 1-е, что діаметръ шара, умно- ◆ 161
женный на окружность большаго круга, не можетъ измѣрять поверхности шара большаго нежели данный. Пусть $AB \propto \text{окр. } AC$ будетъ выражать, если вѣроятно, поверхность шара имѣющаго радіусомъ CD . Опишемъ около круга, пѣтющаго радіусомъ CA , правильный многоуг-къ четнаго числа сторонъ, который бы не вспрѣчалъ окружности описанной радіусомъ CD ; положимъ, что M и S суть двѣ противоположныя вершины многоуг-ка и будемъ обращать полумногоуг-къ MPS около діаметра MS . Поверхность описанная многоугольникомъ будетъ имѣть мѣрою $MS \propto \text{окр. } AC$ (9), и нежъ какъ $MS > AB$, то поверхность описанная многоугольникомъ болѣе $AB \propto \text{окр. } AC$, и, въ сдѣдствіе этого, болѣе поверхности шара, коего радіусъ есть CD . Но, напротивъ, поверхность шара болѣе поверхности описанной многоугольникомъ, потому что первая обернывается послѣднюю со всѣхъ сторонъ, и отсюда 1-е, произведение діаметра шара на окружность большаго круга не можетъ измѣрять поверхность шара большаго нежели данный.

Во вторыхъ, что самое произведение не можетъ измѣрять поверхности меньшаго шара, ибо пусть, если возможно, $DE \propto \text{окр. } CD$ изображаетъ поверхность шара пѣтющаго радіусомъ CA . Если сдѣлаемъ построение подобное предыдущему, то поверхность тѣла произведеннаго многоугольникомъ будетъ всегда равна $MS \propto \text{окр. } AC$. Но такъ какъ

MS менше DE, и окр. AC менше окр. CD; но по оппоз. двумъ причинамъ, поверхность тѣла описаннаго многоугольникомъ будетъ менше DE $\times$ окр. CD, и слѣд. менше поверхности шара, коего радіусъ есть AC. Но, напротивъ, поверхность описанная многоугольникомъ болѣе поверхности шара, притягивающаго радіусомъ AC, потому что первая поверхность обертывается въпорую; слѣд. 2 е, произведение діаметра шара на окружность его большаго круга не можетъ измѣрять поверхности меньшаго шара.

И такъ, поверхность шара равна произведенію его діаметра на окружность большаго круга.

Слѣдствіе. Площадь большаго круга измѣрится произведеніемъ его окружности на половину радіуса, или четверть діаметра; слѣд. поверхность шара въ четыре раза болѣе площади большаго круга.

Замѣчаніе. Найдя такимъ образомъ поверхность шара, и сравнивая ее съ плоскими поверхностями, легко будетъ получить величину сферическихъ двусторонниковъ и сферическихъ трѣхъ, коихъ отношеніе съ цѣлою поверхностію шара выведено выше.

Во первыхъ, сферическій двусторонникъ, коего уголъ есть A, опиошится къ поверхности шара какъ уголъ A къ 4 прямымъ угламъ (20, VII), или какъ дуга большаго круга, измѣряющая уголъ A, къ окружности того же большаго круга. Но поверхность шара равняется произведенію его окружности на діаметръ; слѣд. поверхность сферическаго двусторонника равна произведенію дуги, измѣряющей уголъ его, на діаметръ.

Во вторыхъ, всякій сферическій трѣхъ равноитренъ съ сферическимъ двусторонникомъ, коего уголъ равенъ половинѣ избытка суммы трехъ его угловъ предъ двумя прямыми углами (23, VII). И такъ, пусть P, Q, R, дуги большаго круга, измѣряющія

при угла тр-ка; пусть S окружность большого круга и D его діаметръ; сферическій тр-къ будетъ равномѣренъ съ сферическимъ двусторонникомъ, коего уголъ имѣетъ мѣрою $\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2}$, и поему его поверхность изображена выраженіемъ $D \times \left(\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2} \right)$.

Такъ какъ, въ случаѣ триугольника имѣющаго при прямые угла (tri-rectangle), каждая изъ дугъ P, Q, R , равна $\frac{1}{2}C$, то сумма ихъ будетъ $\frac{3}{2}C$; избытокъ этой суммы предъ $\frac{1}{2}C$ есть C и половина избытка $= \frac{1}{2}C$; слѣд. поверхность тр-ка $= \frac{1}{2}C \times D$, что составляетъ одну осьмую часть поверхности всего шара.

Измѣреніе сферическихъ многоугольнъ выходящихъ непосредственно изъ измѣренія тр-въ, и притомъ оно совершенно определено въ пред. 24, кн. VII, потому что единица мѣры, которая есть сферическій тр-къ о трехъ прямыхъ углахъ, выраженъ мѣрѣ въ частяхъ плоской поверхности.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

ТЕОРЕМА.

Поверхность сферическаго полса равна произведенію его высоты на окружность большого круга.

Пусть EF кака нибудь дуга, большая или меньшая четверти окружности. Если опустимъ перпендикуляръ FG на радіусъ EC , то полсъ съ однимъ основаніемъ, произведенный обращеніемъ дуги EF около EC , будетъ имѣть мѣрою $EG \times \text{окр. } EC$.

Предположимъ сначала, что полсъ имѣетъ меньшую мѣру, и пусть, если возможно, эта

мѣра $= EG \times \text{окр. } CA$. Опишемъ въ дугѣ часть правильнаго многоугольника $EMNOPF$, коего стороны не достигаютъ окружности описанной радіусомъ CA , и проведемъ $CI \perp$ къ EM ; поверхность описаннаго многоуг. EMF , при обращеніи около EC , будетъ имѣть мѣрою $EG \times \text{окр. } CI$ (9). Это количество болѣе $EG \times \text{окр. } AC$, которое, по предположенію, есть мѣра пояса описаннаго дугою EF . Въ слѣдствіе этого, поверхность произведенная многоуг. $EMNOPF$ была бы болѣе поверхности произведенной описанною дугою EF ; но такъ какъ, напротивъ, послѣдняя поверхность болѣе первой, потому что обертывается ее со всѣхъ сторонъ, то отсюда 1-е, мѣра всякаго сферическаго пояса съ однимъ основаніемъ не можетъ быть менѣ высоты его умноженной на окружность большаго круга.

Во вторыхъ, мѣра того же пояса не можетъ быть болѣе произведенія высоты его на окружность большаго круга. Ибо, положимъ, что мы разсматриваемъ поясъ описанный дугою AB около AC , и пусть, если возможно, поясъ $AB > AD \times \text{окр. } AC$. Цѣлая поверхность шара, составленная изъ двухъ поясовъ AB , BN , имѣетъ мѣрою $AN \times \text{окр. } AC$ (10), или $AD \times \text{окр. } AC + BN \times \text{окр. } AC$; и если имѣемъ поясъ $AB > AD \times \text{окр. } AC$, то должно, чинобъ поясъ BN былъ $< BN \times \text{окр. } AC$, что противно доказанному выше. Отсюда 2-е, мѣра сферическаго пояса съ однимъ основаніемъ не можетъ быть болѣе высоты его умноженной на окружность большаго круга.

И такъ, наконецъ, всякій сферическій поясъ съ однимъ основаніемъ имѣетъ мѣрою высоту свою умноженную на окружность большаго круга.

Ф. 230. Разсмотримъ теперь какой нибудь поясъ съ двумя основаніями, произведенный движеніемъ дуги FN около діаметра DE , и опустимъ перпендикуляры FO , NO , на діаметръ. Поясъ, описанный дугою FN , есть разность двухъ поясовъ, описан-

ныхъ дугами DI и DF , и такъ какъ эти полсы имѣютъ мѣру $DQ \times \text{окр. } CD$ и $DO \times \text{окр. } CD$, то полсъ описанный DI имѣетъ мѣру $(DQ - DO) \times \text{окр. } CD$, или $OQ \times \text{окр. } CD$. Отсюда видно, что всякій сферическій полсъ, съ однимъ или двумя основаніями, измѣряется произведеніемъ высоты его на окружность большаго круга.

Слѣдствіе. Два полса взятые въ одномъ шарѣ или въ двухъ равныхъ шарахъ, содержащихъ между собою какъ ихъ высоты, а какой ни есть полсъ относителенъ къ поверхности шара, какъ высота полса къ діаметру.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII

ТЕОРЕМА.

Если тр. BAC и прямоуг-къ $BCEF$, имѣющіе одно основаніе и одну высоту, обращаются около общаго основанія BC , то тѣло произведенное обращеніемъ тр-ка будетъ треть цилиндра произведеннаго обращеніемъ прямоуг-ка.

Опустимъ на ось перпендикуляръ AD ; конусъ описанный тр. ABD есть треть цилиндра описаннаго прямоуг-ку $AFBD$ (5); точно также конусъ описанный тр. ADC есть треть цилиндра описаннаго прямоуг-ку $ADCE$; слѣд. сумма двухъ конусовъ, или тѣло описанное тр-ку BAC , есть треть суммы двухъ цилиндровъ, или цилиндра описаннаго прямоуг-ку $BCEF$.

Если перпендикуляръ AD падаетъ въ тр-ка, то тѣло описанное тр. ABC будетъ разностію конусовъ описанныхъ тр-мъ ABD и ACD , но въ то же время, цилиндръ описанный прямоуг. $BCEF$ будетъ разностію цилиндровъ описанныхъ $AFBD$, $AECD$. И такъ, тѣло произведенное обращеніемъ тр-ва будетъ всегда составлять треть цилиндра, произ-

веденнаго обращеніемъ прямоуг-ка, который имѣетъ одно основаніе и одну высоту съ тр-мъ.

Замѣт. Поверхность круга, имѣющаго радіусъ AD , есть $\pi \times AD$; слѣд. $\pi \times AD \times BC$ есть мѣра цилиндра описаннаго прямоуг-мъ $BCEF$, и $\frac{1}{2} \pi \times AD \times BC$ мѣра тѣла описаннаго тр. ABC .

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

З а д а ч а.

Предполагая, что тр. CAV обращается около линіи CD , проведенной произвольно вѣ тр-ка чрезъ его вершину C , найти мѣру тѣла произведеннаго этимъ обращеніемъ.

Продолжимъ сторону AB до встрѣчи съ осью CD въ D , и опустимъ изъ точекъ A и B перпендикуляры AM , BN , на ось.

Тѣло описанное тр-мъ CAV имѣетъ мѣрою (12) $\frac{1}{2} \pi \times AM \times CD$; тѣло описанное тр. CBV имѣетъ мѣрою $\frac{1}{2} \pi \times BN \times CD$; слѣд. разность этихъ тѣлъ, или тѣло описанное ABC , будетъ имѣть мѣрою $\frac{1}{2} \pi (AM^2 - BN^2) \times CD$.

Можно дать этому выраженію другой видъ. Для того изъ точки I , середины AB , проведемъ $IK \perp$ къ CD , и, чрезъ точку B , линію $BO \nparallel CD$, и будемъ имѣть $AM + BN = 2IK$ (7, III), и $AM - BN = AO$; слѣд. $(AM + BN) \times (AM - BN)$, или $AM^2 - BN^2 = 2IK \times AO$ (10, V). Мѣра предложеннаго тѣла выразится чрезъ $\frac{1}{2} \pi \times IK \times AO \times CD$. Но если проведемъ $CP \perp$ къ AB , то тр-ки ABO , DCP , будутъ подобны, и дадутъ пропорцію $AO : CP = AB : CD$, откуда $AO \times CD = CP \times AB$; сверхъ того $CP \times AB$ вдвое больше площади тр. ABC , откуда $AO \times CD = 2ABC$, и слѣд. тѣло описанное тр. ABC имѣетъ мѣрою $\frac{1}{2} \pi \times ABC \times IK$, или, что одно и тоже,

$ABC \times \frac{1}{2}$ окр. IK (потому что окр. $IK = 2\pi \cdot IK$). И такъ, тѣло произведенное обращеніемъ тр. ABC , имѣетъ мѣру площадь тр-ка умноженную на двѣ трети окружности описанной точкою I , серединою его основанія.

Слѣдствіе. Если сторона $AC = CB$, то линія Φ 267. CI будетъ перпендикулярна къ AB , площадь AEC равна $AB \times \frac{1}{2} CI$, и объемъ $\frac{1}{2} \pi \times ABC \times IK$ обратится въ $\frac{1}{2} \pi \times AB \times IK \times CI$. Но подобіе тр-въ ABO, CIK , даетъ пропорцію $AB : BO$ или $MN = CI : IK$; слѣд. $AB \times IK = MN \times CI$, и тѣло, описанное равнобедреннымъ шр-мъ ABC , будетъ имѣть мѣру $\frac{1}{2} \pi \times MN \times CI$.

Замѣчаніе. Въ общемъ рѣшеніи предполагалось, что продолженная линія AB встрѣтитъ ось, но выводы будутъ не менѣе вѣрны и въ томъ случаѣ, когда AB параллельна оси.

Въ самомъ дѣлѣ, цилиндръ описанный $AMNB$ Φ 268. имѣетъ мѣру $\pi \cdot AM \cdot MN$; конусъ описанный тр. $ACM = \frac{1}{2} \pi \cdot AM \cdot CM$, и конусъ описанный тр. $BCN = \frac{1}{2} \pi \cdot AM \cdot CN$. Соединяя два первыхъ тѣла и отнимая третье, будемъ имѣть для тѣла описаннаго тр. ABC , $\pi \cdot AM \cdot (MN + \frac{1}{2} CM - \frac{1}{2} CN)$; и такъ какъ $CN - CM = MN$, то это выраженіе приводится къ $\pi \cdot AM \cdot \frac{3}{2} MN$, или $\frac{1}{2} \pi \cdot CP \cdot MN$, что согласуется съ прежде найденными выводами.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

ТЕОРЕМА.

Пусть AB, BC, CD , нѣсколько последовательныхъ сторонъ правильнаго многоугольника, O его центръ, и OI радиусъ вписаннаго круга; если вообразимъ, что многоуг. секторъ AOB , расположенный съ одной стороны діаметра FG , обра-

щается вокруг его, то описанное шло будет имѣть мѣрою $\frac{2}{3}\pi$. $OI \cdot MQ$, гдѣ MQ есть часть оси заключающаяся между крайними перпендикулярами AM , DQ .

Такъ какъ данный многоуг-къ есть правильный, то всѣ пр-ки AOB , BOC , и проч., суть равныя и равнобедренныя. Но шло, произведенное равнобедреннымъ пр. AOB , имѣетъ мѣрою $\frac{2}{3}\pi$. $OI \cdot MN$ (13, слѣд.); шло описанное пр. BOC имѣетъ мѣрою $\frac{2}{3}\pi$. $OI \cdot NP$, и шло описанное пр. COB имѣетъ мѣрою $\frac{2}{3}\pi$. $OI \cdot PQ$; слѣд. сумма всѣхъ этихъ шлѣ, или цѣлое шло, описанное многоуг. секторомъ AOD , будетъ имѣть мѣрою $\frac{2}{3}\pi$. $OI (MN + NP + PQ)$, или $\frac{2}{3}\pi$. $OI \cdot MQ$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

ТЕОРЕМА.

Объемъ всякаго сферическаго сектора имѣть мѣрою произведеніе пояса, служащаго ему основаніемъ, на треть радіуса, а объемъ цѣлаго шара имѣть мѣрою произведеніе его поверхности на треть радіуса.

Ф. 188. Пусть ABC круговой секторъ, который, при обращеніи около AC , описываетъ шаровой секторъ; зная, что поясъ описанный AB , имѣетъ мѣрою $AD \times \text{окр. } AC$, или $2\pi \cdot AC \cdot AD$ (12, должно доказать, что шаровой секторъ будетъ имѣть мѣрою этотъ поясъ умноженный на $\frac{1}{3} AC$, или $\frac{2}{3}\pi \cdot AC \cdot AD$.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ во первыхъ, если впо возможно, что количество $\frac{2}{3}\pi \cdot AC \cdot AD$ будетъ мѣрою большаго шароваго сектора; на пр., шароваго сектора описаннаго круговымъ секторомъ ECF , подобнымъ ACB .

Внешнѣ въ дугѣ EF часть правильнаго многоугла $EMNF$, кою стороны не вспрѣчаютъ дуги AB ; вообразимъ потомъ, что многоуг. секторъ $ENFC$ обращается около EC , въ одно время съ круговымъ секторомъ ECF . Пусть CI радиусъ круга вписаннаго въ многоугла, и IG перпендикуляръ опущенный на EC . Тѣло описанное многоуг. секторомъ будетъ пятихъ мѣрою $\frac{1}{2}$ п. $CI \cdot EG$ (14); но $CI > AC$, по построению, и $EG > AD$, потому что, соединивъ AB , EF , изъ подобія прѣмъ EEG , ABD , выводимъ пропорцію $EG : AD = EG : BD = CF : CB$, откуда $EG > AD$.

По второй двойной причинѣ $\frac{1}{2}$ п. $CI \cdot EG$ болѣе $\frac{1}{2}$ п. $CA \cdot AD$. Первое выраженіе есть мѣра тѣла описаннаго многоуг. секторомъ, а второе представляетъ, по предположенію, мѣру шароваго сектора описаннаго круговымъ секторомъ. Но, напротивъ, тѣло разсматриваемое нами меньше шароваго сектора, потому что оно въ немъ содрѣзано; сѣд. сдѣланное нами предположеніе не можетъ существовать, и произведеніе полса, или основанія шароваго сектора, на прѣмъ радиуса не можетъ измѣрять объемъ большаго шароваго сектора.

Во вторыхъ, тоже произведеніе не можетъ измѣрять меньшаго шароваго сектора. Ибо, пусть CEF круговой секторъ производящій обращеніемъ своимъ данный шаровой секторъ, и предположимъ, если возможно, что $\frac{1}{2}$ п. $CE \cdot EG$ будетъ мѣра меньшаго шароваго сектора; на пр. того, который происходитъ отъ обращенія круговаго сектора ACB .

Сохраняя для простоты преднее построеніе, получимъ тѣло описанное многоугольнымъ секторомъ, которое будетъ всегда пятихъ мѣрою $\frac{1}{2}$ п. $CI \cdot EG$. Но $CI < CE$, сѣд. разсматриваемое тѣло меньше $\frac{1}{2}$ п. $CE \cdot EG$, которое, по предположенію,

есть мѣра шароваго сектора, описаннаго круговымъ секторомъ АСВ. И такъ, тѣло описанное многоуг. секторомъ будетъ мѣте шароваго сектора описаннаго АСВ. Но, напротивъ, рассмотримъ тѣло болѣе шароваго сектора, потому что послѣдній въ немъ содержащійся, и слѣд. 2-е, невозможно, чтобы полъ шароваго сектора умноженный на третью радіуса былъ мѣрою меньшаго шароваго сектора.

И такъ, всякій сферическій секторъ пѣтепъ мѣрою произведеніе изъ полса служащаго ему основаніемъ на третью радіуса.

Круговой секторъ АСВ можетъ увеличиться и сдѣлаться равнымъ полукругу; тогда секторъ шара произведенный этимъ обращеніемъ будетъ цѣлый шаръ. И такъ, *объемъ шара равенъ произведенію его поверхности на третью радіуса.*

Слѣдствіе. Поверхности шаровъ относятся между собою какъ квадраты ихъ радіусовъ, и будучи помножены на радіусы, относятся какъ кубы радіусовъ. И такъ, *объемы двухъ шаровъ относятся какъ кубы ихъ радіусовъ или діаметровъ.*

Замѣчаніе. Если R есть радіусъ шара, то поверхность его будетъ $4 \pi R^2$, и объемъ $4 \pi R^2 \times \frac{1}{3} R$, или $\frac{4}{3} \pi R^3$. Называя D діаметръ, будемъ имѣть $R = \frac{1}{2} D$, и $R^3 = \frac{1}{8} D^3$; слѣд. объемъ выразится также чрезъ $\frac{4}{3} \pi \times \frac{1}{8} D^3 = \frac{1}{6} \pi D^3$.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

ТЕОРЕМА.

Поверхность шара относится къ цѣлой поверхности описаннаго около него цилиндра, какъ 2 : 3. Объемы этихъ двухъ тѣлъ находятся въ томъ же отношеніи.

Пусть $MPNQ$ большой кругъ шара и $ABCD$ описанный около него квадратъ; если будемъ обрѣзать вѣдугу полукругъ PMQ и полуквадратъ $PADQ$ около діаметра PQ , то полукругъ опишетъ шаръ, а полуквадратъ произведетъ цилиндръ описанный около шара.

Высота AD цилиндра равна діаметру PQ ; основаніе цилиндра равно большому кругу, ибо пишемъ діаметромъ линію AB , равную MN , и потому выпуклая поверхность цилиндра равна окружности большого круга умноженной на свой діаметръ (4). Такъ какъ вѣдуга одинакова съ вѣдугою поверхности шара (10), то отсюда слѣдуетъ, что поверхность шара равна выпуклой поверхности описаннаго цилиндра.

Но поверхность шара равна четырѣмъ большимъ кругамъ; слѣд. выпуклая поверхность описаннаго цилиндра также равна четырѣмъ большимъ кругамъ, и если прибавимъ къ ней два основанія, равныя двумъ большимъ кругамъ, то цѣлая поверхность цилиндра будетъ равна шести большимъ кругамъ; слѣд. поверхность шара относится къ цѣлой поверхности цилиндра какъ 4 : 6, или какъ 2 : 3.

Во вторыхъ, такъ какъ основаніе описаннаго цилиндра равно большому кругу, а высота его діаметру шара, то объемъ цилиндра будетъ равенъ большому кругу умноженному на діаметръ (1). Но объемъ шара равенъся произведенію четырехъ большихъ круговъ на третью радіуса (13, зам.), что приводится къ одному большому кругу умноженному на $\frac{4}{3}$ радіуса или двѣ трети діаметра; слѣд. шаръ относится къ объему описаннаго цилиндра какъ 2 : 3, и поэтому объемы разсмотрѣнныхъ нами тѣлъ находятся между собою въ отношеніи поверхностей.

Замѣчаніе. Если представимъ себѣ многогранникъ, котораго грани касаются къ шару, то его

можно будетъ разсматривать, какъ составленный изъ пирамидъ имѣющихъ вершину въ центрѣ шара, и концы основаній суть различныя грани многогранника. Но ясно, что всѣ эти пирамиды будутъ имѣть общую высоту радіусъ шара, такъ что каждая пирамида равна произведенію въ грани многогранника служащей ей основаніемъ на треть радіуса; и слѣд. цѣлый многогранникъ будетъ равенъ его поверхности умноженной на треть радіуса вписаннаго шара.

Отсюда видно, что объемы многогранниковъ описанныхъ около шара относятся между собою какъ поверхности многогранниковъ. И такъ, свойство доказанное нами относительно описаннаго цилиндра есть общее для бесконечнаго множества другихъ тѣлъ.

Можно бы было равнымъ образомъ замѣтить, что поверхности многоугольниковъ описанныхъ около круга относятся между собою какъ ихъ обводы.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Задача.

Ф. 271. *Найти объемъ тѣла произведеннаго обращеніемъ круговаго сегмента BMD около діаметра, належащаго внѣ сегмента.*

Опустимъ на ось перпендикулярны BE, DF; изъ центра C опустимъ перпендикуляр CI на хорду BD, и проведемъ радіусы CB, CD.

Тѣло описанное секторомъ BCA = $\frac{1}{2}\pi$. CB. AE (15); тѣло описанное секторомъ DCA = $\frac{1}{2}\pi$. CD. AF; слѣд. разность этихъ тѣлъ, или тѣло описанное секторомъ DCB = $\frac{1}{2}\pi$. CB (AF — AE) = $\frac{1}{2}\pi$. CB. EF. Но тѣло, произведенное обращеніемъ равнобедреннаго тр. DCB, имѣетъ мѣрою $\frac{1}{2}\pi$. CB. EF (14);

сѣд. тѣло произведенное сегментомъ BMD равняется $\frac{1}{2}$ т. EF (CB — CI). Такъ какъ, изъ прямоугольнаго тр. CBI имѣемъ BC — CI = BI = $\frac{1}{2}$ BD, то тѣло описанное сегментомъ BMD выразится $\frac{1}{2}$ т. EF. $\frac{1}{2}$ BD, или $\frac{1}{2}$ т. BD. EF.

Замѣчаніе. Тѣло описанное сегментомъ BMD относится къ шару имѣющему діаметромъ BD, какъ $\frac{1}{2}$ т. BD. EF къ $\frac{1}{2}$ т. BD, или = EF : BD.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Теорема.

Всякій шаровой сегментъ, заключенный между двумя параллельными плоскостями, имѣетъ мѣру произведение его основанія на высотѣ, сложенное съ объемомъ шара, имѣющаго діаметромъ ту же самую высотѣ.

Пусть BE, DF, радіусы основанія сегмента и ф. 271. EF его высотѣ, такъ что сегментъ будетъ произведенъ обращеніемъ круговаго пространства BMDFE около оси EE. Тѣло описанное сегментомъ BMD (17) = $\frac{1}{2}$ т. BD. EF; усѣченной конусъ, описанный трапеціею BDEF (6), = $\frac{1}{2}$ т. EF. (BE + DF + BE. DF); сѣд. сегментъ шара, равный суммѣ этихъ тѣлъ, = $\frac{1}{2}$ т. EF. (2BE + 2DF + 2BE. DF + BD). Но проводя BO $\perp$ EF, будемъ имѣть BO = DF — BE; DO = DF — 2BE. BE + BE² (9, III), и поэтому BD = BO + DO = EF — DF — 2DF $\times$ BE + BE². Подставляя эту величину вмѣсто BD въ выраженіе сегмента и сокращая, получимъ для объема сегмента выраженіе $\frac{1}{2}$ т. EF.

$(3\overline{BE} + 3\overline{DF} + EF)$, которое разлагается на двѣ части; одна $\frac{1}{2} \pi \cdot EF (3\overline{BE} + 3\overline{DF})$, или $EF \left(\frac{\pi \cdot \overline{BE}^2 + \pi \cdot \overline{DF}^2}{2} \right)$

есть полусумма оснований умноженная на высоту, а другая $\frac{1}{2} \pi \cdot EF$ представляет шаръ имѣющій діаметромъ EF (13, зам.); слѣд. всякій шаровой сегментъ и проч.

Слѣдствіе. Если одно изъ оснований равно нулю, то разсѣприваемый сегментъ обратится въ шаровой сегментъ съ однимъ основаніемъ, и слѣд. всякой шаровой сегментъ съ однимъ основаніемъ равенъ половинѣ цилиндра того же основанія и той же высоты, сложеннаго съ шаромъ, котораго діаметръ равенъ высотѣ цилиндра.

Замѣчаніе. Пусть P и Q два основанія сферическаго сегмента, H его высота; объемъ сегмента будетъ $\left(\frac{P+Q}{2} \right) \cdot H + \frac{1}{6} \pi H^3$.

Если сферическій сегментъ имѣетъ только одно основаніе P , то второе равно нулю, и объемъ его будетъ $\frac{1}{2} PH + \frac{1}{6} \pi H^3$.

Конецъ Геометріи.

ПРИМѢЧАНІЯ КЪ ОСНОВАНІЯМЪ ГЕОМЕТРІИ.

ПРИМѢЧАНІЕ I.

(О некоторыхъ названіяхъ и опредѣленіяхъ.)

Въ вышеизъясненномъ сочиненіи введено нѣсколько новыхъ выраженій и опредѣленій, для доставленія геометрическому языку болѣе ясности и краткости. Мы имѣли теперь еще сказать въ нѣсколько словъ сдѣланнымъ нами и предложить еще нѣкоторыя другія, болѣе удовлетворяющія той же самой цѣли.

Въ означенномъ опредѣленіи *прямоугольника* *параллелограмма* и *трапеціи* говорится, что углы нѣкой фигуры суть прямые, но точнѣе бы было сказать, что углы нѣзависимы собою. Ибо, допустивъ, что четыре угла четырехугольника возмѣнились бы прямыми, и также, что притомъ углы равны нѣмъ собою, тогда невозможно доказать существованіе такихъ предположеній, которые вытекаютъ изъ нихъ въ доказательствѣ. Можно бы было имѣвать этого невозможнаго и многихъ другихъ подобнаго рода, располагая опредѣленія не въ началѣ книги, какъ дѣлають обыкновенно, но въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ уже все предполагаемое въ опредѣленіи предварительно доказано.

Слово *наклоненіе* (*inclination*) должно бытъ приниматься въ точномъ же смыслѣ *накл.* и *угла*; и то и другое означаетъ положеніе двухъ линій или плоскостей, которые встрѣчаются, или встрѣжились бы, по достаточному продолженіи. Наклоненіе двухъ линій равно нулю, когда уголъ равенъ нулю, то естьъ, когда линія параллельна, или совпадающая между собою. Наклоненіе есть максимумъ, когда уголъ есть наиболѣйшій, или, когда двѣ линіи составляютъ нѣмъ собою весь прямой уголъ.

Своимъ же *наклономъ* (*inclinet*) принимается въ другомъ смыслѣ, линія *наклонная* тѣмъ болѣе въ другомъ, чѣмъ болѣе она удалена отъ перпендикуляра возстановленнаго въ основаніи.

Единица и другіе геометры дѣлать довольно часто названія *равныхъ треугольниковъ* тѣмъ и въ нѣхъ, которые равны только по площади, и названіе *равныхъ тѣлъ*, тѣмъ и равныхъ только по объему. Намъ казалось гораздо приличнѣе называть эти *прямые углы* или *тѣла*, *треугольниками* или *тѣлами равнопрямыми*, и при этомъ названіе *равныхъ треугольниковъ* и *тѣлъ* тѣмъ и въ нѣхъ, которые могутъ совѣститься по площади.

Кромѣ того, необходимо различать въ тѣлахъ и призмахъ во-

вертнosityтъ два рода равенства весьма несходные между собою. В сѣмъ дѣлѣ, два угла, два многогранные углы, два сферическія многоугольника или триугольника, могутъ быть равны во всѣхъ своихъ составныхъ частяхъ, и, несмотря на то, могутъ не совпадать при наложеніи.

Кажется до сѣихъ поръ подобное замѣчаніе не было сдѣлано въ начальныхъ геометрическихъ сочиненіяхъ, и оныя этого упущенія нѣкоторыя доказательства, основанныя на совпаденіи фигуръ, не имѣютъ надлежащей точности.

Таковы суть доказательства, посредствомъ которыхъ многіе геометры хотѣли вывести равенство сферическихъ триугольниковъ въ однихъ случаяхъ и одинаковыми образомъ съ тригонометрическими прикосновеніями. Пришлось этому подѣлѣ случиться Роберту Симсону (1), который, опровергая доказательство XXVIII-го предложенія, XI книги Евклида, излагаетъ сѣбѣ въ погрѣшность, потому что основываетъ доказательство на совпаденіи, которое вовсе не существующее. Мы сѣмъ не нужно дать особенное намъ разсужденіе, касающееся за собою совпаденія, и называемъ его *различными симметрическими*, а фигуры входящія въ оную случай, *симметрическими фигурами*.

И такъ, названія фигуры *равныя*, *симметрически*, *раскоординатныя*, относятся къ различнымъ предметамъ и не должны быть сближаемы въ одно названіе.

Въ предложеніяхъ относящихся къ многоугольникамъ, многограннымъ угламъ и многограннымъ, мы исключили рѣшительно всѣхъ между ними, которые имѣютъ входящіе углы. Ибо, во первыхъ, въ начальныхъ основаніяхъ должно ограничиться самыми простыми фигурами, и при томъ, еслибы это исключеніе не было мѣсто, то нѣкоторые предложенія не были бы справедливы, или имѣли бы нуду въ значительномъ измѣненіи. Поэтому мы ограничились разширеніемъ линій и поверхностей называемыхъ *выпуклыми* и имѣющихъ то свойство, что прямая линія пересѣкаетъ ихъ только въ двухъ точкахъ.

Намъ довольно часто случалось употреблять выраженіе: *произведеніе точекъ или нѣсколькихъ линій*, подъ которымъ мы разумѣемъ произведеніе чиселъ выражающихъ линіи, по опредѣленіи ихъ величины, относительно произвольно взятой линіиной единицы. Опредѣливъ такимъ образомъ смыслъ этого выраженія, не будемъ изсѣдательно употреблять его. Можно представить сѣбѣ подобнымъ образомъ, что означенъ *произведеніе поверхностей на линію, поверхности на точку* и проч., полагая однажды навсегда, что линіи произведенія должны быть разширяемы, какъ произведенія чиселъ своего собственнаго каждаго рода. И такъ, произведеніе поверх-

(1) См. сочиненіе его, подъ названіемъ *Euclidis Elementorum libri ix, etc.* Glasgove, 1766. Оно переведено на Англійскій языкъ, и издано при разѣ, съ приложеніемъ одиннадцатой и двѣнадцатой книги Евклида. Мы имѣемъ два перевода Евклидовыхъ началъ: послѣдній и лучшій изъ нихъ принадлежитъ Г. Петрушевскому. Пр. Пер.

нормы на шло есть нечто иное, какъ произведение известнаго числа единицъ поверхности на известное число единицъ шло.

Часто въ разговорѣ употребляется слово *уголъ*, для означенія почти находящегося въ это вершинѣ, но это выраженіе неправильно. Было бы лучше и точнее давать назаніе *вершины* точнѣе. Находящійся при вершинѣ *уголъ* многоугольника или многогранника. Именно описать должно понималъ употребленіе словъ *шлангъ* и *вершины* *многоугольника* и *многогранника*.

Мы слѣдовали обыкновенному опредѣленію произвольнымъ по добывать *фигуры*, но выйдя изъ это, что оно содержитъ въ себѣ шри лишніе условия. Но, для построения многоугольника, въ противоположность числу сторонъ есть n , должно сначала знать одну сторону, и знать положеніе вершинъ *угловъ* находящихся въ правомъ. Число *шлангъ* *угловъ* есть $n - 2$, и положеніе каждой вершины требуетъ двухъ данныхъ; слѣд. полное число данныхъ, необходимыхъ для построения многоугольника о n сторонахъ, есть $1 + 2n - 4$, или $2n - 3$. Но такъ какъ, въ подобномъ многоугольнике, одна сторона будетъ принята, то число условий необходимыхъ для того, чтобы многоугольникъ былъ подобенъ данному, есть $2n - 4$, а не $n - 2$, обыкновенное опредѣленіе требуетъ 1 е, чтобы углы были равны какому данному, что составляетъ n условий; 2 е, чтобы соответственныя стороны были пропорциональны, что даетъ $n - 1$ условий. И такъ имѣетъ всего $2n - 1$ условий, и въ этомъ числѣ шри лишніе. Для излеченія этого неудобства, можно бы было разложить опредѣленіе на два друга слѣдующихъ образа:

1 е. Для треугольника подобны, когда имѣютъ по два угла равны какому данному.

2 е. Для многоугольника подобны, когда въ каждомъ изъ нихъ можно составить равное число треугольниковъ отнявъ по какому-нибудь и подобнымъ образомъ разложить.

Но чтобы это послѣднее опредѣленіе не представляло само по себѣ никакихъ лишніе условий, то должно, чтобы число треугольниковъ было равно числу сторонъ многоугольника безъ двухъ, и это можетъ быть въ это двоякимъ образомъ.

Если проведенъ изъ двухъ соответственныхъ угловъ *диагональ* изъ противоположныхъ угловъ, то треугольникъ, составленные изъ каждой многоугольника, будутъ имѣть общую вершину, и сумма ихъ будетъ равно многоугольнику. Можно такъ предположить, что всѣ шриугольники, составленные изъ многоугольника, имѣютъ общій основаніе стороны многоугольника, и вершины ихъ. Вершины различны *угловъ*, противоположны основанію. Такъ какъ, въ этомъ и другомъ случаѣ, число шриугольниковъ есть $n - 2$, то число условий въ подобіи будетъ $2n - 4$, и опредѣленіе не представляетъ ничего лишняго. Допустивъ это новое опредѣленіе, можно принять предіе на сторону и доказать ее непосредственно.

Если опредѣленіе подобія произвольныхъ фигуръ не имѣетъ излеченія простоты и точности въ основаніяхъ геометріи, то опредѣленіе подобія многогранника такъ представляется еще болѣе неудобнымъ.

Евклида это опредѣленіе зависитъ отъ недоказанной теоремы въ другихъ авторѣхъ оно слишкомъ многословно. Вотъ причина, по которой мы оставили прежнія опредѣленія подобныхъ тѣлъ и мѣръ и въ другихъ, основанными на началахъ множенныхъ выше. И такъ какъ остается еще много говорить объ этомъ предметѣ, то мы возвращаемся къ нему въ особенную примѣчанію.

Опредѣленіе *перпендикуляра къ плоскости* можетъ быть рассмотрѣно, какъ теорема; опредѣленіе *наклоненія дугъ плоскостей* должно быть такъ объяснено разсужденіемъ, и подобныя случаи встрѣчаются во многихъ другихъ опредѣленіяхъ. Но сохранивъ эти опредѣленія, сообразно принятому объясненію, мы сочли и нужное дѣлать ссылки на тѣ предложенія, въ которыхъ они были показаны, а иногда довольствовались приобщеніемъ краткаго поясненія.

Уголъ составленный вступреніемъ *дугъ плоскостей* и *линовертанный уголъ*, составленный вступреніемъ многихъ плоскостей въ одной точкѣ, суть величины разнаго рода, которыхъ бы лучше было имѣть особенныя названія. Безъ много труда надѣяться неслѣдуетъ и многословія, говоря о распложеніи плоскостей составляющихъ поверхность многогранника. И такъ какъ теорія многогранниковъ еще до-сихъ поръ мало обработана, то нѣтъ неудобства ввести ие новыя выраженія, если много требуется самое свойство предмета.

Можно было называть *линовертъ* (coin) уголъ составленный двумя плоскостями (*); *ребромъ* линія будетъ тогда общее пересѣченіе двухъ плоскостей. *Линія* можно означать четырьмя буквами, изъ коихъ двѣ среднія соотвѣтствуютъ ребру. Прямой *линіей* былъ бы тогда уголъ составленный двумя перпендикулярными между собою плоскостями. Четыре прямыхъ линія ввели бы все угловое многогранное пространство вокругъ линіи итд. Это новое названіе не препятствуетъ линію итѣхъ вѣровъ уголъ составленный двумя перпендикулярными, проведенными изъ одной плоскости, въ одной точкѣ ребра или общаго пересѣченія (**).

Примѣчаніе II.

Ни доказательство XIX предложенія I книги и нѣкоторыя другія основныя предложенія геометріи.

(*) У насъ болѣе употребительно, въ этомъ случаѣ, названіе *дугаго угла*. Пр. Пер.

(**) Замѣтить, въ заключеніе этой статьи, что Леманръ, при всей откровенности своей въ опредѣленіяхъ, допустилъ такое опредѣленіе *прямой линіи* (опр. 3, кн. I), которое можетъ казаться неслѣпымъ для начинающихъ. Гораздо удовлетворительнѣе опредѣленіе Евклида: *прямая линія есть та, которая лежитъ равнѣстными своими точками*. Пр. Пер.

Доказательство, данное нами въ шестомъ XII предложеніи, есть, можетъ быть, самое простое, какое только существовать собственно въ началѣ науки. Мы надѣемся, что оно будетъ одобрено геометрами геометрической школы и уничтожить несовершенство, которому теорія параллельныхъ линий до сихъ поръ была подвержена.

Мы воспользуемся двумя случаями, чтобы сдѣлать изъ некоторой новаго извѣстія на доказательствѣ того же предложенія, понятное въ 2 изданіи нашей Геометрии, 1800 гиза, и въ сдѣланныхъ, до 5 то включительно. Для этого необходимо приведемъ въ изслѣдваніи слова въ началѣ, на которомъ было основано наше доказательство.

Мы доказали прежде строгимъ образомъ, что сумма угловъ триугольника не можетъ быть больше двухъ прямыхъ угловъ, и очевидно, что это предположеніе опредѣляетъ существенную разность между триугольниками равноугольными и сферическими. После этого оставалось еще доказать, что сумма угловъ триугольника не можетъ быть менѣе двухъ прямыхъ; но какъ доказать чрезъ углы прежде двухъ прямыхъ угловъ, изъ которыхъ извѣстно въ сферическомъ триугольнике, пропорционаленъ площади триугольника, то точно также неимѣннма (defect), предпологая существованіе его въ равноугольныхъ триугольникахъ, былъ бы пропорционаленъ площади триугольника. Теперь очевидно, что если бы можно было по данному триуглу построить другой, въ которомъ бы даннымъ триуглу въ содержаніи по крайней мѣрѣ m разъ, то неимѣннма новаго триугла равнялась бы по крайней мѣрѣ m разъ данному недостающему данному триуглу, такъ что сумма угловъ большаго триугла увеличилась бы прогрессивно, по мѣрѣ увеличивающа m , и наконецъ сдѣлалась бы отрицательною, или равною нулю. Ясно изъ этого выводъ доказываетъ, что сумма угловъ триугольника не можетъ быть менѣе двухъ прямыхъ угловъ. Руководствуясь этимъ неопровержимымъ началомъ, мы показали, что вся триугольность произошедшая изъ точки, какъ построили триугольника, которымъ бы по крайней мѣрѣ два раза содержала въ себѣ данный, но предположивъ решение этимъ, по извѣстному весамъ прошлой задачі, допустить, что чрезъ точку данную въ углы чинимыхъ двухъ прочихъ правого угла, можно всегда провести прямую линию, которая встрѣчась вдругъ обѣ стороны угла.

И такъ мы весьма приближились къ изшемъ (сѣм), и въ результатѣ се совершенно, потому что доказательство наше зависѣло отъ предварительнаго началъ (postulation), которое могло быть въ строгомъ смыслѣ отвергнуто (*). Это самое соображеніе заставило насъ

(*) Въ *Philosophical Magazine* (Марсъ, 1822) находимся слышать одного ученаго геометра, который старался усовершенствовать это доказательство и сдѣлать его независимымъ отъ всякаго postulation, но построеніе употребленное имъ для доказательства второй частіи состояло въ проведеніи изъ данной точки различныхъ прямыхъ въ различныхъ линіяхъ, приближенно до взаимноугодливой, илимъ разсуждать

обратившись въ 9 изданіи въ простому ходу доказательству Еммы, давая смыслъ изъ примѣчанія, въ которомъ изложено строгое доказательство.

Разсуждая иппазительно о томъ предметѣ, мы осмѣлимъ убо-
дѣнныи въ томъ, что для полнаго доказательства нашего
латини изложено бы вывести изъ опредѣленія прямой линіи оны
чтительное ея свойство, которое опровергаетъ вѣрное сужденіе пря-
мой съ нѣкою гиперболою, заключающеюся между двумя асимптотами.

Вотъ выводъ изъложеніи изъидать по этому предмету.

Ф. 274. Пусть BAC данный уголъ и M точка данная внутри угла. Если раздѣлимъ уголъ BAC на двѣ равныя части линіею AB и проведемъ, изъ точки M , линію MP , перпендикулярную къ AB , то прямая MP , продолженная въ обратъ и продолъ направленіи, не только не вѣрнѣе, да въ стороны угла BAC .

Если она встрѣтитъ одну изъ сторонъ угла, то встрѣтитъ и другую, по однообразному расположенію чертежа съ обратъ стороны точки P ; не встрѣтитъ же одной стороны, она не встрѣтитъ и другой по той же самой причинѣ, и слѣд., въ послѣдствіе сего, она должна заключаться въ пространствѣ ограниченномъ сторонами угла BAC ; но противно свойству прямой линіи, чтобы она, будучи неопредѣленно продолжена, заключалась въ уголѣ.

Ф. 275. И действительно, всякая прямая линія AB , начерченная на плоскости и неопредѣленно продолженная въ обѣ стороны, раздѣлитъ плоскость на двѣ такіа части, которыя, по выложенію одной изъ другой, совершенно совпадаютъ и суть равны. Часть AMB всей плоскости, лежащая съ одной стороны AB , равна части AMB , лежащей съ другой стороны, потому что, если возмемъ на плоскости точку C на прямой AB , то всякая другая точка M части AMB , опредѣлится по разстоянію CM и углу ACM . Если возьмемъ теперь, съ другой стороны, уголъ $ACM' = ACM$, и разстояние $CM' = CM$, то очевидно, что точки M и M' будутъ имѣть одно положеніе въ обѣихъ частяхъ плоскости, и что, по взаимномъ положеніи обѣихъ двухъ частей, точки M и M' соединятся въ одну.

Предположимъ теперь, если это возможно, что неопредѣленная прямая линія XY будетъ заключаться вся въ какомъ нибудь угловомъ пространствѣ, въ пр. въ уголѣ BCM . Она можетъ раздѣлится на двѣ равныя или неравныя части, эту часть плоскости, которая заключается въ уголѣ BCM и имѣетъ свою соотвѣствующую часть BCM' , съ другой стороны BC ; но такъ какъ, противъ обѣихъ двухъ равныхъ частей плоскости, есть двѣ другія малѣйшія части въ равныхъ углахъ ACM , ACM' , то ясно, что угловое пространство BCM не есть половина всей плоскости, и слѣд., прямая линія XY , которая, по предположенію, раздѣляетъ на двѣ равныя части пространство BCM , можетъ раздѣлить только на двѣ неравныя части всю плоскость, что противно свойству прямой линіи.

въ смыслъ той гипотезы, которая опровергаетъ предположеніе. Но мы пукаемъ линіи, предполагая, что она будетъ имѣть нѣчто, не имѣющее продолженія неопредѣленно построена сѣ авторъ, что необходимо для точности доказательства.

Предположивъ этого весьма простого начала, несомненно можемъ вывести *propositum*, которое мы пределили, что вышше нашего доказательства. Оно неосредственно и самимъ *propositum* Евклида. Оно легко приводится, какъ мыѣтливо, къ тому случаю, гдѣ одна изъ прямыхъ AC, продолжена въправо въ AB, а другая BD соединяется съ ABD угломъ вѣдшимъ прямымъ. И такъ должно доказать, что въ ономъ случаѣ продолженная BD встрѣжится AC.

Въ самомъ дѣлѣ, еслибѣ это не было вѣрно, то продолжая AC въ C, и сдѣлавъ уголъ $\angle ACD' = \angle ABD$, получили бы, что прямая CD' соединится въ уголъ DHD', и имѣла бы двухъ прямыхъ, что невозможно.

Оставшаяся геометрическая рѣшитель, поелѣ ли оно доказательство быль похвально, преимущественно прѣвъ другимъ, въ основаніяхъ Геометріи, да того чтобы возстановить ходъ доказательства Евклидова, которое вѣдѣется совершенно спротивъ чрезъ уничтоженіе его *propositum*.

Мы предлагаемъ теперь себѣ показать, что можно употреблять знаменъ съ бѣзчисленнъ удобствомъ для строгата доказательства XIV и другихъ основныхъ предположеній геометріи. Мы постараемся показать здѣсь, что не выходя со вѣдѣя и поименнымъ подробностями, достигая съ широкимъ о суммѣ прѣвъ угловъ тригонометріи.

Непосредственно чрезъ положеніе и бѣзъ вѣдѣя предвѣрившея выхъ теоріи доказываемся, что *сумма трехъ угловъ въ треугольнике равна двумъ прямымъ*. Назовемъ r длину стороны, А и В двѣ смежные углы и С прѣтвѣ углы. Должно, чтобы уголъ С былъ совершенно опредѣленъ, когда известны углы А и В, съ стороною r , поному что, еслибѣ нѣкогіе углы С могли соответствовать прѣвъ длиностямъ А, В, r , то было бы столько же различныхъ треугольниковъ, имѣющихъ равную сторону прѣвѣщую въ нѣхъ равнымъ угламъ, что невозможно, слѣд. уголъ С долженъ быть опредѣленъ функцией отъ прѣвъ величествъ А, В, r , что выражается такъ $C = \varphi(A, B, r)$.

Если прѣвомъ уголъ равенъ 1, то углы А, В, С, будутъ чѣмъ содержащимися между 0 и 2 и такъ какъ $C = \varphi(A, B, r)$, то длина r не должна входить въ функцию φ . Въ самомъ дѣлѣ, мы бы имѣли, что уголъ С долженъ быть совершенно опредѣленъ одними величинами А, В, r , бѣзъ другихъ величинъ либо угловъ или линий: но длина r разнообразна съ числами А, В, С, и еслибѣ мы имѣли какое нибудь уравненіе между А, В, С, r , то тогдабѣ имѣли бы нѣкогую величину ϕ въ А, В, С, откуда слѣдовало бы что r равно числу, что не вѣрно: поному r не можетъ входить въ составъ функции φ , и будевъ имѣть просто $C = \varphi(A, B) \dots (1)$.

(1) Прѣтвѣя этого доказательства дѣлалъ возраженіе, говоря, что еслибѣ оно было приложимо, слово въ слово, въ сфер. тригн. то вышло бы, что по двухъ даннымъ угламъ можно опредѣлить прѣтвѣ, что не вѣрно въ нѣхъ вѣдѣя. Можно ошибаться въ это, что въ составъ сфер. тригн. другихъ шести величинъ чѣтвенъ, входить еще

Эта формула доказываетъ уже, что если два угла одного треугольника равны двум угламъ другого, то третьій долженъ быть равенъ третьему. Положивъ это, можно достигнуть безъ затрудненій до теоремы, которую мы выведемъ теперь на яву.

Взвѣмъ тр. ABC, прямоуглоуемый въ A, опустимъ изъ точки A перпендикуляръ AD на гипотенузу. Углы B и D, тр. ABD, равны угламъ B и A, тр. ABC; слѣд., по доказанному выше, третьи углы BAD равны третьему C. Но той же причинѣ, уголъ DAC = B, откуда $BAD + DAC$, или $BAC = B + C$; но уголъ BAC есть прямой; слѣд. *два острые угла прямоугольнаго треугольника равны прямому углу.*

Пусть теперь BAC какоюнибудь треугольникомъ и BC стороной, которая не есть ни въ каждой изъ двухъ другихъ; если изъ противоположнаго ей угла A опустимъ перпендикуляръ AD на BC, то онъ падетъ внутри тр. ABC, и раздѣлитъ его на два прямоугольные тр. ABD, DAC. Но такъ какъ, въ прямоугольномъ тр. BAD, два угла BAD, ABD, равны прямому углу, и въ прямоугольномъ тр. DAC, два угла DAC, ACD, составляютъ также прямой уголъ, то четыре угла соединенные вышѣ, или только три BAC, ABC, ACD, составляютъ два прямыхъ угла, и поэтому *во всякомъ треугольнике сумма трехъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ.*

Отсюда видно, что эта теорема, разсширенная a priori, совершенно независима отъ сцѣпленія нѣсколькихъ предположеній и выводится не посредственно изъ начала однородности, которое должно имѣть мѣсто въ каждомъ отношеніи между какою бы-то-было количественности. Будемъ продолжать теперь наши изслѣдованія и покажемъ что можно вывести изъ того же источника другія основныя теоремы геометріи.

Сохраняя преданія неизмѣненія, назовемъ m сторону противоположную углу A, n сторону противоположную углу B. Величество m должно быть совершенно определено одними количественными A, B, p ; слѣд. m есть функція отъ A, B, p , равно какъ и $\frac{m}{p}$,

такъ что можно сказать $\frac{m}{p} = \varphi : (A, B, p)$. Но $\frac{m}{p}$ есть число, такъ какъ A и B; слѣд. функція φ не можетъ содержать линію p , и поэтому будетъ имѣть просто $\frac{m}{p} = \varphi : (A, B)$, или $m = p\varphi : (A, B)$. Подобнымъ образомъ $n = p\psi : (B, A)$.

Пусть теперь будемъ составлять другой треугольникъ изъ тѣхъ же угловъ A, B, C, концы относительно противоположны

однимъ элементамъ, который нельзя оставить безъ вниманія, ш. е. радиуса шара. Итакъ, если r есть радиусъ, то имѣемъ $C = \varphi(A, B, r)$, будетъ имѣть $C = \varphi(A, B, p, r)$, или $C = \varphi\left(A, B, \frac{r}{p}\right)$,

по закону однородныхъ величинъ. Но $\frac{r}{p}$ есть число, подобно A, B, C, слѣд. ничто не препятствуетъ ему не находиться въ функціи φ , и тогда уже имѣемъ заключить, что $C = \varphi(A, B)$.

сторонам m' , n' , p' . Тогда если A и B не взяты вместе, то будем считать, въ новонахъ триугольникахъ, $m' = r'$ (A , B) и $n' = p'$ (B , A), откуда $m : m' = p : p' = n : n'$, и следовательно триугольники, считаемъ противоположныя стороны углы суть пропорциональны.

Изъ этого общаго предположенія выводится, какъ частнымъ случаемъ, предположеніе повторенное нами въ шестомъ, для доказательствъ теоремъ XX. Въ самомъ дѣлѣ, триаи AFG , AMH , имѣють относителію равныя углы; именно, углы A общіи, и однакъ прямомъ угловъ. Изъ равноугольности этихъ триугольниковъ виденъ принципъ $AF : AL = AG : AM$, посредствомъ котораго предположеніе XX вышій доказывается.

Предположеніе выражаетъ гипотезуъ есть, какъ извѣстно, самаго предположенія о равноугольности триугольниковъ. И такъ, три основныя теоремы геометріи, относящіяся къ тремъ угламъ триугольника, равноугольныхъ триугольниковъ и аврашу гипотезуъ, выводится просто и непосредственно изъ разширеннаго основанія. Такимъ же образомъ можно доказать весьма сокращенно предположенія относящіяся къ подобнымъ фигурамъ и тѣмъ.

Пусть $ABCD$ какомъ ни есть многоугольникомъ, въ-въ стороны AB за основаніе, составимъ столько триаи AEC , ABD , и проч., на основаніи, сколько выходитъ угловъ въ-въ. Пусть основаніе $AB = r$; пусть A и B два угла триаи AEC , прилежащіе къ сторонамъ AB , A' и B' два угла триаи ABD , прилежащіе къ той же сторонамъ AB , и т. д. Фигура $ABCDE$ будетъ совершенно определена, если извѣстна сторона r съ углами A , B , A' , B' , A'' , B'' , и проч., и число данныхъ будетъ вообще $2n - 3$, гдѣ n представляетъ число сторонъ многоугольника.

Положимъ еще, усматриваемъ, что сторона, или одна изъ-въ линий x , проведенная произвольно въ многоугольникъ, будетъ функцией этихъ данныхъ; и такъ какъ $\frac{x}{r}$ должно быть числомъ,

то можно предположить $\frac{x}{r} = r' : (A, B, A', B', \text{и проч.}, \text{или } x =$

rr' ($A, B, A', B', \text{и проч.}$), и функция r' не будетъ сокращать r . Если теперь, взявъ тѣ же углы A , B , A' , B' и проч., и другую сторону r' , составимъ второй многоугольникъ, то получимъ для линии x' , соотвѣствующей x , выраженіе $x' = r'r'$ ($A, B, A', B', \text{и пр.}$) откуда $x : x' = r : r'$. Называя фигуры подобными, будемъ считать, что съ подобными фигурами сходственныя стороны пропорциональны. И такъ, не только сходственныя стороны и сходственныя діагонали, но и всѣ линии расположенныя одинаковымъ образомъ въ обѣихъ фигурахъ, относятся между собою какъ двѣ другія сходственныя стороны.

Назовемъ S поверхность перваго многоугольника. Изъ этого поверхность однородна съ аврашомъ r^2 , то очевидно слѣдуетъ, что $\frac{S}{r^2}$ должно быть числомъ, которое сокращать только углы A , B , A' , B' и проч., такъ что будетъ извѣстна $S = r^2 r' : (A, B, A', B', \text{и пр.})$.

Если S' будетъ поверхность шпораго многоугольника, то по одинаковой причинѣ получимъ $S' = r'^2 \varphi : (A, B, A', B' \text{ и проч.})$, опустивъ вышедшій $S : S' = r^2 : r'^2$, т. е. *поверхности тѣхъ одинаковой фигуры многоугольниковъ подобны какъ диаметры соответственныхъ сторонъ*.

Перейдемъ теперь къ многогранникамъ. Можно предположить, что грань определена по известной стороне r и вѣселяющимъ угламъ A, B, C , и проч. Потому, каждая изъ вершинъ многогранника угловъ, находящихся надъ основаніемъ, будетъ определена посредствомъ трехъ данныхъ, которыхъ можно разсматривать. Какъ такое же число угловъ, такъ что совершенное опредѣленіе многогранника зависить отъ стороны r , и многихъ угловъ A, B, C , и проч., коихъ число неизмѣнимо, смотря по свойству многогранника. Положивъ это, линія которая соединяетъ двѣ вершины, или, для бѣдѣе общности, всякая линія a , проведенная опредѣленными образомъ въ многогранникъ, посредствомъ данныхъ, которыхъ составляють это шло, будетъ функциа отъ данныхъ r, A, B, C и проч., и такъ какъ $\frac{x}{r}$ должно быть число, то функция равная $\frac{x}{r}$ будетъ содержать только углы A, B, C , и проч., и можно предположить $x = r \varphi : (A, B, C, \text{ и проч.})$. Поверхность шлоа однородна съ r^2 ; слѣд. можно изобразиться чрезъ $r^2 \varphi : (A, B, C \text{ и проч.})$, и по однородности объема шлоа съ r^3 , объемъ выражается чрезъ $r^3 \tau : (A, B, C \text{ и проч.})$, гдѣ функции, означенныя чрезъ φ и τ , совершенно не зависятъ отъ r .

Положимъ теперь, что мы построили другое шло, употребивъ шлоае самыя углы A, B, C , и проч., и сторону r' , отличную отъ r . Мы будемъ называть составленные шлоае образцы шлоа *гомологичными тѣлами*, и увидимъ, что линія выраженная чрезъ $r \varphi : (A, B, C \text{ и проч.})$, или просто $r \varphi$, въ одномъ шлоа, будетъ $r' \varphi$ въ другомъ; поверхность бывшая $r^2 \varphi$ въ одномъ будетъ $r'^2 \varphi$ въ другомъ, и наконецъ, объемъ $r^3 \tau$ въ одномъ будетъ $r'^3 \tau$ во второмъ. И такъ 1-е, въ подобныхъ шлоахъ сходственныхъ ребра или линіи пропорціональны; 2-е, поверхности шлоа относятся какъ квадраты сходственныхъ сторонъ, и 3-е, объемы какъ кубы сходственныхъ сторонъ.

Можно приложить весьма легко тѣ же самыя начала къ кругу. Пусть C окружность и S поверхность круга, коего радіусъ r , и такъ какъ не можно существовать двухъ вѣтвящихся круговъ одинаковыхъ одинаковымъ радіусамъ, то количества C и $\frac{S}{r^2}$ должны быть определены функциею отъ r . Но эти количества суть числа; слѣд. они не должны содержать въ ихъ выраженіи линіи r , и по этому будемъ имѣть $\frac{C}{r} = a$ и $\frac{S}{r^2} = b$, гдѣ a и b суть количества постоянныя. Называя C' окружность и S' поверхность другою круга, имѣющаго радіусомъ r' , будемъ имѣть также $\frac{C'}{r'} = a$ и

$S' = \rho$. И такъ $S : S' = r : r'$, и $S : S' = r^2 : r'^2$, и помянутому уже аргументу должно принадлежать между собой такое равенство, а именно: *серьезности ради* подобнаго равенства.

Рассмотрим теперь секторъ, котораго радиусъ r , и λ уголъ при центрѣ, пустьъ x дуга, которая ограничиваетъ секторъ, и y поверхность сектора. Тогда ясно, что совершенно определенъ при неизмѣняемыхъ величинахъ r и λ , то есть, что x и y были бы определенными функциями отъ r и λ , и сдѣл. $\frac{x}{r}$ и $\frac{y}{r^2}$ будутъ также подобными функциями. Но $\frac{x}{r}$ есть число такъ какъ и $\frac{y}{r^2}$; сдѣл. они не могутъ содержать r и должны быть просто функциями отъ λ , такъ что получимъ $\frac{x}{r} = f(\lambda)$, и $\frac{y}{r^2} = g(\lambda)$. Пустьъ x' и y' дуга и поверхность другого сектора, котораго уголъ λ и радиусъ r' ; мы имеемъ эти два сектора подобными секторами, и тогда ясно, уголъ λ одинаковъ въ обоихъ секторахъ, то получимъ $\frac{x}{r} = f(\lambda)$ и $\frac{y}{r^2} = g(\lambda)$.

Отсюда $x : x' = r : r'$ и $y : y' = r^2 : r'^2$, то есть подобными дуги, или дуги подобныхъ секторовъ, пропорциональны радиусамъ, а также секторы пропорциональны квадратамъ радиусовъ. Ясно, что подобными образомъ можно доказать пропорциональность шаровъ кубамъ ихъ радиусовъ.

Во всемъ нами изложенномъ предполагалось, что поверхности и выражены произведениемъ двухъ линій, а именно произведеньемъ радиуса линіи, и что легко доказать посредствомъ анализа. Для этого возьмемъ прямоугольникъ, котораго ширина есть q и p , и представимъ чрезъ $\varphi : (p, q)$ площадь его, какъ функцию отъ p и q . Если будемъ рассматривать другой прямоугольникъ, котораго ширина есть $p + p'$ и q , то ясно, что этотъ прямоугольникъ составленъ изъ двухъ другихъ; одинъ изъ нихъ имѣетъ ширину p и q , другой $p' + q$, такъ что будемъ имѣть

$$\varphi : (p + p', q) = \varphi : (pq) + \varphi : (p'q)$$

Положимъ $p' = p$, получимъ $\varphi : (2p, q) = 2\varphi : (p, q)$.

Если $p = 2p$, то $\varphi : (3p, q) = \varphi : (p, q) + \varphi : (2p, q) = 3\varphi : (p, q)$.

Если $p' = 3p$, то $\varphi : (4p, q) = \varphi : (p, q) + \varphi : (3p, q) = 4\varphi : (p, q)$.

И такъ, вообще, если k есть какое нибудь цѣлое число, то получимъ $\varphi : (kp, q) = k\varphi : (p, q)$, или $\frac{\varphi : (kp, q)}{p} = \frac{\varphi : (p, q)}{1p}$. Они

свои показываютъ, что $\frac{\varphi : (p, q)}{p}$ есть такая функция отъ p , которая не измѣняется, если вместо p вставимъ произвольное кратное количество kp . И такъ эта функция не зависитъ отъ p , и должна являть-

чать въ себя только q . Но, по той же причинѣ, $\frac{\varphi(p, q)}{p}$ должна

быть независима отъ q ; слѣд. $\frac{\varphi(p, q)}{pq}$ не заключается ни p ни q , и

приводится къ одной постоянной a . Въ слѣдствіе этого будемъ имѣть $\varphi(p, q) = apq$, и какъ ничто не препятствуетъ взять $a = 1$, то получимъ $\varphi(p, q) = pq$; и слѣд. поверхность прямоугольника равна произведенію двухъ ея измѣреній.

Совершенно подобнымъ образомъ можно доказывать, что объемъ прямоугольнаго параллелепипеда, чьего ребра суть p, q, r , равенъ произведенію трехъ его измѣреній.

Знѣтъ ли здѣсь, что разсужденіе о функцияхъ, которое доси влечетъ столько простыхъ доказательствъ основныхъ предположеній геометріи, уже было употреблено съ успѣхомъ для доказательствъ основныхъ началъ механики (См. les Mémoires de Turin, томъ 1. Наконецъ, хотя предыдущая теорія утверждена изъ основъ прочной основаній, но имъ не доказано сарынъ того, что она была опровержена Г. Лессю, знаменитымъ Эдинбургскимъ Профессоромъ, въ его основаніяхъ геометріи (2 и 3 изданіе). Не входя въ подробное изслѣдованіе по этому предмету, довольно сказать, что возраженія Г. Лессю были совершенно опровергнуты, сначала Г. Шенкеномъ, его соопочесственникомъ, въ XX томѣ Edinburg Review, и въ послѣдствіи Г. Морисона, членомъ Парламента Авачемъ и нѣмъ, въ Женевской Bibliothèque universelle, Октябръ 1819. Можно имѣти также разборъ этихъ возраженій въ Англическомъ переводѣ нашихъ основній геометріи, изданномъ Г. Давидомъ Брюстеромъ, въ Эдинбургѣ, 1822.

ПРИМѢЧАНІЕ III.

На приближительный выводъ предложенія XVI, книги IV.

Имѣемъ радіусъ болышій, (excedant) и радіусъ меньшій (deficient) которые сходствуютъ въ нѣкоторыхъ цифрахъ, можно кончить вычисленіе весьма скоро, посредствомъ слѣдующей алгебраической формулы.

Пусть a радіусъ болышій и b меньшій, чья разность весьма мала; пусть a' и b' слѣдующіе радіусы, которые выводятся изъ формулы $b' = \sqrt{ab}$, $a' = \gamma \left(a \cdot \frac{a+b}{2} \right)$. Истинная величина есть

последній членъ ряда a, a', a'' и проч., и въ томъ же ряду b, b', b'' , и проч. Назовемъ этотъ послѣдній членъ x , и положимъ $b = a(1 + \epsilon)$; можно также предположить $x = a(1 + P + Q + \text{и проч.})$, гдѣ P и Q суть неопредѣленные коэффициенты. Величина b' и a' дѣлаетъ

$$b' = a \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon - \frac{1}{8} \epsilon^2 + \text{и проч.} \right)$$

$$a' = a \left(1 + \frac{1}{4} \epsilon^2 - \frac{1}{32} \epsilon^3 + \text{и проч.} \right).$$

И если сдѣлаемъ, подобнымъ образомъ, $b' = a'(1 + u)$, то получимъ

$$u' = \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 \text{ и проч.}$$

Но такъ какъ величины x должны быть одна и таже, вставимъ въ рядъ $a, a', a'',$ съ a или a' , слѣдовательно

$$a(1 + P + Q + \text{и проч.}) = a'(1 + P' + Q' + \text{и проч.})$$

Подставляя въ эти уравненія величины a' и u' въ частяхъ a и u , и сравнивая подобные члены, выведемъ $P = \frac{1}{3}$, и $Q = -\frac{1}{12}$; слѣд.

$$x = (1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{12}u^2).$$

Если радиусы a и b согласуются въ первой половинѣ измѣрѣ, то можно отбросить членъ u^2 , и предъидущая величина превратится въ видъ $x = (1 + \frac{1}{3}u) = a + \frac{b-a}{3}$. И такъ, для $a = 1, 1242617$, и $b = 1, 1246068$, выведемъ отсюда непосредственно

$x = 1, 1243791$.

Если радиусы a и b согласуются только въ первой трети измѣрѣ, то должно взять при числѣ предъидущемъ формулы и пошлю для $a = 1, 1265039$ и $b = 1, 1320149$, найдемъ $x = 1, 1243791$.

Можно предположить, что a и b еще болѣе разнствуютъ одна отъ другаго, но въ такомъ случаѣ надлежало бы вычислить величину x , взявъ для этого большее число членовъ.

Приблизительный выводъ прецесса XIV, принадлежащій Іакову Грегори, вообще можетъ подвергнуться подобнымъ сравненіямъ. Мы означимъ числителемъ въ сочиненіи его *Levi cyclo et hyperbolic quadratura*, которое нѣтъ болѣе достоверно, относительно времени появленія его въ свѣтъ (*).

ПРИМЪЧАНІЕ IV.

Въ которомъ доказывается, что отношенія окружности къ діаметру и квадрату діаметра, суть числа несоизмѣримыя.

Разсмотримъ безконечный рядъ

$$1 + \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{1 \cdot 2 + 1} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2} + \text{и проч.}$$

гдѣ общій членъ есть, $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (z + 1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot \dots \cdot (z + n - 1)}$,

и положимъ, что $z : 2$ представляетъ его суммъ. Если подставимъ $z + 1$ вмѣсто z , то $z : (z + 1)$ будетъ подобнымъ образомъ суммъ ряда

(*) Іаковъ Грегори жилъ въ XVII вѣкѣ. Сочиненіе, истинная копія котораго въ настоящее время находится въ Парижѣ, 1667 года. Прим. Пер.

$$1 + \frac{a}{z+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z+1 \cdot z+2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{z+1 \cdot z+2 \cdot z+3} + \text{и проч.}$$

Вычитая эти два ряда почленно одинъ изъ другого, будемъ имѣть $\varphi : z - \varphi : (z+1)$, для суним остатокъ который будетъ

$$\frac{a}{z \cdot z+1} + \frac{a^2}{z \cdot z+1 \cdot z+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{z \cdot z+1 \cdot z+2 \cdot z+3} + \text{и проч.}$$

Но эти остатки можешь быть представлять въ видѣ

$$\frac{a}{z \cdot z+1} \cdot \left(1 + \frac{a}{z+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z+2 \cdot z+3} + \text{и проч.} \right).$$

И тогда онъ приводится въ $\frac{a}{z \cdot z+1} \varphi : (z+2)$.

Слѣд. будемъ имѣть вообще

$$\varphi : z - \varphi : (z+1) = \frac{a}{z \cdot z+1} \varphi : (z+2).$$

Раздѣливъ это уравненіе на $\varphi : (z+1)$, и для простоты вывода, назовемъ $\varphi : z$ такую новую функцію отъ z , что $\varphi : z =$

$$\frac{a}{z} \cdot \frac{\varphi : (z+1)}{\varphi : z}; \text{ тогда можно подставить } \frac{a}{z \varphi : z} \text{ вмѣсто } \frac{\varphi : z}{\varphi : (z+1)},$$

$$\text{и } \frac{(z+1) \varphi : (z+1)}{a} \text{ вмѣсто } \frac{\varphi : (z+2)}{\varphi : (z+1)}. \text{ Въ слѣдствіе этого полу-}$$

чимъ

$$\varphi : z = \frac{a}{z+1+\varphi : (z+1)}.$$

Но вставивъ послѣдовательно въ это уравненіе $z+1$, $z+2$, и проч., имѣемъ z , выведеть

$$\varphi : (z+1) = \frac{a}{z+1+\varphi : (z+2)},$$

$$\varphi : (z+2) = \frac{a}{z+2+\varphi : (z+3)}, \text{ и проч.}$$

Слѣд. величина $\varphi : z$ можетъ выразиться непрерывною дробью

$$\varphi : z = \frac{a}{z} + \frac{a}{z+1} + \frac{a}{z+2} + \text{и проч.}$$

Обратно, непрерывная дробь, продолженная до безконечности, имѣетъ суную $\varphi : z$, или равную ей $\frac{a}{z} \cdot \frac{\varphi : (z+1)}{\varphi : z}$, и эта сунна разложенная въ обыкновенные ряды, есть

$$1 + \frac{a}{c+1} + \frac{1}{2} + \frac{a^2}{c+1 \cdot c+2} + \text{и проч.}$$

$$c \cdot \frac{1 + \frac{a}{c} + \frac{1}{2} + \frac{a^2}{c \cdot c+1} + \text{и проч.}}$$

Теперь, при предположеніи $a = \frac{1}{2}$, непрерывная дробь приметъ видъ

$$\frac{1+}{1} + \frac{4a}{5} + \frac{4a}{5+4a} + \text{и проч.}$$

въ которыхъ всѣ числители, кромѣ перваго, равны $4a$, и знаменатели составляютъ рядъ нечетныхъ чиселъ 1, 3, 5, 7 и проч. И такъ величина этой непрерывной дроби представляется въ видѣ

$$1 + \frac{4a}{2 \cdot 3} + \frac{16a^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{64a^3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{и проч.}$$

$$2a \cdot \frac{1 + \frac{4a}{2} + \frac{16a^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{64a^3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{и проч.}}$$

Но всѣ эти ряды относясь къ известнымъ формуламъ, мы знаемъ, что представляя чрезъ c число, которое произвольнымъ образомъ есть 1, мы приведемъ предыдущее выраженіе къ слѣдующему

$$\frac{2) a - 2) a}{c + c} \cdot \sqrt{a}; \quad \text{или что вышше}$$

$$\frac{2) a - 2) a}{c + c} \cdot 2\sqrt{a} = \frac{4a}{1 + 4a}$$

$$5 + \text{и проч.}$$

Отсюда слѣдующія двѣ главныя формулы, سواءъ потоку, бундъ имъ и положительное или отрицательное. Положимъ сначъ $a = x^2$, бундъ имѣтъ

$$\frac{x - c}{c + c} = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{5} + \frac{x^2}{5} + \text{и проч.}}$$

Пусть положимъ $4a = -x^2$, и въ слѣдующее извѣстной формулы

$$\frac{x\sqrt{-1} - c\sqrt{-1}}{c + c} = -\sqrt{1 - x^2} \quad x, \text{ бундъ имѣтъ}$$

$$c + c$$

$$\text{tang. } x = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^6}{7} - \text{и проч.}$$

Такова формула, которая послужитъ основаніемъ нашему доказательству. Но прежде всего должно доказать два слѣдующіе леммы.

Лемма 1. Пусть будетъ непрерывная дробь, продолженная до безконечности,

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''} + \text{и проч.},$$

въ которой все числа $m, n, m', n', \text{ и проч.}$ суть цѣлыя, положительныя или отрицательныя; если предположимъ это составляющія дроби $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$ и проч., суть менѣе единицы, то вся величина непрерывной дроби будетъ necessarily число несоизмѣримое.

Во первыхъ, величина эта будетъ менѣе единицы. Действительно, не имѣя общаго имени непрерывной дроби, можно предположить, что все знаменатели $n, n', n'', \text{ и проч.}$ суть положительные; и слѣд. каждый членъ данного ряда, будетъ меньше, по предположенію, $\frac{m}{n} < 1$.

Если возмемъ два первые члена, то, по причинѣ $\frac{m'}{n'} > 1$, ясно, что $n + \frac{m'}{n'}$ больше нежели $n - 1$; но $m < n$, и такъ какъ они суть цѣлыя числа, то m будетъ также менѣе $n + \frac{m'}{n'}$. Слѣд. величина происходящая отъ двухъ членовъ

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}$$

менѣе единицы. Вычисливъ теперь три члена произвольной непрерывной дроби, и во первыхъ, слѣдуя предыдущему, величина числа

$$\frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''}$$

будетъ менѣе единицы. Если возмемъ эту величину ω , то ясно, что $\frac{m}{n + \omega}$ будетъ менѣе единицы, и слѣд. величина происходящая отъ трехъ членовъ

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''}$$

менѣе единицы. Продолжая подобное разсужденіе, увидимъ, что при

каковъ бы то ни было числѣ членовъ, взятыхъ изъ предложенной дроби, величина простоящая отъ того всегда будетъ единицы, откуда слѣдуетъ, что и вся величина этой дроби, продолженной до безконечности, будетъ также не больше единицы. Она тогда бы была равна единицѣ только тогда, когда предложенная дробь была бы равна единицѣ.

$$\frac{m}{m+1} = \frac{m'}{m'+1} = \frac{m''}{m''+1} = \text{и проч.},$$

и не въ всякомъ другомъ случаѣ.

Еслибы теперь означили, что величина предложенной непрерывной дроби равна несоизмѣрному числу, то положили, что она равна числу соизмѣрному, на пр. $\frac{B}{A}$, гдѣ B и A суть какія нибудь цѣлыя числа, и будемъ имѣть

$$\frac{B}{A} = \frac{m}{n + \frac{m'}{n' + \frac{m''}{n'' + \text{и проч.}}}}$$

Пусть C, D, E и проч., будутъ неопредѣленныя величины, что имѣемъ

$$\frac{C}{B} = \frac{m'}{n' + \frac{m''}{n'' + \frac{m'''}{n''' + \text{и проч.}}}} \quad \frac{D}{C} = \frac{m''}{n'' + \frac{m'''}{n''' + \text{и проч.}}}$$

и такъ далѣе до безконечности. Такъ какъ эти различныя непрерывныя дроби имѣютъ всѣ члены больше единицы, то ихъ величины, или суммы $\frac{B}{A}, \frac{C}{B}, \frac{D}{C}, \text{и проч.}$, будутъ не больше единицы, вслѣдствіе доказаннаго выше, и поштому $B < A, C < B, D < C$, и проч.; откуда видно, что рядъ A, B, C, D, E, и проч. есть убывающій до безконечности. По соединеніи разсматриваемыхъ непрерывныхъ дробей даемъ

$$\frac{B}{A} = \frac{m}{n + \frac{C}{B}}; \text{ откуда } C = mA - nB,$$

$$\frac{C}{B} = \frac{m'}{n' + \frac{D}{C}}; \text{ откуда } D = m'B - n'C,$$

$$\frac{D}{C} = \frac{m''}{n'' + \frac{E}{D}}; \text{ откуда } E = m''C - n''D, \text{ и проч.}$$

И такъ какъ два первые члена A и B суть цѣлыя, по предположенію, то отсюда слѣдуетъ, что всѣ другіе C , D , E и проч., до самаго порѣ неопредѣленные, суть также цѣлыя числа. Но при этомъ здравому смыслу, чтобы безконечный рядъ A , B , C , D , E , и проч., былъ въ одно и тоже время убывающимъ и составленнымъ изъ цѣлыхъ чиселъ. Припомни, ни одно изъ чиселъ A , B , C , D , E и проч., не можетъ быть равно нулю, потому что предположеніе непрерывнаго ряда продолжается до безконечности, и такимъ образомъ суммѣ представляемыхъ членовъ

$\frac{A}{n}, \frac{B}{n}, \frac{C}{n}, \frac{D}{n}, \frac{E}{n}$, и проч., должны быть всегдѣ

равны чему нибудь. Отсюда слѣдуетъ, что предположеніе, по которому сумма предположенной непрерывной дроби равна некоторой ко-

личеству $\frac{B}{A}$, не будетъ нѣтъ смысла, и эта сумма есть неопредѣленно число несоизмѣримо.

Лемма II. Если, при естѣхъ прежнихъ положеніяхъ, составляющихъ дроби $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n}, \frac{m''}{n}$, и проч. имѣть известную величину въ началѣ ряда, но послѣ некотораго примѣска, утѣхъ постоянно менѣе единиц, то предположенная непрерывная дробь, предположая ее всею безконечною, будетъ имѣть несоизмѣримо величину.

Такъ какъ, считая, на примѣръ, отъ $\frac{m^{IV}}{n^{IV}}$, всѣ дроби $\frac{m^{IV}}{n^{IV}}, \frac{m^{IV}}{n^{IV}}, \dots$ и такъ далѣе, до безконечности, суть менѣе единиц, то, по леммѣ I, непрерывная дробь

$$\frac{m^{IV}}{n^{IV}} + \frac{m^{IV}}{n^{IV}} + \frac{m^{IV}}{n^{IV}} + \frac{m^{IV}}{n^{IV}} + \dots$$

будетъ имѣть величину неопредѣленную. Назовемъ эту величину ω , и предположенная непрерывная дробь превратится въ

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} + \frac{m''}{n''} + \omega$$

Но если сдѣлать послѣдовательно

$$\frac{m'}{n'} + \omega = \omega', \quad \frac{m''}{n''} + \omega' = \omega'', \quad \frac{m}{n} + \omega'' = \omega''',$$

то ясно, что при предположеніи ω несоизмѣримаго, всѣ количества $\omega', \omega'', \omega'''$, должны быть подобными образомъ несоизмѣрими. Но такъ какъ послѣднее количество ω''' равно предположенной непрерывной дроби, то величина этой дроби несоизмѣрна.

Мы можемъ теперь, обращаясь къ нашей предпосылкѣ, доказать слѣдующее общее предположеніе.

ТЕОРЕМА.

Если дуга соизмѣрима съ радіусомъ, то тангенсъ ея не соизмѣрима съ тѣмъ же радіусомъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если радіусъ $= 1$, и дуга $\alpha = \frac{m}{n}$, гдѣ m и n суть нѣкоторыя числа, то формула изведенная выше даетъ, по сокращеніи,

$$\text{tang. } \frac{m}{n} = \frac{m}{n} - \frac{m^3}{3n^3} + \frac{m^5}{5n^5} - \frac{m^7}{7n^7} + \text{и проч.}$$

Эта непрерывная дробь возникаетъ въ случаѣ леммы II; но въ то, что знаменатели $3n, 5n, 7n$, и проч., увеличиваются, между тѣмъ какъ числители m^3 составляютъ постоянно одну величину, и составляющая дробь слѣдуетъ скорѣе небые единицы, отсюда слѣдуетъ, что величина $\text{tang. } \frac{m}{n}$ несоизмѣрима. И такъ если дуга соизмѣрима съ радіусомъ, то тангенсъ ея будетъ съ нею несоизмѣримъ.

Отсюда выводится, какъ непосредственное слѣдствіе, предположеніе составляющее предметъ IV примѣчанія. Пусть τ полуокружность, чей радіусъ есть 1; еслибъ τ была соизмѣрима, то дуга $\frac{\tau}{2}$ была бы также соизмѣрима, и по тому тангенсъ ея несоизмѣримъ,

но извѣстно, вѣрнѣе, что тангенсъ дуги $\frac{\tau}{2}$ равенъ радіусу 1, слѣд. τ не можетъ быть количествомъ соизмѣрима. И такъ, отношеніе окружности къ діаметру есть число несоизмѣримое (*).

Вѣроятно, что число τ не принадлежитъ даже къ алгебраическимъ несоизмѣримымъ величинамъ, то есть, не можетъ быть корнемъ алгебраическаго уравненія съ конечнымъ числомъ членовъ, коимъ предположеніе соизмѣрима; но замѣтся весьма труднымъ доказать строго это предположеніе. Мы докажемъ здѣсь только то, что извѣдывая τ есть количество несоизмѣримо.

Дѣйствительно, если изъ непрерывной дроби, которая выражаетъ $\text{tang. } \alpha$, слѣдуетъ $\alpha = \frac{\tau}{2}$, то по причинѣ $\text{tang. } \alpha = 0$, должно имѣть

(*) Это предположеніе было доказано въ 1-й разъ въ Берлинскихъ Запискахъ, 1761 года, Ламбертомъ.

$$0 = 3 - \frac{\pi^2}{5} - \frac{\pi^2}{7} - \frac{\pi^2}{9} - \text{и проч.}$$

Но еслибъ π^2 было сомнѣннѣе, и еслибъ имѣли $\pi^2 = \frac{m}{n}$, гдѣ m и n цѣлыми числами, то очевидно слѣдовало бы

$$3 = \frac{m}{5n} - \frac{m}{7n} - \frac{m}{9n} - \text{и проч.}$$

Но очевидно, что эта непрерывная дробь также изходящая изъ случая леммы I, и пошому величина ея несомнѣннѣе и не можетъ быть равна числу 3.

И такъ π^2 , или квадратъ отношенія окружности къ діаметру, есть чи до несомнѣннѣе.

ПРИМѢЧАНІЕ V.

Въ которомъ предлагается аналитическое рѣшеніе различныхъ задачъ, относящихся къ тригонометрику, вписанному четырехугольнику, параллелоипеду и треугольной пирамидѣ.

ЗАДАЧА ПЕРВАЯ.

По даннымъ тремъ сторонамъ треугольника, найти его площадь, радиусъ круга вписаннаго и радиусъ круга описаннаго.

4. 126. Пусть стороны $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Если изъ вершинъ А опустимъ перпендикуляръ AD на противоположную сторону BC , то будемъ имѣть (12, III)

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD; \text{ слѣд. } BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}. \text{ Величина}$$

$$\text{эта даетъ } AB^2 - BD^2, \text{ или } AD^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2 =$$

$$\frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}. \text{ ошадца } AD = \sqrt{\frac{[4 \cdot c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2]}{2a}}.$$

Называя S площадь треугольника, будемъ имѣть $S = \frac{1}{2} BC \times AD$; слѣдовательно

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{[4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2]} = \frac{1}{2} \sqrt{(2a^2b^2 + 2c^2a^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}.$$

Эта формула может быть приведена въ виду болѣе удобному для логарифмическаго исчисленія, если замѣтимъ, что колич. стро a, b, c $a^2 + b^2 - c^2$ есть произведение двухъ множителей $2a + (a^2 + b^2 - c^2)$ и $2a - (a^2 + b^2 - c^2)$, изъ коихъ первый $= (a + c)^2 - b^2 = (a + c + b)(a + c - b)$; второй $= b^2 - (a - c)^2 = (b + a - c)(b - a + c)$; слѣд. будемъ имѣть $S = \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}$, и слѣдовъ $\frac{a + b + c}{3} = p$, что дастъ $a + b + c = 2p$, $a + b - c = 2p - 2c$, $a + c - b = 2p - 2b$, $b + c - a = 2p - 2a$, получивъ еще простѣешее выражение

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Отсюда видно, что для полученія площади треуг. должно вѣсть полусумму трехъ сторонъ, вычесть изъ нее послѣдовательно каждую сторону, что дастъ три остатка, умноживъ эти остатки между собой и на полусумму сторонъ, и извлечъ изъ этого произвѣденія квадратный корень изъ произведенія, имѣемъ корень буд. площадь треугольника.

Пусть теперь r радиусъ круга описаннаго около треуг. abc и ρ радиусъ круга вписаннаго въ тотъ же самый треуг. abc . Въ слѣдующемъ предложеніи XXXII, книги III, будемъ имѣть

$$r = \frac{abc}{S}, \quad \rho = \frac{2S}{a + b + c} = \frac{S}{p}, \quad \text{и подставляя сюда величину найденную для } S, \text{ получимъ}$$

$$r = \frac{abc}{\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}, \quad \rho = \sqrt{\frac{p(p - a)(p - b)(p - c)}{p}}.$$

З а д а ч а II.

Даны четыре стороны описаннаго четырехугольника; найти радиусъ круга, поверхность четырехугольника и его углы.

Пусть будутъ даны стороны $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, и неизвѣстны діагонали $AC = x$, $BD = y$. Въ слѣдствіи

теоремы XXXIII, книги III, будемъ имѣть $xy = ac + bd$ и $\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2} =$

$$\frac{ad + bc}{ab + cd}, \quad \text{откуда извлечемъ}$$

$$x = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}, \quad y = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}$$

Но, по предыдущей задачѣ, радиусъ круга описаннаго около тре. ABC , коего стороны суть a , b , x , имѣетъ выразиться формулою

$$r = \frac{abx}{\sqrt{[4b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)]^2}}. \quad \text{Подставляя въ это } x \text{ найденную}$$

выше величину и разлагая явную на множители, получимъ

$$s = \sqrt{\left[\frac{(ac + bd)(ad + bc) \cdot ab + cd}{(a + b + c - d)(a + b + d - c)(a + c + d - b)(b + c + d - a)} \right]}.$$

Положимъ это, будемъ имѣть площадь тр. ABC $= \frac{1}{2}ax$, площадь

тр. ADC $= \frac{1}{2}cdx$; слѣд., площадь четырехугольника ABCD $=$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(ab + cd)x}{2} = \frac{1}{4} [(a + b + c - d)(a + b + d - c)(a + c + d - b)(b + c + d - a)].$$

Если сдѣлать, для краткости, $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$, то получимъ площадь ABCD $= \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$.

Наконецъ, для опредѣленія одного изъ угловъ, наиримъ углы B, замѣтимъ, что тр. ABC даетъ $\cos B = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab}$. Полагая

для сего величину x , и сокращая, получимъ $\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd}$.

$$\text{Отсюда } \frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}, \text{ или } \tan^2 \frac{1}{2} B = \frac{(c + a)^2 - (a - b)^2}{(a + b)^2 - (c - d)^2} =$$

$$\frac{(a + c + d - b)(b + c + d - a)}{(a + b + c - d)(a + b + d - c)}, \text{ и слѣдовательно}$$

$$\tan \frac{1}{2} B = \sqrt{\left(\frac{p - a}{p - c} \cdot \frac{p - b}{p - d} \right)}.$$

ЗАДАЧА III.

Въ четырехугольникѣ ABCD, косяго противоположные углы B и C суть прямые, даны съ стороны AB, AC, съ содержащимся между ними угломъ BAC; найти съ тригону стороны и диагональ AD.

Ф. 277.

Пусть AC $= b$, AB $= c$, и уголъ BAC $= A$. Если продолжить BD и AC до встрѣчи ихъ въ E, то тр. BAE, прямоугольный въ B, въ которомъ извѣстны уголъ BAE и сторона AB, даетъ AE $=$

$$\frac{c}{\sin A}; \text{ слѣд. } CE = \frac{c}{\sin A} - b. \text{ Полагая тр. DCE, прямоугольный въ C, гдѣ извѣстны сторона CE и уголъ CDE } = A, \text{ даетъ } CD =$$

$$CE \cot A = \frac{c - b \sin A}{\sin A}. \text{ Подобнымъ образомъ будемъ имѣть}$$

$$BD = \frac{b - c \sin A}{\sin A}. \text{ Такимъ образомъ двѣ искомыя стороны четырехугольника}$$

$$\text{Отсюда слѣдуетъ, что диагональ AD} = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{c - b \sin A}{\sin A} \right)^2} = \frac{\sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \cos A)}}{\sin A}. \text{ Но въ}$$

тр. ВАС иѣли бы $BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$, гдѣ: діагональ AD, соединяющая два извѣстныхъ угла, отнѣсилась къ діагонали BC, соединяющей два прѣвые угла, $= 1$ мн A.

Замѣчаніе. Діагональ AD есть въ то же время діаметръ круга, въ которомъ четырехугольникъ ABCD будетъ вписанъ.

Въ этомъ кругѣ вписанъ уг. $ABC = \angle DC$ гдѣ, проводя $CF \perp$ къ AB, получимъ тр. ая BFC, ADC, которые будутъ подобны и дадутъ $\angle BFC = \angle AC$ $FC = 1$ мн A, что согласуется съ предыдущимъ выводомъ.

ЗАДАЧА IV.

Даны три ребра параллелепипеда и углы составляемые ими; найти объемъ параллелепипеда.

Пусть ребра $SA = f$, $SB = g$, $SC = h$, и соотношенія между ними углы $ASB = \gamma$, $SC = \beta$, $BSC = \alpha$. Если, изъ точки C, опустимъ перпендикуляръ CO на плоскость ASB, то въ прямоугольномъ тр. ая CSO, $CO = CS \cdot \sin(\angle SC) = h \cdot \sin(\angle SC)$. Кроме того, поверхность параллелограмма ASBP $= fg \sin \gamma$, и гдѣ: называя S объемъ параллелепипеда SI, будемъ имѣть $S = fgh \sin \alpha \sin(\angle SC)$. Остается найти $\sin(\angle SC)$.

Для того, изъ точки S, взявъ радиусомъ $= 1$, опишемъ сферическую поверхность, которая встрѣтитъ въ D, E, F, G, прямыя SA, SB, SC, SO, и получимъ тр. DEF, гдѣ дуга FG перпендикулярна къ FD, потому что плоскость CSO перпендикулярна къ плоскости ASB. И такъ тр. DEF, въ которомъ три стороны

$$DE = \gamma, DF = \beta, EF = \alpha, \text{ дадутъ } \sin E = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}, \quad \text{и}$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)}}{\sin \alpha \sin \gamma}.$$

Положимъ прямоугольный тр. EFG дадутъ $\sin GF$ или $\sin CSO = \sin F \cdot \sin EF = \sin \alpha \cdot \sin E$. Гдѣ $S = fgh \sin \alpha \sin \beta \sin F$, или $S = fgh \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)}$.

Въ этомъ выраженіи возкоренное количество есть произведеніе двухъ множителей $\sin \alpha \sin \gamma + \cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma$ и $\sin \alpha \sin \gamma -$

$$\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma. \text{ Первый } = \cos \beta - \cos(\alpha + \gamma) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2}; \text{ второй } = \cos(\alpha - \gamma) - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2}$$

$$\sin \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}; \text{ гдѣ: полный объемъ } S = 2fgh \sqrt{\left[\sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \right.}$$

$$\left. \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \right]}.$$

ЗАДАЧА V.

По данностямъ предыдущей задачи, найти выражение площади составляющей дѣль противоположныхъ вершинъ.

Ф. 278. Пусть діагональ основанія $SP = z$, и искомая діагональ $ST = u$. Тр. ASP, въ которомъ $\cos SAP = -\cos \gamma$, дѣлится $z^2 = f^2 + g^2 + 2fg \cos \gamma$; подобнымъ образомъ тр. TSP, гдѣ $\cos TPS = -\cos \beta$, дѣлится $u^2 = z^2 + h^2 + 2hz \cos \beta$. Остается только найти косинусъ угла CSP или дуги FH: для того въ оферическомъ тр. EFH, имѣемъ $\cos FH = \cos EF \cos EH + \sin EF \sin EH \cos F$, и подставляя вы-

раженіемъ $EF = a$ и $\cos E = \frac{\cos \beta - \cos a \cos \gamma}{\sin a \sin \gamma}$, получимъ

$$\cos FH = \cos a \cos EH + \frac{\sin EH}{\sin \gamma} (\cos \beta - \cos a \cos \gamma) = \frac{\sin FH \cos \gamma}{\sin \gamma} + \frac{\sin (\gamma - FH) \cos a}{\sin \gamma} = \frac{\sin FH \cos \beta + \sin DH \cos a}{\sin \gamma}. \text{ Слѣд. } 2h \cos FH,$$

или $2h \cos CSP = 2h \cos \beta \cdot \frac{z \sin EH}{\sin \gamma} + 2h \cos a \cdot \frac{z \sin DH}{\sin \gamma}$. Но по

тр. BSP имѣемъ $BP = \frac{SP \sin BSP}{\sin SBR} = BS = \frac{SP \sin BPS}{\sin SBR}$, что даетъ

$$\frac{z \sin FH}{\sin \gamma} = f \text{ и } \frac{z \sin DH}{\sin \gamma} = g; \text{ слѣд. } 2h \cos CSP = 2fh \cos \beta + 2gh \cos a,$$

и наконецъ квадраты исконой діагонали

$$u^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos \gamma + 2fh \cos \beta + 2gh \cos a.$$

Слѣдствіе. Многогранный уголъ А образуется ребрами f, g, h , которые составляютъ между собою углы $200^\circ - \gamma, 200^\circ - \beta, \text{ и } 200^\circ - \alpha$, и поочному достаточно перемѣнить знаки $\cos \gamma$ и $\cos \beta$ въ выраженіи SE, дабы имѣть выраженіе AM. Производя тоже дѣйствіе для другихъ діагоналей, будемъ имѣть слѣдующія величины въ квадратахъ:

$$\overline{ST}^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos \gamma + 2fh \cos \beta + 2gh \cos a.$$

$$\overline{AM}^2 = f^2 + g^2 + h^2 - 2fg \cos \gamma - 2fh \cos \beta + 2gh \cos a.$$

$$\overline{BN}^2 = f^2 + g^2 + h^2 - 2fg \cos \gamma + 2fh \cos \beta - 2gh \cos a.$$

$$\overline{CP}^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos \gamma - 2fh \cos \beta - 2gh \cos a.$$

Откуда извлекаемъ $\overline{ST}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{CP}^2 = 4f^2 + 4g^2 + 4h^2$.

И такъ, во всякомъ параллелограммѣ суммъ квадратовъ четырехъ діагоналей равенъ суммѣ квадратовъ 12 реберъ. Эта замѣчательная теорема сходна съ другою, которая имѣетъ мѣсто въ параллелограммѣ (14, III, слѣдств.), и могла бы быть выведена непосредственно изъ послѣдней. Дѣйствительно, въ параллелограммѣ SCTR, ABMN, имѣемъ

$$\begin{aligned}\overline{ST} + \overline{CP} &= \overline{SM} + \overline{SP}, \\ \overline{AM} + \overline{BN} &= \overline{BM} + \overline{AB}.\end{aligned}$$

Складывая эти уравнения и принимая въ соображеніе, что $\overline{SC} = \overline{BM}$ и $\overline{SP} + \overline{AB} = \overline{AS} + \overline{SB}$, получимъ $\overline{ST} + \overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = 4 \cdot \overline{SA} + 4 \cdot \overline{SB} + 4 \cdot \overline{SC}$.

З а д а ч а VI.

Даны три ребра призматическаго въ вершинѣ трехъугольной пирамиды, и три угла составляемые ими между собою въ вершинѣ.

Пусть $\triangle ABC$ призматическая треугольная пирамида, въ которой $\Phi. 276.$
высшимъ ребра $\overline{SA} = f$, $\overline{SB} = g$, $\overline{SC} = h$, и углы $\angle ASB = \gamma$, $\angle ASC = \beta$, $\angle BSC = \alpha$. Если на ребрахъ $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$, даныя величины и положены, описаны параллелограммы ST , то пирамида, равная шести треугольной пирамиде $BSANMC$, будетъ шестая часть параллелограмма ST . Имяемъ P объемъ пирамиды, будемъ искать, по задачѣ IV,

$$P = \frac{1}{6} gh \gamma (1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma),$$

$$\text{или } P = \frac{1}{6} fgh \gamma \left[\sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} \sin \frac{\gamma + \beta - \alpha}{2} \right].$$

З а д а ч а VII.

По шести длинамъ реберъ или реберъ треугольной пирамиды, найдемъ ея объемъ.

Если удержимъ тѣ же обозначенія, какъ и въ предыдущей $\Phi. 276.$ задачѣ, и кромѣ того сдѣлаемъ $\overline{BC} = f$, $\overline{CA} = g$, $\overline{BA} = h'$, то бу-

$$\text{демъ имѣть } \cos \gamma = \frac{f^2 + g^2 - h'^2}{2fg}, \text{ или } \gamma = \frac{f^2 + h'^2 - g^2}{2fg}, \text{ и } \alpha = \frac{g^2 + h'^2 - f^2}{2gh},$$

Подставляя эти величины въ предыдущую формулу, и дѣлая для краткости $f^2 + h'^2 - g^2 = F$, $f^2 + g^2 - h'^2 = G$, $f^2 + g^2 - h'^2 = H$, получимъ искомымъ объемъ

$$P = \frac{1}{12} \sqrt{F(GH - F^2 - G^2 - H^2) + FGH}.$$

Въ приложеніи этихъ формулъ должно замѣтить, что f' , g' , h' , означаютъ стороны одной грани или основанія, а f , g , h , три другія ребра призматическаго въ вершинѣ, которыхъ расположеніе такое, что f , g и h соответственно противоположны f' , g' и h' .

Замѣчаніе. Если A есть сумма четырехъ треугольниковъ, составляющихъ поверхность пирамиды, и r радиусъ вписаннаго шара, то очевидно, что $P = A \times \frac{1}{3} r$, ибо можно представить

себя пирамиду разделим на четыре друга, которая будут
иметь общую вершинную центръ шара, и основанія их различны: гр
ни пирамиды. И такъ, радиусъ описаннаго шара $r = \frac{4P}{A}$

З а д а ч а VIII

По данностямъ задачи VI, найти радиусъ шара описаннаго
около пирамиды.

Пусть M центръ круга описаннаго около тр. SAB , MO пер-
пендикуляръ опущенный изъ точки M на плоскость SAB , и подоб-
ный образчикъ, N центръ круга описаннаго около тр. SAC , и NO
перпендикуляръ, возмашенный изъ точки N на плоскость SAC .
Два эти перпендикуляра, выходящие изъ одной плоскости MON ,
перпендикулярны въ OA , и сходятся въ точку O , которая бу-
детъ центромъ шара описаннаго, потому что точка O , какъ при-
надлежащая къ перпендикуляру MO , находится въ равномъ рассто-
янн отъ трехъ точекъ S , B , A , и какъ принадлежащая къ перпенди-
куляру NO , въ равномъ разстоянн отъ трехъ точекъ S , A , C и
след. въ равномъ разстоянн отъ четырехъ точекъ S , A , B , C .

Можно вообразить, что точка M определена въ плоскости
 SAB , посредствомъ четырехугольника $SDMH$, гдѣ два угла D и H
суть прямые, и $SD = \frac{1}{2}f$, $SH = \frac{1}{2}g$ и $ASB = \gamma$. Въ подобномъ

го будетъ имѣть, по II задачѣ, $DM = \frac{\frac{1}{2}g - \frac{1}{2}f \cos \gamma}{\sin \gamma}$, и подоб-
ный образчикъ, $DN = \frac{\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}f \cos \beta}{\sin \beta}$.

Назовемъ D угломъ MDN , извѣрающн извлеченіе двухъ плоскостей
 SAB , SAC . Въ соотвѣстномъ треугольникѣ, котораго стороны суть
 α , β , γ , D будетъ угломъ противоположнымъ сторонѣ α , и имѣетъ
образчикъ

$$\cos D = \frac{\cos \alpha - \cos \gamma \cos \beta}{\sin \gamma \sin \beta},$$

такъ что можно принять уголъ D за извѣстнымъ.

Положимъ это, въ четырехугольникѣ $OMDN$, гдѣ два угла M и N
прямые, и гдѣ извѣстны двѣ стороны MD , DN , и содержащн
между ними уголъ $MDN = D$, будетъ имѣть, по III задачѣ, вы-

раженіе діагонали $\overline{OD}^2 = \frac{\overline{DM}^2 + \overline{DN}^2 - 2DM \times DN \cos D}{\sin^2 D}$. Назовемъ

изъ тр. OSD , прямоугольнаго въ D , получимъ $\overline{SO}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{SD}^2$, то
есть величину квадрата радиуса описаннаго шара.

Если подставимъ величинамъ DM , DN , и помножимъ величинамъ $\cos D$
и $\sin D$, дабы имѣть непосредственно выраженіе радиуса SO , то
данности задачи VI, то изведемъ выводъ

$$S_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(h^2 \sin^2 \alpha + h^2 \sin^2 \beta + h^2 \sin^2 \gamma - 2fg \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) \{ \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \}}{(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)}}$$

П р и м ы ч а н и е VI.

О кратчайшем расстоянии между двумя прямыми не лежащими в одной плоскости.

Пусть АВ, СD, два данных прямые, принадлежащие к одной плоскости, между которыми должно определить кратчайшее расстояние. Ф. 280.

Проведенъ чрезъ АВ двѣ взаимно-перпендикулярныя плоскости, которыя встрѣчаются СD въ С и D; изъ точекъ С и D опустимъ перпендикуляры СА и DB на АВ, въ плоскости ABD проведемъ DE, параллельную и AE перпендикулярную въ BA, что составитъ прямоугольникъ ABDE. Соединимъ въ плоскости САЕ, точки С и Е, и проведемъ АЕ, перпендикулярную къ СЕ, наконецъ, въ плоскости CDE, проведемъ EK, параллельную DE, до встрѣчи ея съ СD въ K, сдѣлаемъ АЕ = EK, и соединимъ KL. Должно доказать, 1-е что прямая KL перпендикулярна другъ къ двумъ даннымъ прямымъ АВ, CD, 2-е что эта самая прямая KL короче всѣхъ другихъ, которыя бы соединяли двѣ точки линий АВ, CD, и что, поштому KL, или равна ей АЕ, есть исконое кратчайшее расстояние.

Дѣйствительно, 1-е такъ какъ три прямые AE, AC, АЕ, взаимно перпендикулярны, по по-примечанію то одна изъ нихъ АВ, перпендикулярна къ плоскости двухъ другихъ, и слѣд. перпендикулярна къ АЕ. Прямая KL параллельна DE, а DE параллельна АВ, откуда выводится параллельность АЕ и АВ, и такъ какъ АЕ = EK, то отсюда слѣдуетъ, что фигура AEK, есть прямоугольникъ. Но доказавъ это, уголъ AK будетъ прямымъ, такъ какъ и AK; слѣд. прямая AE перпендикулярна къ плоскости KEC, или CDE, а KL, параллельная AE, также перпендикулярна къ плоскости CDE, и въ слѣдствіе этого перпендикулярна къ CD. И такъ 1-е, прямая KL перпендикулярна другъ къ двумъ даннымъ прямымъ АВ, CD.

2-е. Пусть M какая нибудь точка прямой CD; если проведемъ чрезъ точку M линію MN, параллельную DE или АВ, то расстояние точки M отъ прямой АВ будетъ равно AN, поштому что уголъ BAN есть прямой. Но такъ какъ AN > AE, слѣд. AE есть кратчайшее расстояние между двумя данными линіями АВ, CD.

Положимъ перпендикуляръ СА = a и DB = AE = b, будемъ имѣть CE = c (a² + b²) и такъ какъ площадь тр. ACE выражается равно чрезъ $\frac{1}{2} AC \times AE$ и чрезъ $\frac{1}{2} CE \times AE$, то будемъ имѣть AE =

$\frac{AC \times EA}{CE} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ Таково выраженіе арсина угла между двумя данными линіями.

Если, въ то же время, сдѣлать разстояніе $AB = c$, и назвать A уголъ составленный двумя данными линіями, то естьъ уголъ CDE содержащійся между линіею CD и DE , параллельною AB , то въ

CDE , прямоугольномъ въ E , дается $\cos CDE = \frac{DE}{CE}$, или $\cos A =$

$\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, ибо имѣемъ $\overline{CD} = \overline{CE} + \overline{ED} = a^2 + b^2 + c^2$

Отсюда извлекаемъ такое же $\sin A = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, и $\sin \frac{1}{2}A =$

$\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

ПРИМЪЧАНІЕ VII.

О симметрическихъ многогранникахъ.

Мы предположили для большей простоты, въ опредѣленіи II, книги VI, что плоскость, къ которой отнесены симметричныя многогранники, есть плоскость одной изъ сторонъ; но можно вѣсто ее взять какую нибудь плоскость, и тогда предложеныя нами чинны б-ѣе общности, безъ всякой пермѣны въ доказательствахъ предложенія II, посредствомъ котораго мы опредѣлили взаимныя отношенія двухъ многогранниковъ. Можно также получить вѣдѣльное понятіе объ образѣ существованія взаимъ двухъ многогранниковъ, рассматривая одинъ изъ нихъ какъ изображеніе втораго въ плоскости зрѣнія, которое тогда является вѣсто плоскости.

ПРИМЪЧАНІЕ VIII.

На предложеніе XXV, книги VII.

Эта теорема Эйлера, доказанная имъ въ первый разъ въ *Memoirs de St. Petersburg*, 1766 году представляетъ много сдѣланныхъ, которыя заслуживаютъ быть изложенными.

1-е. Пусть a изображаетъ число треугольниковъ, b число w четырехугольниковъ, c число пятиугольниковъ, которые составляютъ поверхность многогранника: цѣлое число граней будетъ $a + b + c + d + \dots$ проч., и цѣлое число ихъ боковъ $3a + 4b + 5c + 6d + \dots$ проч. Это послѣднее число вдвое болѣе числа реберъ, потому

что одно и то же ребро принадлежит двум сторонам. В след-
ствие этого

$$II = a + b + c + d + n \text{ проч.}$$

$$2A = 2a + 2b + 2c + 2d + n \text{ проч.}$$

И такъ какъ, по теоремѣ Эйлера, $S + II = A + 2$, то отсюда

$$2S = 2 + a + 2b + 2c + 2d + n \text{ т. е.}$$

Первое замѣчаніе, которое можно сдѣлать, разсматривая эту ве-
личину, состоятъ въ томъ, что число нечетныхъ граней $a + c + e + \dots$
и проч., есть всегда четное.

Положимъ для краткости $II = b + 2 + 2d + n$ проч., будемъ имѣть

$$A = \frac{1}{2} II + \frac{1}{2} c.$$

$$S = 2 + \frac{1}{2} II + \frac{1}{2} c.$$

И такъ, во всякомъ многогранникѣ и всегда имѣемъ $A > \frac{1}{2} II$, и
 $S > 2 + \frac{1}{2} II$, гдѣ должно замѣтить, что знакъ $>$ не означаетъ равен-
ства, потому что c не можетъ быть $= 0$.

Число всѣхъ плоскихъ угловъ многогранника есть $2A$, и число
многогранныхъ угловъ S , такъ что среднее число плоскихъ угловъ
составляющихъ многогранный уголъ есть $\frac{2A}{S}$.

Это число не можетъ быть менѣе 3, ибо нѣтъ по крайней
мѣрѣ три плоскихъ угла для составленія одного триграннаго, и по-
тому должно, чтобы $2A > 3S$, гдѣ знакъ $>$ не означаетъ равенства.
Если, имѣя A и S , вставить ихъ величины въ частяхъ II и c ,
то получимъ $3II + c > 6 + \frac{1}{2} II + \frac{1}{2} c$, или $3II > 12 + \frac{1}{2} c$. Выемъ те-
перь въ это выраженіе величины II и c изъ частей a, b, c , имѣемъ

$$3a + 2b + c > 12 + c + 2d + 2e + \dots \text{ и проч.}$$

Откуда видно, что a, b, c , не могутъ быть вдругъ равны 0, и въ
слѣдствіе этого, не существуютъ многогранники, въ которыхъ бы
всѣ грани были больше 5 сторонъ.

Такъ какъ имѣемъ $II > 4 + \frac{1}{2} c$, то подстановленіе величины S и
 A даетъ $S > 6 + \frac{1}{2} c$, и $A > 6 + \frac{1}{2} c$. Но въ то же время $c < 3II - 12$;
сдѣл. $S < 2II - 4$, и $A < 3II - 6$, гдѣ знакъ $>$ и $<$ не означаютъ
равенства. Эти предѣлы имѣютъ мѣсто во всѣхъ многогранникахъ.

2-е. Положимъ $2A > 3S$, что будетъ имѣть мѣсто въ безконечномъ
числѣ многогранниковъ, и особенно въ тѣхъ, которыхъ много-
гранные углы составлены изъ четырехъ или болѣе плоскостей,
будетъ имѣть въ слѣдующихъ случаяхъ $II > 8 + \frac{1}{2} c$, или, по подстановленію
 $a > 8 + c + 2d + 2e + \dots$ и проч.

И такъ должно, чтобы тѣмъ нѣмѣе увеличивался три-
гранникъ, тѣмъ болѣе имѣлъ плоскихъ граней. Предѣлы $II > 8 + \frac{1}{2} c$ даетъ $S > 6 + \frac{1}{2} c$, и $A > 6 + \frac{1}{2} c$,
но имѣетъ въ то же время $c < 3II - 12$, и отсюда слѣдуетъ $S < 2II - 4$,
 $A < 3II - 6$.

3-е. Положимъ $2A > 3S$, что можетъ имѣть мѣсто во многихъ
многогранникахъ, и между прочимъ въ тѣхъ, которыхъ многогран-
ные углы составлены изъ пяти плоскостей. Отсюда слѣдуетъ $II >$
 $20 + \frac{1}{2} c$, или

$$a > 2a + 2b + 5c + 6d + \text{и проч.}$$

И такъ въ одно время $S > 12 + 2$, и $A > 30 + 6$, и при этомъ имѣемъ еще, что $a < 1$, $b < 2$, $c < 3$, $d < 4$, и т. д., и слѣд. имѣемъ $S < \frac{1}{2}(n-2)$ и $A < \frac{1}{2}(n-2)$.

Нельзя предполагать $2\lambda = 6S$, потому что вообще имѣемъ $2\lambda + 12 = 6S$, и слѣд. нѣтъ многогранника, въ которомъ бы всѣ многогранные углы были составлены изъ шести или болѣе плоскихъ угловъ въ равномъ дѣлѣ, и имѣвшая бы величина какою только можетъ быть каждый плоскій уголъ въ совокупленіи съ другими, была бы равна углу равносторонняго треугольника, и шесть такихъ угловъ составили бы четыре прямыхъ угла, что невозможно для многограннаго угла.

4-е. Разсмотримъ многогранникъ, котораго грани суть треугольныя, будемъ имѣть $\phi = 0$, что даетъ $A = \frac{1}{2}n$ и $S = 2 + \frac{1}{2}n$. Предположимъ, кромѣ того, что всѣ углы многогранника будутъ частію пятигранными, частію шестигранными, и позвѣмъ p числу пятигранныхъ угловъ, и q числу шестигранныхъ, будемъ имѣть $S = p + q$ и $2\lambda = 5p + 6q$, что даетъ $6S - 2\lambda = p$, но такъ какъ имѣемъ $A = \frac{1}{2}n$ и $S = 2 + \frac{1}{2}n$; слѣд. $p = 6S - 2\lambda = 12$. И такъ если многогранникъ имѣетъ всѣ грани треугольныя, и если нѣтъ его суть частію шестигранными и частію пятигранными, то число пятигранныхъ угловъ будетъ всегда равно 12. Такъ какъ число шестигранныхъ угловъ произвольно, то остается p неопредѣленнымъ, будемъ имѣть во всѣхъ шести случаяхъ

$$S = 12 + q, \quad n = 20 + 2q, \quad A = 30 + 3q.$$

Мы заключаемъ еще приложенія изысканій числа условій и постоянныхъ, необходимыхъ для опредѣленія многогранника. Это число простѣе представляетъ большую заплотенность и является собою порѣ не быть разрѣшенъ.

Предположимъ сначала, что родъ многогранника опредѣленъ, т. е. что извѣстно число его граней, число створовъ каждой грани, и ихъ взаимное расположеніе. Количества n , S и A , равны a , b , c , и проч., будутъ такими образомъ извѣстны всѣ останется только найти число необходимыхъ данныхъ, угловъ или длинъ, посредствомъ которыхъ многогранникъ можетъ быть построенъ и опредѣленъ.

Разсмотримъ одну изъ граней многогранника, примемъ ее за основаніе. Если n есть число створовъ, то должно имѣть $2n - 1$ данныхъ для опредѣленія этого основанія. Число многогранныхъ угловъ или основанія равно $S - n$; вершина каждого угла требуетъ трехъ данныхъ для ея опредѣленія, и слѣд. нужно $3(S - n)$ данныхъ для опредѣленія $S - n$ вершинъ, а прибавивъ къ нимъ $2n - 1$ данныхъ основанія, получимъ всего $3S - n - 3$. Но это число данныхъ вообще слишкомъ велико и должно быть уменьшено числомъ условій необходимыхъ для того, чтобы вершины соотвѣтствовали одной и той же грани выходившей въ одномъ плоскости. Такъ какъ есть число створовъ основанія, то позволяетъ подобными образомъ n , n' , . . . число створовъ прочихъ граней. Три точки определяютъ плоскость; слѣд. избытокъ предъ 3 въ каждой изъ чиселъ n , n' ,

и проч., дѣлать столько же условій для того чтобы различныя вершины находились въ плоскостяхъ грани. въ которыхъ онѣ принадлежатъ, и полное число такихъ условій будетъ равно: $n'(n'-1) + (n''-1) + (n'''-1) +$ и проч. Но число членовъ этого ряда есть $n-1$, и аріфм. этого $n + n' + n'' +$ и проч. $= 2A$ (см. фиг. 1), сущ. въ рядѣ будетъ $2A - n - 1 (n-1)$. Вычитая эту сумму изъ $2S - n - 3$, останется количество $2S - 2A + 3n - 6$, которое, на причинѣ $S - n = A + 2$, превратится въ A . И такъ число дѣлительностей необходимо для выраженія линейныхъ между собой лицъ ограничивающихъ тело, равняется числу реберъ.

Дѣлать теперь, что выносите, о которыхъ мы дѣлали выше, не должны быть выны произвольно между линіями и углами онѣ принадлежатъ многограннику, потому что, хотя бы мы и были сколько угодно близко къ невыясненію, но въ томъ случаѣ, что многогранникъ описанъ между двумя на немъ линіями сдѣлать между невыясненію. И такъ выносите бы, по данному теоретич., что вообще довольно для ребра для опредѣленія многогранника, но если случаи въ которыхъ это недостаточно. И притомъ если бы была какая нибудь, только не принадлежала прина, то можно составить многогранникъ другой прина, который будетъ принадлежалъ сторонѣ разныя и одинаковыя образныя равнозначныя. Ибо, какъ скоро основаніе не есть треугольникъ, то можно, сохраняя величину сторонъ, измѣнить углы и дать многограннику безконечное число тѣхъ различныхъ видовъ. можно также измѣнить положеніе дѣлительнаго ребра прина въ отношеніи къ плоскости основанія, и наконецъ произвольныя совокупно эти линіи и всегда получить прина, хотя ребра или грани не будутъ принадлежать. Опредѣлено, что въ этомъ случаѣ недостаточно одна ребра для опредѣленія тѣла.

И такъ дѣлительности необходимы для опредѣленія тѣла, сущ. тѣ, которые не выносите изъ собою невыясненности и дѣлать только одно рѣшеніе. Во первыхъ, основаніе $ABCE$ будетъ опредѣлено, фиг. 2а, когда известны стороны AB , съ принадлеженіемъ угламъ BAC , ABC , для точки C ; угламъ BAD , ABD , изъ точки D , и такъ дѣлать для другихъ точекъ. Пусть потомъ M , точка изъ плоскости основанія, которую должно опредѣлить, и эта точка будетъ опредѣлена, если, вообразивъ приращенію $MABC$, или только плоскости MAB , измѣнить углы MAB , ABM и положеніе плоскости MAB къ основанію ABC . Если издѣлать такія образы, посредствомъ трехъ данныхъ дѣлительностей, положеніе каждой изъ вершинъ многогранника изъ плоскости основанія, то очевидно, что многогранникъ будетъ совершенно опредѣленъ, и два многогранника, построенные при одинаковыхъ данныхъ, будутъ необходимо равны. Между тѣмъ они были бы только симметрическими многогранниками, если бы мы построили изъ съ одинакъ стороны плоскости основанія.

Но всегда необходимо выносите три дѣлительности для опредѣленія каждой вершины многогранника, потому что, если точка M должна находиться изъ плоскости уже опредѣленной и вѣдѣномъ пересѣченіи съ основаніемъ есть FG , то достаточно, по выносите FG произвольна, измѣнить углы MGF , MFG ; и слѣд. число дѣлительностей уменьшится

единицею. Если точка M должна выходиться на двухъ определенныхъ плоскостяхъ, или на ихъ общенъ пересѣченіи MK , которое исчисляетъ плоскость ABC въ K , то будемъ уже знать сторону AK , уголъ AKM , и наклоненіе плоскости AKM къ основанію, отсюда можно, что достаточно имѣть уголъ MAK новою данностію. Имѣть то образуетъ число данностей, необходимыхъ для совершеннаго опредѣленія многогранника, приведется всегда къ числу реберъ A .

Сторона AB и число $A - 1$ данныхъ угловъ опредѣляютъ многогранникъ; другая сторона, взятая произвольно, и тѣ же самыя тѣлы опредѣляютъ подобныя многогранники. Отсюда слѣдуетъ, что число условій необходимыхъ для того, дабы два многогранника одного рода были подобны, равно числу реберъ безъ одного.

Вопросъ разрѣше имъ или значительна бы упростился, если бы было извѣстно родъ многогранника, но только число многогранныхъ угловъ его S . Тогда должно опредѣлить произвольно приращенны, посредствующіе треугольники, въ которыхъ будутъ имѣть данности и которымъ будутъ приняты за основаніе тѣлы. Имѣть какъ число вершинъ или основаній будетъ $S - 3$, и такъ для опредѣленія каждой изъ нихъ требуется при данности, то есть, что полное число данностей, необходимыхъ для опредѣленія многогранника, будетъ $3 + 3(S - 3)$, или $3S - 6$.

И такъ, должно имѣть $3S - 7$ условій для того, чтобы многогранникъ, имѣющіе равное число S многогранныхъ угловъ, былъ между собою подобенъ.

ПРИМѢЧАНІЕ IX.

О правильныхъ многогранникахъ.

Мы старались доказать (см. приложение къ книгѣ VIII) существованіе пяти правильныхъ многогранниковъ, т. е. возможность расположить извѣстно число равныхъ плоскостей такъ, что образоваться тѣло, единообразное во всемъ своемъ прѣдѣленіи. Намъ удалось, что въ другихъ сочиненіяхъ предполагають существованіе этого расположенія, не измѣшая достаточно его причинъ и не доказывая это, подобно Евклиду, фигурамъ сложнымъ и изоморфнымъ.

Вопросъ объ опредѣленіи наклоненія двухъ прилежащихъ граней многогранника, и опредѣленіе радиусовъ шара вписаннаго и описаннаго, приведены въ замѣчаніяхъ III и IV къ весьма простому построенію; но не бесполезно будетъ приложить къ этому самыя изысканія тригонометрическое исчисленіе, которое доставитъ еще къ которымъ новымъ предположеніямъ.

Пусть a, b, c , три плоскіе угла составляютъ тѣ тригранникъ уголъ
 Ф 222. *О.* Если предположено имѣть наклоненіе плоскостей, въ которыхъ находится углы a и b , то опишемъ изъ центра O , сферическій треугольникъ ABC , въ которомъ извѣстны стороны $BC = a, AC = b$

$AB = c$, и гдѣ должно вѣсти уголъ C , заключающійся между сторонами a и b . Но извѣстныя формулы даютъ

$$\cos C = \frac{\cos c - \sin a \sin b}{\sin a \sin b}, \text{ и эта формула, примененная въ пяти}$$

правильныхъ многогранныхъ призмахъ или наклоненіе двухъ смежныхъ сторонъ въ каждой изъ этихъ тѣлъ.

Въ *тетраэдрѣ*, три плоскіе угла, составляющіе шригранный уголъ S , суть углы равносторонняго треугольника и потому, ф. 244, полагая полуокружностямъ или дугу въ $20^\circ = \tau$, будемъ имѣть

$$a = b = c = \tau, \text{ слѣд. } \cos C = \frac{\cos \tau - \sin^2 \tau}{\sin^2 \tau} = \frac{\cos \tau (1 - \sin \tau)}{1 - \cos^2 \tau} = \frac{\cos \tau}{1 + \cos \tau}; \text{ но такъ какъ } \sin \frac{1}{2} \tau = \frac{1}{2}, \text{ то } \cos C = \frac{1}{2}.$$

Въ *октаэдрѣ* или кубѣ, три плоскіе угла, составляющіе шригранный уголъ A , суть прямые, поэтому $a = b = c = \frac{1}{2}\pi$, и $\cos a = 0$, откуда $\cos C = 0$. И такъ углы двухъ прилежащихъ граней есть прямой.

Въ *икосаэдрѣ*, если считать $a = D'S = \frac{1}{3}\pi$, $b = DA'T = \frac{1}{3}\pi$, ф. 245,

$$c = TA'S = \frac{1}{3}\pi, \text{ то получимъ } \cos C = \frac{\cos \frac{1}{3}\pi - \sin^2 \frac{1}{3}\pi}{\sin^2 \frac{1}{3}\pi}.$$

Но $\cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; слѣд. $\cos C = -\frac{1}{2}$. Отсюда видно, что наклоненія граней октаэдра и граней икосаэдра суть углы supplementary или другому дополненіе до двухъ прямыхъ угловъ.

Въ *двенадцатиуголѣ*, многогранный уголъ состоитъ изъ трехъ плоскихъ угловъ, изъ коихъ каждый равенъ углу правильнаго пятиугольника. Поэтому, дѣлая $a = b = c = \frac{1}{5}\pi$, получимъ

$$\cos C = \frac{\cos \frac{1}{5}\pi - \sin^2 \frac{1}{5}\pi}{\sin^2 \frac{1}{5}\pi}; \text{ но } \cos \frac{1}{5}\pi = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \text{ слѣд.}$$

$$\cos C = \frac{1 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ и } \sin C = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ и } \tan C = -2.$$

Въ *икосаэдрѣ*, должно считать $c = C'B'D' = \frac{1}{3}\pi$, $a = b = C'BA = \frac{1}{6}\pi$, ф. 247,

$$\text{и потому будемъ имѣть } \cos C = \frac{\cos \frac{1}{3}\pi - \sin^2 \frac{1}{6}\pi}{\sin^2 \frac{1}{6}\pi} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \text{ слѣд. } \sin C = 0. \text{ Такимъ образомъ про-}$$

стая выраженія, посредствомъ которыхъ определяется наклоненіе двухъ граней въ пяти правильныхъ многогранныхъ. Но извѣстныя дѣла, что изъ можно бы было выключить въ одной формулѣ.

Дѣйствительно, пусть n число сторонъ каждой грани, m число ф. 246. плоскихъ угловъ, составляющихъ въ каждой многогранной углы. Если, изъ центра O , радиусомъ $= 1$, опишемъ шаровую поверхность, которая встрѣчается въ p, q и r , линіи OA, OC, OD , то получимъ сое-

рический шр. pqr , где известна прямая уголъ r , уголъ $p = \tau$, и уголъ

$q = \frac{\pi}{n}$, и въ слѣдствіе известной формулы, будетъ имѣть

онъ $qr = \frac{\cos p}{\sin q}$. Но $\cos qr = \cos COB = \sin CDO = \sin \frac{1}{2} C$, где C —

чрезъ уголъ CDE; слѣд. $\sin \frac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{n}}$. Такова общая формула, со-

шорал, будучи приложена послѣдовательно къ пяти многогранни-
камъ, дастъ величины $\cos C$ или $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} C$, одинаковыя съ на-
денными по другому способу. Для этого должно подставлять въ
каждомъ случаѣ, величины m и n , то есть

Тетраедръ, Экзедръ, Октаедръ, Додекаедръ, Икоседръ

$m =$	3	, 3	, 4	, 3	, 5.
$n =$	3	, 4	, 5	, 5	, 3.

Тотъ же сферическій шр. pqr , изъ котораго мы вывели изложенны
двухъ прилежащихъ граней, дастъ $\cos pq = \cos p \cos q$, или $\frac{\cos}{m} =$

$\cos \frac{\pi}{m} \cos \frac{\pi}{n}$. И такъ, назвавъ R радиусъ шара, описаннаго около

многогранника, и r радиусъ шара вписаннаго въ тотъ же многогран-
никъ, будетъ имѣть $\frac{R}{r} = \frac{\tan \frac{\tau}{m}}{\tan \frac{\pi}{n}}$, и приполагъ, для стороны

шр $AB = a$, имѣетъ $CA = \frac{1}{2} a$, и въ слѣдствіе этого $R^2 = \frac{1}{4} a^2 +$

$\frac{1}{4} a^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{n}}$. Эти два уравненія доусть для каждаго многогранника вели-

чины радиусовъ R и r , шара вписаннаго и описаннаго. И такъ по-
емъ, предполагая C известнымъ, $r = \frac{1}{2} a \cos \frac{\tau}{m} \tan \frac{1}{2} C$, и $R =$

$\frac{1}{2} a \tan \frac{\pi}{m} \tan \frac{1}{2} C$.

Въ додекаедрѣ и икоседрѣ видно, что отношеніе $\frac{R}{r}$ имѣетъ видъ

и нѣкое величину $\tan \frac{\pi}{5} \tan \frac{\pi}{5}$. И такъ, если R останется оди-
наковымъ для обоихъ выраженій, то и r будетъ также одинаковъ.
т. е., что если два шара вписаны въ одно и то же шрѣ, то
они будутъ описаны около одного шара, и на оборотъ. Тогда сфер.

ство выдѣлѣть вѣсто въ экваторѣ и околѣдрѣ, пошлову что вѣтчина
 $\frac{1}{2}$ есть, для одного и для другаго шѣла, $\text{tang } \frac{\gamma}{2} = \text{tang } \frac{\gamma}{2}$.

Видѣвши сѣбѣ, что крокъ правильныхъ многогранныхъ со-
 ставляеть еще шѣла ограниченныя подобныи имъ правильными и раз-
 ными многогранниками, потому что, соединяя посредными линиями
 грани два правильные равные шестигра, получимъ шѣла ограни-
 ченное шестью равными и равношорными призматическими. Мо-
 жно составить еще другое шѣло, изъ десяти равныхъ и равно-
 стороннихъ призматическихъ, но шѣло этои правильные много-
 граники выдѣлѣть въ одно время равныя грани и равныя многогран-
 ные углы.

ПРИМѢЧАНІЕ X.

О площади сферическаго треугольника.

Пусть r радиусъ шрѣ, τ полуокружность большаго круга;
 пусть a, b, c , три стороны сферическаго треугольника, A, B, C ,
 дуги большаго круга, которыя выдѣляютъ противолежащія угла.
 Пусть $A + B + C = \tau = S$, въ сѣдѣствіе доказаннаго въ теоремѣ
 (23, VII); площадь сферическаго треугольника равна дугѣ A по-
 множенно на радиусъ, и пошлову выдѣлѣть бытъ выражена чрезъ
 S . Но, по аналогіи *Ненега*, имѣемъ

$$\text{tang } \frac{A+B}{2} : \cot \frac{C}{2} = \cos \frac{a-b}{2} : \cos \frac{a+b}{2},$$

и выдѣлѣвъ ошелоу величину $\text{tang } \frac{1}{2}(A+B)$, выдѣлѣвъ легко возм-
 чимъ $\text{tang } \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C \right) = -\cot \frac{1}{2}S$, и получимъ вселѣ про-
 сную формулу

$$\cot \frac{1}{2}S = \frac{\cot \frac{1}{2}a \cot \frac{1}{2}b + \cot \frac{1}{2}c}{\sin C},$$

которая пошелоу употребляется для вычисленія площади сфериче-
 скаго треугольника, по вѣдѣстнымъ сторонамъ a, b и содержаще-
 му между ними углу C . Можно также выдѣлѣвъ изъ нее шлоу
 выдѣлѣтельными сѣдѣствіями.

1-е. Если уголъ C есть постоянный, такъ какъ и произведение ф. 102,
 $\cot \frac{1}{2}a \cot \frac{1}{2}b$, то площадь сферическаго треугольника, представляема-
 го чрезъ S , будетъ постоянна.

И такъ два тре-я CAB, CDE , выдѣлѣющіе равный уголъ C , будутъ
 равновѣсны, если имѣемъ $\text{tang } \frac{1}{2}CA = \text{tang } \frac{1}{2}CD = \text{tang } \frac{1}{2}CE = \text{tang } \frac{1}{2}CB$,
 что есть, если шягнемъ полусторонь содержащихъ равный
 уголъ сущъ выдѣлѣнно пропорціональны.

2-е. Чшобъ пошоронить на длиной сторонѣ CD и съ шѣлѣ де

угловъ C, шр. CDE равноугранный данному шр-ку CAB, то должно опредѣлить CE изъ пропорціи

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} CD : \operatorname{tang} \frac{1}{2} CA = \operatorname{tang} \frac{1}{2} CB : \operatorname{tang} \frac{1}{2} CE.$$

З е. Для составленія, по данному углу C при вершинѣ равноугранный шр. DCE, равноугранный данному шр. CAB, должно взять $\operatorname{tang} \frac{1}{2} DC$, или $\operatorname{tang} \frac{1}{2} CE$, среднюю пропорціональную между $\operatorname{tang} \frac{1}{2} CA$ и $\operatorname{tang} \frac{1}{2} CB$.

4-е. Таже формула $\cot \frac{1}{2} S = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C}$ можетъ быть

употреблена для весьма простаго доказательства предположенія IIII книги VII, по которому, изъ всѣхъ сферическихкихъ тригонометрическихъ составленныхъ по двумъ даннымъ сторонамъ a и b , наименьшій будетъ ширъ, гдѣ уголъ C, содержащійся между данными сторонами, равенъ суммѣ двухъ другихъ угловъ A и B.

Ф. 283. Радиусомъ $OZ = 1$, опишемъ полуокружность VMZ , сдѣлавъ дугу $AZ = c$, и съ другой стороны центра возмемъ $OP = \cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b$; наконецъ соединимъ PX и опустимъ перпендикуляръ PI на PZ .

Въ прямоугольномъ шр. PXY имѣемъ $\cot P = \frac{PY}{XY} = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C}$; слѣд. $P = \frac{1}{2} S$, и поверхность S будетъ

наименьшая, если уголъ P есть наибольшій. Но очевидно, что въ проведеніи касательной PM къ окружности, уголъ MPO будетъ наибольшій между углами P, и тогда $MPO = MOZ = \frac{1}{2} c$. Отсюда слѣдуетъ, что сферическій треугольникъ, составленный по двумъ даннымъ сторонамъ, будетъ наименьшій, если имѣемъ $\frac{1}{2} S = C - \frac{1}{2} \pi$, или $C = A + B$, что согласуется съ вышеприведеннымъ предположеніемъ.

Потому же самому построенію видно, что наибольшій треугольникъ не могъ бы имѣть мѣста, еслибъ точка P находилась Ф. 277. внутри круга, т. е., еслибъ имѣли $\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b < 1$. Изъ этого условія вытекаютъ послѣдовательно $\cot \frac{1}{2} a < \operatorname{tang} \frac{1}{2} b$, $\operatorname{tang}(\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} a) < \operatorname{tang} \frac{1}{2} b$, $\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} a < \frac{1}{2} b$, и наконецъ $\pi < a + b$, что также согласуется съ замѣчаніемъ XXVI предъ, книгой VII.

ЗАДАЧА I.

Найти площадь сферическаго треугольника посредствомъ трехъ сторонъ.

Для этого должно въ формулу

$$\cot \frac{1}{2} S = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C},$$

подставить величины $\sin C$ и $\cos C$, выраженные въ частяхъ a, b, c ,

по чему такъ имѣемъ $\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$, и $\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b =$

$$\frac{1 + \cos a}{\sin a} + \frac{1 + \cos b}{\sin b}, \text{ что очевидно равно } \cos \left(\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b \right) =$$

$$\frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{\sin a \sin b}. \text{ Но такъ какъ } \cos C \text{ данъ}$$

$$1 + \cos C = \frac{\cos c - \cos(a+b)}{\sin a \sin b} = \frac{2 \sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2}}{\sin a \sin b},$$

$$1 - \cos C = \frac{\cos(a-b) - \cos c}{\sin a \sin b} = \frac{2 \sin \frac{a+c-b}{2} \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin a \sin b}.$$

Перемножив эти два количества и взявъ изъ произведенія, будемъ имѣть

$$\sin C = \frac{2 \left(\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a+c-b}{2} \sin \frac{b+c-a}{2} \right)}{\sin a \sin b}.$$

Слѣд. находимъ

$$\cot^2 \frac{1}{2} S = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{2V \left(\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a+c-b}{2} \sin \frac{b+c-a}{2} \right)}.$$

Эта формула разрѣшаетъ предложенную задачу, но можно до-
справдаться посредствомъ вывода, и для того мы обратимся къ фор-
мулѣ

$$\cot^2 \frac{1}{2} S = \frac{\cot^2 \frac{1}{2} a \cot^2 \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C},$$

откуда имѣемъ $1 + \cot^2 \frac{1}{2} S$, или

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2} S} = \frac{\cot^2 \frac{1}{2} a \cot^2 \frac{1}{2} b + 2 \cot^2 \frac{1}{2} a \cot^2 \frac{1}{2} b \cos C + 1}{\sin^2 C}.$$

Но величина $\cos C$ дана $2 \cot^2 \frac{1}{2} a \cot^2 \frac{1}{2} b \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{2 \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b};$

звѣда въ числитель вѣдѣтъ $\cos c$, $\cos a$, $\cos b$, или величинамъ
 $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} c$, $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} a$, $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} b$, и сокращая, получимъ

$$2 \cot^2 \frac{1}{2} a \cot^2 \frac{1}{2} b \cos C = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} a + \sin^2 \frac{1}{2} b - \sin^2 \frac{1}{2} c}{\sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b} - 2.$$

Бромъ того имѣемъ $\cot^2 \frac{1}{2} a \cot^2 \frac{1}{2} b = \frac{1 - \sin^2 \frac{1}{2} a}{\sin^2 \frac{1}{2} a} \cdot \frac{1 - \sin^2 \frac{1}{2} b}{\sin^2 \frac{1}{2} b} =$

$$\frac{1 - \sin^2 \frac{1}{2} a - \sin^2 \frac{1}{2} b}{\sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b} + 1. \text{ Слѣд., подставляя эти величины, полу-}$$

$$\text{чимъ } \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2} S} = \frac{1 - \sin^2 \frac{1}{2} c}{\sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b \sin^2 C}, \text{ что даетъ } \sin^2 \frac{1}{2} S =$$

$\frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C}{\cos \frac{1}{2} c}$, и наконецъ, вводя величину $\sin C$, будемъ имѣть

$$\Phi. 278. \quad \sin \frac{1}{2} S = \frac{\sqrt{\left(\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a+c-b}{2} \sin \frac{b+c-a}{2}\right)}}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}.$$

Эта формула весьма удобна для логарифмическаго исчисленія.

Если умножить ее на величину $\cos \frac{1}{2} S$, то выведемъ новую формулу

$$\cos \frac{1}{2} S = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} a + \cos^2 \frac{1}{2} b + \cos^2 \frac{1}{2} c + 1}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c},$$

которая имѣетъ то преимущество, что въ составъ ея входятъ члены сомнѣнные.

Отсюда выкасаемъ еще $\frac{1 - \cos \frac{1}{2} S}{\sin \frac{1}{2} S}$, или

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} S = \frac{1 - \cos^2 \frac{1}{2} a - \cos^2 \frac{1}{2} b - \cos^2 \frac{1}{2} c + 2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}{\sqrt{\left(\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a+c-b}{2} \sin \frac{b+c-a}{2}\right)}}.$$

Числитель этого выраженія можетъ разложиться на множители также какъ было сдѣлано въ подобныхъ количествахъ при задаче IV; и тогда будемъ имѣть

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} S = \frac{4 \sin \frac{a+b+c}{4} \sin \frac{a+b-c}{4} \sin \frac{a+c-b}{4} \sin \frac{b+c-a}{4}}{\sqrt{\left(\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a+c-b}{2} \sin \frac{b+c-a}{2}\right)}}.$$

Но имѣемъ $\frac{\sin \frac{1}{2} p}{\sqrt{\sin p}} = \sqrt{\left(\frac{\sin^2 \frac{1}{2} p}{2 \sin \frac{1}{2} p \cos \frac{1}{2} p}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{1}{2} p\right)}$; следовательно

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} S = \sqrt{\left(\operatorname{tang} \frac{a+b+c}{4} \operatorname{tang} \frac{a+b-c}{4} \operatorname{tang} \frac{a+c-b}{4} \operatorname{tang} \frac{b+c-a}{4}\right)}.$$

Мы имѣемъ явное простое и легкое формулы Сивону для вычисл.

З а д а ч а II.

По даннымъ тремъ сторонамъ $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ опредѣлить положеніе точекъ S , центра круга описаннаго ономъ тр. ABC .

Ф. 284. Пусть уголъ $ACI = x$, и дуги $AI = CI = BI = \varphi$. Въ тр-хъ ACI , CBI , будемъ имѣть, по известнымъ формуламъ,

$$\cos x = \frac{\cos \varphi - \cos b \cos \varphi}{\sin b \sin \varphi} = \frac{1 - \cos b}{\sin b} \cot \varphi = \frac{\sin b}{1 + \cos b} \cot \varphi,$$

$$\cos(C-x) = \frac{1 - \cos a}{\sin a} \cos \varphi + \frac{\sin b}{\sin a} \frac{\cos(b-x)}{\cos x}, \text{ или}$$

$$\sin C + \sin C \tan g x = \frac{(1 + \cos b)(1 - \cos a)}{\sin a \sin b}. \text{ Подставляя въ это}$$

уравненіе величины $\sin C$ и $\sin C$, выраженные въ частяхъ a, b, c , и положивъ, для краткости,

$$M = V(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c),$$

$$\text{выведемъ отсюда формулу } \tan g x = \frac{1 + \cos b - \cos a - \cos c}{M}, \text{ кото-}$$

рая определяетъ уголъ ACI . Можно заметить, что по причинѣ равнотренихъ $\triangle ABC$, имѣемъ $ACI = \frac{1}{2}(C + A - B)$, подобнымъ образомъ имѣемъ $BCI = \frac{1}{2}(B + C - A)$, $BAI = \frac{1}{2}(A + B - C)$. Отсюда слѣдуютъ слѣдующія формулы

$$\tan g \frac{1}{2}(A + C - B) = \frac{1 + \cos b - \cos a - \cos c}{M}$$

$$\tan g \frac{1}{2}(B + C - A) = \frac{1 + \cos a - \cos b - \cos c}{M}$$

$$\tan g \frac{1}{2}(A + B - C) = \frac{1 + \cos c - \cos a - \cos b}{M},$$

изъ которыхъ можно присоединить выраженіе $\cot \frac{1}{2} D$, приводимое къ виду

$$\tan g \frac{1}{2}(A + B + C) = \frac{-1 - \cos a - \cos b - \cos c}{M},$$

Найдя величину $\tan g x$, даемъ

$$1 + \tan g^2 x \sin \frac{1}{2} x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2(1 + \cos b)(1 - \cos a)(1 - \cos c)}{M^2} =$$

$$= \frac{16 \cos^2 \frac{1}{2} b \sin^2 \frac{1}{2} c \sin^2 \frac{1}{2} a}{M^2}; \text{ слѣдовательно}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{4 \cos \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} a}{M}. \text{ По нѣмъ уравненію}$$

$$\cos x = \frac{1 - \cos b}{\sin b} \cot \varphi = \tan g \frac{1}{2} b \cot \varphi, \text{ имѣемъ}$$

$$\tan g \varphi = \frac{\tan g \frac{1}{2} b}{\cos x} \text{ слѣд. } \tan g \varphi = \frac{4 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{M} =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{V\left(\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a+c-b}{2} \sin \frac{b+c-a}{2}\right)},$$

ЗАДАЧА III.

Определить на поверхности шара линию, на которой находится вся вершина триг. сдвинуто одного основанія и одной поверхности.

Ф. 286. Пусть ABC одна из сферических тригольниковъ, коихъ общ. основаніе $AB = c$, и дѣлая поверхность $A + B + C = \pi = 2\pi$, пусть IPK неопредѣленный перпендикуляръ, поставленный въ гряди AB. Если возмемъ дугу IP, равную четверти окружности, то P будетъ полюсомъ дуги AB, и дуга PCD, проведенная чрезъ точки P, C, будетъ перпендикулярна къ AB. Пусть $ID = p$, $CD = q$, прямоугольные тр-ан ACD, BCD, въ коихъ нѣтъ AC = b, BC = a, $AD = p + \frac{1}{2}c$, $BD = p - \frac{1}{2}c$, дадутъ $\cos a = \cos q \cos (p - \frac{1}{2}c)$, $\cos b = \cos q \cos (p + \frac{1}{2}c)$. Но выше было найдено

$$\cot \frac{1}{2} S = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{\sin a \sin b \sin C};$$

и подставляя въ эту формулу величинами $\cos a + \cos b = 2 \cos q \cos p \cos \frac{1}{2}c$, $1 + \cos c = 2 \cos^2 \frac{1}{2}c$, $\sin b \sin C = \sin c \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}c \sin B$, будемъ имѣть

$$\cot \frac{1}{2} S = \frac{\cos \frac{1}{2}c + \cos p \cos q}{\sin a \sin \frac{1}{2}c \sin B}.$$

Припомъ, въ прямоугольномъ тр. BCD имѣть

$$\sin a \sin B = \sin q; \text{ donc } \cot \frac{1}{2} S = \frac{\cos \frac{1}{2}c + \cos p \cos q}{\sin \frac{1}{2}c \sin q},$$

или $\cos p \cos q = \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2}c \sin q - \cos \frac{1}{2}c$. Таково отношеніе между p и q, которое должно опредѣлить линію содержащую въ точкѣ C.

Продолживъ IP на количество PK = x, соединивъ KC и введя KC = y. Въ тр. PKC, гдѣ имѣемъ PC = $\frac{1}{2}c - q$ и уголъ KPC = $\pi - p$, спорова KC выйдетъ изъ формулы $\cos KC = \cos KP \sin PK \sin PC + \cos PK \cos PC$, или

$$\cos y = \sin q \cos x - \sin x \cos q \cos p.$$

Подставляя въ это выраженіе, вмѣсто $\cos q \cos p$ величину его $\cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2}c \sin q - \cos \frac{1}{2}c$, получимъ

$$\cos y = \sin x \cos \frac{1}{2}c + \sin q (\cos x - \sin x \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2}c),$$

откуда видно, что имѣемъ $\cos x - \sin x \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2}c = 0$, или $\cot x = \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2}c$, будемъ имѣть $\cot x = \sin x \cos \frac{1}{2}c$, и такъ образомъ величина y останется постоянной.

И такъ, если проведемъ дугу IP, перпендикулярную къ средн. основанію AB, возмемъ вѣтъ полюса часть PK, такъ чтобы $\cot PK = \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2}c$, то вся вершина тригольниковъ имѣющихъ одно основаніе c и поверхность S, будутъ находиться на одной и той же линіи K, какъ полюса, расположенъ KC, вѣтъ такъ образомъ, что $\cos KC = \sin PK \cos \frac{1}{2}c$.

Эта минимальная поверхность обладает свойствами, изложенными в следующем (См. Nova Acta Petropolitana, T. V, часть 1)

Примечание XI.

Из предположение III, книги VIII.

Если предположение подеть быть доказано помыслить, мы приведем его к предварительным леммам, следующим образом.

Должно доказать прежде, что выпуклая поверхность, ограниченная кривизнами AF , BG , и дугой AuB , FuG , не может быть прямоуглыиной $ABGF$, соотвѣствующей чести поверхности прямой вписанной.

Дѣйствительно, пусть S выпуклая поверхность, и пусть, если это возможно, прямоуглыиной $ABGF$ или $AB \times AF = S + M$, гдѣ M есть количество положительное.

Продолживъ высоту AF прямой и пачиная изъ разстоянн AF , равное n разъ вышнему разстоянню AF , гдѣ n есть какое нибудь цѣлое число. Если продолживъ въ тоже время пачиная и прямую, то ясно, что выпуклая поверхность S' , находящаяся между кривизнами AF' , BG' , будетъ содержать n разъ вышнюю поверхность S , такъ что будетъ имѣть $S' = nS$, и такъ $n \times AF = AF'$, или $AB \times AF = nS + nM = S' + nM$. Но n есть произвольное цѣлое число и M для нѣкой поверхности, слѣд. можно взять n пачиная образомъ, что nM будетъ болѣе удвоеннаго отсѣзка AuB , или для этого достаточно

по сдѣлать $n > \frac{2AuB}{M}$; тогда прямоуглыиной $AB \times AF'$, или

плоская поверхность $ABGF'$, была бы болѣе обширнѣе, соотвѣствующая нѣкой выпуклой поверхности S' и дугой равныхъ круговыхъ сегментовъ AuB , FuG . Но, напротивъ, вторая поверхность болѣе невелика первая, по первомъ предварительномъ леммѣ: слѣд. не могла имѣть $S < ABGF$.

Во вторыхъ, тамъ выпуклая поверхность S не можетъ быть равна поверхности прямоуглыиной $ABGF$. Ибо, предположивъ, если это возможно, что при $AF = AB$, выпуклая поверхность AMK будетъ равна прямоуглыиной $AFKE$; чрезъ какую нибудь точку M дуги AME , проведемъ хорды AM , ME , и возмѣстимъ перпендикуляръ MN къ плоскости основанн. Три прямоуглыи $AMNE$, $MEKN$, $AEBF$, имѣю одну высоту, относятся между собой какъ основанн AM , ME , AE ; но такъ какъ $AM + ME > AE$, то сумма прямоуглыи $AMNE$, $MEKN$, болѣе прямоуглыи $AEBF$, которымъ равно имѣемъ, по предположенню, выпуклой поверхности AMK , составленной изъ двухъ особенныхъ поверхностей AN , MK . И такъ сумма прямоуглыи $AMNE$, $MEKN$, болѣе суммы соотвѣствующихъ выпуклыхъ поверхностей AN , MK , и отсюда слѣдуетъ, что по крайней мѣрѣ одинъ изъ прямоуглыи $AMNE$, $MEKN$, долженъ быть болѣе соотвѣствующей выпуклой поверхности. Но такъ какъ

это сдѣлатье показано доказательству выше, то 2-е выпущенное утверждение S не можетъ быть равно померзности соотвѣствующаго призматическаго $ABGF$.

Отсюда слѣдуетъ, что ижесть $S > ABGF$, и что, такимъ образомъ, выпущенная поверхность цилиндра больше померзности ижесть призматическаго призма.

Совершенно подобнымъ образомъ можно доказывать, что ижесть поверхность цилиндра ижесть померзности описанной призма.

ПРИМЪЧАНІЕ XII.

О равенствѣ и подобіи многогранниковъ.

Въ началѣ XI книги Евклида, находится 9 и 10-е опредѣленія, выражающія слѣдующіе образки:

9. Два тѣла подобны, когда они ограничены одинаковыми и слѣды соотвѣстственными подобными плоскостями.

10. Два тѣла равны и подобны, когда они ограничены одинаковыми и слѣды плоскостей относительно равными и подобными.

Предметъ этихъ опредѣленій есть одинъ изъ труднѣйшихъ въ основаніяхъ Геометріи, и потому имъ разсѣпнрнть его съ тѣмъ, чтобы изъяснить подробности, и разбереть, въ шое время, записавъ, слѣдующія по шому предмету Гоберсона Синсона. въ его началѣ изъясненій основаній Евклида, стр. 388 и слѣд.

Записавъ сначала съ Р. Синсономъ, что опредѣленіе 10 и есть собственно опредѣленіе, но штерема, которую должно было доказывать; ибо неочевидно, что два шѣла равны пошому шому, что они ижесть равными гранями, и если это предположеніе справедливо, то должно доказывать его, или чрезъ изъясненіе, или какими ижесть другими образками. Записавъ пошомъ, что пограничность опредѣленія 10 встрѣчается также въ опредѣленіи 9. Ибо, предположивъ опредѣленіе 10, можно думать, что существуютъ два шѣла неравными и исподобными, коихъ грани равны; но тогда, по опредѣленію 9, шрѣше шѣло ижесть грани подобными гранями двухъ шрѣшихъ будетъ подобно каждому изъ нихъ, и, слѣд., подобно двумъ шѣламъ различнаго шѣла. шшшшш выводъ заключаетъ въ себѣ противорѣчіе, или, по крайней мѣрѣ, не согласуется съ понятіемъ, которое мы ижесть о слѣдѣ подобности.

Многіе предположенія XI и XII книги Евклида основаны на 9 и 10 опредѣленіяхъ, и между прочими предположеніе XXVIII, книги XI, на которое основывается извѣреніе призмъ и пирамидъ. Въ такомъ случаѣ бы, что мы ижесть право упрекнуть сочиненіе. Евклида въ шомъ, что оно содержитъ довольно большое число недоказанныхъ строго предположеній. Но одно обстоятельство, которое и

должно упустишь изъ виду, значительнаго ослабленія или усиленія.

Фигуры, концы Евклида доказывавшія равенство или подобіе, основываясь на опредѣленіяхъ 9 и 10, суть таковы, что изъ многогранныхъ угловъ не исключаются большіе шире плоскостей. и во многихъ изъ этихъ теоремъ Евклидова доказаніе должно было бы касаться спрашивать равенство многогранныхъ угловъ, составленныхъ изъ шире плоскостей относительно равныхъ. Съ другой стороны, если два многогранныхъ многоугольника относительно равны или подобны грани, то составленные многогранные углы будутъ составлены изъ одинаковаго числа относительно равныхъ плоскостей угловъ. И тогда ясно, что составленные многогранные углы равны въ шире только случаевъ, когда число плоскостей угловъ не превышаетъ шире. Но если составленные грани и составленные многогранные углы равны, то ясно сомнѣніе въ равенствѣ шире, ибо они могутъ быть разными отъ ф. 17. но не другіе, или, по крайней мѣрѣ, въ шире несогласованъ равноположеніе. Однако видно, что доказаніе 9 и 10 въ опредѣленіи справедливо и можетъ быть допущено въ случаѣ шире равныхъ угловъ, которымъ только расширилъ Евклидовъ. И тогда, вѣроятно тѣ, въ которой можно удержать Евклидъ или его комментаторовъ, дѣлается не столь важно и можетъ быть опущено только въ исключеніяхъ и поспѣшнѣе изъ опущенныхъ.

Остается исследовать, будетъ ли справедливо вообще какое-либо опредѣленіе 10, въ случаѣ угловъ шире равныхъ. Робертъ Симсонъ дѣлаетъ противъ этого возраженіе и говоритъ, что можно показать два неравные шире, которые будутъ исключаться между оди наводнѣе числомъ относительно равныхъ граней. Въ возраженіе же этого, онъ приводитъ слѣдующіи примѣры.

Если, въ законъ нѣбудь многограннику прибавить вершины, взявъ за основаніе ее одну изъ граней многогранника, и если пошлемъ, нѣкто того чѣмъ прибавили вершину опустить ее, составивъ въ многогранникѣ выемъ равная опирающія, то получимъ, имѣюща образъ, два нова шире, которые имѣютъ равная грани, но будутъ между шире неравны.

Нѣтъ никакого сомнѣнія въ неравенствѣ двухъ шире шире образъ построенымъ; но замѣтимъ, что одно изъ шире содержитъ многогранные входящіе углы, и пошлону всѣмъ вѣроятно, что Евклидъ подразумѣвалъ въ шире случаѣ исключенія шире не правильныхъ, нѣкоторыхъ углубленій или входящихъ угловъ, и ограничивался только выпуклыми многогранниками. При этомъ замѣтимъ, безъ всего нѣкимъ другія доказательства небыли бы вѣрны, примѣръ Роберта Симсона не опровергаетъ опредѣленія или теоремъ Евклида.

Какъ бы то ни было, но изъ всѣхъ шире замѣтимъ слѣдуетъ, что 9 и 10 опредѣленія Евклида не могутъ быть приняты въ настоящее изъ виду. Робертъ Симсонъ уничтожаетъ опредѣленіе равныхъ шире, которое дѣлательствова должно исключиться изъ теоремъ, и называетъ поспѣшными тѣми тѣ, которые ограничены одинаковымъ числомъ подобными плоскостями и концы многогранные углы относительно равны. Это опредѣленіе справедливо и

содержащихъ въ себѣ много лишнихъ условій. Еслибъ теперь мы взяли въ соображеніе условія равныхъ многогранныхъ угловъ, то были бы приведены къ опредѣленію Евклида, которое не удовлетворительно по тому, что предполагаетъ доказаніемъ теорему о равныхъ многогранныхъ. Для избѣжанія всякаго замѣшательства, мы сочли за нужное раздѣлить опредѣленіе подобнымъ шѣль на двѣ части, давъ сначала опредѣленіе подобнымъ приугольнымъ перикамъ и позволивъ называть *подобными теллами* шѣль, которыя имѣютъ подобныя основанія, и концы сходственныхъ вершинъ этихъ основаній опредѣлены приугольными, относительно подобными перикамъ.

Это опредѣленіе требуетъ двухъ условій для основаній, предполагаемыхъ приугольными, и трехъ для каждой изъ вершинъ изъ основаній, такъ что если N представляешь число многогранныхъ угловъ каждаго изъ многогранниковъ, то подобіе этихъ многогранныхъ потребуетъ $2 + 3(N - 3)$ равныхъ угловъ съ одной и другой стороны, или $3N - 7$ условій, въ числѣ которыхъ нѣтъ ни одного лишняго, или заключающагося въ другихъ. Такъ какъ мы рассматриваемъ здѣсь два многогранника имѣющіе просто одинаковое число вершинъ или многогранныхъ угловъ, то вообще должно быть $3N - 7$ условій, дабы два шѣль были подобны. Но еслибъ предположимъ, что эти шѣль суть *одного рода*, то есть, что они имѣютъ равное число граней, и что грани, относительныя сравнимыя, имѣютъ равное число сторонъ, то это предположеніе заключало бы условія въ шѣль случаѣ, когда грани имѣютъ 6-лѣ шѣль сторонъ, и эти условія уменьшились бы такъ числу $3N - 7$, что вышло бы $3N - 7$ условій должно бы было быть шѣль $A - 1$ (см. прим. VIII). Отсюда очевидно, что трудность состоящая точное опредѣленіе подобимъ шѣль состоитъ въ томъ, что не можно разсчитывать, какъ шѣль одинаковаго рода, или шѣль, имѣющія равное число многогранныхъ угловъ. Въ послѣднемъ случаѣ вся трудность исчезаетъ, и должно, чтобы всѣ $3N - 7$ условій, заключающіеся въ опредѣленіи, непременно были имѣны, или шѣль были подобны, откуда, по болѣея причинѣ, заключаемъ, что они однородны. Такъ какъ наше опредѣленіе имѣетъ всю необходимую полноту, то мы вывели изъ него опредѣленіе Роберта Симсона, какъ теорему.

Отсюда видно, что въ начальныхъ основаніяхъ можно обойтись безъ теоремы относящейся къ равенству многогранныхъ, но такъ какъ эта теорема сама по себѣ очень замѣшательна, то мы не считаемъ за лишнее пояснить здѣсь доказательство, которое дополнитъ теорію многогранныхъ (1). Разсматриваемый вопросъ состоитъ въ томъ, можно ли, имѣя наклоненіе плоскостей, сходящихся въ вершинѣ, доказать подобіе двѣхъ выпуклыхъ многогранниковъ, со-

(1) Доказательство поясненное нами здѣсь, есть самое простое, съ наибольшими измѣненіями, которое Г. Боли представилъ Империалу въ 1812 г.; онъ достигъ его, принявъ въ соображеніе нѣкоторыя идеи, изложенныя нами въ первомъ изданіи нашей геометріи, стр. 327 и слѣд.

ставили вторымъ выпуклымъ многограннымъ ограниченнымъ одними плоскостями. расположеннымъ въ одинаковомъ порядкѣ.

Замѣтивъ сначала, что если существуютъ вторымъ многограннымъ удовлетворяющимъ вопросу, то они не могутъ быть многограннымъ противрѣчіемъ съ данными, ибо, въ этомъ случаѣ многогранные равныя плоскости расположены въ обратномъ порядкѣ около соприкасающихся многогранныхъ угловъ. И такъ, равенство противрѣчіемъ многогранныхъ должно быть совершенно устроено для нашего предмета.

Замѣтивъ, во вторыхъ, что если даннымъ многограннымъ со- Ф. 188
даны одинъ или нѣсколько приравненныхъ угловъ то эти углы по своему нѣтъ не измѣняются, ибо достаточно знать три плоские угла, для опредѣленія взаимнаго положенія этихъ плоскостей, когда они соединены въ многогранный уголъ. И такъ, можно уничтожить въ предположенномъ нѣтъ въ тригонометрии выражени о разности приравненныхъ угловъ (δ), и если новый многогранный примешеніи одинъ уничтоженіи, представляется еще приравненные углы, то нѣтъ можно также уничтожить, и продолжать последовательное до того, пока достигнута многогранника, котораго углы составляютъ по крайней мѣрѣ нѣтъ четырехъ плоскихъ угловъ. Въ самомъ дѣлѣ, если предположенное нѣтъ можете принять другомъ видѣ, при которомъ нѣтъ измѣненіи въ наклоненіи въ плоскостяхъ, то это нѣтъ не будетъ нѣтъ нѣтъ въ усѣченномъ призматическомъ выражени и совершится нѣтъ нѣтъ многогранника, состоящая нѣтъ уничтоженіи всѣхъ призматическихъ выражени. И такъ, во всемъ слѣдующемъ мы будемъ разсматривать только нѣтъ многогранника, котораго углы составлены по крайней мѣрѣ нѣтъ четырехъ плоскихъ угловъ.

Положивъ это, возьмемъ S одинъ изъ многогранныхъ угловъ предположенного нѣтъ, и опишемъ нѣтъ вершиномъ S , какъ центра, сферическую поверхность, кою пересѣченіе съ плоскостями многограннаго угла составили сферическимъ многоуголь. AB, DE, F . Стороны его Ф. 189
 AB, BC , и проч., служатъ мѣромъ плоскихъ угловъ ASB, BSC и проч., и въ слѣдствіе этого, суть неизмѣнимы, что касается до угловъ A, B, C , и проч., многоугольника, нѣтъ каждымъ нѣтъ нѣтъ есть нѣтъ наклоненія двухъ смежныхъ плоскостей многограннаго угла нѣтъ угловъ B есть нѣтъ наклоненія плоскостей ASB, SEC , которое мы назовемъ, для краткости, наклоненіемъ по ребру SB . Поэто нѣтъ угловъ C есть нѣтъ наклоненія по ребру SC , и проч.

И такъ, мы будемъ въ состояніи судить о перемѣнѣ видѣ каждаго многограннаго угла S , по угламъ сферическаго многоуг. AB, DE, F , котораго стороны постоянны, а углы могутъ измѣняться, предполагая только, что многогранникъ состоитъ всегда выпуклымъ. Въ этомъ многоугольнике, знаки наклоненія нѣтъ угловъ

- (2) Если одно ребро будетъ принадлежать мѣрѣ двухъ приравненныхъ угловъ, то при первомъ дѣйствіи должно уничтожить только одинъ изъ этихъ угловъ.

ни представляють крѣпиз замѣчательные закономъ, которые мы находимъ въ двухъ слѣдующихъ леммахъ.

ЛЕММА I.

В. 216. Если даны всѣ стороны сферическаго многоугольника AB, CB, CD, DE, EF , измѣняя послѣдней EF , то при измѣненіи одного изъ угловъ B, C, D, E , противоположныхъ сторонъ EF , въ той же или какъ другіе остаются постоянными, сторона EF увеличивается при увеличиваніи и уменьшается при уменьшеніи угла. Изъясняя сдѣланъ предположеніе, что многоугольникъ есть выпуклый, прежде и послѣ измѣненія его фигуры.

Предположимъ сначала, что уголъ B измѣняется, тогда когда другіе углы C, D, E , остаются постоянными, и что, по соединеніи BF , фигура $BCDEF$ не измѣняется и линия BF остается постоянной. Въ слѣдствіе этого, получимъ сферическій тр. ABF , котораго стороны AB, BF , постоянны и въ уголъ ABF , измѣняется только же количество, какъ уголъ ABC многоугольника, ибо часть FBC остается постоянной. Но, по извѣстнымъ свойствамъ (1) знаемъ, что сторона AF увеличивается при увеличеніи угла ABF , и уменьшается при уменьшеніи угла ABF .

Предположимъ теперь, что уголъ C измѣняется, и что три другіе B, D, E , остаются постоянными. Если проведемъ дуги AC, FC , то очевидно, что онѣ будутъ постоянными, такъ какъ и углы ACB, FCD , и слѣд. получимъ сферическій тр. ACF , котораго стороны AC, CF , постоянны, и въ которомъ уголъ ACF измѣняется только же количествомъ, какъ уголъ C многоугольника; отсюда заключаемъ, какъ и прежде, что сторона AF увеличивается съ увеличеніемъ угла C , и уменьшается при уменьшеніи его.

Очевидно, что такое разсужденіе можетъ быть приложено въ извѣстномъ одного изъ угловъ D и E , и что оно равнымъ образомъ будетъ имѣть мѣсто для всякаго сферическаго многоугольника нѣсколькихъ болѣе 3 сторонъ. И такъ, заключеніе будетъ, во всякомъ случаѣ, сообразно съ изложеніемъ леммы, если только многоугольникъ остается выпуклымъ, прежде и послѣ измѣненія фигуры. Это исключеніе необходимо, ибо, еслибы уголъ E , на пр., увеличился до того, что точка F упала бы наконецъ на дугу AE , тогда AF будетъ уменьшилась и, если, считая отъ этой точки, продолжали бы увеличивать уголъ E , то очевидно, что сторона AF увеличилась бы въ то время чтобы уменьшилась, но въ послѣднемъ случаѣ уголъ AFE сдѣлается угломъ вхожденія, и многоугольникъ переставитъ быть выпуклымъ.

Слѣствіе. Если, при тѣхъ же самыхъ положеніяхъ, нѣкоторые углы, противоположныхъ послѣдней сторонъ AF , увеличиваются и ни одинъ не уменьшается, то сторона AF увеличится необо-

(1) Это предположеніе доказывающееся темъ же образомъ, какъ и подобное ему (10, I), для выпуклыхъ и вогнутыхъ.

дико, из садистских востановить мифов. Проституте будет иметь место, если многие из углов, брошенных голодомых стороны 11 ушибающихся, и ни один не убежит.

Ібо, если отъ дѣйствія оцвѣреннаго увеличенія нѣмъ углѣ шенія, углы A, B, C , и проч., многоугольника, водами нѣмѣются на A', B', C' , и проч., то можно перейти послѣдовательно отъ предложеннаго многоугольника, въ точку вѣнчудымъ образомъ только одинъ нѣмѣющійся уголъ A' ; а отъ него въ многоугольнику нѣмѣшему два нѣмѣющіеся углы A' и B' , и такъ далѣ. Во всѣхъ отпавъ переходѣхъ, приращеніе дѣлѣхъ представляется въ нѣмѣмѣхъ отъ нѣмѣмѣхъ и приращеніе всегда въ нѣмѣмѣхъ нѣмѣмѣхъ

June 11.

[illegible]

Действительно, если n есть число углов многоугольника, то нельзя иметь в нем $n - 2$ последовательных углов, которые бы увеличивались друг к другу, или, из коих бы один увеличивался, а другие оставались постоянными, ибо, допуская пошлю или другой случай, имели бы, по следствию предыдущей леммы, что сторона многоугольника противоположная четному $n - 2$ углам увеличилась, что противно предположению, но которому все стороны многоугольника остаются постоянными. Но так как не признавая, нельзя предполагать, что $n - 2$ последовательных углов друг к другу уменьшаются, или, что некоторые из них уменьшаются между тем как прочие остаются постоянными. И так как в ряд $n - 2$ последовательных углов, должен существовать по крайней мере один перегиб знака, и, по будущей причине, это изменение должно быть найдено в ряд n смежных последовательных углов, когда сделан полный оборот около многоугольника.

2-е. Изъявляя в углубь многоугольника не могут представ-
лять только ряд знаков — ряд знаков —, в смысле чего су-
ществовало бы только два изъясня зная в члены о-ореша
около многоугольника.

Но пусть будут, на притире, A, B, C , три угла отмеченные 4, 287, знаком $\dagger$, и D, E, F, G , четыре угла отмеченные знаком $\circ$ — это предположение заключает в себя в то же время случаи, когда будут иметь место только три знака в знаках $\dagger$ и $\circ$, по причине неопределенности некоторых углов. . Если фигура 287 примет вид

первоначальное состояніе многогранника, то діагональ FD можетъ увеличиться, когда увеличивъ всѣмъ нѣкоторымъ изъ угловъ A, B, C , но также снѣмъ діагональ, какъ принадлежащая многоуг. $GHID$, котораго прочія стороны постоянны, должна уменьшиться въ это время съ углами F и E , или, по крайней мѣрѣ, останется постоянной, если нѣтъ четырехъ угловъ D, E, F, G , уменьшающихся два D и E , или только одинъ; слѣд. предположеніе, о которомъ идетъ рѣчь, и погубитъ нѣтъ мѣста, и мнѣніе угловъ будетъ представлять только два ряда: одинъ съ знаками $+$, другой съ знаками $-$.

3-е. Не возможно также, сдѣлавъ оборотъ около многоугольника, измѣни попеременно только при ряда знаковъ $+$ и знаковъ $-$, такъ при этомъ предположеніи, первымъ и вторымъ рядъ несли бы одинъ знакъ, и слѣдств. непосредственно ошны на другіе, составляли бы таковыя образы только одинъ рядъ. Отсюда видно, что при оборотѣ около многоугольника будетъ въ самомъ дѣлѣ только одинъ рядъ одинъ съ знаками $+$, другой со знаками $-$; чего невозможно бы доказали выше.

Ф. 278.

И такъ, наконецъ, число перемены знака, которая выйдетъ при оборотѣ около многоугольника, должно быть по крайней мѣрѣ равно четырехъ.

Слѣствие. Доказанное выше для многоугольниковъ совершенно прилагается непосредственно къ многограннику угловъ, когда онъ многоугольникомъ служатъ мѣры. Поэтому, если данъ многогранный выпуклый уголъ, составленный болѣе нежели изъ трехъ изъ угловъ, то измѣнивъ каковыя нибудь образы изъ плоскостей ребра, но не мѣнявъ тѣмъ такъ, чтобы многогранный уголъ остался выпуклымъ, поставивъ потомъ знакъ $+$ или $-$ въ каждомъ ребрѣ, смотря по тому, увеличивается или уменьшается наклоненіе по этому ребру, и если не будетъ означена $+$ или тѣмъ ребрѣ, по которому наклоненія остаются постоянными то должно, сдѣлавъ оборотъ около многограннаго угла, выйти въ крайнюю мѣрѣ четыре перемены знака отъ одного ребра до слѣдующаго.

Посредствомъ этого предположенія и теоремы Ейлера о многогранникахъ (23, VII), мы можемъ доказать во всей общности слѣдующую теорему.

ТЕОРЕМА.

Если данъ выпуклый многогранникъ, въ которомъ есть уголъ составленный болѣе нежели изъ трехъ плоскостей угловъ, то можно не измѣняя наклоненія плоскостей этого угла такъ, чтобы составить другой многогранникъ, который будетъ ограниченъ тѣми же плоскостями, расположенными такъ, какъ и въ данномъ многогранникѣ.

Для доказательства этой теоремы должно принять въ соображеніе два случая, смотря по тому, наклоняются ли всѣ, или только нѣкоторыя плоскости по ребрамъ.

Первый случай.

Положим, что означенный выше многоугольник по своим ребрам, и означен N полным число перестав между собой одного ребра до следующего, при обороте около любого многоугольного угла.

Мы видим, в лемме II, что число перестав не может быть больше четырех для любого угла, и поэтому, означен N число многоугольных углов, будет больше $N > 4N$, где знак $>$ не означает равенства.

Поэтому теперь, что для любого ребра многоугольного угла принадлежал всегда к трем многоугольным и приходил к одному, следовательно число перестав N был, означенных на последовательных ребрах любого многоугольного угла, должно быть равно полному числу перестав N был, означенных на последовательных сторонах любого многоугольника, поэтому что между любыми перестав между n одним элементом, которого мы не соединяли с другими подобным перестав в другом.

Но для любого простого многоугольника, число перестав N было не может быть больше 2; ибо для $n = 3$ и $n = 4$, мы очевидно получали только два перестав N был.

Для любого четырехугольного многоугольника, число перестав N было не может быть больше четырех, что очевидно.

Вообще, если число сторон многоугольника есть четное, или $= 2n$, то наибольшее число перестав N было, которое можно иметь, при обороте около многоугольника есть $2n$, что будет больше N было, когда стороны сопровождались попеременно знаками $+$ и $-$.

Но если число сторон многоугольника есть нечетное, или $= 2n + 1$, то наибольшее число перестав N было будет больше $2n$, ибо, при обороте сторон попеременно знаками $+$ и $-$, найдется, что первая и последняя будут иметь необходимо один знак, и это увеличивает число знаков и единицы произвольного числа сторон.

Положим это, пусть n число пятиугольников, b число четырехугольников, c число триугольников, и проч., которые составляют поверхность данного многоугольника. Из выше-казанного следует, что полное число перестав N было, означенных при обороте около любого многоугольника, не может превосходить $2n$ на границах триугольных, $4b$ на границах четырехугольных, $6c$ на границах пятиугольных, $8d$ на границах шестигульных. Из следующего получим

$$N \leq 2n + 4b + 6c + 8d + 10e + 12f + 14g + \dots \text{ и проч.}$$

Называя A число ребер многоугольника, и H число его граней, будем иметь

$$2A = 5n + 4b + 3c + 2d + e + f + g + \dots \text{ и проч.}$$

$$H = n + b + c + d + e + f + g + \dots \text{ и проч.}$$

Но, по теореме Эйлера, $S + H = A + 2$; следовательно $4N = 2 + 2A - 2H$, и по последнему,

$$4N = 2 + 2A - 2H = 2 + 4b + 6c + 8d + 10e + \dots \text{ и проч.}$$

Сравнивая эту величину съ вышеизданными предѣлами, имеемъ

$$N < 4S - 8.$$

Но такъ какъ не возможно имѣть другаго $N > 4S$ и $N < 4S - 4$, то невозможно сказать, чтобы наклоненія по ребрамъ имѣли всѣ другаго, не нарушая взаимной связи плоскостей, которыми состоитъ поверхность многогранника.

ВТОРЫЙ СЛУЧАЙ.

Ф. 104. Предположимъ теперь, что не всѣ наклоненія по ребрамъ имѣются, и что нѣкоторыя изъ нихъ остаются постоянными.

Если FI будетъ одно изъ этихъ реберъ, то можно предположить, что оно уничтожено, и что двѣ прилежащія грани FIC , EIF соединятся въ одну неплоскую, ограниченную оболочку $EFIC$ неизмѣненнаго вида. Число N S' , H' и A' величинъ S , H и A , и уничтоженіемъ одного ребра, и будетъ имѣть $H = H - 1$, и $A = A - 1$, кромѣ того имѣть $S' = S$, ибо число многогранника угловъ одинаково въ обоихъ тѣлахъ, и слѣд. получимъ $S' + H' - A' = S + H - A = 2$. Очевидно, что теорема Эйлера имѣетъ мѣсто въ новомъ тѣлѣ, гдѣ число реберъ единицею менше, такъ какъ число граней, ибо въ немъ двѣ грани соединены въ одну неплоскую грань.

Если, въ этомъ второмъ тѣлѣ, отнимемъ еще одно изъ реберъ по которымъ наклоненіе остается постояннымъ, то уничтоженіемъ ребра произведемъ снова соединеніе двухъ смежныхъ граней въ одну неплоскую, и подобнымъ образомъ доказано будетъ, что теорема Эйлера имѣетъ мѣсто въ третьемъ тѣлѣ, происходящемъ отъ уничтоженія двухъ реберъ.

Можно продолжать произвольно уменьшеніе числа реберъ, удаляя только, чтобы это не повлекло за собою уничтоженія какаго нибудь многограннаго угла, и теорема Эйлера будетъ вѣрно имѣть мѣсто въ оставшемся тѣлѣ. Тогда самое простое было бы прямо и вообще, разсуждая здѣсь такимъ доказательствомъ теоремы Эйлера. Действительно, то доказательство не представляетъ, что грани многогранника суть плоскія и будутъ имѣть равнымъ образомъ мѣсто, когда эти грани заключаются между собою, и не находящимися въ одной плоскости. Оно предполагаетъ только, что каждый обводъ будетъ представлять, по нашему предположенію, сферическій многоугольникъ, и что сумма внутреннихъ угловъ этихъ многоугольниковъ будетъ равна поверхности шара. Изъ этого также необходимости и въ томъ, чтобы всѣ эти многоугольники были выпуклые, и достаточно, чтобы каждый изъ нихъ былъ разсужденъ, какъ сумма многихъ выпуклыхъ многоугольниковъ, что происходитъ всегда, когда, по уничтоженіи многихъ реберъ прилежащихъ данному многограннику, многія плоскія грани соединяются въ одну неплоскую; ибо въ этомъ случаѣ, сферическій многоугольникъ ее представляющій будетъ состоять изъ суммы выпуклыхъ сферическихъ многоугольниковъ, которые представляли уничтоженные плоскія грани.

Рассмотрим теперь шесть случаев, когда уничтоженіе реберъ по которымъ наклоненіе не увеличивается, можетъ за собой уничтоженіе одного или нескольких многогранных угловъ или пошору, что наклоненія по всѣмъ ребрамъ, въ каждомъ изъ этихъ угловъ, суть постоянныя, или пошору, что эти наклоненія могутъ увеличиться только по шпирь реберъ, и тогда будутъ постоянно постоянны.

Предположимъ сначала, что мы уничтожили только одинъ многогранный уголъ, и назовемъ m число реберъ принадлежащихъ къ его вершинѣ. Уничтоживъ этотъ уголъ, уничтоживъ въ томъ же m реберъ, и m граней, составлявшихъ уголъ, получится въ основ. сѣкъ, называя S' , H' , A' , измѣнившаяся, но уничтоженіе многограннаго угла, величина S , H , A , будетъ имѣть $S' = S - 1$, $H' = H - m$, $A' = A - (m - 1)$. Отсюда выкажемъ $S' + H' - A' = S + H - A = 2$, сѣкъ, который имѣетъ также и въ основ. шпирь.

Теперь очевидно, что можно уничтожить произвольное число угловъ данного многогранника, и теорема Эйлера всегда будетъ имѣть вѣсто въ оставшемся многогранникѣ, пошору что, уничтоживъ многогранные углы, одинъ за другимъ, получимъ различные многогранники, между которыми два послѣдующихъ выходя въ случаи или разсмотрѣнный.

И такъ вообще, если уничтожить въ предложенномъ многогранникѣ всѣ ребра, по которымъ наклоненіе остается постояннымъ, то въ обоихъ случаяхъ измѣненія или увеличенія числа многогранныхъ угловъ, оставшия всѣ многогранники будутъ удовлетворять всегда теоремѣ Эйлера, т. е., называя a , b , c , количества, которые составляли въ этомъ многогранникѣ количества S , H , A , предложеннаго многогранника, будетъ имѣть $a + b - c = S + H - A = 2$.

Но, въ основ. послѣднемъ шпирь наклоненія по ребрамъ будутъ и имѣются вѣрны, но мы уничтожили всѣ ребра, по которымъ наклоненіе оставалось постояннымъ, и сѣкъ, шпирь, рассматриваемое шпирь, изомнѣ въ первый случай, и окончательное измѣненіе шпирь шпирь наклоненія не будетъ имѣть вѣста безъ измѣненія сѣкта шпирь.

И такъ, наконецъ, какому нибудь выпуклымъ многограннику не можетъ быть измѣненъ въ другой выпуклымъ многогранникѣ, который состоитъ ограниченъ шпирь же многоугольными плоскостями, рассматриваемыми относительно въ одинаковомъ порядкѣ.

Конецъ примечаній къ Глобелити.

ТРИГОНОМЕТРИЯ.

Тригонометрія имѣетъ предметомъ *разрѣшеніе* триугольниковъ, то есть, опредѣленіе ихъ угловъ и сторонъ, посредствомъ достаточнаго количества данностей.

Въ прямолинейныхъ триугольникахъ довольно знать три изъ шести частей ихъ составляющихъ, если между этими частями находится одна сторона. Очевидно, что въ случаѣ трехъ данныхъ угловъ, всѣ подобныя триугольники удовлетворяли бы вопросу.

Въ сферическихъ триугольникахъ, три какихъ либо данности, будутъ ли то углы или стороны, всегда достаточны для опредѣленія триугольника; ибо въ этомъ родѣ триугольниковъ не разсматривается независимая величина сторонъ, но только ихъ отношеніе съ четвертью круга или число градусовъ или содержащее.

Въ задачахъ изложенныхъ въ прибавленіи ко II кнѣ, мы уже видѣли, какъ строятся прямолинейные триугольники, посредствомъ трехъ данныхъ частей; предложенія XXIV и XXV, кнѣ V, даютъ равнымъ образомъ понятіе о построеніяхъ, коими можно бы было разрѣшать подобныя случаи въ триугольникахъ сферическихъ. И эти построенія, весьма точныя въ теоріи, были

бы только приближенными въ практикѣ (1), по причинѣ несовершенства инструментовъ при употребленіи ихъ; иль называютъ *методами графическими*. Напримѣръ, тригонометрическія методы, независимо отъ какаго либо механическаго дѣйствія, дающіе рѣшеніе съ возможною точностію; онѣ основаны на свойствахъ линій называемыхъ *синусами*, *косинусами*, *тангенсами* и проч., посредствомъ коихъ можно выражать очень просто отношенія существующія между сторонами и углами треугольниковъ.

Мы изложимъ сначала свойства этихъ линій и слѣдующія изъ того главныя формулы, которыя весьма много употребляются во всѣхъ отрасляхъ математики и доставляютъ самому алгебраическому анализу способы усовершенствованія. Потомъ мы приложимъ ихъ къ разрѣшенію треугольниковъ прямолинейныхъ и сферическихъ.

Дѣленіе окружности.

I. Долгое время геометры соглашались раздѣлять окружность на 360 равныхъ частей, именующихъ *градусами*, градусъ на 60 *минутъ*, минуту на 60 *секундъ* и проч. Этотъ способъ представлялъ нѣкоторыя удобства въ практикѣ, по причинѣ большаго числа дѣлителей 60 и 360, но въ сущности имѣлъ всѣ неудобства сложныхъ (complexes) чиселъ, и часто препятствовалъ быстротѣ счисленія.

Ученые, которыхъ мы обязаны изобрѣтеніемъ

(1) Дѣйствишельно, доказано отличать фигуры существія только руководящихся при разсужденіяхъ, для доказательства истинной теоремы или разрѣшенія вопроса, объ фигурѣ, которую строятъ, дабы получить нѣкоторыя изъ иль извѣстныя. Первые всегда предполагаются точными, вторые, будучи начертаны неправо, дадутъ бы ошибочные выводы.

новой системы вѣсовъ и мѣръ, чувствуя всѣ выгоды, которыя бы доставило введеніе десятичнаго дѣленія въ мѣру угловъ, приняли за главную единицу четверть окружности, или мѣру прямого угла, и раздѣлили ее на 100 равныхъ частей, называемыхъ *градусами*, градусъ на 100 мнунуть, и мнунуту на 100 секундъ.

Мы будемъ употреблять новое или десятичное дѣленіе окружности, и такъ какъ тригонометрическія таблицы, вычисленныя сообразно этому дѣленію, еще не пришли въ общее употребленіе, то въ приѣрахъ будемъ прилагать результаты вычисленій, сдѣланныхъ по старому дѣленію окружности. Разность произойдетъ здѣсь не въ величинѣ сторонъ, но только въ величинѣ или въ выраженіи угловъ и дугъ въ градусахъ.

II. Градусы, мнунуты и секунды означаются знаками $^{\circ}$, $'$, $''$; поѣтому выраженіе $16^{\circ} 6' 75''$ представляетъ дугу или уголъ въ 16 градусовъ 6 мнунуть 75 секундъ. Если отнести эту самую дугу къ квадранту, то она выразилась бы 0,160675. Видно въ тоже время, что уголъ измѣряемый этою дугою, относится къ прямому углу $= 160675 : 1000000$, и это отношеніе нельзя бы было выписать стольже легко изъ выраженій данныхъ прежнимъ дѣленіемъ окружности.

Углы и дуги выражаются при вычисленіяхъ безъ различія извѣстными числами градусовъ, мнунуть и секундъ. II такъ, мы будемъ означать прямой уголъ или квадрантъ чрезъ 100° , два прямые угла или полуокружность 200° , четыре прямые угла или цѣлую окружность 400° , и т. д.

III. *Дополненіемъ* (complement) угла или дуги называется остатокъ происходящій отъ вычитанія этого угла или дуги изъ 100° . II такъ, уголъ въ $25^{\circ} 40'$ имѣетъ дополненіемъ $74^{\circ} 60'$; уголъ въ $12^{\circ} 4' 62''$ имѣетъ дополненіемъ $87^{\circ} 95' 38''$.

Вообще, если A есть какой нибудь угол или дуга, то $100^\circ - A$ будетъ дополненіемъ угла или дуги. Отсюда видно, что въ случаѣ угла или дуги большей 100° , дополненіе будетъ отрицательное. И такъ дополненіе $160^\circ 84' 10''$ будетъ — $60^\circ 84' 10''$. Въ любомъ случаѣ, дополненіе взятое положительно было бы количествомъ, которое должно означать отъ даннаго угла или дуги, дабы остатокъ былъ равенъ 100° .

Два острые угла прямоугольнаго треугольника составляютъ вмѣстѣ прямой уголъ, и по этому служатъ дополненіемъ одинъ другому.

IV *Дополненіемъ угла или дуги до двухъ прямыхъ* (*supplement*) называется остатокъ происходящій отъ вычитанія этого угла или дуги изъ 200° , т. е. величины двухъ прямыхъ угловъ или полуокружности. И такъ, если A какой нибудь уголъ или дуга, то $200^\circ - A$ будетъ дополненіемъ угла или дуги до двухъ прямыхъ угловъ.

Во всякомъ треугольникѣ, одинъ уголъ служитъ дополненіемъ суммѣ двухъ другихъ, ибо всѣ они вмѣстѣ составляютъ 200° .

Углы треугольниковъ прямолинейныхъ и сферическихъ и стороны послѣднихъ, являютъ всегда положительныя дополненія до двухъ прямыхъ угловъ, ибо они всегда меньше 200° .

Общая понятія о синусахъ, косинусахъ тангенсахъ и проч.

V. *Синусъ* дуги AM , или угла ACM , есть перпендикуляръ MP , опущенный изъ одного конца дуги на діаметръ проходящій чрезъ другой конецъ. Если, наконць радіуса CA , возставимъ перпендикуляръ AT и продолжимъ его до встрѣчи съ продолженнымъ радіусомъ CM , то линія AT , ограниченная такимъ образомъ, называется *тангенсомъ*, а CT *секансомъ* дуги AM или угла ACM .

Эти три дуги MP , AT , CT , заключены между дуги AM , и всегда определяемы дугою AM и радиусомъ, означившемся такъ: $MP = \sin AM$, или $\sin ACM$, $AT = \tan AM$, или $\tan ACM$, $CT = \sec AM$ или $\sec ACM$.

VI. Если возьмемъ дугу AD равную квадрату, и изъ точекъ M и D проведемъ линіи MQ , DS перпендикулярныя къ радиусу CD , изъ которыхъ одна ограничится линіею радиусомъ, а другая продолженнымъ радиусомъ CM , то линіи MQ , DS и CS будутъ подобныя образамъ синуса, тангенса, секанса дуги MD , служащей дополненіемъ AM ихъ называють для краткости *архимедовыми* или *космическими* дуги AM , и имѣють такъ $MQ = \cos AM$, или $\cos ACM$, $DS = \cot AM$, или $\cot ACM$, $CS = \csc AM$, или $\csc ACM$. Вообще, называя A какою нибудь дугою или угломъ, будемъ имѣть $\cos A = \sin (100^\circ - A)$, $\sin A = \tan (100^\circ - A)$, $\sec A = \csc (100^\circ - A)$.

Тр. MQC равенъ, по построению, тр. CPM откуда $CP = MQ$; слѣд. въ прямоугольномъ тр. CPM катета гипотенуза равна радиусу, двѣ стороны MP , CP , суть синусъ и косинусъ дуги AM . Что и слѣдуетъ до тръ CAT , CDS , то они подобны равнымъ тръ CPM , COM , и поэтому подобны между собою. Отсюда мы выведемъ различные отношенія, существующіе между линіями выше определенными; но прежде должно показать постепенный ходъ опихъ самихъ линій, когда дуга, къ которой онѣ относятся, переходитъ отъ 0 до 200° .

VII. Положимъ, что одна оконечность дуги будетъ утверждена въ A , и что другая оконечность, означенная точкою M , пробѣгаетъ похъ доваательно все пространство полуокружности отъ A до B , по направленію ADB .

Когда точка M находится въ A , или, когда дуга AM равна 0, то три точки T , M , P совпадаютъ съ точкою A ; откуда видно, что синусъ и

становится дуги равной 0 суть 0, и что, достигнув равно какъ и сдвинувшись иной дуги, равенъ радиусу. И такъ, означая чрезъ R радиусъ круга, будемъ имѣть

$$\text{на } 0 = 0, \text{ tang } 0 = 0, \cos 0 = R, \sin 0 = R$$

VIII. Но и въ приближеніи точки M къ D синусъ увеличивается, равно какъ и тангенсъ и косинусъ, уменьшается, косинусъ и касаніе увеличивается.

Когда точка M находится во срединѣ AD , или, когда дуга AM равна 30° , такъ какъ и ее дугинное мѣро MD , то синусъ MP равенъ косинусу MP или CP , и тр. CMP , обратившись въ равнобедренный, даетъ пропорцію $MP : CM = 1 : \sqrt{2}$, или на $30^\circ R = 1 : \sqrt{2}$, откуда на $30^\circ = \cos 30^\circ = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} R \sqrt{2}$. Въ этомъ же случаѣ тр. CAT является равнобедреннымъ и равнымъ тр. CDS , откуда видно, что тангенсъ 30° и его косинусъ будутъ равны радиусу, и слѣд. $\text{tang } 30^\circ = \cos 30^\circ = R$.

IX. При продолжающемся увеличеніи дуги AM , синусъ увеличивается до того пока точка M придетъ къ D , тогда синусъ равенъ радиусу, и косинусъ нулю.

Въ слѣдствіе этого на $100^\circ = R$ и $\cos 100^\circ = 0$, и должно замѣтить, что эти величины суть слѣдствіе тѣхъ, которыя были найдены для синуса и косинуса дуги въ 0° , ибо, такъ какъ дополнение 100° равно 0, то на $100^\circ = \cos 0^\circ = R$ и на $100^\circ = \sin 0^\circ = 0$.

Что касается до тангенса, то онъ увеличивается чрезвычайно быстро, но и въ приближеніи точки M къ D , и когда она достигаетъ D , то тангенсъ собственно не существуетъ, ибо линіи AT , CD , какъ параллельныя, не могутъ встрѣтиться. Это выражаютъ, говоря, что тангенсъ 100° безконеченъ, и пишутъ $\text{tang } 100^\circ = \infty$.

Такъ какъ дополненіе 100° есть 0, то $\text{tang } 0 = \cot 100^\circ$ и $\cot 0 = \text{tang } 100^\circ$. Отсюда $\cot 0 = \infty$ и $\cot 100^\circ = 0$.

Х. По мѣрѣ движенія точки М отъ D къ В, синусы уменьшаются и косинусы увеличиваются. И такъ дуга AM' мѣтитъ синусомъ $M'P'$, и косинусомъ $M'Q$ или CP' . Но дуга $M'B$ есть дополненіе AM' до двухъ прямыхъ угловъ, ибо $AM' + BM'$ равны полуокружности; притомъ, если проведемъ $M'M$ параллельную АВ, то ясно, что дуги AM , BM , заключающіяся между параллельными, будутъ равны, такъ какъ и перпендикуляры или синусы MP , $M'P'$. Отсюда *синусъ дуги или угла равенъ синусу дополненія этого угла или дуги до дуги прямыхъ угловъ*.

Дуга или уголъ А мѣтитъ дополненіемъ $200^\circ - A$; и потому вообще:

$$\sin A = \sin (200^\circ - A).$$

Тоже свойство выразилось бы уравненіемъ $\sin (100^\circ + B) = \sin (100^\circ - B)$, гдѣ В есть дуга DM , или равная ей DM' .

ХІ. Тѣже дуги AM , AM' , которые служатъ дополненіемъ одна другой до двухъ прямыхъ, мѣтятъ равные синусы, будутъ мѣтить также разные косинусы CP' , CP ; но должно замѣтить, что эти косинусы проведены въ различныхъ направленіяхъ. Эта разность въ положеніи выражается при вычисленіяхъ противными знаками; такъ что, принимая косинусы дугъ меньшихъ 100° за положительные, или сопровождаемые знакомъ $+$, должно считать отрицательными или сопровождаемыми знакомъ $-$, косинусы дугъ большихъ 100° . И такъ будемъ мѣтить вообще

$$\cos A = -\cos (200^\circ - A),$$

или $\cos (100^\circ + B) = -\cos (100^\circ - B)$; то есть, что косинусъ дуги или угла большаго 100° равенъ

косинусу его дополненія до двухъ прямыхъ, являющемуся отрицательнымъ.

Такъ какъ дополненіе дуги большей 100° есть отрицательное (III), то неудивительно, что синусъ этого дополненія будетъ отрицательный; но дабы сдѣлать эту вещь еще болѣе ощутительною, найдемъ выраженіе разстоянія точки А до перпендикуляра МР. Сдѣлавъ дугу $AM = x$, будемъ имѣть $CP = \cos x$, и искомое разстояніе $AP = R - \cos x$. Таже формула должна выразять разстояніе точки А отъ прямой МР, какова бы ни была величина дуги АМ, коей вершина находится въ точкѣ А.

Предполагая, что точка М придетъ въ М', такъ что x будетъ означать дугу АМ', получимъ еще въ этой точкѣ $AP' = R - \cos x$, слѣд. $\cos x = R - AP' = AC - AP' = -CP'$; откуда видно, что $\cos x$ будетъ тогда отрицательный; и такъ какъ $CP = CP' = \cos (200^\circ - x)$, то $\cos x = -\cos (200^\circ - x)$, что и было найдено выше.

Здѣсь видно, что тупой уголъ имѣетъ тотъ же синусъ и тотъ же косинусъ, какъ и острый уголъ, служащій ему дополненіемъ до двухъ прямыхъ, съ тою только разностію, что косинусъ тупаго угла долженъ быть означенъ знакомъ $-$. И такъ имѣемъ $\sin 150^\circ = \sin 50^\circ = \frac{1}{2} R \sqrt{2}$, и $\cos 150^\circ = -\cos 50^\circ = -\frac{1}{2} R \sqrt{2}$.

Что касается до дуги АDB, равной полуокружности, то синусъ ея есть 0, а косинусъ равенъ отрицательно вѣльному радиусу; откуда $\sin 200^\circ = 0$, и $\cos 200^\circ = -R$. Тоже бы получили мы изъ формулъ $\sin A = \sin (200^\circ - A)$, и $\cos A = -\cos (200^\circ - A)$, сдѣлавъ въ нихъ $A = 200^\circ$.

XII. Разсмотримъ теперь во что обратится тангенсъ дуги АМ' большей 100° . По опредѣленію тангенса, онъ долженъ быть ограниченъ сходою линій АТ, СМ'. Эти линіи не встрѣчаются въ направленіи АТ, но встрѣчаются въ противо-

Ф. 1.

положительномъ направленіи AV ; отсюда видно, что тангенсъ дуги большей 100° есть отрицательный. При этомъ, замѣчая, что AV есть тангенсъ дуги AN , служащей дополненіемъ AM до двухъ прямыхъ (ибо NAM есть полуокружность), увидимъ отсюда, что *тангенсъ дуги или угла большаго 100° равенъ тангенсу своего дополненія до двухъ прямыхъ угловъ, взятому отрицательно*, такъ что имѣемъ

$$\operatorname{tang} A = -\operatorname{tang} (200^\circ - A).$$

То же самое можно сказать о котангенсѣ предъизвѣстномъ линіею DS' , которая равна и противоположна DS , котангенсу AM . И такъ имѣемъ

$$\operatorname{cot} A = -\operatorname{cot} (200^\circ - A).$$

Слѣд. тангенсы и котангенсы суть отрицательные, равно какъ и косинусы, отъ 100° до 200° . И въ этомъ послѣднемъ предѣлѣ, имѣемъ $\operatorname{tang} 200^\circ = 0$ и $\operatorname{cot} 200^\circ = -\operatorname{cot} 0 = -\infty$

XIII. Въ тригонометріи неразмѣривалъсѣ синусъ, косинусъ и проч., дугъ или угловъ большаго 200° ; ибо углы прямоугольныхъ, равно какъ и сторонъ подобныхъ, заключаются между 0 и 200° . Но такъ какъ, въ различныхъ приложеніяхъ геометріи, нередко случается разсматривать дуги большія полуокружности, и даже содержащія въ себѣ нѣсколько окружностей, то необходимо показать способъ вычисленія синусовъ и косинусовъ этихъ дугъ, какова бы ни была величина ихъ.

Замѣтимъ сначала, что двѣ дуги равны и съ противоположными знаками, AM , AN , имѣющъ синусы MP , PN , равные и съ противоположными знаками, между тѣмъ какъ косинусъ CP , есть одинъ для той и другой. И такъ, имѣемъ вообще формулы

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin x \\ \cos(-x) &= \cos x\end{aligned}$$

которыя послужатъ для выраженія синусовъ и косинусовъ отрицательныхъ дугъ.

Отъ 0° до 200° синусы суть всегда положительные, потому что они расположены съ одной стороны діаметра AB ; отъ 200° до 400° синусы суть всегда отрицательные, ибо они расположены съ другой стороны діаметра. Пусть $ABN' = x$, дуга большаго 200° синусъ ея PN' равенъ PM , синусу дуги $AM = x - 200^\circ$ отсюда вообще

$$\sin x = -\sin (x - 300).$$

Эта формула была бы дана синусам между 300° и 400° , посред-
ством синусов между 0° и 300° , она даетъ въ частности
или $400^\circ = -\sin 300^\circ = 0$; и въ самомъ дѣлѣ очевидно, что, при
дугѣ равной окружности двѣ оконечности ея сдвинувшись въ одну
точку и синусъ обращается въ нуль.

Извѣстно очевидно, что, прибавивъ въ какомъ нибудь дугѣ AM
или въ сколько-нибудь окружности, достигнешь опять точки M , и
дуга такая образуетъ углователю будетъ имѣть такую же си-
нусъ какъ дуга AM , и поэтому, если C означитъ цѣлую окру-
жность или 400° , то будемъ имѣть

$$\sin x = \sin (C + x) = \sin (4C + x) = (\sin x), \text{ и проч.}$$

Тогда такое будемъ имѣть и для косинуса, тангенса и проч.

Теперь, какова бы ни была предположенная дуга x , но легко ус-
мотрѣть что синусъ ея можетъ всегда выразиться съ помощью
такого, посредствующаго синуса дуги менѣе 100° . Ибо, сначала
можно означить эту дугу x столько разъ 400° сколько они могутъ
въ ней содержаться; при остаткѣ y , будемъ имѣть $\sin x = \sin y$.
Если y больше 200° , то уравнивая $y = 200^\circ + z$, получимъ
 $\sin y = -\sin z$. И такъ всѣ случаи привожется къ тому, въ ко-
торомъ предположена дуга не больше 200° , и какъ известно $\sin (100^\circ + x)$
 $= \sin (100^\circ - x)$, то ясно что они приводятся къ тому пред-
положенному случаю, когда предположенная дуга находится между
нулемъ и 100° .

XIV. Косинусы приводятся всегда въ синусы по формулѣ
 $\cos A = \sin (100^\circ - A)$, или $\cos A = \sin (100^\circ + A)$; и поэтому, зная
опредѣлить синусы во всѣхъ возможныхъ случаяхъ, будемъ въ со-
стоянии опредѣлять и косинусы. И въ фигурѣ право видно, что
отрицательные косинусы отличаются отъ положительныхъ коси-
нусовъ дуготворомъ 100° , такъ что всѣ дуги, концы оконечности
находятся съ лѣвой стороны 100° , имѣютъ косинусъ положительнымъ,
вмѣстѣ съ тѣмъ какъ всѣ тѣ, концы оконечности находятся съ правой
стороны, имѣютъ косинусъ отрицательнымъ.

И такъ отъ 0° до 100° косинусы суть положительные, отъ
 100° до 300° отрицательные, отъ 300° до 400° они становятся
снова положительными, и послѣ полного оборота возвращаются
прежнѣ величины, ибо имѣемъ также $\cos (400^\circ + x) = \cos x$.

Въ сдѣланные выше измѣненіи легко усмотрѣть, что синусы и
косинусы аршинныхъ дугъ выражаются, имѣютъ слѣдующія выраженія

$\sin 0^\circ = 0.$	$\sin 100^\circ = R.$	$\cos 0^\circ = R.$	$\cos 100^\circ = 0.$
$\sin 200^\circ = 0.$	$\sin 300^\circ = -R.$	$\cos 200^\circ = -R.$	$\cos 300^\circ = 0.$
$\sin 400^\circ = 0.$	$\sin 500^\circ = R.$	$\cos 400^\circ = R.$	$\cos 500^\circ = 0.$
$\sin 600^\circ = 0.$	$\sin 700^\circ = -R.$	$\cos 600^\circ = -R.$	$\cos 700^\circ = 0.$
$\sin 800^\circ = 0.$	$\sin 900^\circ = R.$	$\cos 800^\circ = R.$	$\cos 900^\circ = 0.$
и проч.	и проч.	и проч.	и проч.

Означивъ вообще чрезъ A какое нибудь цѣлое число, будемъ
имѣть

$$\begin{array}{l|l} \sin 24 \cdot 100^\circ = 0. & \cos (24 + 1) \cdot 100^\circ = 0. \\ \sin 44 + 1 \cdot 100^\circ = R. & \cos 44 \cdot 100^\circ = R. \\ \sin (44 - 1) \cdot 100^\circ = -R. & \cos (44 + 2) \cdot 100^\circ = -R. \end{array}$$

Все связанное обь синусовъ и косинусовъ позволяет намъ входить въ частныя подробности, относительно синусовъ, косинусовъ, и проч., дугъ большихъ 200° ; это величавъ рѣшъ количествомъ легко вывести изъ величинъ синусовъ и косинусовъ тѣхъ же дугъ, какъ это будетъ показано въ слѣдующихъ главахъ.

Теоремы и формулы относящіяся къ синусамъ, косинусамъ, тангенсамъ, и проч.

XV. Синусъ дуги равенъ половинѣ хорды стягивающей двойную дугу.

Ф. Такъ какъ радіусъ CA , перпендикулярный къ MN , раздѣляетъ на двѣ равныя части хорду MN и стянутую дугу MAN ; слѣд. MP , синусъ дуги AM , есть половина хорды MN , стягивающей дугу MAN , вдвое большую MA .

Хорда стягивающая шестую часть окружности равна радіусу, и поэному $\sin \frac{400^\circ}{12}$ или $\sin 33^\circ \frac{1}{3} = \frac{1}{2} R$, то есть синусъ трети прямого угла равенъ половинѣ радіуса.

XVI. Квадратъ синуса дуги сложенный съ квадратомъ косинуса равенъ квадрату радіуса, такъ что будемъ имѣть вообще $\sin^2 A + \cos^2 A = R^2$ (1).

Это свойство выводится непосредственно изъ прямоугольнаго тр. $СМР$, гдѣ имѣемъ $MP^2 + CP^2 = CM^2$.

Отсюда слѣдуетъ, что по данному синусу дуги можно найти ея косинусъ, и обратно, посредствомъ формулъ $\cos A = \pm \sqrt{R^2 - \sin^2 A}$, $\sin A = \pm \sqrt{R^2 - \cos^2 A}$. Двойной знакъ въ этихъ формулахъ

(1) Здѣсь означается чрезъ $\sin^2 A$ квадратъ синуса A , и вообще имѣемъ образцовъ, чрезъ $\cos^2 A$, квадратъ косинуса A .

происходитъ отъ того, что одинъ синусъ MP соотвѣствуетъ двумъ дугамъ AM , AM' , концы косинусы равны, и съ противоположными знаками; также какъ одинъ косинусъ соотвѣствуетъ двумъ дугамъ AM , AN , концы синусы MP , PN , суть также равны и съ противоположными знаками.

Итакъ, на примѣръ, найдя $\sin 33^\circ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} R$, выведемъ отсюда $\cos 33^\circ \frac{1}{2}$ или $\sin 66^\circ \frac{1}{2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4} R^2} = \sqrt{\frac{3}{4} R^2} = \frac{1}{2} R \sqrt{3}$.

XVII Если даны синусъ и косинусъ дуги A , то можно найти тангенсъ, секансъ, котангенсъ и coseкансъ той же дуги, посредствомъ слѣдующихъ формулъ:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} A &= \frac{R \sin A}{\cos A}, \quad \sec A = \frac{R^2}{\cos A}, \quad \operatorname{cot} A = \frac{R \cos A}{\sin A}, \\ \operatorname{cosec} A &= \frac{R^2}{\sin A}. \end{aligned}$$

Въ самомъ дѣлѣ подобныя триг-ки CPM , CAT , CDS даютъ пропорціи:

$$CP : PM = CA : AT \text{ или } \cos A : \sin A = R : \operatorname{tang} A = \frac{R \sin A}{\cos A};$$

$$CP : CM = CA : CT \text{ или } \cos A : R = R : \sec A = \frac{R^2}{\cos A};$$

$$PM : CP = CD : DS \text{ или } \sin A : \cos A = R : \operatorname{cot} A = \frac{R \cos A}{\sin A};$$

$$PM : CM = CD : CS \text{ или } \sin A : R = R : \operatorname{cosec} A = \frac{R^2}{\sin A},$$

откуда извлекаются четыре вышеозначенныя формулы.

Можно прибавить кромѣ того, что изъ послѣднихъ формулъ могли бы быть выведены изъ двухъ первыхъ, подставляя въ нихъ просто $100^\circ = A$ вмѣсто A .

Эти формулы даютъ величину и знакъ свойственныхъ танген-самъ, секансамъ и проч., всякой дуги, если синусъ и косинусъ извѣстны, и такъ какъ прогрессивный законъ синусовъ и косинусовъ сообразно съ различными дугами, въ которыхъ они относятся, достаточно развитъ въ предыдущей главѣ, то неостанется ничего болѣе сказать о законѣ, косну подобнымъ образомъ слѣдующихъ танген-самъ, секансовъ и проч.

Посредствомъ нихъ можно подтвердить многіе выводы получен-ные прежде относительно тангенсовъ. напр., если сдѣлать $R = 100$, то будемъ имѣть $\sin A = R$, и $\cos A = 0$, слѣд. $\operatorname{tang} 100^\circ = \frac{R^2}{0}$

выраженіе означающее количество безконечное, ибо R^2 , раздѣленный на весьма малое количество, дастъ бы весьма большое частное, и помянуты R^2 раздѣлимый на 0 дастъ частное большее всякаго конечнаго количества. И такъ какъ 0 не можетъ быть взята съ знакомъ $+$ или знакомъ $-$, то будетъ имѣть двусмысленную величину $\text{tang } 100^\circ = \pm \infty$

Пусть еще $A = 200^\circ - B$; въ этомъ случаѣ имъ $A = \sin B$, и $\cos A = -\cos B$; откуда $\text{tang } (200^\circ - B) = \frac{R \sin B}{-\cos B} = -\frac{R \sin B}{\cos B} = -\text{tang } B$, что согласуется съ числомъ XI

XVIII. Формулы предыдущаго члена, совокупленныя между собою и съ уравненіемъ $\sin^2 A + \cos^2 A = R^2$, доставляютъ многія другія заслуживающія вниманіе.

Во первыхъ имѣемъ $R^2 + \text{tang}^2 A = R^2 + \frac{R^2 \sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{R^2(\sin^2 A + \cos^2 A)}{\cos^2 A} = \frac{R^4}{\cos^2 A}$, откуда $R^2 + \text{tang}^2 A = \sec^2 A$, что можно бы было вывести непосредственно изъ прямоугольнаго тр. САТ. Подобнымъ образомъ изъ формулъ, или изъ прямоугольнаго тр. СДС, найдемъ $R^2 + \cot^2 A = \text{cosec}^2 A$.

Наконецъ, умножая между собою формулы $\text{tang } A = \frac{R \sin A}{\cos A}$, $\cot A = \frac{R \cos A}{\sin A}$, будемъ имѣть формулу $\text{tang } A \times \cot A = R^2$, которая даетъ $\cot A = \frac{R^2}{\text{tang } A}$, и $\text{tang } A = \frac{R^2}{\cot A}$. Подобнымъ же образомъ получили бы $\cot B = \frac{R^2}{\text{tang } B}$, откуда $\cot A : \cot B = \text{tang } B : \text{tang } A$; то есть, что котангенсы двухъ дугъ находятся въ обратномъ отношеніи къ тангенсамъ.

Формула $\cot A \times \text{tang } A = R^2$ могла бы быть выведена непосредственно изъ сравненія подобныхъ тр-въ САТ, СДС, которые даютъ $AT : CA = CD : DS$, или $\text{tang } A : R = R : \cot A$.

XIX. Поданнымъ синусамъ и косинусамъ двухъ дугъ а и в можно опредѣлить синусы и коси-

нуса суммы или разности дугъ, употребляя для того слѣдующія формулы

$$\sin (a+b) = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{R}$$

$$\sin (a-b) = \frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{R}$$

$$\cos (a+b) = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{R}$$

$$\cos (a-b) = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{R}$$

Пусть радиусъ $AC = R$, дуга $AB = a$, дуга $BD = b$, и поштому $ABD = a+b$. Опустимъ изъ точекъ B и D перпендикуляры BE , DF , на AC , изъ точки D проведемъ DI , перпендикулярную къ BC , и наконецъ изъ точки I проведемъ IK , перпендикулярную къ AC , и IL ей параллельную.

Подобные тр-ки BCE , ICK , даютъ пропорціи $CB : CI = BE : IK$ или $R : \cos b = \sin a : IK = \frac{\sin a \cos b}{R}$.

$CB : CI = CE : CK$ или $R : \cos b = \cos a : CK = \frac{\cos a \cos b}{R}$.

Тр-ки DIL , CBE , коихъ стороны взаимно перпендикулярны, суть подобны и даютъ пропорціи

$CB : DI = CE : DL$ или $R : \sin b = \cos a : DL = \frac{\cos a \sin b}{R}$.

$CB : DI = BE : IL$ или $R : \sin b = \sin a : IL = \frac{\sin a \sin b}{R}$.

Но такъ какъ $IK + DL = DF = \sin (a+b)$, и $CK - IL = CF = \cos (a+b)$; слѣдовательно

$$\sin (a+b) = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{R}$$

$$\cos (a+b) = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{R}$$

Легко бы было вывести изъ этихъ двухъ формулъ величины $\sin (a-b)$ и $\cos (a-b)$; но ихъ можно

опредѣлить прямо изъ той же фигуры. Въ самомъ дѣлѣ, если продолжимъ спускъ DI до встрѣчи его съ окружностью въ M , то будемъ имѣть $BM=BD=r$, и $MI=ID=\sin b$. Проведемъ чрезъ M линію MP перпендикулярную и MN параллельную AC , получимъ, по равенству $MI=DI$, $MN=IL$, и $IN=DL$. Но $IK=IN=MP=\sin(a-b)$, и $CK+MN=CP=\cos(a-b)$; слѣд. будемъ имѣть формулы

$$\sin(a-b) = \frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{R}$$

$$\cos(a-b) = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{R},$$

которыя и надлежало доказать.

Можно бы было думать, что предыдущее предположеніе не имѣетъ довольно общности, ибо, въ фигурѣ взятой нами, дуги a и b лежатъ $a+b$ менѣе 100° . Но, во первыхъ, доказательство распространяется безъ труда на тотъ случай, когда a и b менѣе 100° , а ихъ сумма $a+b > 100^\circ$. Въ этомъ случаѣ, точка F ушла бы изъ стороны AC , и одно изъ измѣненій доказательства состояло бы въ томъ, чтобы взять $\cos(a+b) = -CF$; но шлакъ изъ него бы въ томъ же время $CF=IL=CK$, то изъ этого всегда слѣдуетъ, что $\cos(a+b) = CK=IL$, или $R \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Предположимъ теперь, что формулы

$$R \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$R \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

будутъ приняты точными для всѣхъ величинъ a и b , входящихъ въ предѣлы A и B , можно доказать, что они имѣютъ мѣсто и тогда, когда эти предѣлы будутъ $100^\circ + A$ и B .

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ вообще, какова бы ни была дуга x ,

$$\sin(100^\circ + x) = \cos x.$$

$$\cos(100^\circ + x) = -\sin x.$$

Справедливость этихъ уравненій очевидна, когда $x < 100^\circ$ и мы утѣшимся въ томъ, что они имѣютъ мѣсто для всѣхъ величинъ x посредствомъ фиг. 18, гдѣ MM' и MM'' суть два диаметра взаимно перпендикулярные, и гдѣ можно брать послѣдовательно двѣ величины AM , ADM , ADM' , ADM'' , или или же величинъ сиречь произвольнаго числа окружностей.

Положимъ это, пусть $x = m + b$, и тогда получимъ

$$\sin(100^\circ + m + b) = \cos(m+b)$$

$$\cos(100^\circ + m + b) = -\sin(m+b).$$

Но, по предположенію, величинъ вторыхъ членовъ извѣстны, если m и b не превосходятъ предѣловъ A и B , слѣд. по этому же самому предположенію, будемъ имѣть

$$R \sin (100^\circ + m + b) = \cos m \cos b - \sin m \sin b,$$

$$R \cos (100^\circ + m + b) = -\sin m \cos b - \cos m \sin b.$$

Пусть $100^\circ + m = a$, и такъ какъ $\sin (100^\circ + m) = \cos m$ и $\cos (100^\circ + m) = -\sin m$, то отсюда $\cos m = \sin a$ и $\sin m = -\cos a$. Подставляя эти выражения въ предыдущія уравненія будемъ имѣть

$$R \sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$R \cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

откуда видно, что эти формулы, доказанныя прежде въ предѣлахъ $a < A$, $b < B$, доказаны теперь въ предѣлахъ *больша* значеній $a < 100^\circ + A$, $b < B$. Но, по той же самой причинѣ, предѣлы A и B можно прѣдѣлы a могутъ быть поставлены на 100, что можетъ продолжаться и неопредѣленно, такъ рассматриваемыя формулы будутъ имѣть мѣсто, какова бы ни была величина дугъ a и b .

Такъ какъ дуга a составляется изъ суммъ дугъ $a - b$ и b , то по предположенію формулы получимъ

$$R \sin a = \sin (a - b) \cos b + \cos (a - b) \sin b$$

$$R \cos a = \cos (a - b) \sin b - \sin (a - b) \cos b.$$

И выходя отсюда формулы

$$R \sin (a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$R \cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

которыя также будутъ имѣть мѣсто для всякъхъ величинъ a и b .

XX. Если въ формулахъ предыдущаго члена сдѣлаемъ $b = a$, то изъ первой и третьей получимъ новыя формулы

$$\sin 2a = \frac{2 \sin a \cos a}{R}, \quad \cos 2a = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{R},$$

которыя послужатъ для опредѣленія синуса и косинуса двойной дуги, по известному синусу и косинусу простой. Это можетъ быть приложено къ разрѣшенію задачи объ удвоеніи дуги.

Обратно, чтобы раздѣлить данную дугу на двѣ равныя части, подставимъ въ тѣ же формулы $\frac{1}{2} a$ вмѣсто a , и будемъ имѣть

$$\sin a = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}{R}, \quad \cos a = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} a - \sin^2 \frac{1}{2} a}{R}.$$

Но такъ какъ имѣемъ вдругъ $\cos^2 \frac{1}{2} a + \sin^2 \frac{1}{2} a = R^2$, и $\cos^2 \frac{1}{2} a - \sin^2 \frac{1}{2} a = R \cos a$, то отсюда слѣдуетъ, что $\cos^2 \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2} R \cos a$, и $\sin^2 \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} R \cos a$, и поному

$$\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} R \cos a}$$

$$\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2} R \cos a}.$$

И такъ, для $a = 100^\circ$, или $\cos a = 0$, будемъ имѣть $\sin 50^\circ = \cos 50^\circ = \sqrt{\frac{1}{2} R^2} = R\sqrt{\frac{1}{2}}$; сдѣлавъ помножь $a = 50^\circ$, что даетъ $\cos a = R\sqrt{\frac{1}{2}}$, будемъ имѣть $\sin 25^\circ = R\sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})}$, и $\cos 25^\circ = R\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})}$.

XII. Можно также имѣть величины $\sin \frac{1}{4} a$ и $\cos \frac{1}{4} a$, выраженные посредствомъ $\sin a$, что будетъ весьма полезно во многихъ случаяхъ. Эти величины суть:

$$\sin \frac{1}{4} a = \frac{1}{2} \sqrt{(R^2 + R \sin a) - \frac{1}{2} \sqrt{(R^2 - R \sin a)}}$$

$$\cos \frac{1}{4} a = \frac{1}{2} \sqrt{(R^2 + R \sin a) + \frac{1}{2} \sqrt{(R^2 - R \sin a)}}.$$

Въ снѣхъ дѣлѣ, возмывая первую въ квадраты, получимъ $\sin^2 \frac{1}{4} a = \frac{1}{4} (R^2 + R \sin a) + \frac{1}{4} (R^2 - R \sin a) - \frac{1}{4} \sqrt{(R^2 - R \sin a)^2}$ $= \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{4} R \cos a$; будемъ имѣть также $\cos^2 \frac{1}{4} a = \frac{1}{4} R^2 + \frac{1}{4} R \cos a$, что согласуется съ предыдущими величинами $\sin \frac{1}{2} a$ и $\cos \frac{1}{2} a$. Должно между тѣмъ замѣтить, что, въ случаѣ отрицательнаго $\cos a$, коренная величина должна быть взята съ противнымъ знакомъ въ выраженіяхъ $\sin \frac{1}{4} a$ и $\cos \frac{1}{4} a$, что бы имѣло одно и другое.

XIII. Посредствомъ этихъ формулъ легко опредѣлить синусъ и косинусъ всѣхъ десятичныхъ частей квадранта.

Пусть сначала $\sin 20' = x$; $2x$ будетъ хорда 40° или стороны правильного вписаннаго десятиугольника. Такъ какъ эта сторона равна большому отрезку радиуса раздѣленнаго въ крайнемъ среднемъ отношеніи (5, IV), то сдѣлавъ радиусъ $= 1$, будемъ имѣть $1 - 2x = 2x : 1 - 2x$. Отсюда получимъ $4x^2 = 1 - 2x$, или $x^2 + \frac{1}{2} x = \frac{1}{4}$; сдѣл. $(x + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$; $x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \sqrt{5}$. И наконецъ x или $\sin 20' = \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5})$.

Величина эта дастъ, по возмощеніи въ квадраты $\sin^2 20' = \frac{6 - 3\sqrt{5}}{16}$;

сдѣл. $1 - \sin^2 20'$, или $\cos^2 20' = \frac{10 + 3\sqrt{5}}{16}$. Но $\cos^2 a = \sin^2 a = \cos 2a$; сдѣл. $\cos 40^\circ$ или $\sin 60^\circ = \frac{4 + 3\sqrt{5}}{16} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Теперь, для въ формулахъ числа XII, $R = 1$, $a = 20'$, $\sin a = \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5})$, выведемъ

$$\sin 10' = \frac{1}{2} \sqrt{(3 + \sqrt{5})} - \frac{1}{2} \sqrt{(5 - \sqrt{5})}$$

$$\cos 10' = \frac{1}{2} \sqrt{(5 + \sqrt{5})} + \frac{1}{2} \sqrt{(5 - \sqrt{5})}.$$

Если помножь сдѣлавъ въ тѣхъ же формулахъ $a = 80'$, $\sin a = \frac{1}{4} (1 + \sqrt{5})$, то будемъ имѣть

$$\sin 80' = \frac{1}{2} \sqrt{(5 + \sqrt{5})} - \frac{1}{2} \sqrt{(5 - \sqrt{5})}$$

$$\cos 80' = \frac{1}{2} \sqrt{(5 + \sqrt{5})} + \frac{1}{2} \sqrt{(5 - \sqrt{5})}.$$

Из этих величин в уже известном выражении для $\sin 60^\circ$ и для $\sin 100^\circ$, можно составить следующую таблицу

$$\sin 0^\circ = \cos 100^\circ = 0.$$

$$\sin 10^\circ = \cos 80^\circ = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$\sin 20^\circ = \cos 70^\circ = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$$

$$\sin 40^\circ = \cos 50^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{5 + \sqrt{5}} - \frac{1}{2}\sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sin 100^\circ = \cos 80^\circ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

$$\sin 120^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{5 + \sqrt{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

$$\sin 140^\circ = \cos 40^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$\sin 160^\circ = \cos 20^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{5 + \sqrt{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

$$\sin 180^\circ = \cos 0^\circ = 1.$$

Эти величины могут быть приведены к простейшему виду, ибо имеем $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) = \frac{1}{2}(10 + \frac{1}{2}) \cdot 2$, и $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{2}(10 - \frac{1}{2}) \cdot 2$, откуда видно, что принимая за высшие $\frac{1}{2} \cdot 2$, и $\frac{1}{2} \cdot 10$, окладывая произведение четыре извлечения квадратным корнем, дабы получить величины синусов и косинусов для дугимм дуг 10° .

XIII. Из этих формул можно вывести для десятичных делений следующие. 1-е. Так как $\sin 40^\circ$ есть хорда 60° , или дуги, или самого правильного десятиугольника, то она $= \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, и ее квадрат $= \frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}$. Сторона правильного десятиугольника

$= \sin 20^\circ = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$, ее квадрат $= \frac{1}{4}(5 - 2\sqrt{5})$; и так $\frac{1}{4}(10 - 2\sqrt{5}) = 1 + \frac{1}{4}(5 - 2\sqrt{5})$. Отсюда следует, что сумма квадратов радиуса и бока десятиугольника, равно квадрату бока правильного вписанного десятиугольника.

2-е Между синусами десятичных делениям дается следующая зависимость, или следующее соотношение

$$\sin 90^\circ + \sin 80^\circ + \sin 70^\circ = \sin 60^\circ + \sin 50^\circ,$$

и эти дуги дают подобные образцы $\sin 60^\circ = \sin 20^\circ + 1$. Но эти формулы суть только частные, и можно доказать, что при дуге x , какого ни есть числа градусов, имеем

$$\sin(100^\circ - x) + \sin(20^\circ + x) + \sin(20^\circ - x) = \sin(60^\circ - x) + \sin(60^\circ + x)$$

В самом деле, формула $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b$ дает

$$\sin(20^\circ + x) + \sin(20^\circ - x) = 2 \sin 20^\circ \cos x$$

$$\sin(60^\circ + x) + \sin(60^\circ - x) = 2 \sin 60^\circ \cos x.$$

След., по причине $\sin 60^\circ = \sin 20^\circ + 1$, и $\cos x = \sin(100^\circ - x)$ эти два уравнения, отняв одно из другого, дадут

$$\sin(60^\circ + x) + \sin(60^\circ - x) - \sin(20^\circ + x) - \sin(20^\circ - x) = \sin(100^\circ - x).$$

Из этой формулы выводится уравнение нечетных дугимм, или

предположеніи $x = 10^\circ$, и онъ можетъ служить вообще для построения таблицы синусовъ.

XXIV. Если въ первой и третьей формулахъ члена XIX, сдѣлаемъ $b = 2a$, то будемъ имѣть

$$\sin 3a = \frac{\sin 2a \cos a + \cos 2a \sin a}{R}, \quad \cos 3a = \frac{\cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a}{R}.$$

Подставляя въ эти выраженія, на мѣсто $\sin 2a$ и $\cos 2a$, величины найденныя въ членѣ XX, и сокращая выводы посредствомъ уравненія $\sin^2 a + \cos^2 a = R$, получимъ формулы

$$\sin 3a = 3 \sin a - \frac{4 \sin^3 a}{R^2}$$

$$\cos 3a = \frac{4 \cos^3 a}{R^2} - 3 \cos a,$$

которыя служатъ для утроенія дугъ, и могутъ употребляться также для ихъ дѣленія на три равныя части. Въ самомъ дѣлѣ, полагая $\sin 3a =$ и $\sin a = x$, будемъ имѣть для опредѣленія x уравненіе $4R^2 = 3R^2 x - 4x^3$. Отсюда видно, что задача раздѣленія угла на три равныя части, рассматриваемая аналитически, принадлежитъ къ уравненію 3-й степени.

Если въ тѣхъ же самыхъ формулахъ члена XIX, сдѣлаемъ послѣдовательно $b = 3a$, $b = 4a$, и проч., то получимъ синусы и косинусы дугъ $4a$, $5a$, и проч.; то есть, вообще, синусы и косинусы кратныхъ дугъ a . Обратно, формулы служащія къ увеличиванію дугъ, дадутъ уравненія для раздѣленія данной дуги на равныя части, то есть, для опредѣленія $\sin a$ или $\cos a$, когда знаемъ $\sin 3a$ и $\cos 3a$.

XXV. Дабы развернуть еще величины $\sin 5a$ и $\cos 5a$, возьмемъ формулы

$$\sin (3a + 2a) = \frac{\sin 3a \cos 2a + \cos 3a \sin 2a}{R}$$

$$\cos (3a + 2a) = \frac{\cos 3a \cos 2a - \sin 3a \sin 2a}{R}.$$

Подставляя въ нихъ величину, найденную въ частяхъ XV и XVI, будемъ имѣть, по сокращеніи,

$$\sin b a = b \sin a - \frac{20 \sin^3 a}{R^2} + \frac{16 \sin^5 a}{R^4}$$

$$\cos b a = b \cos a - \frac{20 \cos^3 a}{R^2} + \frac{16 \cos^5 a}{R^4}.$$

Отсюда видно, что раздѣленіе угла на части частіи отъ дѣли выражаемыя уравненіемъ b и степеней, и подобно имъ образуютъ другія члены на вторые числа 7, 11, 15 и проч.

XXVI. Пусть будемъ предположено имѣть величину a и 1, при близкомъ до пятинадцати десятичныхъ цифръ, что можетъ быть весьма полезно для составленія таблицъ синусовъ. Вычисливъ же 10, найденное въ членѣ XVII, будемъ приведемъ въ десятичные, при предположеніи $R = 1$, имѣть $\sin 10^\circ = 0,1736481776669303$, оставда выкажемъ, по формулѣ члена XII, $\sin b^\circ = 0,078469008727816$.

Пусть теперь $\sin 1^\circ = x$, для полученія x , должно будетъ решить уравненіе

$$16x^5 - 20x^3 + bx = 0,078469008727816$$

Если, для краткости сдѣлать второй членъ $= c$, то будетъ имѣть $bx - 20x^3 = c$, и $x = \sqrt[4]{c + 4\left(\frac{c}{b}\right)^3}$. Изъ $\frac{1}{b} = 0,0157073178118207$ и $4\left(\frac{c}{b}\right)^3 = 0,000018186$, слѣд. получимъ для перваго приближенія величину $x = 0,015707376$, эту подставимъ въ лѣвую часть, тогда въ правой десятичной цифрѣ. Получимъ, для полученія другою болѣе точной величиною, $x = 0,0157073178118207$, будемъ имѣть, подставляя въ предположенное уравненіе и пренебрегая членами въ другихъ степеняхъ y ,

$$0,078469008727816 + 4,4432017y = 0 = 0,7443201727816,$$

откуда выведимъ $y = 0,0000000178118207$, и

$$x \text{ или } \sin 1^\circ = 0,0157073178118207.$$

Изъ синуса 1° или $100'$, можно вывести подобнымъ образомъ синусы $80'$, $10'$, $5'$ и наконецъ $1'$.

XXVII. Формулы члена XIX доставляютъ большое число результатовъ, между коими достаточно упомянуть о наиболѣе употребляемыхъ. Во первыхъ, изъ нихъ извлекаютъ четыре слѣдующія.

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} R \sin (a + b) + \frac{1}{2} R \sin (a - b)$$

$$\sin b \cos a = \frac{1}{2} R \sin (a + b) - \frac{1}{2} R \sin (a - b)$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} R \cos (a - b) + \frac{1}{2} R \cos (a + b)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} R \cos (a - b) - \frac{1}{2} R \cos (a + b),$$

которыя служатъ для перемѣны произведенія многихъ синусовъ или косинусовъ, въ синусы и коси-

пусы линейные, или помножаемые только на постоянныя величины.

XXVIII. Если въ предыдущихъ формулахъ сдѣлать $a + b = p$, $a - b = q$, что даетъ $a = \frac{p+q}{2}$, $b = \frac{p-q}{2}$, то изъ нихъ выходящя

$$\sin p + \sin q = \frac{2}{R} \sin \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)$$

$$\sin p - \sin q = \frac{2}{R} \sin \frac{1}{2}(p-q) \cos \frac{1}{2}(p+q)$$

$$\cos p + \cos q = \frac{2}{R} \cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)$$

$$\cos q - \cos p = \frac{2}{R} \sin \frac{1}{2}(p+q) \sin \frac{1}{2}(p-q).$$

Эти новыя формулы употребляются часто въ тригонометрическихъ вычисленіяхъ для приведенія двухъ членовъ къ одному.

XXIX. Наконецъ, изъ этихъ послѣднихъ формулъ чрезъ дѣленіе, и соображаясь съ тѣмъ, что

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\tan a}{R} = \frac{R}{\cot a}, \text{ выходящя слѣдующія}$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\sin \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)}{\cos \frac{1}{2}(p+q) \sin \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(p+q)}{\tan \frac{1}{2}(p-q)}$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{\sin \frac{1}{2}(p+q)}{\cos \frac{1}{2}(p+q)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(p+q)}{R}$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cos \frac{1}{2}(p-q)}{\sin \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\cot \frac{1}{2}(p-q)}{R}$$

$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{\sin \frac{1}{2}(p-q)}{\cos \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(p-q)}{R}$$

$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cos \frac{1}{2}(p+q)}{\sin \frac{1}{2}(p+q)} = \frac{\cot \frac{1}{2}(p+q)}{R}$$

$$\frac{\cos p + \cos q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)}{\sin \frac{1}{2}(p+q) \sin \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\cot \frac{1}{2}(p+q)}{\tan \frac{1}{2}(p-q)}$$

$$\frac{\sin(p+q)}{\sin p + \sin q} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p+q)}{2 \sin \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\cos \frac{1}{2}(p+q)}{\cos \frac{1}{2}(p-q)}$$

$$\frac{\sin(p+q)}{\sin p - \sin q} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p+q)}{2 \sin \frac{1}{2}(p-q) \cos \frac{1}{2}(p+q)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(p+q)}{\sin \frac{1}{2}(p-q)}$$

Эти формулы суть выражения такого же числа теоремъ. Изъ первой слѣдуетъ, что сумма синусовъ дугъ дугъ относится къ разности тѣхъ же самыхъ синусовъ, какъ тангенсъ полу-суммы дугъ относится къ тангенсу ихъ полуразности.

XXX. Если сдѣлаемъ $b = a$ или $q = 0$, въ формулахъ трехъ предыдущихъ членовъ, то получимъ слѣдующіе результаты:

$$\cos^2 a = \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2} R \cos 2a$$

$$\sin^2 a = \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} R \cos 2a$$

$$R + \cos p = \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} p}{R}$$

$$R - \cos p = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} p}{R}$$

$$\sin p = \frac{2 \sin \frac{1}{2} p \cos \frac{1}{2} p}{R}$$

$$\frac{\sin p}{R + \cos p} = \frac{\tan \frac{1}{2} p}{R} = \frac{R}{\cot \frac{1}{2} p}$$

$$\frac{\sin p}{R - \cos p} = \frac{\cot \frac{1}{2} p}{R} = \frac{R}{\tan \frac{1}{2} p}$$

$$\frac{R + \cos p}{R - \cos p} = \frac{\cot \frac{1}{2} p}{\tan \frac{1}{2} p} = \frac{R^2}{\tan^2 \frac{1}{2} p}$$

XXXI. Дабы развернуть также некоторыя формулы относящіяся къ тангенсамъ, рассмотримъ выраженіе $\tan(a+b) = \frac{R \sin(a+b)}{\cos(a+b)}$, въ которомъ подстановленіе величинъ $\sin(a+b)$ и $\cos(a+b)$ даетъ

$$\tan(a+b) = \frac{R(\sin a \cos b + \sin b \cos a)}{\cos a \cos b - \sin b \sin a}.$$

$$\text{Но имѣемъ } \sin a = \frac{\cos a \tan a}{R} \text{ и } \sin b = \frac{\cos b \tan b}{R},$$

и подставляя эти величины получимъ, по раздѣленіи всѣхъ членовъ на $\cos a \cos b$,

$$\tan(a+b) = \frac{R^2(\tan a + \tan b)}{R^2 - \tan a \tan b}.$$

Эта формула представляетъ величину танген-

са суммы двухъ дугъ, выраженную въ тангенсѣ каждой изъ нихъ. Подобнымъ образомъ найдемъ для тангенса ихъ разности

$$\operatorname{tang} (a - b) = \frac{R^2 (\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b)}{R^2 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}.$$

Полагая $b = a$, получимъ формулу для удвоенія дугъ

$$\operatorname{tang} 2a = \frac{2R^2 \operatorname{tang} a}{R^2 - \operatorname{tang}^2 a},$$

откуда слѣдуетъ

$$\cot 2a = \frac{R^2}{\operatorname{tang} 2a} = \frac{R^2}{2 \operatorname{tang} a} - \frac{1}{2} \operatorname{tang} a = \frac{1}{2} \cot a - \frac{1}{2} \operatorname{tang} a.$$

Полагая $b = 2a$, получимъ бы формулу для утроенія дугъ

$$\operatorname{tang} 3a = \frac{R^2 (\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} 2a)}{R^2 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} 2a},$$

въ которой, по подстановленіи величины $\operatorname{tang} 2a$ будемъ имѣть

$$\operatorname{tang} 3a = \frac{3R^2 \operatorname{tang} a - \operatorname{tang}^3 a}{R^2 - 3 \operatorname{tang}^2 a}.$$

XXXII. Разложеніе тригонометрическихъ формулъ, распространенное во всей его общности, составляетъ весьма замѣно интересное, относительно корней можно сравниться съ превосходнымъ твореніемъ Ейлера, подъ названіемъ *Introduction in analyse infinities*, изреченнымъ на Французскій языкъ Г. Лабо (1). Мы считаемъ излишнимъ за нужное доказать формулы, служащія для выраженія синусовъ и косинусовъ въ функціяхъ дуги, которыя предполагая известными въ примѣчаніи V и сущъ необходимымъ для составленія таблицы.

Полагая сначала радіусъ $= 1$, что не вредитъ общности выводовъ, имѣемъ формулу $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, первый членъ коей можно бытъ разсмотрѣнъ, какъ произведеніе двухъ взаимно множителей $\cos A + 1 = 1 \sin A$ и $\cos A - 1 = 1 \sin A$. Если перемножимъ два подобные множителя $\cos A + 1 = 1 \sin A$, $\cos B + 1 = 1 \sin B$, то произведеніе будетъ $\cos A \cos B - \sin A \sin B + (\sin A \cos B + \sin B \cos A)1 = 1$, и слѣд. приводится въ виду $\cos(A+B) + 1 = 1 \sin(A+B)$, подобному выводу изъ множителей. И такъ имѣемъ вообще

$$(\cos A + 1)(\cos B + 1) = 1 \sin(A+B) = \cos(A+B) + 1 \sin(A+B)$$

(*) Этого переводъ изданъ въ Парижѣ, 1796 году *Mr. Пер.*

Весьма замечательно, что упомянутое количество можно найти при помощи только трех элементарных функций, и эта предельная сложность сходная с свойствами логарифмов. Отсюда вытекают следующие тождества:

$$\begin{aligned}(\cos A + \gamma - 1 \sin A)(\cos A + \gamma - 1 \sin A) &= \cos 2A + \gamma - 1 \sin 2A \\(\cos A + \gamma - 1 \sin A)(\cos 2A + \gamma - 1 \sin 2A) &= \cos 3A + \gamma - 1 \sin 3A \\(\cos A + \gamma - 1 \sin A)(\cos 3A + \gamma - 1 \sin 3A) &= \cos 4A + \gamma - 1 \sin 4A\end{aligned}$$

и т. д.

Первое произведение равно $(\cos A + \gamma - 1 \sin A)^2$, второе равно $(\cos A + \gamma - 1 \sin A)^3$, и так далее. Намного вообще n разное n будь целое число, будем иметь:

$$(\cos A + \gamma - 1 \sin A)^n = \cos nA + \gamma - 1 \sin nA,$$

опуская, по привычке, знаменатель $\gamma - 1$,

$$(\cos A - \gamma - 1 \sin A)^n = \cos nA - \gamma - 1 \sin nA.$$

Из этих двух уравнений, если сложить одно к другому, введем упомянутые величины $\sin nA$ и $\cos nA$, то есть:

$$\begin{aligned}\cos nA &= \frac{1}{2}(\cos A + \gamma - 1 \sin A)^n + \frac{1}{2}(\cos A - \gamma - 1 \sin A)^n \\ \sin nA &= \frac{1}{2(\gamma - 1)}(\cos A + \gamma - 1 \sin A)^n - \frac{1}{2(\gamma - 1)}(\cos A - \gamma - 1 \sin A)^n.\end{aligned}$$

XXXIII. Если хотим выразить эти же самые количества в разложении, то должно будет разложить по формулам бинома $(\cos A + \gamma - 1 \sin A)^n$, что даст:

$$\begin{aligned}\cos^n A + \frac{n}{1} \cos^{n-1} A \sin A \gamma - 1 + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} \cos^{n-2} A \sin^2 A - \\ \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{n-3} A \sin^3 A \gamma - 1 + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{n-4} A \sin^4 A +\end{aligned}$$

и проч.

И так как эта величина есть величина $\cos nA + \gamma - 1 \sin nA$, то уравнявая упомянутую вещную часть $\cos nA$, а знаменатель $\gamma - 1 \sin nA$, будем иметь разн:

$$\cos nA = \cos^n A + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} \cos^{n-2} A \sin^2 A + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{n-4} A \sin^4 A -$$

и т. д.

$$\sin nA = n \cos^{n-1} A \sin A + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{n-3} A \sin^3 A + \text{и т. д.}$$

Этих законов легко усмотреть. Посредством их можно вывести синус и косинус дуги кратной A , гораздо удобнее, нежели по способу члена XXIV.

XXXV. Так как $\sin A = \cos A \operatorname{tang} A$ то предыдущие разн могут быть представлены в виде:

$$\cos nA = \cos^n A \left(1 - \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} \operatorname{tang}^2 A + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \operatorname{tang}^4 A - \text{и т. д.} \right)$$

$$\sin n A = \cos^n A \left(\frac{n}{1} \tan A - \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \tan^3 A + \dots \right).$$

Если $n = \frac{x}{A}$, то будем писать, подставляя эту величину в удержавшая множитель $\cos^n A$,

$$\cos x = \cos^n A \left(1 - \frac{2 \cdot x - 1}{1 \cdot 2} \frac{\tan^2 A}{A^2} + \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot x - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{\tan^4 A}{A^4} \right)$$

$$\text{или} = \cos^n A \left(1 - \frac{x}{A} \tan^2 A + \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot x - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\tan^3 A}{A^3} + \dots \right).$$

Взвешивая формулы можно брать A произвольно, если предположить A весьма малым, то $\frac{\tan A}{A}$ будет мало разниться от единицы, ибо шагнется весьма малой дуги почти равен ей. Между тем пока дуга не равна нулю, имеем $\tan A > A$ (1) или $\frac{\tan A}{A} > 1$, и

тоже самое время, $A > \sin A$ (2); следовательно $\frac{\tan A}{A} < \frac{\tan A}{\sin A}$, или $\frac{\tan A}{A} < \frac{1}{\cos A}$. Отсюда видно, что отношение $\frac{\tan A}{A}$ всегда и

ключается между пределами 1 и $\frac{1}{\cos A}$. Полагая $A = 0$, будем

иметь $\cos A = 1$; и так как $\frac{\tan A}{A}$ заключается между 1 и

$\frac{1}{\cos A}$, то должно иметь с точностью $\frac{\tan A}{A} = 1$. Помогая дугам $A = 0$, получим

$$\cos x = \cos^n A \left(1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \right)$$

$$\text{или} = \cos^n A \left(1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right)$$

Остается показать, что обращается $\cos^n A$, когда A будет уменьшаться и сделается наконец равно нулю. Так как имеем

$$\frac{1}{\cos^2 A} = \sec^2 A = 1 + \tan^2 A; \text{ то } \cos A = (1 + \tan^2 A)^{-\frac{1}{2}}; \text{ следовательно}$$

$$\cos^n A = (1 + \tan^2 A)^{-\frac{n}{2}} = 1 - \frac{n}{2} \tan^2 A + \frac{n \cdot n - 1}{2 \cdot 4} \tan^4 A - \dots$$

Подставляя вместо n его величину $\frac{x}{A}$, будем иметь

Ф. 1. (1) $\triangle ABC$ больше $\triangle AM$, ибо $\text{тр. } \triangle ABC$ относится к сектору $\triangle ACM = \triangle ABC : \triangle ACM = \frac{1}{2} AC : \frac{1}{2} AC = AB : AM$.

(2) $\triangle AM$ больше $\triangle MP$, ибо дуга MA больше своей хорды MP .

$$\cos^2 A = 1 - \frac{x}{2} A + \frac{\tan^2 A}{A^2} + \frac{x \cdot x + 2A}{2 \cdot 4} A^2 + \frac{\tan^2 A}{A^4} + \dots$$

Если вообразить шеперь, что A увеличивается больше и больше, когда x останется постоянным, то величина $\cos^2 A$ будет приближаться больше и больше к 1, и наконец, когда $A = 0$ и $\tan A = 0$, получим с точностью $\cos^2 A = 1$. Отсюда выводится формула

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

для вычисления синусов и косинусов дуги. Если дуга дается в частях радиуса взятого за единицу.

XLIV. Эти же самые выражения могут быть представляемы в виде, посредством степенных величин. Для того должно предположить, что e есть число, которого натуральнейший логарифм 1, и отсюда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Если в этой формуле, вместо x — 1, то выйдет

$$e^x - 1 = 1 + \frac{x^x - 1}{1} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

Подобным образом найдем, переменив знак x — 1,

$$e^{-x} - 1 = 1 - \frac{x^x - 1}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

Откуда найдем ряд

$$\frac{e^x - 1 + e^{-x} - 1}{2} = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

$$\frac{e^x - 1 - e^{-x} - 1}{2} = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

которые вторые члены суть величинами малыми для $\cos x$ и $\sin x$. Следовательно, наконец,

$$\cos x = \frac{e^x - 1 + e^{-x} - 1}{2}, \sin x = \frac{e^x - 1 - e^{-x} - 1}{2} - 1$$

откуда получим $\frac{e^x - 1 - e^{-x} - 1}{e^x - 1 + e^{-x} - 1} = -1 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = -1 \cdot \tan x$,

формулу употребленную в приложении IV.

Тогда формула дает $e^x - 1 = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$, и

$e - x\sqrt{-1} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x$; если, раздѣлив одну на другую, будемъ имѣть: $2x\sqrt{-1} = \frac{\cos x + \sqrt{-1} \sin x}{\cos x - \sqrt{-1} \sin x} = \frac{1 + \sqrt{-1} \tan x}{1 - \sqrt{-1} \tan x}$

или, взявъ логарифмы каждаго члена, $2x\sqrt{-1} = \log \left(\frac{1 + \sqrt{-1} \tan x}{1 - \sqrt{-1} \tan x} \right)$.

Но такъ какъ $\log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \dots$ и проч., то имѣя сдѣлавъ $\sqrt{-1} \tan x$ вмѣсто z , и раздѣливъ съ одной и въ другой стороны на $2\sqrt{-1}$, получимъ

$$x = \tan x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x - \frac{1}{7} \tan^7 x + \dots$$

Эта весьма простая формула служитъ для вычисленія дуги по ея тангенсу, если тангенсъ не имѣетъ единицъ.

XXXVI. Для примѣненія предыдущихъ формулъ къ опредѣленію синуса и косинуса дуги, данной въ градусахъ и частяхъ градуса, должно имѣть длину этой дуги выраженную въ частяхъ радиуса, такъ что все равно, отношеніе дуги къ радиусу. Но при радиусъ равномъ 1, полуокружность или дуга въ $200^\circ = 3,141592653589793$

Пустъ это число $= \pi$; длина дуги $\frac{m}{n} \cdot 100^\circ$ будетъ $\frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$; и слѣ-

дѣла въ предыдущихъ формулахъ $x = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$, подставляя вѣличину π , и вычисляя коэффициенты до шестнадцати десятичныхъ цифръ, получимъ слѣдующія формулы:

$$\sin \left(\frac{m}{n} \cdot 100^\circ \right) = \frac{m}{n} - 0.6459840975062163 \frac{m^3}{n^3} + 0.0796926262461670 \frac{m^5}{n^5} - 0.0046817541553187 \frac{m^7}{n^7} + 0.0001604411547874 \frac{m^9}{n^9} - 0.0000035981482352 \frac{m^{11}}{n^{11}} + 0.0000000669217292 \frac{m^{13}}{n^{13}} - 0.0000000006458035 \frac{m^{15}}{n^{15}} + 0.00000000000060669 \frac{m^{17}}{n^{17}} - 0.00000000000000433 \frac{m^{19}}{n^{19}} + 0.000000000000000008 \frac{m^{21}}{n^{21}}$$

$$\cos \left(\frac{m}{n} \cdot 100^\circ \right) = 1.0000000000000000 - 1.2837005501561698 \frac{m^2}{n^2} + 0.2536896079010480 \frac{m^4}{n^4} - 0.0208654807633630 \frac{m^6}{n^6} + 0.0009192602749391 \frac{m^8}{n^8} - 0.0000251020423781 \frac{m^{10}}{n^{10}} + 0.0000003710874779 \frac{m^{12}}{n^{12}} - 0.00000000065848031 \frac{m^{14}}{n^{14}} + 0.000000000000456596 \frac{m^{16}}{n^{16}} - 0.000000000000005294 \frac{m^{18}}{n^{18}} + 0.00000000000000000036 \frac{m^{20}}{n^{20}}$$

Синусом и косинусом дугъ отъ 0° до 90° , содержатъ синусом и косинусом дугъ отъ 90° до 180° , ибо имѣемъ $\sin (90^\circ + \alpha) = \sin (90^\circ - \alpha)$ и $\cos (90^\circ + \alpha) = -\cos (90^\circ - \alpha)$. И такъ, въ формулахъ, которые дають величинамъ $\sin \frac{m}{n} 100^\circ$ и $\cos \frac{m}{n} 100^\circ$, можно всег-

да предполагать $\frac{m}{n} < 90^\circ$, и разнъ будутъ столь приближающимися, что достаточно вычислить небольшое число цифръ, означая тогда не имѣемъ надобности во многихъ десятичныхъ цифръ.

Для пользованья имъ $\frac{m}{n} = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}$, получимъ слѣдующіе выходы

$\sin 10^\circ = \cos 80^\circ = 0.17364817766693$
$\sin 20^\circ = \cos 70^\circ = 0.34202014332566$
$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = 0.50000000000000$
$\sin 40^\circ = \cos 50^\circ = 0.64278760968654$
$\sin 50^\circ = \cos 40^\circ = 0.76604444311898$
$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = 0.86602540378444$
$\sin 70^\circ = \cos 20^\circ = 0.93969262078591$
$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ = 0.98480775301221$
$\sin 90^\circ = \cos 0^\circ = 1.00000000000000$

которые согласуются съ алгебраическими формулами главы XIII.

Положивъ $\frac{m}{n} = \frac{1}{100}$, найдемъ подобнымъ образомъ нѣсколько $\sin 1^\circ$, каковы нашіе въ главѣ XXVI, и согласить съ вышними получаются эти выходы служатъ доказательствомъ предположеннаго метода.

О составленіи таблицъ синусовъ.

XXXVII. Ученые, коимъ мы обязаны первыми составленными таблицами синусовъ, основали ихъ вычисленіемъ на вещи какъ весьма важныя, но трудныя въ приложеніи. Анализъ доказываетъ въ послѣдствіи болѣе удобные методы для этого предпріятія, но онъ бы вѣроятно остался безъ приложенія, еслибы извѣстны не были бы системы методовъ для случая вычисленія возмъ таблицъ, сообразныя съ десятичными дѣленіемъ круга.

Чтобы дать нѣкое о методахъ, коимъ можно слѣдовать въ составленіи таблицъ, положимъ, что требуется вычислить синусы всѣхъ дугъ отъ 1 минуты до 10000 минутъ или 100 градусовъ. Сдѣлавъ

радиус $= 1$, дугу одной минуте $= a$, должно будетъ выйти синусъ и косинусъ дуги a съ большою степенью приближенія.

Такъ какъ радиусъ равенъ 1, то полуокружность или дуга в $200^\circ = 5.1415926535897184$; раздѣляя это число на 20000, получимъ дугу $1'$ или $a = 0.00015707963267948966$, величину точную до двадцатой цѣмры. Когда дуга очень мала то синусъ ея чувствительно равенъ дугѣ, и пошому можемъ положить $\sin a = 0.00015707963267948966$. Но эта величина уже погрѣшаетъ на тридцатой цѣмрѣ, которая есть только десятая значущая. Для получения болѣе точнаго, самымъ простымъ способъ сошлемся въ томъ, чтобы приблѣзиться къ

формуламъ числа XXXVI, изъ которыхъ, по сдѣланію $\frac{m}{n} = \frac{1}{10000}$, получимъ непосредственно, вычисляя два или три первые члена ряда,

$$\sin a = 0.000157079632033525363.$$

$$\cos a = 0.9999999987662994621005253,$$

величины вѣрныя до двадцатой десятичной цѣмры для синуса, и до двадцати четвертой для косинуса.

XXXVIII. Зная синусъ и косинусъ дуги одной минуте, означенной чрезъ a , можно вывести послѣдовательно синусы всѣхъ дугъ кратныхъ a , если сдѣланы въ формулахъ члена XVIII. $p = x + a$, $q = x - a$. Первая и вторая дадутъ послѣ этого подстановленія и при радиусѣ R всегда равныя 1,

$$\sin (x + a) = 2 \cos a \sin x - \sin (x - a)$$

$$\cos (x + a) = 2 \cos a \cos x - \cos (x - a).$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ, что если имѣть рядъ дугъ въ арифметической прогрессіи, коимъ разность будетъ a , то синусы составятъ возвратный рядъ, дѣ производяніе члены (echelle de relation) суть $2 \cos a$, -1 , откуда видно, что вычисляя два послѣдовательные синуса A и B , найдемъ третій C , чрезъ произведеніе B на $2 \cos a$, A на -1 , и чрезъ совокупленіе двухъ произведеній, что дастъ $C = 2B \cos a - A$. Косинусы тѣхъ же дугъ составятъ равнымъ образомъ возвратный рядъ, гдѣ производяніе члены суть $2 \cos a$, -1 , и по этому будетъ имѣть послѣдовательно

$$\sin 0 = 0$$

$$\sin a = \sin a$$

$$\sin 2a = 2 \cos a \sin a$$

$$\sin 3a = 2 \cos a \sin 2a - \sin a$$

$$\sin 4a = 2 \cos a \sin 3a - \sin 2a$$

$$\sin 5a = 2 \cos a \sin 4a - \sin 3a$$

и проч

$$\cos 0 = 1$$

$$\cos a = \cos a$$

$$\cos 2a = 2 \cos a \cos a - 1$$

$$\cos 3a = 2 \cos a \cos 2a - \cos a$$

$$\cos 4a = 2 \cos a \cos 3a - \cos 2a$$

$$\cos 5a = 2 \cos a \cos 4a - \cos 3a$$

и проч.

XXXIX. Теперь остается только прояснить означенныя дѣйствія, подставляя величинны $\sin a$ и $\cos a$. Если можемъ составить таблицу синусовъ съ 10 десятичными цѣмрами, то для этого достаточно бы было взять величинны $\sin a$ и $\cos a$, приближеннаго до 16 десятичныхъ, то есть:

$$\sin a = 0.000167079682335$$

$$\cos a = 0.99999992876629945,$$

но такъ какъ $\cos a$ отличается весьма мало отъ единицы, то $\sin a$ можно употребить слѣдующимъ способомъ сокращенія. Положим $h = 2(1 - \cos a) = 0.0000000246740110$, будемъ считать $2 \sin a = 1 - h$, что дастъ

$$\sin(x + a) - \sin x = \sin x - \sin(x - a) - h \sin x.$$

$$\cos(x + a) - \cos x = \cos x - \cos(x - a) - h \cos x.$$

Для полученія члена $\sin(x + a)$, достаточно прибавить къ предыдущему члену $\sin x$, разность $\sin(x + a) - \sin x$, которая всегда мала; но по формулѣ эта разность равна тойже, что и численной разности $\sin x - \sin(x - a)$, бѣтъ произведенія $\sin x$ на постоянное количество h . Это умноженіе есть только одно и то же во продолжительное время, которое можно произвести для вычисления синуса изъ двухъ предыдущихъ, но вылились т-е, что достаточно знать произведеніе до шестнадцатой десятичной цифры, и въ этомъ случаѣ число вычисляемыхъ цифръ значительно увеличивается; 2-е, что эти произведенія могутъ быть весьма сокращены, если составимъ сначала произведенія дошестнадцатого числа 246740110, на 1, 2, 3, и т. д. до 9, ибо, зная что получены все посредственно частные выходы, производящіе отъ различныхъ цифръ множителя $\sin x$, и останется только произвести сложение этихъ произведеній, ограничиваясь всегда шестнадцатой десятичной цифрой. Такъ же способомъ можно слѣдовать при вычисленіи косинуса, и таблица слѣдится полною, когда продолжитъ шортъ и другой рядъ до 60.

XI. Повторяемъ еще, что необходимо вычислять синусы до 16 десятичныхъ знаковъ, т. е. съ пятью или шестью знаками болѣе, чѣмъ хотимъ имѣть изъ въ самомъ дѣлѣ, дабы быть въ полной увѣренности, что погрѣшности, которая можетъ увеличиться въ продолженіи 6000 дѣшмивъ, не имѣли не малу тѣмъ вліянія даже на десятую десятичную цифру послѣднихъ выводовъ. По окончаніи вычисленій, можно уничтожить лишніе десятичные и сократить въ таблицахъ только десять десятичныхъ знаковъ.

Впрочемъ, когда дѣло идетъ объ шлкахъ косинусовъ вычисленій, то можно повторять выводы сколько чело чще. Въ принятѣ приведенномъ нами таблицѣ для чинуть, необходимо было бы вычислять предварительно синусы и косинусы изъ градуса въ градусъ, что бы составило, чрезъ каждыя 100 членовъ, весьма полезную поправку. Для вычисленій синусовъ изъ градуса въ градусъ имѣемъ слѣдующія величины и формулы

$$\sin(x + 1^\circ) - \sin x = \sin x - \sin(x - 1^\circ) - h \sin x$$

$$\cos(x + 1^\circ) - \cos x = \cos x - \cos(x - 1^\circ) - h \cos x$$

$$\sin 1^\circ = 0, 016707317311820676.$$

$$\cos 1^\circ = 0, 9998766832181660519$$

$$h = 2(1 - \cos 1^\circ) = 0,000216733016678802.$$

Синусы вычисленные изъ градуса въ градусъ будутъ повторяться сами собою чрезъ каждыя 10 членовъ, уже высшими величинами

$\sin 10^\circ$, $\sin 20^\circ$, и т. д. Наконецъ, по сопоставленіи всей таблицы, можно еще подтвердить ее, какъ угодно образомъ, посредствомъ равенствъ

$$\sin(100^\circ - x) + \sin(20^\circ - x) + \sin(20^\circ + x) = \sin(60^\circ - x) + \sin(60^\circ + x).$$

ХІІ. Синусы, въ томъ видѣ какъ они получаются изъ приведенныхъ нами вычисленій, выражены въ частяхъ радіуса, и восходятъ къ натуральнымъ синусамъ, но въ практикѣ дознано, что гораздо выгоднѣе употреблять логарифмы синусовъ, чѣмъ самые синусы, и въ слѣдствіе этого большая часть таблицъ не содержитъ натуральныхъ синусовъ, но только ихъ логарифмы. Естественное, что, по вычисленіи синусовъ, легко бы было найти ихъ логарифмы, но предположеніе радіуса $= 1$ сдѣлало бы отрицательными всѣ логарифмы синусовъ, и потому предпочли взять радіусъ $= 10000000000$, т. е. увеличили изъ шестнадцати всѣ синусы найденные при предположеніи радіуса $= 1$. Здѣсь радіусъ или синусъ 100°, часто встрѣчаемый въ вычисленіи, имѣешь логарифмическій 10 цифръ, и назвали бы, чтобы угла былъ гораздо чѣтѣе употребившихся въ практикѣ, дабы ихъ синусы были отрицательные логарифмы.

По найденіи логарифмическихъ синусовъ, можно вывести изъ нихъ очень легко логарифмы тангенсовъ, посредствомъ простаго вычисленія; ибо, какъ выраженіи $\tan x = \frac{R \sin x}{\cos x}$, слѣдуетъ $\log. \tan x = 10 + \log. \sin x - \log. \cos x$. Что касается до логарифмическихъ кансовъ, то они находятся еще прихитреннѣе способомъ, поводя уравненіи $\sec x = \frac{R^2}{\cos x}$. По причинѣ легкости ихъ вычисленія, въ таблицахъ помѣщаются только логарифмы синусовъ и косинусовъ.

Намъ оставалось бы еще объяснить роль вставочнаго дѣйствія (interpolation), коимъ пользуются, или для опредѣленія логарифмическихъ синусовъ и тангенсовъ дугъ, содержащихъ части минутъ, или для опредѣленія дуги соответствующей данному логарифму синуса или тангенса, когда этотъ логарифмъ падаетъ между двумя логарифмами таблицъ. Но для такихъ подробностей лучше обращаться съ объясненіями, которые всегда сопровождаютъ таблицы.

Начала относящіяся къ разрѣшенію прямолинейныхъ треугольниковъ.

ХІІІ. Въ каждомъ прямоугольномъ треугольникѣ, радіусъ относится къ синусу одного изъ острыхъ угловъ, какъ гипотенуза къ сторонѣ противоположной острому углу.

Пусть АВС предложенный шръкъ, прямоугольный въ А. Изъ точки С, какъ центра, и радіусъ

сомъ CD , равнымъ радиусу таблицъ, опишемъ дугу DE , которая будетъ мѣрою угла C , и опустимъ на CD перпендикуляръ EF , который будетъ синусомъ угла C . Подобіе трѣхъ CBA , CEF , дастъ пропорцію $CE:EF = CB:BA$, откуда

$$R : \sin C = BC : BA.$$

XIII. Во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ радиусъ относится къ тангенсу одного изъ острыхъ угловъ, какъ сторона прилежащая этому углу къ противоположной сторонѣ.

Описавъ дугу DE , какъ и въ предыдущемъ членѣ, возставимъ на CD перпендикуляръ DG , который будетъ тангенсомъ угла C . Подобіе трѣхъ CDG , CAB , дастъ пропорцію $CD:DG = CA:AB$; слѣд.

$$R : \tan C = CA : AB.$$

XIV. Во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ синусы угловъ пропорциональны противолежащимъ сторонамъ.

Пусть ABC предложенный тр-къ, и AD перпендикуляръ, опущенный изъ вершины A на противоположную сторону BC . Здѣсь могутъ встрѣтиться Ф. 4. два случая:

1-е. Если перпендикуляръ падаетъ внутри треугольника ABC , то прямоугольные тр-ки ABD , ACD , дадутъ (XIII)

$$R : \sin B = AB : AD,$$

$$R : \sin C = AC : AD.$$

Такъ какъ въ этихъ пропорціяхъ крайніе члены равны, то изъ среднихъ можно составить пропорцію

$$\sin C : \sin B = AB : AC.$$

2-е. Если перпендикуляръ падаетъ внѣ тр-ка Ф. 5. ABC , то прямоугольные тр-ки ABD , ACD , дадутъ еще пропорціи

$$R : \sin ABD = AB : AD$$

$$R : \sin C = AC : AD,$$

откуда выводимъ $\sin C : \sin ABD = AB : AC$. Но уголъ ABD есть дополнение ABC или B; слѣд. $\sin ABD = \sin B$, и пошному имѣемъ еще

$$\sin C : \sin B = AB : AC.$$

XLV. Во всякомъ прямолинейномъ треугольнике косинусъ угла относится къ радиусу, такъ какъ сумма квадратовъ сторонъ содержащихъ этотъ уголъ безъ квадрата третьей стороны, относится къ удвоенному произведенію двухъ первыхъ сторонъ, то есть,

$$\begin{aligned} \cos B : R &= \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC} : 2AB \times BC, \text{ или } \cos B = \\ &= R \times \frac{\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC}}{2AB \times BC}. \end{aligned}$$

Пусть будетъ опущенъ изъ вершины A перпендикуляръ AD на сторону BC.

1-е. Если этотъ перпендикуляръ падаетъ въ треугольника, то будемъ имѣть (12, III)

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} - 2BC \times BD,$$

откуда $BD = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC}}{2BC}$. Но въ прямоугольномъ тр-кѣ ABD, имѣемъ $R : \sin BAD = AB : BD$, и такъ какъ уголъ BAD есть дополнение B, то $\sin BAD = \cos B$; слѣд. $\cos B = \frac{R \times BD}{AB}$; или, подставляя величину BD,

$$\cos B = R \times \frac{\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC}}{2AB \times BC},$$

2-е. Если перпендикуляръ падаетъ внѣ тр-ка, то будемъ имѣть (15, III)

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} + 2BC \times BD; \text{ слѣд. } BD = \frac{\overline{AC} - \overline{AB} - \overline{BC}}{2BC}.$$

Но въ прямоугольномъ тр-кѣ BAD, имѣемъ всегда $\sin BAD$, или $\cos ABD = \frac{R \times BD}{AB}$, и такъ какъ уголъ

ABD есть дополнительное ABC или B, то получимъ
 (x1) $\cos B = -\cos ABD = -\frac{R \times BD}{AB}$ и подставляя величину BD, будемъ имѣть

$$\cos B = R \times \frac{AB + BC - AC}{2AB \times BC}.$$

XLVI. Пусть A, B, C, три угла какого нибудь треуг. a, b, c, сторонамъ противоположны или противуположны, въ слѣдствіе предыдущей теоремы будемъ имѣть $\cos B = R \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Примѣненіе того же самого начала къ двумъ другимъ угламъ даетъ следующие образцы

$$\cos A = R \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos C = R \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Эти три формулы достаточны для разрѣшенія всѣхъ задачъ прямолинейной тригонометріи; ибо, при данныхъ трехъ изъ шести величинъ A, B, C, a, b, c, имѣемъ изъ формулъ уравненія необходимые для опредѣленія трехъ прочихъ. Поэтому должно, чтобы начало изложеннаго выше, и нѣз, том бы можно было изъ нихъ прибавить, былъ только слѣдствіемъ трехъ данныхъ приведенныхъ выше формулъ.

Въ самомъ дѣлѣ, величина $\cos B$ даетъ

$$\sin^2 B = R^2 - \cos^2 B = R^2 - \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2c^2} = \frac{R^2}{4a^2c^2}$$

$$(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4), \text{ такъ } \frac{\sin B}{b} = \frac{R}{2abc} \mid (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4).$$

Такая сама вторая часть есть функция отъ a, b, c, въ которую всѣ три буквы входятъ одинаковымъ образомъ. Но ясно, что оно слѣдуетъ перемѣненіе буквъ изъ этихъ буквъ произвольно, и

получимъ отсюда $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$, что уже было выведено въ началѣ XLIV, а изъ него легко выведутся начала пунктовъ XLII и XLIII.

XLVII. Во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ сумма двухъ сторонъ относится къ ихъ разности, какъ тангенсъ полусуммы угловъ, противоположныхъ этимъ сторонамъ, къ тангенсу полуразности тѣхъ же самыхъ угловъ.

Изъ пропорціи $AB : AC = \sin C : \sin B$, пзвлека

емъ $AC + AB : AC - AB = \sin B + \sin C : \sin B - \sin C$.

Но, по формуламъ члена XLIX,

$$\sin B + \sin C : \sin B - \sin C = \operatorname{tang} \frac{C+B}{2} : \operatorname{tang} \frac{B-C}{2};$$

сѣд.

$$AC + AB : AC - AB = \operatorname{tang} \frac{B+C}{2} : \operatorname{tang} \frac{B-C}{2}. \quad \text{ч. и н. д.}$$

Посредствомъ этого небольшого числа началъ, мы будемъ въ состояніи разрѣшить всѣ случаи прямолинейной тригонометріи.

Разрѣшеніе прямоугольныхъ триугольниковъ.

XLVIII. Пусть A прямой уголъ предложеннаго прямоугольнаго триугольника, B и C два другіе угла; пусть a гипотенуза, b сторона противоположная углу B , и c сторона противоположная углу C . Такъ какъ углы B и C служатъ однимъ другому дополненіемъ, то можно, смотря по разнымъ случаямъ, взять $\sin C = \cos B$, $\sin B = \cos C$, и, подобнымъ образомъ, $\operatorname{tang} B = \cot C$, $\operatorname{tang} C = \cot B$. Сдѣлавъ это предположеніе, мы увидимъ, что всѣ задачи, относящіяся къ разрѣшенію прямоугольныхъ триугольниковъ, могутъ быть приведены къ чешыремъ слѣдующимъ случаямъ.

Первый случай.

XLIX. Даны гипотенуза a и сторона b ; найти третью сторону и два острые углы.

Для опредѣленія угла B имѣетъ пропорцію $a : b = R : \sin B$ (XLII). Зная уголъ B , можно найти его дополненіе $100^\circ - B = C$, или опредѣлить прямо C изъ пропорціи $a : b = R : \cos C$.

Что касается до третьей стороны c , то она можетъ быть найдена двумя способами. Во первыхъ, по опредѣленіи угла B , можно составить пропорцію $R : \cot B = b : c$ (XLIII), которая даетъ

величину c или, во второмъ, извлечь прямо величину c изъ уравненія $c^2 = a^2 - b^2$, которое дастъ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, и въ слѣдствіе этого

$$\log c = \frac{1}{2} \log(a + b) + \frac{1}{2} \log(a - b).$$

ВТОРОЙ СЛУЧАЙ.

I. Даны двѣ стороны b и c , содержащая прямой уголъ; найти гипотенузу a и протіе углы.

Изъ пропорцій $c : b = R : \tan B$, определяемъ уголъ B (XIII), и потомъ $C = 100^\circ - B$. Можно также найти C прямо изъ пропорцій $b : c = R : \tan C$.

Зная уголъ B , найдемъ гипотенузу изъ пропорцій $\sin B : R = b : a$, или прямо изъ уравненія $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; но это выраженіе, въ которомъ $b^2 + c^2$ не можеть разложиться на множители, неудобно для вычисленій логарифмическихъ.

ТРЕТІЙ СЛУЧАЙ.

II. Даны гипотенуза a и уголъ B ; найти двѣ другія стороны b и c .

Составивъ пропорцій $R : \sin B = a : b$, и $R : \cos B = a : c$, получимъ изъ нихъ величины b и c . Что касается до угла C , то онъ будетъ дополненіемъ B .

ЧЕТВЕРТЫЙ СЛУЧАЙ.

III. Дана сторона b прилежащая къ прямому углу, и одинъ изъ острыхъ угловъ; найти гипотенузу и другую сторону.

Такъ какъ по известному острому углу можно опредѣлить другой, то полагая известнымъ сторону b и противоположный уголъ B , найдемъ величины a и c изъ пропорцій:

$$\sin B : R = b : a; \quad R : \cot B = b : c.$$

*Разрѣшеніе прямолинейныхъ треугольниковъ
вообще.*

Пусть A, B, C , углы предложеннаго триа, и a, b, c , стороны нѣхъ относительно противоположныя. Различныя задачи, которыя могутъ имѣть мѣсто, при опредѣленіи трехъ изъ этихъ величинъ, посредствомъ трехъ другихъ, приводятся всегда къ четыремъ слѣдующимъ случаямъ.

Первый случай.

III. *Даны сторона a и два угла треугольника; найти двѣ другія стороны b и c .*

Ясно, что по двумъ известнымъ угламъ можно найти третій. Стороны b и c опредѣлятся изъ пропорцій (XLIV)

$$\sin A : \sin B = a : b$$

$$\sin A : \sin C = a : c.$$

Второй случай.

IV. *Даны двѣ стороны a и b , и уголъ A , противоположный одной изъ сторонъ; найти третью сторону c и два другія угла B и C .*

Сначала найдемъ уголъ B изъ пропорцій

$$a : b = \sin A : \sin B.$$

Если положимъ, что M будетъ острый уголъ, коего синусъ $= \frac{b \sin A}{a}$, то можно, смотря по величинѣ $\sin B$, взять $B = M$, или $B = 200 - M$. Но эти два рѣшенія будутъ имѣть мѣсто тогда, когда въ тоже время A есть острый уголъ и $b > a$. Если уголъ A тупой, то B не можетъ быть тупымъ и поэтому получимъ одно рѣшеніе; но если уголъ A острый, то $b < a$, и слѣд. будемъ имѣть опять одно рѣшеніе; ибо тогда $M < A$, и дѣлая

$B = 200^\circ - M$, получимъ $A + B > 200^\circ$, что не возможно.

По известнымъ угламъ A и B , определимъ третій C , и наконецъ третью сторону c найдемъ изъ пропорціи

$$\sin A : \sin C = a : c.$$

Можно вывести c прямо изъ уравненія $\frac{a \sin A}{\sin B} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$, которое даясь $c = \frac{b \cos A}{\sin B} + \frac{1}{2} \left(a - \frac{b^2 \sin^2 A}{\sin B} \right)$. Но эта величина можетъ быть посчитана логарифмически только посредствомъ вспомогательнаго угла M или N , что входитъ въ предыдущее рѣшеніе.

ТРЕТІЙ СЛУЧАЙ.

IV. По даннымъ двумъ сторонамъ a и b , съ содержащимся между ними угломъ C , найти двѣ другіе угла B и A и третью сторону c .

Зная уголъ C , найдемъ сумму двухъ другихъ угловъ $A + B = 200^\circ - C$ и ихъ полусумму $\frac{1}{2}(A + B) = 100^\circ - \frac{1}{2}C$. Можно вычислить и полуразности этихъ угловъ изъ пропорціи (XLVII) $a + b : a - b = \tan \frac{1}{2}(A + B) : \tan \frac{1}{2}C$ или $\cot \frac{1}{2}C : \tan \frac{1}{2}(A - B)$, гдѣ предполагается, что $a > b$ и, въ слѣдствіе этого, $A > B$.

Найдемъ полуразность $\frac{1}{2}(A - B)$ и сложивъ ее съ полусуммою $\frac{1}{2}(A + B)$, получимъ больший уголъ A . Если, напротивъ, вычтемъ полуразность изъ полусуммы, то найдемъ меньшій уголъ B . Ибо, полагая A и B какимъ ни есть количествомъ, имѣемъ всегда

$$A = \frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}(A - B),$$

$$B = \frac{1}{2}(A + B) - \frac{1}{2}(A - B).$$

При известныхъ углахъ A и B , можно определить третью сторону c изъ пропорціи

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c.$$

IV. Часто случается въ тригонометрическихъ исчисленіяхъ,

что две стороны a и b известны по нмъ logarithмич., и тогда, чтобы не искать соотношительствующих нмъ чиселъ, определяемъ прямо уголъ φ изъ пропорции $a : b = R : \tan \varphi$. Уголъ φ будетъ больше 50° , ибо предполагается что $a > b$; слѣд., вычтемъ 50° изъ φ , составимъ пропорцію $R : \tan(\varphi - 50^\circ) = \cos \frac{1}{2} C$, т. е. $\tan \frac{1}{2} (A - B)$; откуда определяемъ, какъ и прежде, величину $\frac{1}{2} (A - B)$, и наконецъ величины угловъ A и B .

Это решение основано на томъ, что $\tan(\varphi - 50^\circ) = R^2 \tan \varphi - R^2 \tan 50^\circ$; но $\tan \varphi = \frac{a}{b}$, и $\tan 50^\circ = R$; слѣд., $R^2 + \tan \varphi \tan 50^\circ$; откуда $a + b : a - b = R : \tan(\varphi - 50^\circ) = \cos \frac{1}{2} C : \tan \frac{1}{2} (A - B)$.

Что касается до третьей стороны c , то она можетъ быть определена прямо изъ уравненія:

$$\frac{\cos C}{R} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \text{ откуда } c = \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2ab \cos C}{R}}.$$

Но эта величина удобна для logarithмическихъ исчисленій въ такомъ только случаѣ, когда числа, представляющія a , b и $\cos C$, будутъ очень просты.

Должно замѣтить, что величина c можетъ принять два слѣдующіе вида:

$$c = \sqrt{\left[(a-b)^2 + 4ab \frac{\sin^2 \frac{1}{2} C}{R^2} \right]} = \sqrt{\left[(a+b)^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} C}{R^2} + (a-b)^2 \frac{\cos^2 \frac{1}{2} C}{R^2} \right]},$$

что легко превратится посредствомъ формулы

$$\sin^2 \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} (R^2 - R \cos C), \cos^2 \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} (R^2 + R \cos C).$$

Эти выраженія могутъ быть особенно полезны, когда при весьма малыхъ величинахъ угла C и $a - b$, захотимъ вычислить съ точностію c . Последнее выраженіе показываетъ, что c есть гипотенуза прямоугольнаго шрѣзъ, котои прочія стороны суть $(a+b) \frac{\sin \frac{1}{2} C}{R}$ и $(a-b) \frac{\cos \frac{1}{2} C}{R}$.

что самое простое быль найдено посредствомъ вѣсны построения.

Пусть $\triangle CAB$ предложеннымъ шрѣзъ, въ которомъ известны двѣ стороны $CB = a$, $CA = b$, и содержащійся между ними уголъ C . Изъ точки C , какъ центра, и радиуса CB , равнаго большей изъ двухъ данныхъ сторонъ, опишемъ окружность, которая встрѣтитъ въ D и E продолженную сторону CA ; соединимъ BD , BE , и проведемъ AF , перпендикулярную къ BD . Уголъ DBE , вѣнющій шрѣзъ полуокружность, будетъ прямою, и въ слѣдствіе параллельности AF , BE , получимъ пропорцію: $BF : AE = DF : AD = \cos D : R$. Изъ прямоугольнаго шр. DAF будемъ имѣть также $AF : DA = \sin D : R$. Подставляя величины $DA = DC + CA = a + b$, $AE = CE - CA = a - b$, $D = \frac{1}{2} C$, получимъ

$$AF = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} C}{R}, \quad BF = \frac{(a-b) \cos \frac{1}{2} C}{R}.$$

И такъ, дѣйствительно третья сторона АВ прямоугольнаго треугольника есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника АВF, кторо прочія стороны суть $(a + b) \frac{\sin \frac{1}{2} C}{R}$ и $(a - b) \frac{\cos \frac{1}{2} C}{R}$. Если въ этомъ треугольнике будемъ искать уголъ ABF, противоположный сторонѣ AF, и вычисливъ изъ него уголъ CBD $= \frac{1}{2} C$, то получимъ уголъ В, тре. ABC. Отсюда видно, что разрѣшеніе тре. ABC, въ которомъ извѣстны двѣ стороны a и b , и содержащійся между ними уголъ C , приводится непосредственно къ разрѣшенію прямоугольнаго тре. ABF, въ которомъ извѣстны двѣ стороны прилежащія прямому углу, то есть $AF = (a + b) \frac{\sin \frac{1}{2} C}{R}$ и $BF = (a - b) \frac{\cos \frac{1}{2} C}{R}$. И такъ, посредствомъ этого построенія можно доказать предположеніе на 17.

ЧЕТВЕРТЫЙ СЛУЧАЙ.

LVII. По даннымъ тремъ сторонамъ a, b, c , найти углы A, B, C .

Уголъ A , противоположный сторонѣ a , найдется по формулѣ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, и подобнымъ образомъ все прочіе углы. Но можно употребить въ этомъ случаѣ формулу болѣе удобную для логарифмическаго вычисленія.

Возьмемъ формулу $R^2 - R \cos A = 2 \sin^2 \frac{1}{2} A$, и подставляя въ нее величину $\cos A$, получимъ $2 \sin^2 \frac{1}{2} A =$

$$R^2 \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{2bc} = R^2 \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} =$$

$$R^2 \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc}. \text{ Отсюда } \sin^2 \frac{1}{2} A =$$

$R^2 \left(\frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc} \right)$. Пусть, для краткости, $\frac{1}{2} (a + b + c) = p$, или $a + b + c = 2p$, $a + b - c = 2p - 2c$, $a + c - b = 2p - 2b$; слѣд., $\sin^2 \frac{1}{2} A = R^2 \left(\frac{(p - b)(p - c)}{bc} \right)$.

Изъ этой формулы выводится также пропорція

$$bc : (p - b)(p - c) = R^2 : \sin^2 \frac{1}{2} A,$$

весьма удобная для вычисленія по логарифмамъ. Зная логарифмъ $\sin^2 \frac{1}{2} A$, получимъ $\frac{1}{2} A$, и удвоивъ эту величину, найдемъ уголъ A . Тоже самое можно сдѣлать въ отношеніи двухъ другихъ угловъ B и C .

Есть другія формулы не менше удобныя для рѣшенія вопроса. Во первыхъ, формула $R^2 + R \cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A$ даетъ $\cos^2 \frac{1}{2} A = R^2 \cdot \frac{b^2 + c^2 + 2bc - a^2}{4bc} = R^2 \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} = R^2 \cdot \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4bc}$. Но полагая всегда $a + b + c = 2p$, будемъ имѣть $b+c-a = 2p - 2a$, и слѣд.

$$\cos \frac{1}{2} A = R \sqrt{\frac{(p-a)p}{bc}}.$$

Эта величина, соединенная съ величиною $\sin \frac{1}{2} A$, даетъ другую формулу, ибо имѣя $\tan \frac{1}{2} A = \frac{R \sin \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} A}$, извлекаемъ отсюда

$$\tan \frac{1}{2} A = R \sqrt{\frac{p-b \cdot p-c}{p \cdot p-a}}$$

Примѣры раздѣленія прямолинейныхъ треугольниковъ.

7. LVIII. *Примѣръ I.* Положимъ, что должно опредѣлить высоту зданія АВ, коего основаніе приспупно.

Озмѣривъ на поверхности земли, предполагаемой почвою горизонтальною, линію АД, которая не должна быть ни слишкомъ велика, ни слишкомъ мала, въ отношеніи къ высотѣ АВ, ставя въ точку D испруженныя, удобныя для измѣренія угла ВСЕ, составляемаго горизонтальною линіею СЕ, параллельною АД, и лучемъ зрѣнія СВ, направленнымъ на вершину зданія. Положимъ, что АД или СЕ = 67.84 метрамъ и уг. ВСЕ = 45°64'; для полученія ВЕ должно раздѣлить прямоугольный тр. ВСЕ, въ которомъ извѣстны уголъ С и прилежащая сторона СЕ. И такъ (случ. IV) составимъ пропорцію $R : \tan 45^\circ 64' = 67.84 : ВЕ$

$$L. \tan 45^\circ 64' \dots\dots\dots 9.9405265$$

$$L. 67.84 \dots\dots\dots 1.8314858$$

$$\text{Сумма} - \log R = \dots\dots\dots 1.7718121.$$

Эпохъ логарифмъ соотношествуетъ $59^{\circ} 130$ и поэтому $BE = 59^{\circ} .13$. Прибавляя къ BE высоту инструмента CD или AE , которая, положимъ, равна $1^{\circ} .12$, получимъ искомую высоту $AB = 60^{\circ} 25$.

Если хотимъ опредѣлить въ томъ же самомъ шр. BEC гипотенузу BC , то должно составить пропорцію $\cos 45^{\circ} 64' : R = 67.84 : BC$.

$$L R + L 67.84 \dots\dots\dots, 11.8314858.$$

$$L \cos 45^{\circ} 64' \dots\dots\dots 9.8772784$$

$$\text{Разность} \dots\dots\dots 1.9542074 = L BC$$

Откуда $BC = 89^{\circ} .995$.

Примѣчаніе. Если бы была известна только вершина зенита или высота, котораго высоту хотимъ знать, то расстояние BC опредѣлится лишь въ случаѣ, если въ слѣдующемъ примѣрѣ это расстояние и известный уголъ BCE достаточны для разрѣшенія прямо угольнаго шр. BCE . Если сторона BE , съ приложеніемъ къ ней высоты инструмента, дастъ искомую высоту.

LIX. Примѣръ II. Для опредѣленія на земной $\phi.$ поверхности расстоянія точки A отъ непреступнаго предмета B , измѣряютъ линію AD и два прилежащие угла BAD , ADB . Положимъ, что найдено $AD = 588^{\circ} .45$, $BAD = 115^{\circ} 48'$, $BDA = 40^{\circ} 8'$, откуда шрешій уголъ $ABD = 44^{\circ} 44'$. Для полученія AB , составимъ пропорцію $\sin ABD : \sin ADB = AD : AB$.

$$L AD = \dots\dots\dots 2.7697096$$

$$L \sin ADB \dots\dots\dots 9.7699689$$

$$\text{Сумма} \dots\dots\dots 12.5396785$$

$$L \sin ABD \dots\dots\dots 9.8030314$$

$$L AB \dots\dots\dots 2.7316471$$

И такъ искомое пространство $AB = 539^{\circ} .07$.

Еслибъ для другаго непреступнаго предмета C , были углы $CAD = 39^{\circ} 17'$, $ADC = 132^{\circ} 85'$, то расстояние $AC = 1202^{\circ} .32$.

IX. *Примѣръ III.* Дабы найти расстояние между двумя неприсущными предметами В и С, определяемъ АВ и АС, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, и будемъ имѣть уголъ $\text{BAC} = \text{BAD} - \text{DAC}$ (1). Если положимъ, что нашли $\text{AB} = 539^{\circ} 07$, $\text{AC} = 1202^{\circ} 32$. и уголъ $\text{BAC} = 76^{\circ} 31'$, то для получения ВС должно разрѣшить тр. ВАС, въ которомъ известны три стороны и содержащейся между ними уголъ. Но, по III случаю, имѣемъ пропорцію

$$\text{AC} + \text{AB} : \text{AC} - \text{AB} = \tan \frac{\text{B} + \text{C}}{2} : \tan \frac{\text{B} - \text{C}}{2}, \quad \text{или}$$

$$1741.59 : 665^{\circ} 25 = \tan 61^{\circ} 84' \frac{1}{2} : \tan \frac{\text{B} - \text{C}}{2}$$

$$\text{L. } 665,25 \dots\dots\dots 2 \cdot 8216775$$

$$\text{L. } \tan 61^{\circ} 84' \frac{1}{2} \dots\dots\dots 10 \cdot 1654748$$

$$\text{Сумма.} \dots\dots\dots 12 \cdot 9871521$$

$$\text{L. } 1741,59 \dots\dots\dots 3 \cdot 2408960$$

$$\text{L. } \tan \frac{\text{B} - \text{C}}{2} \dots\dots\dots 9 \cdot 7462561.$$

$$\text{Слѣд.} \dots\dots\dots \frac{\text{B} - \text{C}}{2} = 52^{\circ} 37',8$$

$$\text{Но имѣемъ.} \dots\dots\dots \frac{\text{B} + \text{C}}{2} = 61^{\circ} 84',5$$

$$\text{Слѣд.,} \dots\dots\dots \text{B} = 94^{\circ} 22',5$$

$$\text{и} \dots\dots\dots \text{C} = 29^{\circ} 46',7$$

Теперь, для опредѣленія расстоянія ВС, составимъ пропорцію $\sin \text{B} : \sin \text{A} = \text{AC} : \text{BC}$, или

$$\sin 94^{\circ} 22' \cdot 3 : \sin 76^{\circ} 31' = 1202^{\circ} 32 : \text{BC}$$

(1) Можеть случиться, что четыре точки А, В, С, D, не будутъ находиться въ одной плоскости; тогда уголъ ВАС не будетъ больше разности между ВAD и DAC, и для рѣшенія вопроса надлежало бы имѣть прямо мѣру этого угла. Впрочемъ въ дѣйствиіе остается безъ перемѣн.

L. 1202 · 32	3 · 0800200
L. $\sin 76^{\circ}31'$	9 · 9692099
Сумма.	13 · 0492299
L. $\sin 94^{\circ}22',5$	9 · 9982096
L. BC	5 · 0510205.

Слѣд., искомое разстояніе BC = 1124^м 66.

LXI. *Примръ IV.* Даны три точки A, B, C, ^{4. 9} на планѣ; опредѣлить положеніе четвертой точки M, находящейся съ прочими въ одной плоскости, и притомъ такой, изъ которой бы измѣрялись углы AMB, AMC.

Опишемъ на AB сегментъ AMDB, вмѣщающій данный уголъ BMA, и на AC сегментъ AMC, вмѣщающій данный уголъ AMC; двѣ дуги пересѣкутся въ A и M, и точка M будетъ искомая. Ясно, что однѣ точки дуги AMDB суть такіа, съ коихъ можно видѣть AB подъ угломъ AMB; а точки дуги AMC суть шѣ, изъ коихъ можно видѣть AC подъ угломъ равнымъ AMC; и слѣд., точка M, или пересѣченіе двухъ дугъ, будетъ та, съ которой вдругъ можно видѣть AB и AC подъ углами AMB, AMC. Теперь остается исчислить тригонометрически положеніе точки M по этому построенію.

Пусть данныя AB = 2500 м., AC = 7000 м., BC = 9000 м., AMB = 50° 80', AMC = 121° 40'. Въ трѣхъ ABC, коего всѣ три стороны извѣстны, опредѣлимъ уголъ BAC (LVII), по формулѣ $\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{R^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}{2bc}$, откуда $2 \log. \sin \frac{1}{2} A = 19.9384485$, $\log. \sin \frac{1}{2} A = 9.9692241$, $\frac{1}{2} A = 76^{\circ}31',5$, и наконецъ A = 152° 63'. Проводя діаметръ AD и соединяя BD, въ тр. BAD, прямоугольномъ въ B, имѣемъ сторону BA = 2500^м, и противоположный уголъ BDA = BMA = 50° 80', откуда гипотенуза

$AD = \frac{BA \times R}{\sin BDA} = 5374^{\circ}.6$. Проводя подобнымъ образомъ діаметръ АЕ и соединяя СЕ, будемъ имѣть прямоугольный тр. САЕ, въ которомъ известна сторона $AC = 7000^{\circ}$ и прилежащій уголъ $CAE = AMC = 100^{\circ} = 21^{\circ}40'$; отсюда выводимъ $AE = \frac{R \times AC}{\cos CAE} = 7415^{\circ}$.

Если проведемъ теперь MD и ME, то два угла AMD, AME, будутъ прямые, и линія DME также прямая. Остается разрѣшить тр. DAE, и найти величину и положеніе линіи AM, въ немъ находящейся, и перпендикулярной къ DE. Но, въ этомъ тр-кѣ, данныя стороны суть $AD = 5374^{\circ}.6$, $AE = 7415^{\circ}$, и уголъ заключающійся между ними $DAE = BAC + CAE - DAB = 140^{\circ}85'$. Отсюда уголъ $ADE = 36^{\circ}93'$, и наконецъ, изъ прямоугольнаго тр. DAM, получимъ $AM = 4190^{\circ}.85$. Это разстояніе и уголъ $BAM = 112^{\circ}27'$, совершенно опредѣляютъ положеніе точки M.

Примѣчаніе. Для исчисленія шѣхъ же самыхъ привѣровъ, положенію таблицъ составленныхъ по способу діленія окружности, стоить только измѣнить, какъ показано ниже, выраженія (цифры или вычисленные углы); впрочемъ всѣ логарифмическія величины и величины сторонъ останутся неизмѣнными.

Примѣръ I. Данный уголъ $BCE = 11^{\circ}4'35''.6$, или просто $BCE = 11^{\circ}4'30''$, ибо, при этомъ дѣйствит. разность въ высказанныхъ секундахъ не имѣетъ значительнаго вліянія на опредѣленные разстоянія.

Прим. II. Данные углы $BAD = 103^{\circ}56'55''.2$, $BDA = 38^{\circ}4'19''.2$, $ABD = 59^{\circ}59'45''.6$, $CAD = 35^{\circ}15'10''.8$, $ADC = 119^{\circ}32'49''.2$.

И.ч. III. Данные углы $BAC = 64^{\circ}40'44''.4$.

Уголъ $\frac{1}{2}(B + C) = 56^{\circ}39'57''.8$

Исчисленные углы $\frac{1}{2}(B - C) = 20^{\circ}9'24''.7$.

$B = 84^{\circ}48'2''.5$, $C = 26^{\circ}31'18''.1$.

Прим. IV. Данные углы $AMB = 27^{\circ}45'12''$, $AMC = 109^{\circ}15'10''$. Исчисленные углы $A = 157^{\circ}22'1''$, $DAE = 94^{\circ}20'19''.2$, $BAM = 101^{\circ}2'34''.8$.

ПРАВИЛА ДЛЯ РАЗРѢШЕНІЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХЪ СФЕРИЧЕСКИХЪ ТРИГУЛЬНИКОВЪ.

LXII. Во всякомъ прямоугольномъ сферичес-

комъ триугольникъ, радіусъ относится къ синусу гипотенузы, какъ синусъ одного изъ острыхъ угловъ къ синусу противоположной стороны.

Пусть ABC предложенный сферическій тр-къ, ^{ф 1} А его прямой уголъ, В и С два другіе угла, которые называются *наклонными*, но, впрочемъ, могутъ быть прямыми вдругъ или порознь. Должно доказать справедливость пропорціи $R : \sin BC = \sin B : \sin AC$.

Проведемъ изъ центра О шара, радіусы ОА, ОВ, ОС, и взявъ попомъ ОЕ равную радіусу таблицъ, опустимъ, изъ точки Е, на ОА перпендикуляръ FD. Линія FD будетъ перпендикулярна къ ОАВ, ибо, по положенію, уголъ А есть прямой, и также двѣ плоскости ОАВ, ОАС, перпендикулярны между собою. Проведемъ теперь, изъ точки D, линію DE, перпендикулярную къ ОВ, и соединимъ EF; линія EF будетъ также перпендикулярна къ ОВ, и слѣд., уголъ DEF будетъ измѣрять наклоненіе двухъ плоскостей ОВА, ОВС, и равняться углу В, тр. ABC. Подождавъ это, имѣемъ въ тр. DEF, прямоугольномъ въ D, что $R : \sin DEF = EF : DF$; но уголъ $DEF = B$, и такъ какъ $OE = R$, то $EF = \sin EOF = \sin BC$, $DF = \sin AC$. Наконецъ $R : \sin B = \sin BC : \sin AC$, или

$$R : \sin BC = \sin B : \sin AC.$$

Если назовемъ *a* гипотенузу, или сторону противоположную прямому углу А, *b* сторону противоположную углу В, и *c* сторону противоположную углу С, то получимъ

$$R : \sin a = \sin B : \sin b = \sin C : \sin c,$$

что дастъ уже два уравненія между частями прямоугольнаго сферическаго триугольника.

LXIII. Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ триугольникѣ, радіусъ относится къ ко-

синусу наклоннаго угла, какъ тангенсъ гипотенузы къ тангенсу стороны прилежащей къ этому углу.

Ф. 10. Пусть ABC будетъ предложенный тр-къ, прямоугольный въ A; должно доказать, что $R : \cos B = \tan BC : \tan AB$. После построения подобнаго предыдущему, получимъ тр. DEF, въ которомъ $R : \cos DEF = EF : ED$. Но $DEF = B$, $EF = \sin BC$, $OE = \cos BC$, и сверхъ того, въ тр. OED, прямоугольномъ въ E, имѣемъ $DE = \frac{OE \tan DOE}{R} = \frac{\cos B \tan AB}{R}$; слѣд. $R : \cos B = \sin BC : \frac{\cos BC \tan AB}{R} = \frac{R \sin BC}{\cos BC} : \tan AB$, или наконецъ

$$R : \cos B = \tan BC : \tan AB.$$

Если назовемъ, такъ какъ прежде, $BC = a$ и $AB = c$, то будемъ имѣть $R : \cos B = \tan a : \tan c$, или $\cos B = \frac{R \tan c}{\tan a} = \frac{\tan c \cot a}{R}$. Тоже самое начало, приложенное къ углу C, даетъ $\cos C = \frac{R \tan b}{\tan a} = \frac{\tan b \cot a}{R}$.

LXIV. Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ, радиусъ относится къ косинусу одной изъ сторонъ прямиаго угла, какъ косинусъ другой стороны къ косинусу гипотенузы.

Ф. 10. Пусть ABC будетъ предложенный тр-къ, прямоугольный въ A; должно доказать, что $R : \cos AB = \cos AC : \cos BC$.

Такъ какъ построение будетъ совершенно одинаково съ изложеннымъ въ предыдущихъ членахъ, то изъ тр. ODF, прямоугольнаго въ D, въ которомъ гипотенуза $OF = R$, получимъ $OD = \cos OF = \cos AC$, а изъ тр. ODE, прямоугольнаго въ E, будемъ имѣть $OE = \frac{OD \cos DOE}{R} = \frac{\cos AC \cos AB}{R}$. Новъ прямоугольномъ тр. OEF, имѣемъ $OE = \cos BC$; слѣд. $\cos BC = \frac{\cos AC \cos AB}{R}$, или, что одно и тоже, $R : \cos AC = \cos AB : \cos BC$.

Это третье начало выражается уравненіемъ $R \cos a = \cos b \cos c$. Оно не представляетъ возможности вывести изъ него другое уравненіе, подобно двумъ предыдущимъ, ибо переложеніе b и c не измѣняетъ его вида.

LXV. Посредствомъ этихъ трехъ общихъ началъ, можно вывести при другія, необходимыя для разрѣшенія прямоугольныхъ сферическихъ тригонометриковъ. Эти послѣднія начала могли бы быть доказаны прямо, посредствомъ частнаго построенія, но предпочтительнѣе вывести ихъ аналитически изъ трехъ первыхъ, какъ это доказано ниже.

Уравненія $\sin B = \frac{R \sin b}{\sin a}$, $\cos C = \frac{R \tan b}{\tan a}$, дають по раздѣленіи $\frac{\cos C}{\sin B} = \frac{\tan b}{\sin b} \cdot \frac{\sin a}{\tan a} = \frac{\cos a}{\cos b} =$ (въ сѣдствіе третьяго начала) $\frac{\cos c}{R}$. Итакъ имѣемъ четвертое начало

$$\sin B : \cos C = R : \cos c,$$

изъ коего чрезъ переложеніе буквъ выводится

$$\sin C : \cos B = R : \cos b.$$

Первое и второе начало дають $\sin B = \frac{R \sin b}{\sin a}$, $\cos B = \frac{R \tan c}{\tan a}$; откуда $\frac{\sin B}{\cos B}$ или $\frac{\tan B}{R} = \frac{\sin b \tan a}{\sin a \tan c} = \frac{R \sin b}{\cos a \tan c} =$ (въ сѣдствіе третьяго начала)

$\frac{R^2 \sin b}{\cos b \cos c \tan c} = \frac{\tan b}{\sin c}$. И такъ, для пятого начала имѣемъ уравненіе $\tan B = \frac{R \tan b}{\sin c}$,

или $R : \tan B = \sin c : \tan b$.

Откуда, чрезъ переложеніе буквъ слѣдуетъ

$$R : \tan C = \sin b : \tan c.$$

Накопецъ, двѣ эти формулы даютъ $\tan B \tan C =$

$\frac{R^2 \frac{\tan b \tan c}{\sin b \sin c}}{\frac{R^2}{\cos b \cos c}} = \frac{R^2}{\cos b \cos c} =$ (въ сѣдѣшіе третьяго начала) $\frac{R^2}{\cos a}$. Слѣд. $R^2 = \cos a \tan b \tan c$, или $\cot B \cot C = R \cos a$, или, наконецъ,
 $\tan B : \cot C = R : \cos a$.

Это шестое и послѣднее начало не представляетъ возможности вывести изъ него другое уравненіе, ибо переложеніе между B и C неизмѣняетъ его вида.

Вотъ крайнее повтореніе шести выведенныхъ началъ, изъ коихъ четыре даютъ по два уравненія.

- I. $R \sin b = \sin a \sin B$, $R \sin c = \sin a \sin C$.
- II. $R \tan b = \tan a \cos C$, $R \tan c = \tan a \cos B$.
- III. $R \cos a = \cos b \cos c$.
- IV. $R \cos B = \sin C \cos b$, $R \cos C = \sin B \cos c$.
- V. $R \tan b = \sin c \tan B$, $R \tan c = \sin b \tan C$.
- VI. $R \cos a = \cot B \cot C$.

И такъ имѣемъ десять уравненій, содержащихъ всѣ отношенія, которыя могутъ существовать между тремя изъ пяти частей B , C , a , b , c ; такъ что, по извѣстнымъ двумъ частямъ съ прямымъ угломъ, опредѣлимъ непосредственно третью часть по ея синусу, косинусу, тангенсу или котангенсу.

LXVI. Должно замѣнить, что если одна изъ частей будетъ дана только своимъ синусомъ, то получимъ для нее двѣ величины, и, въ сѣдствіе этого, два треугольника удовлетворяющіе вопросу, ибо синусъ есть одинъ и тотъ же для угла или дуги, и для дополненія ихъ до двухъ прямыхъ угловъ. Но это обстоятельство не имѣетъ мѣста, когда извѣстная часть уже опредѣлена посредствомъ своего косинуса тангенса, или котангенса. Тогда можно видѣть, по знаку этой величины, болѣе или

меньше 100° данная часть: если ее коснусь, тангенсъ или котангенсъ сопровождаются знаком $+$, то она будетъ меньше 100° , и наоборотъ, больше 100° , если одна изъ этихъ величинъ имѣетъ предъ собою знакъ $-$. Можно бы было вывести для этого предмета общія правила, которыя, впрочемъ, будутъ только слѣдствіемъ шести доказанныхъ уравненій.

На примѣръ, изъ уравненія $R \cos a = \cos b \cos c$ слѣдуетъ, что три стороны прямоугольнаго сферическаго трѣхъ суть все меньше 100° , или, что изъ трехъ сторонъ двѣ больше и третья меньше 100° . Никакимъ другимъ образомъ нельзя сдѣлать знакъ $\cos b \cos c$ подобнымъ знаку $\cos a$, какъ требуется изъ выше приведенное выше уравненіе.

Уравненіе $R \operatorname{lang} c = \sin b \operatorname{lang} C$, гдѣ $\sin b$ есть всегда положительный, доказываетъ что $\operatorname{lang} C$ имѣетъ всегда знакъ одинаковый съ $\operatorname{lang} c$. Поэтому, во всякомъ сферическомъ прямоугольномъ трѣхъ, наклонный уголъ и сторона ему противоположная суть всегда одного рода, то есть, оба больше или оба меньше 100° .

Разрѣшеніе сферическихъ прямоугольныхъ тригономиковъ.

LXVII. Сферическій прямоугольникъ можетъ имѣть три угла прямые, и тогда каждая изъ сторонъ его будетъ равна 100° ; онъ можетъ имѣть также только два угла прямые, и тогда каждая изъ сторонъ противоположныхъ имъ равна 100° , а остальной уголъ съ противоположною стороною измѣряются одинаковымъ числомъ градусовъ. Очевидно, что эти два рода трѣхъ не могутъ представлять никакихъ вопросовъ, и потому, оставляя частные случаи, мы будемъ расска-

привать только тѣ три-ки, которые имѣютъ одинъ прямой уголъ.

Пусть A прямой уголъ, B и C два другіе угла, называемые наклонными; a гипотенуза противоположная углу A ; b и c стороны противоположныя угламъ B и C . Если, изъ этихъ пяти величинъ B , C , a , b , c , даны двѣ, то разрѣшеніе три-ки приведетсѣ всегда къ одному изъ шести слѣдующихъ случаевъ.

ПЕРВЫЙ СЛУЧАЙ.

LXVIII. Если даны гипотенуза a и сторона b , то два угла B и C и сторона c найдутсѣ изъ уравненій

$$\sin B = \frac{R \sin b}{\sin a}, \quad \cos C = \frac{\tan b \cot a}{R}, \quad \cos c = \frac{R \cos a}{\sin b}.$$

Уголъ C не можетъ представлять никакой неопредѣленности, также какъ и сторона c ; что касается до угла B , то онъ долженъ быть одного рода съ данною стороною b .

ВТОРЫЙ СЛУЧАЙ.

LXIX. Если даны двѣ стороны прямого угла, то гипотенуза a и углы B и C найдутсѣ изъ уравненій

$$\cos a = \frac{\cos b \cos c}{R}, \quad \tan B = \frac{R \tan b}{\sin c}, \quad \tan C = \frac{R \tan c}{\sin b}.$$

Въ этомъ случаѣ нѣтъ никакой двусмысленности.

ТРЕТІЙ СЛУЧАЙ.

LXX. Если дана гипотенуза a , и уголъ B , то стороны b , c , и другой уголъ C найдутсѣ изъ уравненій

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{R}, \quad \operatorname{tang} c = \frac{\operatorname{tang} a \cos B}{R}, \quad \cot C = \frac{\cot a - \operatorname{tang} B}{R}.$$

Части C и c , определяющиеся этими формулами без двусмысленности; что касается до стороны b , то она будетъ одного рода съ угломъ B .

ЧЕТВЕРТЫЙ СЛУЧАЙ.

LXXI. Если дана сторона прямого угла b съ противоположнымъ угломъ B , то три части a , c и C найдутся изъ формуль

$$\sin a = \frac{R \sin b}{\sin B}, \quad \sin c = \frac{\operatorname{tang} b \cot B}{R}, \quad \sin C = \frac{R \cot B}{\cot b}.$$

Въ этомъ случаѣ три неизвѣстныя части определяются посредствомъ ихъ синусовъ, и слѣд. вопросъ подвергается двумъ рѣшеніямъ. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что тр. ABC и тр. $AB'C$, прямоугольные въ A , имѣющіе, общую сторону $AC = b$ и общій противоположный уголъ $B = B'$. Впрочемъ, двойныя величины должны совокупляться между собою такимъ образомъ, чтобъ c и C были одного рода; родъ c и b определяетъ родъ a , чрезъ соображеніе формулы $\cos b \cos c = R \cos a$, но величина a определится прямо изъ уравненія

$$\sin a = \frac{R \sin b}{\sin B}.$$

ПЯТЫЙ СЛУЧАЙ.

LXXII. Если дана сторона прямого угла b съ прилежащимъ угломъ C , то три части a , c , B , найдутся изъ формуль

$$\cot a = \frac{\cot b \cos C}{R}, \quad \operatorname{tang} c = \frac{\sin b \operatorname{tang} C}{R}, \quad \cos B = \frac{\cot b \sin C}{R}.$$

Въ этомъ случаѣ не можетъ существовать никакой неопредѣленности на счетъ рода неизвѣстныхъ частей.

ШЕШТЫЙ СЛУЧАЙ.

LXXIII. Если даны наклонные углы B и C , то три стороны a, b, c , найдутся по формуламъ

$$\cos a = \frac{\cot B \cot C}{R}, \cos b = \frac{R \cos B}{\sin C}, \cos c = \frac{R \cos C}{\sin B}, \text{ въ ко-}$$

торыхъ также нѣтъ никакой неопредѣленности.

З а м ѣ ч а н і е.

LXXIV. Сферическій треугольникъ, въ коемъ A, B, C , суть углы, и a, b, c , противоположныя имъ стороны, соотвѣствуетъ всегда полярному тр-ку, коего углы суть дополненія сторонъ a, b, c , а стороны дополненія угловъ A, B, C , до двухъ пр-ыхъ; такъ что, называя A', B', C' , углы полярнаго тр-ка, и a', b', c' , стороны противоположныя имъ получимъ,

$$A' = 200^\circ - a, B' = 200^\circ - b, C' = 200^\circ - c$$

$$a' = 200^\circ - A, b' = 200^\circ - B, c' = 200^\circ - C.$$

Положивъ вно, если сферическій тр-къ имѣетъ сторону a , равную квадрату, то ясно, что соотвѣствующій уголъ A' полярнаго тр-ка будетъ прямой, и вѣтъ тр-къ прямоугольный. И такъ двѣ данности, которыя необходимы, кромѣ стороны во 100° , для разрѣшенія предложеннаго тр-ка, послужатъ для разрѣшенія полярнаго, и, въ послѣствіи, предложеннаго тр-ка. Отсюда можно бы было вывести формулы подобныя предыдущимъ, дабы разрѣшать прямо сферическіе тр-ки, имѣющіе сторону въ 100° .

Равнобедренный тр-къ раздѣляется на два прямоугольные тр-ка равные между собою во всѣхъ частяхъ; слѣд. разрѣшеніе равнобедренныхъ сфер-

ческих тр-въ зависить также отъ разрѣшенія сферическихъ прямоугольных тр-въ.

Пусть ABC сферическій тр-къ, въ которомъ 4. 12. стороны AB, BC, служащія взаимно дополненіями до двухъ прямыхъ. Если продолжимъ стороны AB, AC, до ихъ встрѣчи въ D, то ясно, что BC и BD будутъ равны, какъ дополненія одной стороны AB; сверхъ того очевидно, что по извѣстнымъ частямъ тр. BCD, будутъ извѣстны части тр. ABC, который есть остатокъ двусторонника AD, и на оборотъ. И такъ, разрѣшеніе тр. ABC, въ которомъ двѣ стороны составляютъ вмѣстѣ 200° , приводится къ разрѣшенію равнобедреннаго тр. BDC, или тр. BDE, равнаго половинѣ CBD.

Когда двѣ стороны AB, BC, служащія дополненіями одна другой, то должно, чтобъ противоположные углы ACB, BAC, были также взаимно дополненіями; ибо BCD есть дополненіе BCA, и $BCD = D = A$. И такъ нельзя имѣть $a + c = 200^\circ$, не имѣя въ тоже время $A + C = 200^\circ$, и обратно.

Отсюда видно, что разрѣшеніе сферическихъ прямоугольных тр-въ содержишь 1-е разрѣшеніе сферическихъ тр-въ, въ коихъ одна сторона равна четверти окружности; 2-е сферическихъ равнобедренныхъ тр-въ; 3-е сферическихъ тр-въ, въ коихъ сумма двухъ сторонъ, равно какъ и сумма двухъ противоположныхъ угловъ, есть 200° .

НАЧАЛА НА КОТОРЫХЪ ОСНОВЫВАЕТСЯ РАЗРѢШЕНІЕ СФЕРИЧЕСКИХЪ ТРИГУЛЬНИКОВЪ ВООБЩЕ.

LXXV. Во всякомъ сферическомъ тригольникѣ синусы угловъ пропорціональны синусамъ противолежащихъ сторонъ.

Пусть ABC будетъ данный сферическій тр-къ; 4. 13. должно доказать, что $\sin B : \sin C = \sin AC : \sin AB$.

Проведя, чрезъ вершину A, дугу AD, перпендикулярную къ противоположной сторонѣ BC, будемъ имѣть изъ прямоугольных тр-въ ABD, ACD, пропорціи

$$\sin B : R = \sin AD : \sin AB$$

$$R : \sin C = \sin AC : \sin AD.$$

Умножая почленно эти пропорции и сокращая общих множителей, найдемъ

$$\sin B : \sin C = \sin AC : \sin AB.$$

- Ф. 16. Еслибъ перпендикуляръ AD упалъ въ тр. ABC , то мы получили бы тѣ же самыя пропорціи, изъ коихъ въ одной $\sin C$ означалъ бы $\sin ACD$; но такъ какъ уголъ ACD и уголъ ACB служатъ одинъ другому дополненіями до двухъ прямыхъ, то синусы ихъ равны, и по этому имѣли бы всегда $\sin B : \sin C = \sin AC : \sin AB$.

Называя чрезъ a, b, c , стороны относительно противоположныхъ угловъ A, B, C , получимъ, въ слѣдствіе этого предположенія, $\sin A : \sin a = \sin B : \sin b = \sin C : \sin c$, что даетъ двойное уравненіе

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

LXXVI. Во всякомъ сферическомъ треугольнике косинусъ равенъ квадрату радіуса умноженнаго на косинусъ противоположной стороны, безъ произведенія радіуса на косинусы прилежащихъ сторонъ, раздѣленному на произведеніе синусовъ тѣхъ же самыхъ сторонъ. Напримръ, для угла C ,

$$\cos C = \frac{R^2 \cos c - R \cos a \cos b}{\sin a \sin b};$$

$$\text{подобнымъ образомъ для двухъ другихъ угловъ, } \cos A = \frac{R^2 \cos a - R \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \text{ и}$$

$$\cos B = \frac{R^2 \cos b - R \cos a \cos c}{\sin a \sin c}.$$

- Ф. 15. Пусть ABC будетъ предложенный тр-къ, въ которомъ $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Изъ точки O , принятой за центръ шара, проведемъ неопредѣленные прямыя OA, OB, OC ; возьмемъ произвольно OD и чрезъ точку D проведемъ линію DE , въ плоскости OCA , и DF , въ плоскости OCB , перпендикулярныя къ OD , которыя встрѣчатъ въ E и F

продолженные радіусы OA, OB ; наконецъ соединимъ EF .

Уголъ D , пр. EDF , есть, по построенію, мѣра угла составляемаго между собою плоскостями OCA, OCB ; и слѣд. уголъ EDF равенъ углу C сферическаго пр. ACB . Изъ пр-въ DEF, OEF , имѣемъ (LXV)

$$\frac{\cos EDF}{R} = \frac{\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 - \overline{EF}^2}{2 DE \cdot DF},$$

$$\frac{\cos EOF}{R} = \frac{\overline{OE}^2 + \overline{OF}^2 - \overline{EF}^2}{2 OE \cdot OF}.$$

Взявъ во второмъ выраженіи величину $\overline{EF}^2$, и подставляя ее въ первое, получимъ

$$\frac{\cos EDF}{R} = \frac{\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 - \overline{OE}^2 - \overline{OF}^2 + 2 OE \cdot OF \cdot \frac{\cos EOF}{R}}{2 DE \cdot DF}.$$

Но $\overline{OE}^2 - \overline{DE}^2 = \overline{OD}^2$ и $\overline{OF}^2 - \overline{DF}^2 = \overline{OD}^2$, и потому

$$\cos EDF = \frac{OE \cdot OF \cdot \cos EOF - \overline{OD}^2 \cdot R}{DE \cdot DF}.$$

Теперь остается только ввести въ это выраженіе величины относительныя къ сферическому пр-ку, и такъ какъ

$$EDF = C, \quad EOF = AB = c, \quad \frac{OE}{DE} = \frac{R}{\sin DOE} = \frac{R}{\sin b},$$

$$\frac{OF}{DF} = \frac{R}{\sin DOF} = \frac{R}{\sin a}, \quad \frac{OD}{DE} = \frac{\cos DOE}{\sin DOE} = \frac{\cos b}{\sin b},$$

$$\frac{OD}{DF} = \frac{\cos DOF}{\sin DOF} = \frac{\cos a}{\sin a}; \text{ слѣд.}$$

$$\cos C = \frac{R^2 \cos c - R \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

Это начало, приложенное послѣдовательно къ тремъ угламъ, даетъ три уравненія, достаточныя для разрѣшенія всѣхъ задачъ сферической тригонометріи, и имѣетъ, въ отношеніи къ треугольникамъ сферическимъ, ту же общность какъ и въ

чало члена XLV, въ отношеніи къ плоскимъ три-
угольникамъ. Такъ какъ, дѣйствительно, имѣетъ
здѣсь всегда при данныхъ частяхъ, посредствомъ коихъ
должно опредѣлить при другія, то ясно, что это
начало даетъ уравненія нужныя для разрѣшенія
вопроса. Можно разложить эти уравненія ана-
литическими, дабы извлечь изъ нихъ, смотря
по разнымъ случаямъ, самыя простыя и наиболѣе
приспособленныя къ логарифмическому исчисленію
формулы.

LXXVII. Такъ какъ начало, о которомъ мы
теперь говорили, представляло всевозможную об-
щность, то оно должно заключать въ себѣ всѣ
другія начала относящіяся къ сферическимъ три-
угольникамъ, и въ особенности, начало члена
LXXV. Легко удостовѣриться въ истиннѣ этого
предположенія.

$$\text{Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе } \cos C = \frac{R^2 \cos a \cos b - R \cos a \sin b \sin c}{\sin a \sin b}$$

даетъ $R^2 - \cos^2 C$ или $\sin^2 C =$

$$\frac{R^2 \sin^2 a - \sin^2 b - R^2 \cos^2 a \cos^2 b + 2R^2 \cos a \cos b \cos c - R^4 \cos^2 c}{\sin^2 a \sin^2 b}.$$

Но $\sin^2 a \sin^2 b = (R^2 - \cos^2 a)(R^2 - \cos^2 b) = R^4 - R^2 \cos^2 a - R^2 \cos^2 b + \cos^2 a \cos^2 b$. Слѣд., подставляя и извле-
кая квадратный корень, будемъ имѣть

$$\sin C = \frac{R}{\sin a \sin b} \sqrt{(R^4 - R^2 \cos^2 a - R^2 \cos^2 b - R^2 \cos^2 c + 2R \cos a \cos b \cos c)}.$$

Пусть для краткости

$Z = \sqrt{(R^4 - R^2 \cos^2 a - R^2 \cos^2 b - R^2 \cos^2 c + 2R \cos a \cos b \cos c)}$,
въ слѣдствіе чего

$$\sin C = \frac{RZ}{\sin a \sin b}, \quad \text{или} \quad \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{RZ}{\sin a \sin b \sin c}.$$

Величины $\cos A$ и $\cos B$ дадутъ бы подобныя об-

разомъ $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{RZ}{\sin a \sin b \sin c}$, $\frac{\sin B}{\sin b} = \frac{RZ}{\sin a \sin b \sin c}$; ибо

количество Z неизмѣнилось, при переложеніи двухъ изъ трехъ количествъ a, b, c . Слѣд. имѣемъ

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}, \text{ или начало члена LXXV.}$$

LXXVIII. Величины $\cos C$ и $\sin C$, найденныя нами, могутъ служить для опредѣленія угловъ сферическаго треугольника по тремъ извѣстнымъ сторонамъ; но въ этомъ случаѣ употребляются другія формулы, болѣе удобныя для логарифмическихъ исчисленій.

Дѣйствительно, если въ формулѣ $R^2 = R \cos C = 2 \sin^2 \frac{1}{2} C$, подставимъ величину $\cos C$, то будемъ имѣть

$$\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} C}{R^2} = 1 - \frac{\cos C}{R} = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b - R \cos c}{\sin a \sin b}$$

Числитель этого выраженія приводится къ $R \cos (a-b) - R \cos c$, и такъ какъ, по формулѣ $R \cos q - R \cos p = 2 \sin^2 \frac{1}{2} (p+q) (p-q)$ (XXVIII), находимъ $R \cos (a-b) - R \cos c = 2 \sin^2 \frac{1}{2} (c-b+a) \sin^2 \frac{1}{2} (c-a+b)$, то

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} C}{R^2} = \frac{\sin \left(\frac{c+b-a}{2} \right) \sin \left(\frac{c+a-b}{2} \right)}{\sin a \sin b}, \text{ или}$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} C = R \sqrt{\frac{\sin \frac{c+b-a}{2} \sin \frac{c+a-b}{2}}{\sin a \sin b}}$$

Очевидно, что можно вывести подобныя формулы для выраженія $\sin^2 \frac{1}{2} A$ и $\sin^2 \frac{1}{2} B$, посредствомъ трехъ сторонъ a, b, c .

LXXIX. Общій вопросъ сферической тригонометріи состоитъ, какъ уже мы сказали прежде, въ опредѣленіи трехъ изъ шести количествъ A, B, C, a, b, c , посредствомъ трехъ другихъ. Для этого необходимо имѣть уравненія между че-

тырьмя изъ упомянутыхъ количествъ, взятымъ всевозможнымъ образомъ; и такъ какъ шесть количествъ, соединенныхъ по два или по четыре, даютъ $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}$ или 15 соединений; слѣд., необходимо составивъ 15 уравненій, но расширявая только совершенно различныя соединенія, можно привести 15 уравненій къ четыремъ.

Дѣйствительно имѣемъ, 1-е соединеніе $abcA$, которое производимъ, чрезъ переложеніе буквъ $abcA$, $abcB$, $abcC$;

2-е Соединеніе $abAB$, откуда слѣдуютъ $abAB$, $bcBC$, $acAC$;

3-е Соединеніе $abAC$, которое содержитъ въ себѣ шесть $abAC$, $abBC$, $acAB$, $acBC$, $bcAB$, $bcAC$;

4-е Наконецъ, соединеніе $aABC$, которое содержитъ три $aABC$, $bABC$, $cABC$.

И такъ имѣемъ всего пятнадцать соединеній, но между ними только четыре совершенно различныя.

$$\text{LXXX. Уравненіе } \cos A = \frac{R^2 \cos a - R \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

представляетъ намъ первое соединеніе $abcA$ и все отъ него зависящія.

Дабы составивъ уравненіе, соответствующее соединенію $abAB$, должно исключить c изъ двухъ формулъ, которыя даютъ величины $\cos A$ и $\cos B$; но это исключеніе было уже произведено (LXXVII) и выводъ его есмь $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$.

Такъ какъ третье соединеніе образуется изъ отношеній между a , b , A , C , то имѣя два уравненія

$$\cos A \sin b \sin c = R^2 \cos a - R \cos b \cos c,$$

$$\cos C \sin b \sin a = R^2 \cos c - R \cos b \cos a,$$

исключимъ изъ нихъ сначала $\cos c$, что даетъ

$$B \cos A \sin c + \cos C \sin a \cos b = R \cos a \sin b,$$

и введя потомъ въ это послѣднее выраженіе величину $\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}$, будемъ имѣть для третьяго соединенія

$$\cot A \sin C + \cos C \cos b = \cot a \sin b \quad (1)$$

Наконецъ, для полученія отношенія между A, B, C, a , замѣнимъ, что въ предыдущемъ уравненіи членъ $\cot a \sin b = R \cos a \frac{\sin b}{\sin a} = R \cos a \frac{\sin B}{\sin A}$; слѣд., умножая это уравненіе на $\sin A$, будемъ имѣть

$$R \cos A \sin C = R \cos a \sin B - \sin A \cos C \cos b.$$

Если въ этомъ уравненіи сдѣлаемъ перемѣненіе между буквами A и B и также между a и b , то получимъ

$$R \cos B \sin C = R \cos b \sin A - \sin B \cos C \cos a.$$

Исключая отсюда $\cos b$, найдемъ

$$R^2 \cos A \sin C + R \cos B \sin C \cos C = \cos a \sin B \sin C.$$

И такъ, наконецъ, $\cos a = \frac{R^2 \cos A + R \cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$

Эта формула представляетъ искомое отношеніе между A, B, C, a , или четвертое изъ урав-

(1) Для лучше удержанія въ памяти эту формулу и воспользо-ваться ею въ случай надобности, предлагаемъ слѣд. правило Мнемоники.

1-е. Возмемъ сторону a и противоположный уголъ A , сторону b и прилежащий уголъ C , и составимъ воображаемое (fictive) уравненіе $\cot a \cot A = \cot b \cot C$, наблюдая, чтобы каждая буква стояла передъ большіиъ.

2-е. Умножимъ съ одной и съ другою сторонами на $\sin b \sin C$, предполагая радиуса $R = 1$, и получимъ

$$\cot a \sin b \cot A \sin C = \cos b \cos C.$$

3-е. Отбросимъ въ первомъ членѣ каждая буква отъ большіиъ, поставимъ предъ послѣднимъ знакомъ $-$, и получимъ истинное уравненіе

$$\cot a \sin b - \cot A \sin C = \cos b \cos C,$$

которое по однородности будетъ имѣть лѣсто и въ предположеніи $R = 1$.

пей, необходимых для рѣшенія сферическихъ треугольниковъ.

LXXXI. Последнее уравненіе между A, B, C, a , представляя разительное сходство съ первымъ уравненіемъ между a, b, c, A , и это можно изъяснить свойствами полярныхъ, или дополнительныхъ треугольниковъ. Въ самомъ дѣлѣ, извѣстно, что нр-къ, коего углы суть A, B, C , и противоположныя стороны a, b, c , соотвѣтствуютъ всегда полярному нр-ку, коего стороны суть $200^\circ - A, 200^\circ - B, 200^\circ - C$, и противоположные углы $200^\circ - a, 200^\circ - b, 200^\circ - c$. Приложивъ начало члена LXXVI къ последнему нр-ку, будемъ имѣть выраженіе

$$\cos(200^\circ - a) = \frac{R^2 \cos(200^\circ - A) - R \cos(200^\circ - B) \cos(200^\circ - C)}{\sin(200^\circ - B) \sin(200^\circ - C)},$$

которое приводится къ виду

$$\cos a = \frac{R^2 \cos A + R \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

что уже было найдено нами прежде другимъ образомъ.

Эта формула разрѣшаетъ непосредственно тотъ случай, когда хотимъ опредѣлить одну сторону посредствомъ трехъ угловъ; но дабы сдѣлать ее болѣе удобною къ вычисленію по логарифмамъ, подставимъ величину $\cos a$ въ уравненіе

$$1 - \frac{\cos a}{R} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} a}{R^2}, \text{ что дастъ}$$

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} a}{R^2} = \frac{\sin B \sin C - \cos B \cos C - R \cos A}{2 \sin B \sin C} = \frac{-\cos(B+C) - R \cos A}{2 \sin B \sin C}.$$

И такъ какъ вообще имѣемъ $R \cos p + R \cos q = 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)$ (XVIII), то это уравненіе приводится къ

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} a}{R^2} = \frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C) \cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B \sin C},$$

гдѣ должно замѣтить, что второй членъ есть всегда положительный, хотя и сопровождается

отрицательнымъ знакомъ. Ибо, вообще $\sin(x - 100^\circ)$

$$= \frac{\sin x \cos 100^\circ - \cos x \sin 100^\circ}{1} = -\cos x; \text{ следовательно}$$

$$-\cos \frac{1}{2}(A + B + C) = \sin \left(\frac{A + B + C}{2} - 100^\circ \right), \text{ количе-}$$

ству всегда положительному; ибо $A + C + B$ заключается всегда между 200° и 600° , и слѣд. уголъ $\frac{1}{2}(A + B + C) - 100^\circ$ заключается всегда между 0 и 200° . Сверхъ того, $\cos \frac{1}{2}(B + C - A)$ есть всегда положительный, ибо $B + C - A$ не можетъ превышать 200° . Действительно, въ полярномъ триъ. сторона $200^\circ - A$ меньше суммы двухъ другихъ сторонъ $200^\circ - B$ и $200^\circ - C$, въ слѣдствіе чего имѣемъ $200^\circ - A < 400^\circ - B - C$, или $B + C - A < 200^\circ$.

Увырившись такимъ образомъ, что выводъ будетъ положительный, получимъ, для опредѣленія стороны посредствомъ угловъ, формулу

$$\sin \frac{1}{2} a = R \sqrt{\left\{ \frac{-\cos \frac{A+B+C}{2} \cos \frac{B+C-A}{2}}{\sin B \sin C} \right\}}.$$

LXXXII. Не продолжая далѣе нашихъ изслѣдованій, замѣтимъ, что изъ выше общихъ формулъ можно вывести нѣ, которыя относятся къ прямоугольнымъ сферическимъ треугольникамъ. Для этого положимъ $A = 100^\circ$, какъ въ главныхъ четырехъ формулахъ, такъ и въ провсходящихъ изъ нихъ, чрезъ переложеніе буквъ, другихъ формулахъ. Во первыхъ, уравненіе $\cos A = \sin b \sin c = R^2 \cos a - R \cos b \cos c$ даетъ, въ слѣдствіе того что $A = 100^\circ$,

$$R \cos a = \cos b \cos c \quad (1).$$

Производныя уравненія, слѣдующія изъ общаго уравненія, не содержатъ въ себѣ A , и потому не даютъ никакого новаго отношенія, въ томъ случаѣ, когда $A = 100^\circ$.

Уравнение $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$ даетъ, въ случаѣ $A=100^\circ$,

$$\frac{R}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} \quad (2)$$

И производное уравнение $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin c}$, даю бы равнымъ образомъ $\frac{R}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin c}$; но это выраженіе есть само по себѣ производное уравненія (2).

Уравнение $\cot A \sin C + \cos C \cos b = \cot a \sin b$ даетъ, въ случаѣ $A=100^\circ$, $\cos C \cos b = \cot a \sin b$, или

$$\cos C \tan a = R \tan b \quad (3).$$

Производное $\cot C \sin A + \cos A \cos b = \cot c \sin b$ даетъ, въ томъ же случаѣ, $R \cot C = \cot c \sin b$, или

$$R \tan c = \sin b \tan C \quad (4).$$

Наконецъ четвертое главное уравнение $\sin B \sin C \cos a = R^2 \cos A + R \cos B \cos C$, и его производное $\sin A \sin C \cos b = R^2 \cos B + R \cos A \cos C$, даютъ, въ случаѣ $A=100^\circ$, $\sin B \sin C \cos a = R \cos B \cos C$, или $\sin C \cos b = R \cos B$, или

$$\cot B \cot C = R \cos a \quad (5).$$

$$\sin C \cos b = R \cos B \quad (6).$$

Таковы шесть уравненій, на которыхъ основано разрѣшеніе прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.

LXXXIII. Мы заключаемъ эти начала доказательствамъ аналогій Непера, которыя служатъ для упрощенія многихъ случаевъ, при разрѣшеніи сферическихъ треугольниковъ.

Совокупляя величины $\cos A$ и $\cos C$, выраженные въ частяхъ a, b, c , мы уже получили уравненіе (LXX)

$R \cos A \sin c = R \cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b$,
 которое чрезъ простую перестановку даетъ

$$R \cos B \sin c = R \cos b \sin a - \cos C \sin b \cos a.$$

И такъ, соединивъ эти уравненія, получимъ по сокращенію,

$$\sin c (\cos A + \cos B) = (R - \cos C) \sin (a + b).$$

Но такъ какъ $\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$, то имѣемъ

$$\sin c (\sin A + \sin B) = \sin C (\sin a + \sin b)$$

$$\text{и } \sin c (\sin A - \sin B) = \sin C (\sin a - \sin b).$$

Раздѣляя послѣдовательно эти два уравненія на предыдущее, получимъ

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin C}{R - \cos C} \cdot \frac{\sin a + \sin b}{\sin (a + b)}$$

$$\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin C}{R - \cos C} \cdot \frac{\sin a - \sin b}{\sin (a + b)}.$$

Имѣняя видъ этихъ выраженій, по формуламъ членовъ XXIX и XXX, найдемъ

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (A + B) = \cot \frac{1}{2} C \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (A - B) = \cot \frac{1}{2} C \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)}.$$

И такъ, если даны двѣ стороны a и b , съ содержащимся между ими угломъ C , то два другіе угла опредѣляются по аналогіямъ

$$\cos \frac{1}{2} (a + b) : \cos \frac{1}{2} (a - b) = \cot \frac{1}{2} C : \operatorname{tang} \frac{1}{2} (A + B),$$

$$\sin \frac{1}{2} (a + b) : \sin \frac{1}{2} (a - b) = \cot \frac{1}{2} C : \operatorname{tang} \frac{1}{2} (A - B).$$

Прикладывая эти аналогіи къ полярному тр. ABC, должно подставить $200^\circ - A$, $200^\circ - B$, $200^\circ - a$, $200^\circ - b$, $200^\circ - c$, относительно вмѣсто a, b, A, B, C , и тогда получимъ въ выводѣ двѣ слѣдующія аналогіи:

$$\cos \frac{1}{2} (A + B) : \cos \frac{1}{2} (A - B) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} c : \operatorname{tang} \frac{1}{2} (a + b),$$

$$\sin \frac{1}{2} (A + B) : \sin \frac{1}{2} (A - B) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} c : \operatorname{tang} \frac{1}{2} (a + b),$$

посредствомъ которыхъ можно опредѣлять двѣ стороны a и b , по данной сторонѣ c , и двумъ прилежащимъ угламъ A и B . Эти четыре пропорціи извѣстны подъ названіемъ аналогіи Непера.

РАЗРѢШЕНІЕ СФЕРИЧЕСКИХЪ ТРИУГОЛЬНИКОВЪ ВООБЩЕ.

Разрѣшеніе сферическихъ триугольниковъ представляеть шесть главныхъ случаевъ, которыми пользуются послѣдовательно.

ПЕРВЫЙ СЛУЧАЙ.

LXXXIV. Если даны три стороны a, b, c , то какой нибудь уголь, напр. уголь A , противоположный сторонѣ a , найдетсѣ по формулѣ

$$\sin \frac{1}{2} A = R \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin b \sin c}}.$$

ВТОРОЙ СЛУЧАЙ.

LXXXV. По даннымъ двумъ сторонамъ a и b и углу A , противоположному одной изъ этихъ сторонъ, найти третью сторону c и два друга угла B и C .

1-е Уголь B найдетсѣ изъ уравненія $\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}$.

2-е Для полученія угла C , должно разрѣшить уравненіе

$$\cot A \sin C + \cos C \cos b = \cot a \sin b.$$

Возмемъ для этого вспомогательный уголь φ такъ, чтобы $\tan \varphi = \frac{\cos b \tan A}{R}$, или $\cot A = \frac{\cos b \cot \varphi}{\sin \varphi}$; тогда величина $\cot A$, будучи подставлена въ предложенное уравненіе, даетъ $\frac{\cos b}{\sin \varphi} (\cos \varphi \sin C + \sin \varphi \cos C) = \cot a \sin b$, откуда извлекаемъ

$$\sin (C + \varphi) = \frac{\tan \varphi \sin \varphi}{\tan a}.$$

Явно, что посредствомъ этого дѣйствія два ве-

известные члены въ предложеномъ уравненіи приводятся къ одному, и опредѣленіе угла B становится весьма легкимъ.

3-е. Сторона c найдется изъ уравненія $\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}$. Можно также опредѣлить ее прямо чрезъ разрѣшеніе уравненія

$$R \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c = R^2 \cos a.$$

Для того, полагая $\cos A \sin b = \frac{R \cos b \sin \varphi}{\cos \varphi}$, или $\tan \varphi = \frac{\cos A \tan b}{R}$, будемъ писать $\frac{\cos b}{\cos \varphi} (\cos c \cos \varphi + \sin c \sin \varphi) = R \cos a$. Слѣд., опредѣливъ прежде вспомогательную величину φ , изъ уравненія $\tan \varphi = \frac{\cos A \tan b}{R}$, найдемъ сторону c изъ уравненія

$$\cos (c - \varphi) = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b}.$$

Второй случай можетъ имѣть два рѣшенія, также какъ и подобный ему въ прямоугольныхъ треугольникахъ.

ТРЕТІЙ СЛУЧАЙ.

LXXXVI. *Поданнымъ двумъ сторонамъ a и b и углу C между ними содержащемуся, найти два другіе углы A и B и третью сторону c .*

1-е. Углы A и B опредѣлятся изъ уравненій

$$\cot A = \frac{\cot a \sin b - \cos C \cos b}{\sin C}$$

$$\cot B = \frac{\cot b \sin a - \cos C \cos a}{\sin C},$$

въ которыхъ вторые члены могли бы быть приведены къ одному члену, посредствомъ вспомогательной величины; но въ этомъ случаѣ гораздо проще пользоваться аналогіями Непера, которыя даютъ

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} \frac{A-B}{2} &= \operatorname{col} \frac{1}{2} C \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \\ \operatorname{tang} \frac{A+B}{2} &= \operatorname{col} \frac{1}{2} C \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}.\end{aligned}$$

2-е. Зная углы A и B , можно вывести третью сторону c из уравнения $\sin c = \sin a \cdot \frac{\sin C}{\sin A}$; по данному определению c , имеем уравнение

$$R^2 \cos c = \sin a \sin b \cos C + R \cos a \cos b.$$

Пусть будетъ взята вспомогательная величина φ , такъ, чтобы $\sin b \cos C = \cos b \operatorname{tang} \varphi$ или $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\cos C \operatorname{tang} b}{R}$. Отсюда

$$\cos c = \frac{\cos b}{\cos \varphi} \cos (a - \varphi).$$

ЧЕТВЕРТЫЙ СЛУЧАЙ.

LXXXVII. По даннымъ двумъ угламъ A и B съ прилежащею стороною c , найти двѣ другія стороны a и b , и третій уголъ C .

1-е. Двѣ стороны a и b даются формулами

$$\begin{aligned}\operatorname{col} a &= \frac{\operatorname{col} A \sin B + \cos B \cos c}{\sin c} \\ \operatorname{col} b &= \frac{\operatorname{col} B \sin A + \cos A \cos c}{\sin c};\end{aligned}$$

но ихъ можно легче вычислить посредствомъ аналогій Непера

$$\begin{aligned}\sin \frac{A+B}{2} : \sin \frac{A-B}{2} &= \operatorname{tang} \frac{1}{2} c : \operatorname{tang} \frac{a-b}{2} \\ \cos \frac{A+B}{2} : \cos \frac{A-B}{2} &= \operatorname{tang} \frac{1}{2} c : \operatorname{tang} \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

2-е. Зная a и b , найдемъ C изъ уравнения $\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a}$; но можно также определить C прямо изъ уравненія

$$R^2 \cos C = \cos c \sin A \sin B - R \cos A \cos B.$$

Взявъ для этого вспомогательную величину φ такъ, чтобы $\cos c \sin B = \cos B \cos \varphi$, или $\cos \varphi = \frac{\cos c \sin B}{\cos B}$, будемъ писать

$$\cos C = \cos B \frac{\sin(A - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Какъ въ этотъ случай, такъ и предыдущій, не представляють никакой неопредѣленности.

Пятый случай.

LXXXVIII. По даннымъ двумъ угламъ A и B съ стороною a , противоположною одному изъ нихъ, найти двѣ другія стороны b и c и третій уголъ C .

1-е. Сторона b опредѣлится изъ уравненія

$$\sin b = \sin a \frac{\sin B}{\sin A}.$$

2-е. Сторона c зависить отъ уравненія

$$\cot a \sin c - \cos B \cos c = \cot A \sin B.$$

Пусть $\cot a = \cos B \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$, или $\tan \varphi = \frac{\cos B \tan a}{\sin \varphi}$, откуда $\frac{\cos B}{\sin \varphi} (\sin c \cos \varphi - \cos c \sin \varphi) = \cot A \sin B$; слѣд.

$$\sin(c - \varphi) = \frac{\tan B \sin \varphi}{\tan A}.$$

3-е. Уголъ C найдется чрезъ разрѣшеніе уравненія

$$\cos a \sin B \sin C - R \cos B \cos C = R^2 \cos A.$$

Полагая для того $\cos a \sin B = \frac{R \cos B \cos \varphi}{\sin \varphi}$, или $\cot \varphi = \frac{\cos a \tan B}{R}$, будемъ писать $\frac{\cos B}{\sin \varphi} (\sin C \cos \varphi - \cos C \sin \varphi) = R \cos A$; слѣд.

$$\sin(C - \varphi) = \frac{\cos A \sin \varphi}{\cos B}.$$

Этотъ пятый случай, какъ и въпорый, подвергается двумъ рѣшеніямъ, также какъ въ подобномъ случаѣ триугольниковъ прямоугольныхъ.

Шестой случай.

LXXXIX. По даннымъ угламъ A, B, C , можно найти какую нибудь сторону, на пр., сторону противоположную углу A , посредствомъ формулы

$$\sin \frac{1}{2} a = R \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2} (A + B + C) \cos \frac{1}{2} (B + C - A)}{\sin B \sin C}}.$$

Замѣтимъ, что изъ этихъ шести главныхъ случаевъ, при послѣдніе могли бынь бы выведены изъ трехъ первыхъ, по свойству полярныхъ тр-ъ: такъ что, собственно говоря, существуютъ только три различные случая въ общемъ разрѣшеніи сферическихъ тр-ъ. Первый случай разрѣшается одною аналогіею, какъ въ прямоугольныхъ тр-ъ: третій разрѣшается почти также просто, посредствомъ аналогій Непера. Что касается до втораго, то онъ требуетъ двухъ аналогій, и сверхъ того представляетъ иногда два рѣшенія, между тѣмъ какъ первый и третій имѣютъ всегда одно рѣшеніе.

ХС. Дабы различить, во второмъ случаѣ, имѣемъ ли для частныхъ величинъ A, a, b , два тр-ка удовлетворяющіе вопросу, или только одинъ, предположимъ сначала уголъ $A < 100^\circ$, и продолжимъ двѣ стороны AC, AB , до встрѣчи ихъ въ A' . Если возьмемъ дугу $AC < 100^\circ$, и проведемъ перпендикуляръ къ AB , то стороны AD, CD , прямоугольнаго тр. ACD будутъ обѣ менѣе 100° , линія CD изобразитъ кратчайшее разстояніе отъ точки C къ дугѣ AB , и если возьмемъ $DB' = DB$, то наклонныя CB', CB , будутъ равны и тѣмъ длиннѣе, чѣмъ онѣ будутъ удалены отъ перпендикуляра. Положивъ $AC = b$, $CB = a$, очевидно, что тр-къ, въ которомъ $A < 100^\circ$,

$b < 100^\circ$, и $a < b$, имѣетъ необходимо два рѣшенія ACB_1 , ACB_2 , но если предположимъ, что A и b всегда менѣе 100° , то $a > b$, и тогда точка B' перешла бы за точку A , и имѣла бы одно рѣшеніе ABC .

Если теперь $AC' < 100^\circ$, то опуская перпендикуляръ $C'D'$ на ABA' , имѣли бы также $C'D' < AC'$, и дуга CB''' , проведенная между D' и A' , будетъ $> C'D'$ и $> C'A'$; слѣд., сдѣлавъ $AC = b$, $C'B'' = CB''' = a$, увидимъ, что предположеніе $A < 100^\circ$ и $b < 100^\circ$, имѣетъ два рѣшенія, если $a + b < 200^\circ$, и только одно, если $a + b > 200^\circ$, ибо тогда точка B''' перешла бы за точку A' . Искаживая подобнымъ образомъ тотъ же случай, когда уголъ $A > 100^\circ$, можно опредѣлить признаки, которые показываютъ одному или двумъ рѣшеніямъ подвергается вопросъ во 2-й случаѣ.

$$A < 100^\circ, b < 100^\circ \begin{cases} a > b & \text{одно рѣшеніе.} \\ a < b & \text{два рѣшенія.} \end{cases}$$

$$A < 100^\circ, b > 100^\circ \begin{cases} a + b > 200^\circ & \text{одно рѣшеніе.} \\ a + b < 200^\circ & \text{два рѣшенія.} \end{cases}$$

$$A > 100^\circ, b < 100^\circ \begin{cases} a + b > 200^\circ & \text{два рѣшенія.} \\ a + b < 200^\circ & \text{одно рѣшеніе.} \end{cases}$$

$$A > 100^\circ, b > 100^\circ \begin{cases} a > b & \text{два рѣшенія.} \\ a < b & \text{одно рѣшеніе.} \end{cases}$$

Въ случаѣ $A = 100^\circ$, или $a = b$, или $a + b = 200^\circ$, существуетъ одно рѣшеніе, и два, когда $b = 100^\circ$.

XCI. Прлагая эти же самые выводы къ пятому случаю, посредствомъ полярнаго тр-ка, найдемъ слѣдующіе признаки, которые будутъ показывать, одному или двумъ рѣшеніямъ подвергается вопросъ, при данныхъ величинахъ A , B , a .

$$a > 100^\circ, B > 100^\circ \begin{cases} A < B & \text{одно рѣшеніе.} \\ A > B & \text{два рѣшенія.} \end{cases}$$

$$a > 100^\circ, B < 100^\circ \begin{cases} A + B < 200^\circ & \text{одно рѣшеніе.} \\ A + B > 200^\circ & \text{два рѣшенія.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 a < 100^\circ, B > 100^\circ & \begin{cases} A + B < 200^\circ & \text{два рѣшенія.} \\ A + B > 200^\circ & \text{одно рѣшеніе.} \end{cases} \\
 a < 100^\circ, B < 100^\circ & \begin{cases} A < B & \text{два рѣшенія} \\ A > B & \text{одно рѣшеніе.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Въ случаѣ котораго нѣбудь изъ равенствъ $a = 100^\circ$, $A = B$, $A + B = 200^\circ$, будетъ существовать одно рѣшеніе, и два, когда $B = 100^\circ$.

ХСII. Во всѣхъ случаяхъ, для избѣжанія ложныхъ или безполезныхъ рѣшеній должно припомнить:

1-е, что всякій уголъ или сторона должны быть менѣе 200° ;

2-е, что наибольшіе углы противоположны наибольшимъ сторонамъ, такъ что, въ случаѣ $A > B$, должно, чтобы также a было $> b$, и на оборотъ.

Примѣры разрѣшенія сферическихъ треугольниковъ.

ХСIII. Примѣръ I. Пусть O, M, N три точки, находящіяся въ плоскости наклонной къ горизонту. Если изъ этихъ точекъ опустимъ перпендикуляры OD, Mm, Nn , на горизонтальную плоскость DEF , то предметы O, M, N , на наклонной плоскости, будутъ изображены на плоскости горизонтальной ихъ провѣціями O, m, n , и уголъ MON провѣцію mOn . Положивъ это, пусть будетъ данъ уголъ MON , и наклоненіе двухъ его сторонъ OM, ON , къ вертикальной OD ; должно найти уголъ провѣціи mOn .

Опишемъ изъ точки O , какъ центра, и радіусомъ $= 1$, шаровую поверхность, которая встрѣнитъ въ точкахъ A, B, C , стороны OM, ON и вертикальную OD , и получимъ сферическій тр. ABC , коего всѣ три стороны извѣстны. Очевидно, что можно определить уголъ $C = mOn$, по формулѣ перваго случая.

Пусть, на примѣръ, уголъ $MON = AB = 64^{\circ} 44' 60''$,
 уголъ $DOM = AC = 98^{\circ} 12'$, и уголъ $DON = BC = 105^{\circ} 42'$.

По вышеозначенной формулѣ будемъ имѣть величину

$$\sin^2 \frac{1}{2} C = R^2 \frac{\sin 24^{\circ} 57' 30'' \sin 85^{\circ} 87' 30''}{\sin 98^{\circ} 12' \sin 105^{\circ} 42'}$$

произведя слѣдующее вычисленіе

L. $\sin 24^{\circ} 57' 30''$... 9. 6573956	L. $\sin 98^{\circ} 12'$... 9. 9998106
L. $\sin 85^{\circ} 87' 30''$... 9. 7276562	L. $\sin 105^{\circ} 42'$... 9. 9981242
сумма + 2 L. R.	39. 8600518
	19. 9282888
2 L. $\sin \frac{1}{2} C$	19. 8665170
L. $\sin \frac{1}{2} C$	9. 9332585

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} C = 22^{\circ} 4' 70'' . 6 \\ C = 44^{\circ} 9' 41'' \end{array} \right\}$$

И такъ уголъ $64^{\circ} 44' 60''$, внутреннй въ плоско-
 сти наклонной къ горизонту, приводится къ $64^{\circ} 9' 41''$, когда онъ проэкшированъ на плоскость го-
 ризонтальную.

Эта задача можетъ быть употреблена съ поль-
 зою при съемкѣ плановъ, когда опредѣленные точ-
 ки находящаяся на высотахъ чувствительно различ-
 ныхъ, въ отношеніи къ одной горизонтальной пло-
 скости.

XCIV. *Примѣръ II.* Зная широты двухъ то-
 чекъ на земномъ шарѣ и разность ихъ долготъ,
 опредѣлить кратчайшее разстояніе между этими
 точками.

Вообразимъ сферическій тр. ACB, опреде-
 ленный сѣвернымъ полюсомъ C, и двумя данны-
 ми точками A и B. Въ этомъ тр-ѣ будетъ извѣстенъ
 уголъ ACB при полюсѣ, равный разности долготъ
 двухъ данныхъ точекъ, и двѣ содержащія его сто-
 роны AC, BC, которыя суть дополненія широтъ
 точекъ A и B. Третья сторона AB опредѣлится по
 формулѣ для III-го случая.

Пусть, на примѣръ, А и В будутъ обсерваторіи Пекина и Парижа. Сѣверная широта первого изъ этихъ мѣстъ есть $34^{\circ} 26' 36''$, и другого $44^{\circ} 33' 73''$, а разность долготъ $126^{\circ} 80' 56''$. Въ слѣдствіе этого, будемъ имѣть

$$a = 45^{\circ} 73' 64'',$$

$$b = 55 66 27,$$

$$C = 126 80 56.$$

Для опредѣленія c , по этимъ данностямъ, имѣемъ формулы $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\cos C \operatorname{tang} b}{\sin a}$, $\cos c = \frac{\cos b \cos (a - \varphi)}{\sin \varphi}$, и

$$\text{вычисляя, получимъ } L \cos C = 9.6114352$$

$$L \operatorname{tang} b = 10.0776707$$

$$L \operatorname{tang} \varphi = 9.6891059.$$

Уголъ φ , который даютъ таблицы, посредствомъ логарифма - тангенса, есть $28^{\circ} 94' 23''$. Замѣтимъ здѣсь, что $\cos C$ есть отрицательный, и такъ какъ, въ слѣдствіе этого, $\operatorname{tang} \varphi$ есть также отрицательный, то должно взять $\varphi = -28^{\circ} 94' 23''$, что даетъ $a - \varphi = 74^{\circ} 67' 87''$. Положивъ это и замѣтивъ, что $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$, найдемъ, по вычисленіи,

$$L \cos (a - \varphi) = \dots 9.5880938$$

$$L \cos b = \dots \dots 9.8071953$$

$$\hline 19.3952891$$

$$L \cos \varphi = \dots \dots 9.9534823$$

$$L \cos c = \dots \dots 9.4418068$$

И такъ искомое разстояніе $c = 82^{\circ} 16' 05''$. Это же самое разстояніе можетъ быть выражено въ мириаметрахъ числомъ 821,605; ибо мириаметръ есть длина дуги въ 10 минутъ, а метръ длины дуги въ одну десятую часть секунды.

ХСV. Примѣръ III. Пусть будетъ предложено разрѣшитьъ сферическій трѣхъ, въ которомъ извѣстны два угла $A = 78^{\circ} 50'$, $B = 54^{\circ} 0'$, и сторона противоположная одному изъ нихъ, $a = 99^{\circ} 20' 17''$. Соображая эти данности, находимъ сначала по

таблицѣ члена XCI, что вопросъ можетъ допустить только одно рѣшеніе, ибо имѣемъ вдругъ $a < 100^\circ$, $B < 100^\circ$ и $A > B$. Вотъ исчисленія этого вопроса

1-е. Сторона b найдется по формулѣ $\sin b = \sin a \frac{\sin B}{\sin A}$.

L $\sin a$	9.9999659
L $\sin B$	9.8751256
10 — L $\sin A$	0.0252525
L $\sin b$	9.9003440

что даетъ $b = 58^\circ 50' 14''$, или ея дополнение $141^\circ 49' 86''$; но такъ какъ уголъ $B < A$, то должно чтобы b была $< a$, и поэтому только одна первая величина можетъ имѣть мѣсто.

2-е. Для полученія стороны c должно сдѣлать

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{\cos B \tan a}{R}, \quad \sin (c - \varphi) = \frac{\tan B \sin a}{\tan A} \\ &= \frac{\tan B \cot A \sin \varphi}{R^2} \end{aligned}$$

L $\sin \varphi$	9.9999220
L $\cos B$	9.8204063
L $\tan a$ — LR	0.0547193
L $\tan a$ — LR	1.9016731
L $\cot A$	9.5455236
L $\tan \varphi$	11.7220794
L $\sin (c - \varphi)$	9.6001649
$\varphi = 98^\circ 79' 28''$, 8	$c - \varphi = 26^\circ 7' 70''$. 5.

Здѣсь также можно избрать для $c - \varphi$ величину $26^\circ 7' 70''$, 5, или ея дополнение $173^\circ 92' 29''$, 5; но взявъ эту вторую величину, имѣли бы $c > 200^\circ$, и поэтому должно остаться при первой, которая даетъ $c = 124^\circ 81' 99''.3$.

3-е Наконецъ, для вычисленія угла C , мы возьмемъ

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\cos a \tan B}{R}, \quad \sin (C - \varphi) = \frac{\cos A \sin \varphi}{\cos B} \\ &= \frac{\cos A \tan \varphi}{\tan B} \end{aligned}$$

L $\sin \varphi$	9.9999563
L $\cos a$	8.0982928
L $\cos A$	9.5202711
L $\tan B$ — LR	0.0547193
L R — L $\cos B$	0.1795937
L $\cot \varphi$	8.1530121
L $(C - \varphi)$	9.6998211
$\varphi = 99^\circ 9' 45''$ 5	$C - \varphi = 33^\circ 40' 54''$ 5
	$\varphi = 99^\circ 9' 45''$ 5
	$C = 132^\circ 50' 00''$

Вывести C — φ здесь нельзя было взять дополнение $33^\circ 40' 54''$, 5; ибо оно дало бы для C величину большую 200° . Такимъ образомъ видно, что предложенная задача имѣетъ только одно рѣшеніе.

Замѣчаніе. Еслибъ, въ предыдущихъ примѣрахъ употребляли такое дѣленіе круга при вычисленіяхъ, по даннымъ, или определеннымъ угламъ были бы выражены слѣдующимъ образомъ:

Примѣръ I. Даннымъ угламъ $MON = 88^\circ 0' 6''$, $DOM = 88^\circ 18' 21''$, $DON = 84^\circ 52' 40''$, 8. Вычисленными угламъ $C = 87^\circ 41' 6''$, 9.

Прим. II. Даннымъ угламъ и сторонамъ $b = 41^\circ 9' 46''$, $a = 60^\circ 5' 47''$, $C = 113^\circ 7' 30''$. Третья сторона $c = 73^\circ 46' 40''$.

Прим. III. Даннымъ угламъ и сторонамъ $A = 70^\circ 39'$, $B = 41^\circ 38'$, $a = 89^\circ 16' 53''$, 5. Вычисленными угламъ и сторонамъ будутъ $b = 52^\circ 29' 4''$, $c = 112^\circ 20' 16''$, 6, $C = 119^\circ 18' 0''$.

ПРИБАВЛЕНІЕ,

содержащее въ себѣ разрѣшеніе некоторыхъ частныхъ вопросовъ тригонометріи.

ХСVI. Разрѣшеніе треугольниковъ, въ изложенномъ или видѣ, представляетъ всю возможную общность. Не взирая на то, есть некоторые случаи, гдѣ можно съ пользою занять общія рѣшенія частными, какъ для сокращенія вычисленій, такъ и для того, чтобы сдѣлать выводы болѣе точными и независимыми отъ погрѣшностей таблицъ. Мы разрѣшимъ здѣсь некоторые изъ этихъ частныхъ случаевъ, избирая между ними наиболее употребленные, или приводящіе къ особенно замѣчательнымъ формуламъ.

Мы будемъ означать, по предвѣсу, буквами A, B, C , углы предположеннаго прямоугольнаго или сферическаго треугола, и буквами a, b, c , сторонамъ, или относительно противоположнымъ. Кроме того, мы предположимъ радиусъ таблицъ $= 1$, что не вредитъ общности выводовъ. Углы A, B, C , выражаются въ вычисленіяхъ, или градусами, или градусными дѣлями дугъ или дугами, или въ широтѣ въ кругѣ, когда радиусъ есть 1. Если уголъ или дуга x очень малъ, то можно подставлять вмѣсто $\sin x$ и $\cos x$, или величинъ въ степеняхъ, то есть: $\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} +$ и проч., $\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} +$

и проч.; но при этомъ x долженъ быть выраженъ въ частяхъ радиуса. Для полученія величинъ отъ дугъ въ кивутахъ, должно умножить ее на число кивутовъ заключающихся въ радиусѣ, это число

равно $\frac{20000}{\pi} = 6366.1977237$, и его логарифм $= 5,60398012297$.

§ I. О прямолинейных треугольниках, в которых два угла очень малы.

ХСVII. Полагая, что углы A и B очень малы, и, в следствие этого, C очень великъ, можно сдѣлать $\sin A = A - \frac{1}{6} A^3$, ил $B = B - \frac{1}{6} B^3$, и $\sin C = \sin(A+B) = A+B - \frac{1}{6}(A+B)^3$. И такъ малъ сторону c съ прилежащими углами A и B , выведетъ для другія стороны по формуламъ $a = \frac{\sin A}{\sin(A+B)}$, $b = \frac{\sin B}{\sin(A+B)}$, которыя, по вставленіи предыдущихъ величинъ и сокращеніи, представятся въ видѣ

$$a = \frac{c A}{A+B} \left(1 + \frac{2AB+B^2}{6} \right),$$

$$b = \frac{c B}{A+B} \left(1 + \frac{A^2+2AB}{6} \right),$$

откуда $a+b-c = \frac{1}{6} cAB$. Этихъ величинъ сущъ почтиа до четвертой, содержащихся четыре извѣренія въ A и B .

ХСVIII. Предположимъ, во вторыхъ, что даны двѣ стороны a и b , съ содержащимися между ними угломъ $C = \pi - \theta$, гдѣ θ весьма мало. Во первыхъ будемъ имѣть $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta = a^2 + b^2 + 2ab(1 - \frac{1}{2}\theta^2) = (a+b)^2 - ab\theta^2$; слѣд.

$$c = a+b - \frac{1}{2} \frac{ab\theta^2}{a+b}.$$

Потомъ уголъ A выйдетъ изъ уравненія $\sin A = \frac{a}{c} \sin C = \frac{a}{c} \sin \theta$, откуда извлечень, подставляя величинъ c и $\sin \theta$,

$$\sin A = \frac{a}{a+b} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{ab}{(a+b)^2} \theta^2 - \frac{1}{6} \theta^4 \right) = \frac{a^2}{a+b} \left(1 + \frac{ab-a^2-b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{\theta^2}{6} \right).$$

$$\text{Слѣд. } A = \sin A + \frac{1}{6} \sin^3 A = \frac{a^2}{a+b} + \frac{ab(a-b)}{(a+b)^2} \frac{\theta^2}{6}.$$

Откуда можно вывести величину B , дѣлая переносеніе между бѣгивами a и b , но такъ какъ A извѣстно, то получимъ непосредственно $B = \pi - A$.

Если уголъ θ данъ въ минуткахъ, то для выраженія A въ минуткахъ, можно въ предыдущихъ формулахъ подставить, вмѣсто A и θ , отношеніе $\frac{A}{R}$, $\frac{\theta}{R}$, гдѣ R представляетъ число минутъ заключающихся въ градусѣ. Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$c = a + b - \frac{1}{2} \frac{ab}{a+b} \left(\frac{\theta}{R} \right)^2$$

$$A = \frac{a^2}{a+b} \left[1 + \frac{b(a-b)}{a(a+b)^2} \left(\frac{\theta}{R} \right)^2 \right].$$

XCIX. Пусть для приложения этих формул $a = 1000$, $b = 2400$, $C = 199^\circ 32'$ или $\theta = 68'$. В этом случае будет иметь $a + b - c = \frac{1200000}{3400} \cdot \left(\frac{68}{R} \right)^2 = 0,057806$, откуда $c = 3399,9$

962194. Попробуем, по первому приближению, $A = \frac{A^2}{a+b} = 30'$ и

$B = \theta - A = 48'$; но правильная формула дает

$A = 20 \left[1 - \frac{2400 \times 1400}{6(3400)^2} \left(\frac{68}{R} \right)^2 \right] = 19,99985946$, и в следствии этого $B = 48', 00011054$, величинами взятыми до последней десятичной цифры.

§ II. Разрешение третьего случая прямоугольных треугольников посредством степеней.

C. Если даны две стороны a и b и содержащийся между ними угол C , то угол B находится из пропорции $b:a = \sin B : \sin(B+C)$, которая дает $a \sin B = (\sin B \cos C + \cos B \sin C)$, и в следствии этого $\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{b \sin C}{a - b \cos C}$. Если в этом уравнении поставим

вместо синусов и косинусов их величины, выраженные какими-нибудь степенными величинами (XXXV), то будем иметь

$$\frac{e^{BY'-1} - 1}{e^{BY'-1} + 1} = \frac{b(e^{CY'-1} - 1)}{2a - b(e^{CY'-1} + 1)},$$

откуда извлечемъ

$$2BY'-1 = \frac{a - be - e^{CY'-1}}{a - be^{CY'-1}}.$$

Взявъ логарифмы каждого члена и разлагая второй изъ рядъ въ известной формулѣ I. $(a-x) = 1.a - \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \dots$ и проч., получимъ,

$$2BY'-1 = \frac{b}{a} e^{CY'-1} + \frac{b^2}{2a^2} e^{2CY'-1} + \frac{b^3}{3a^3} e^{3CY'-1} + \dots \text{и проч.}$$

$$- \frac{a}{b} e^{-CY'-1} - \frac{b^2}{2a^3} e^{-2CY'-1} - \frac{b^3}{3a^3} e^{-3CY'-1} - \dots \text{и проч.}$$

След. раздѣливъ на $2Y'-1$, и приравнявъ въ соображеніе, что

$$e = \frac{mC' - 1}{e} - mC_1 - 1 = 2V - 1 \sin mC, \text{ оуменьшить}$$

$$B = \frac{b}{a} \sin C + \frac{b^2}{2a^2} \sin 3C + \frac{b^3}{8a^3} \sin 5C + \frac{b^4}{4a^4} \sin 7C + \dots \text{ и проч.}$$

Такимъ образомъ уголъ В, выраженный въ частяхъ радиуса, посредствомъ степеней, которыми законъ весьма простъ, и которая будетъ имѣть болѣе приближенности, чѣмъ b имѣетъ въ отношеніи къ a .

Нижеслѣдующія величины должны удовлетворять также уравненію $\tan \frac{1}{2}(B + \frac{1}{2}C) = \frac{a+b}{a-b} \tan \frac{1}{2}C$, которое подобно уравненію

$$\tan \frac{1}{2}(A - B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2}C, \text{ и различается только знаменъ}$$

$$\text{своихъ оныхъ уравненій} \quad \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin C}{a - b \cos C},$$

Сл. По известному углу В, можно найти третій уголъ $A = 180^\circ - B - C$. Чѣмъ касается до третьихъ сторонъ e , то она зависитъ отъ уравненія $e^2 = a^2 - 2ab \cos C + b^2$, которое дасть, по извлеченіи корня,

$$e = a - b \cos C + \frac{b^2}{2a} \sin^2 C + \frac{b^3}{2a^2} \sin^2 C \cos C \text{ и проч.}$$

По этому рядъ не имѣетъ постояннаго хода и не можетъ быть продолженъ произвольно. Напротивъ, можно найти весьма простую рядъ для гиперболическаго логарифма e . Достаточно, для этого,

принять, что количество $a^2 - 2ab \cos C + b^2 = (a - be^{C' - 1})(a - be^{-C' - 1})$; ибо разложившее произведение оныхъ двухъ множителей дасть

$$a^2 - ab \left(e^{C' - 1} + e^{-C' - 1} \right) + b^2, \text{ или } a^2 - 2ab \cos C + b^2.$$

И такъ имѣемъ $e^2 = (a - be^{C' - 1})(a - be^{-C' - 1})$, и взявъ логарифмы каждого члена получимъ

$$2L e = La - \frac{b}{a} e^{C' - 1} - \frac{b^2}{2a^2} e^{2C' - 1} - \frac{b^3}{8a^3} e^{3C' - 1} - \dots \text{ и пр.}$$

$$+ La - \frac{b}{a} e^{-C' - 1} - \frac{b^2}{2a^2} e^{-2C' - 1} - \frac{b^3}{8a^3} e^{-3C' - 1} - \dots \text{ и пр.}$$

Сокращая оныя выраженія посредствомъ формулы

$$\frac{mC' - 1}{e} - mC_1 - 1 = 2 \cos mC, \text{ имѣемъ}$$

$$1x = La - \frac{b}{a} \cos C - \frac{b^2}{2a^2} \cos 2C - \frac{b^3}{8a^3} \cos 3C - \text{и проч.}$$

рядъ столь же ясный по ходу, какъ и шотъ, который даетъ величину В. Замѣтимъ, что для полученія табличныхъ логарифмовъ должно умножить алгебраическіе члены на модуль 0,43429448.

§ III. Разрѣшеніе третьяго случая сферическихъ треугольниковъ, посредствомъ рядовъ.

СII. Въ предыдущемъ параграфѣ было показано, что величина x выведенная изъ уравненія $\tan x = \frac{m+n}{m-n} \tan \frac{1}{2} C$, можетъ выразиться слѣдующимъ рядомъ

$$x = \frac{1}{2} C + \frac{n}{m} \sin C + \frac{n^2}{2m^2} \sin 2C + \frac{n^3}{2m^3} \sin 3C + \text{и проч.}$$

Но въ сферическомъ шрѣ, гдѣ известны двѣ стороны a и b и содержащійся между ними уголъ C , имѣемъ по аналогіи Невера (LXXXVI)

$$\begin{aligned} \cot \frac{A+B}{2} &= \frac{\sin (\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b)}{\sin (\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b)} \tan \frac{1}{2} C = \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b}{\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b - \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b} \tan \frac{1}{2} C; \\ \cot \frac{A+B}{2} &= \frac{\cos (\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b)}{\cos (\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b)} \tan \frac{1}{2} C \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b - \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b} \tan \frac{1}{2} C. \end{aligned}$$

Слѣд., по предыдущей формулѣ, и предполагая всегда $a > b$, будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \frac{A+B}{2} &= 100^\circ - \frac{1}{2} C - \frac{\tan \frac{1}{2} b}{\tan \frac{1}{2} a} \sin C - \frac{\tan^2 \frac{1}{2} b}{2 \tan^2 \frac{1}{2} a} \sin 2C \\ &\quad - \frac{\tan^3 \frac{1}{2} b}{8 \tan^3 \frac{1}{2} a} \sin 3C - \text{и проч.} \\ \frac{A+B}{2} &= 100^\circ - \frac{1}{2} C + \frac{\tan \frac{1}{2} b}{\cot \frac{1}{2} a} \sin C - \frac{\tan^2 \frac{1}{2} b}{2 \cot^2 \frac{1}{2} a} \sin 2C \\ &\quad + \frac{\tan^3 \frac{1}{2} b}{8 \cot^3 \frac{1}{2} a} \sin 3C - \text{и проч.} \end{aligned}$$

Законы этихъ рядовъ весьма просты и они будутъ тѣмъ явнѣе, чѣмъ менѣе b . Первый рядъ есть всегда приближающійся, но предполагается, что $b < a$, второй будетъ также приближающимся если $\tan \frac{1}{2} b < \cot \frac{1}{2} a$ или $a + b < 200^\circ$. Онъ былъ бы ложнымъ и отходящимъ, еслибъ имѣли $a + b > 200^\circ$, но можно всегда имѣть этого — потому что разрѣшеніе шр. ВСА, въ a сторону имѣетъ

бы $CA + CB > 200^\circ$, приводится всегда къ разрывенію тр. $A'CB'$, такъ $CA' + CB < 200^\circ$. Наконецъ, второй рядъ предполагаетъ наибольшую приближенность, когда a и b очень малы, тогда стоящая с ними очень малая, ною должно, чтобы c была $< a + b$, и сферическій треугольникъ отличился всецѣло мало отъ плоскаго. Въ этомъ случаѣ равенство между суммою трехъ угловъ и двумя прямыми углами нѣмало отличается слѣдующимъ образомъ:

$$A+B+C-200^\circ = \frac{1}{2} \tan \frac{1}{2} a \tan \frac{1}{2} b \sin C - \frac{1}{2} \tan^2 \frac{1}{2} a \tan^2 \frac{1}{2} b \sin 2C + \frac{1}{2} \tan^3 \frac{1}{2} a \tan^3 \frac{1}{2} b \sin 3C - \text{и проч.}$$

СIII. Для опредѣленія третьей стороны с предположеномъ треугольнике, имѣемъ уравненіе $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$, изъ котораго легко вывести два слѣдующія

$$\sin^2 \frac{1}{2} c = \sin^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} b - 2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos C + \cos^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b, \\ \cos^2 \frac{1}{2} c = \cos^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} b + 2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos C + \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b.$$

Если, по виду этихъ величинъ, что $\sin \frac{1}{2} c$ можетъ быть равна-триваемъ къ третьей стороне произвольнаго тр-ка, изъ котораго наибольшимъ сторонамъ $\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b$, $\cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b$ и содержащимся между ними уголъ C , также $\cos \frac{1}{2} c$ есть третья сторона произвольнаго тр-ка, гдѣ двѣ стороны были бы $\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b$, $\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b$, и содержащимся уголъ $200^\circ - C$. И такъ, въ слѣдующіе формулы подставимъ для произвольныхъ тр-въ (C).

$$\log. \sin \frac{1}{2} c = \log. (\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b) - \frac{\tan \frac{1}{2} b}{\tan \frac{1}{2} a} \cos C - \frac{\tan^2 \frac{1}{2} b}{2 \tan^2 \frac{1}{2} a} \cos 2C \text{ и пр.}$$

$$\log. \cos \frac{1}{2} c = \log. (\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b) + \frac{\tan \frac{1}{2} b}{\cot \frac{1}{2} a} \cos C - \frac{\tan^2 \frac{1}{2} b}{2 \cot^2 \frac{1}{2} a} \cos 2C + \text{и пр.}$$

Замѣтимъ предварительно, что такъ какъ каждый изъ произвольныхъ тр-въ разсмотрѣнныхъ или можетъ быть разрѣшенъ посредствомъ прямоугольнаго тр-ка, то можно привести разрѣшеніе предложенаго сферическаго тр-ка къ разрѣшенію произвольнаго прямоугольнаго тр-ка.

По этому способу находимъ, что $\sin \frac{1}{2} c$ есть гипотенузу прямоугольнаго тр-ка, крѣго сторонамъ суть $\sin \frac{1}{2} (a+b) \sin \frac{1}{2} C$ и $\sin \frac{1}{2} (a-b) \cos \frac{1}{2} C$. Также косинусъ $\cos \frac{1}{2} c$ есть гипотенузу прямоугольнаго тр-ка, крѣго сторонамъ суть

$$\cos \frac{1}{2} (a-b) \cos \frac{1}{2} C \text{ и } \cos \frac{1}{2} (a+b) \sin \frac{1}{2} C.$$

Кромѣ того, если назовемъ M уголъ, который въ первомъ тр-кѣ противоположенъ сторонѣ $\sin \frac{1}{2} (a-b) \cos \frac{1}{2} C$, и во второмъ, N уголъ противоположенный сторонѣ $\cos \frac{1}{2} (a-b) \cos \frac{1}{2} C$, то изъ ана-

$$\text{лог. и Понера слѣдуетъ, что } \frac{A-B}{2} = M, \text{ и } \frac{A+B}{2} = N, \text{ или } =$$

$$200^\circ - N; \text{ то есть } \frac{A+B}{2} = N, \text{ если } a+b < 200, \text{ и } \frac{B+A}{2} =$$

$200^\circ - N$, если $a+b > 200$. И такъ, по вѣстнымъ двумъ сторонамъ сферическаго тр-ка и содержащему между ними углу C ,

можно найти прямо второе из чисел $\frac{A+B}{2}$, $\frac{A-B}{2}$, посредством разрешения прямоугольного треугольника, в котором известны две стороны прямого угла.

Отсюда следует также, что по определении угла M или $\frac{A-B}{2}$,

из формулы $\tan M = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cos \frac{1}{2}C$, можно вычислить

третью сторону, посредством формулы $\sin \frac{1}{2}c = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}C}{\sin M} = \sin \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}C$.

Примечание. Формулы выведенные из главы III могут быть легко применены к разрешению нашего случая в сферических треугольниках, потому что этот случай приводится к простому по свойству шарового треугольника.

§ IV. Разрешение сферического треугольника по трем сторонам

СIV. Пусть a и b будут данные стороны, весьма мало различающиеся от 100; должно определить угол C посредством сторон a , b , c .

Если бы стороны a и b были точно равны 100, то имела бы $C = c$; но так как, по предположению, они мало отличающиеся от 100°, то угол C будет иметь меру дугу весьма мало различающуюся от c . Положим $a = 100 + \alpha$, $b = 100 + \beta$, $C = c + x$, и под-

ставим эти величины в уравнение $\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$, бу-

дем иметь $\cos(c+x) = \frac{\cos c - \sin \alpha \sin \beta}{\sin a \cos \beta}$. Полагая же α и β весьма малыми, то пренебрегая члены, в которых α и β возвышены в 4 в-

степени можно сделать $\sin \alpha \sin \beta = \alpha \beta$, $\cos \alpha \cos \beta = 1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\beta^2}{2}$,

что даст $\cos(c+x) = \frac{\cos c - \alpha \beta}{1 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2} = (1 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2) \cos c - \alpha \beta$.

Пренебрегая квадратами α , имеем $\cos(c+x) = \cos c - \alpha \sin c$ или

$$x = \frac{\alpha \beta - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \cos c}{\sin c}.$$

И так как x есть количество второго порядка, в отношении

или $\alpha + \gamma = \beta$, то видно, что в этом выражении преобразована только величина четвертого члена.

Положим $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = p$, $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = q$, так что $\alpha = p + q$, $\beta = p - q$.

Будет иметь простейшее выражение:

$$x = p^2 \left(\frac{1 - \cos \epsilon}{\sin \epsilon} \right) - q^2 \left(\frac{1 + \cos \epsilon}{\sin \epsilon} \right) = p^2 \cot \frac{1}{2} \epsilon - q^2 \cot \frac{1}{2} \epsilon,$$

где величины выражены в членах радиуса, но так как в тригонометрии p и q даны в секундах, то для выражения x в секундах должно сделать

$$x = \frac{p^2}{R} \cot \frac{1}{2} \epsilon - \frac{q^2}{R} \cot \frac{1}{2} \epsilon,$$

где R представляется число секунд, содержащихся в радиусе второго дугария $= 370200$. Если x , полученный числом углов $C = \epsilon + \pi$.

Формула найденная выше весьма полезна в выводе некоторых следствий для приведения к пропорции углов находящихся во взаимных плоскостях, и при этом требует не столько обширных таблиц как формулы первого случая тригонометрических, кои при этом приводить не имеет нужды. Впрочем если, возмущения или углубления α и β будут больше 2 или 3 градусов, то для большей точности лучше прибегать к общему методу.

§ V. Разрешение сферических треугольников, зная три стороны очень малые в отношении к радиусу шара.

CV. Когда стороны a , b , c , весьма малы в отношении к радиусу шара, то предложенный шар можно разложить на три плоскости; и, рассматривая его как последний, можно найти первое приближенное решение; но в этом случае преобразована лишь одна сумма углов предъ 200° . Для получения более приближенного решения, должно принять в рассмотрение изометрию, и это произойдет весьма легко посредством общего правила, которое мы предложим доказать.

Если, назвать r радиус шара, на котором находится предложенный сферический шарик, вообразим подобный ему шарик вписанный на шар, коего радиус $= 1$, то стороны шарика будут

$$\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r} \text{ и } \cos A = \frac{\cos \frac{a}{r} - \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r}}{\sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r}}. \text{ Но так как } r \text{ очень}$$

велик в отношении к a , b , c , то будет иметь весьма простые деления образом (XXX)

$$\cos \frac{a}{r} = 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{2 \cdot 8 \cdot 4r^4}, \quad \cos \frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{2 \cdot 8 \cdot 4r^4}.$$

$$\cos \frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{2 \cdot 8 \cdot 4r^4}, \quad \sin \frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{2 \cdot 8 \cdot r^3}, \quad \sin \frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c^3}{2 \cdot 8 \cdot r^3}.$$

Подставляя эти величины в предыдущее уравнение, и пренебрегая числами, исчезающими больше четырёх изъятий в a, b, c , будем иметь

$$\cos A = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2r^2} + \frac{a^4 - b^4 - c^4}{24r^4} - \frac{b^2 c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2} \left(1 - \frac{b^2}{6r^2} - \frac{c^2}{6r^2} \right)}$$

Умножая два члена этой дроби на $1 + \frac{b^2 + c^2}{6r^2}$, и сокращая получим

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24bc^3}.$$

Пусть теперь A' угол противоположный стороне a , в прямоугольном шреке, катетами равным длиною дугам b, c . По формуле $\cos A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ и $4b^2c^2 \sin^2 A' = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$. Следовательно,

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc}{6r^2} \sin^2 A'.$$

Положив $A = A' + x$, и пренебрегая квадраты x , будем иметь $\cos A = \cos A' - x \sin A'$, откуда видно, что $x = \frac{bc}{6r^2} \sin A'$. Такая x есть второй степени относительно $\frac{b}{r}$ и $\frac{c}{r}$, то очевидно следует, что этот вывод очень до количества четвертого порядка, и будет иметь

$$A = A' + \frac{bc}{6r^2} \sin A'.$$

Но $\frac{1}{2} bc \sin A'$ есть площадь прямоугольного шрека, индугами сторонами b, c , и которая весьма мало разнится от площади предположенного сферического шрека. Называя теперь одну из этих площадей α , будем иметь

$$A = A' + \frac{\alpha}{gr^2}, \quad \text{или } A' = A - \frac{\alpha}{gr^2}. \quad \text{Подобным образом } B' = B - \frac{\alpha}{gr^2}.$$

$C = c - \frac{a}{R^2}$, и отсюда следует, что $A' + B' + C'$, или $200'' =$

$A + B + C - \frac{a}{R^2}$. И такъ можно ради простоты, или ради

того суммировать углы предложеннаго сферическаго треугола предъ двумя прямыми углами. Положивъ это, получимъ слѣдующую извѣстную теорему, которая приводитъ раздѣленіе всѣхъ малыхъ сферическихъ треугола въ раздѣленію треугола прямоугольнаго.

Если въ данномъ сферическомъ треуголѣ, одного сторонамъ всѣхъ стороны ошестивательно рѣзуса шара, ошестивъ изъ вѣданаго угла шреть избытка сумми прѣхъ угловъ предъ двумя прямыми, то вѣданные стороны образуютъ углы могутъ быть приняты за углы прямоугольнаго треугола, одного сторонамъ равны данною сторонамъ предложеннаго сферическаго треугола. Или, другими словами,

Сферическій треуголъ избытокъ всѣхъ катетовъ арканату, и одного углы есть A, B, C , и противоположные сторонамъ a, b, c , соответствующе всегда прямоугольному треуголу избытокъ сторонамъ равны катетамъ a, b, c , и одного противоположные углы суть $A - \frac{1}{2}i, B - \frac{1}{2}i, C - \frac{1}{2}i$, гдѣ i представляетъ избытокъ сумми прѣхъ угловъ предложеннаго сферическаго треугола предъ двумя прямыми углами.

CVI. Избытокъ i или $\frac{a}{R^2}$, пропорциональнъ площади треугола можетъ быть всегда вычисленъ *a priori* по данностямъ сферическаго треугола, разсчитываемаго какъ прямоугольный. Если даны двѣ сторонамъ b и c съ содержащимся между ними угломъ A , то площадь $a = \frac{1}{2}bc \sin A$, а въ шрехъ случаяхъ когда вѣданы стороны и содержащіе углы B и C , то площадь $a = \frac{1}{2}a^2 \frac{\sin B \sin C}{B+C}$. Ибо изъ избытка $i = \frac{a}{R^2} R$, гдѣ R означаетъ число секундъ содержащихся въ радиусѣ, и такими образомъ i будетъ выраженъ въ секундахъ.

Для приложенія этихъ формулъ къ шрехъ катетамъ изъ поверхности земли, которая принимается за сферическую (1) можно предположить, что сторонамъ a, b, c , такъ какъ и радиусъ земли r , выражены въ метрахъ. Но четверть меридиана $\frac{1}{4} r$ равна 10000000 метрамъ, слѣд. $\log r = 7.0000001$, и съ другимъ сторонамъ, радиусъ R выраженнымъ въ секундахъ, имѣетъ логарифмъ 4,6088001. Отсюда

(1) Въ Геодезическихъ измѣренихъ, шрехъ чаще всего опредѣляются прѣхъ станціи не равно удаленными отъ центра земли, но посредствомъ прямыхъ или кривыхъ, или шрехъ измѣняются другими, которые происходятъ отъ проширивающагося на одну сферическую поверхность, представляющую въ лагранжевомъ шлестѣ.

следует, что прибавляя к логарифму площади Δ , выраженного в квадратных метрах, постоянный логарифм 2,196119, и вычитая из суммы десять единиц, получим логарифм искомых ξ выраженного в секундах.

Зная теперь искомые ξ , увеличим $\frac{1}{3}\xi$ каждый угол прямого сферического треугольника и будем иметь, в произвольном треугольнике, составленном из сторон a, b, c , и углов $A' = A + \frac{1}{3}\xi$, $B' = B + \frac{1}{3}\xi$, $C' = C + \frac{1}{3}\xi$, данных необходимых для определения его частей. В то же время определялись части прямого сферического треугольника.

С VII. Пример. Пусть будет даны углы C и две стороны a и b , то есть,

$$C = 123^{\circ} 19' 59'', 23.$$

$$\log a = 4,5891503.$$

$$\log b = 4,5219271.$$

Количество $\frac{1}{2}ab \sin C$, представляющее площадь треугольника, будет иметь логарифм 8,78055, прибавляя к нему 2,19612, получим $\log \xi = 0,97667$, откуда $\xi = 9''.48$ и $\frac{1}{3}\xi = 3''.16$. Помня, что, должно разрешить произвольный треугольник, в котором известны a и b , и содержащийся между ними угол $C' = 123^{\circ} 19' 59''.07$.

В этом случае мы будем следовать способу члена 86.

$$a = \dots 4,5891503. \quad \text{tang } (\varphi - 60^{\circ}) \dots 8,8876893$$

$$b = \dots 4,5219271. \quad \cot \frac{1}{2}C' \dots 9,8391110$$

$$\text{tang } \varphi \dots 0,0672232. \quad \text{tang } \frac{A' - B'}{2} \dots 8,7259603$$

$$\varphi = 54^{\circ} 00' 74''.72$$

$$100^{\circ} - \frac{1}{2}C' = 61^{\circ} 59' 58''.08$$

$$\frac{1}{2}C' = 88^{\circ} 40' 1''.97$$

$$\frac{A' - B'}{2} = 6^{\circ} 38' 59''.27$$

$$\frac{A' + B'}{2} = 88^{\circ} 40' 1''.97.$$

$$A' = 41^{\circ} 78' 41''.24.$$

$$B' = 88^{\circ} 1^{\circ} 02''.70.$$

Остается определить третью сторону c , что произойдет посредством уравнения $c = \frac{a \sin C'}{\sin A'}$.

$$a \dots 4,5891503$$

$$\sin A' \dots 9,7854898$$

$$\text{Разность } 4,8036610 \dots 4,8036610$$

$$\sin C' \dots 9,9705008 \quad \sin B' \dots 9,7182661.$$

$$\log c = 4,7741618 \quad \log b = 4,5219271.$$

Слѣд. части которой должно было опредѣлить въ сферическомъ триаг., суть

$$A = 41^{\circ} 75' 46'', 40$$

$$B = 36 \quad 1 \quad 65, 48$$

$$\log c = 0,7761618, \text{ или } c = 5,9651'' 250.$$

Примѣчаніе. Способъ изложенный въ этомъ частнъ можетъ быть употребленъ для разрѣшенія т. триаг., въ которыхъ нѣтъ стороны, а дано разнѣе или 200° и три угла, или два угла. Ибо, проведя в вершинѣ стороны AC , AB , получимъ сферическія триаг. ABC , котор. стороны всѣмъ нѣтъ.

§ VI. О сферическомъ триу. описанномъ въ кругъ, въ которомъ острые углы.

СЛ. III. Пусть ABC будетъ предположеннымъ сферическимъ триаг., въ которомъ углы A и B всѣмъ острые, и LMN его полярнымъ триаг., такъ что $MN = 200^{\circ} - A$ и $LN = 200^{\circ} - B$. Если продолжимъ дуги NM , NL , до нѣхъ встрѣимъ въ K , то ясно, что будутъ нѣтъ $KM = A$, и $KL = B$, и слѣд. триаг. LKM , нѣмощи всѣхъ нѣтъ сторонамъ, но можетъ быть разрѣшенъ въ этомъ случаѣ по вѣдомой предыдущаго главы.

Назовъ A' , B' , C' три угла, и a' , b' , c' , три стороны триаг. LKM будемъ нѣтъ

$$A' = MLK = a$$

$$a = KM = A$$

$$B' = LMK = b$$

$$b' = LK = B$$

$$C' = LKM = 200^{\circ} - c \quad c' = LM = 200^{\circ} - C.$$

Три нѣмощи части триаг. ABC опредѣляютъ три дѣи части въ триаг. LKM , и, въ слѣдствіе этого, такое же чиселъ частей въ прямоугольномъ триаг., къ которому триаг. LKM можетъ быть приведенъ. И такъ, разрѣшивъ послѣдній, будемъ нѣтъ рѣшеніе триаг. LKM , и наконецъ предположнаго триаг. ABC .

СЛ. IV. Если, на примѣръ $A = 3^{\circ}$, $B = 2^{\circ}$, и прилежащая сторона $c = 160''$, то длинностн триаг. LKM , или $A'B'C'$, будутъ $a = 4^{\circ}$, $b = 2^{\circ}$, и сдерживающіеся углы $C = 80^{\circ}$. Посредствомъ этихъ длинностей вложимъ сферическій измѣтитель $\varepsilon = \frac{a'b' \sin C'}{b}$ $= 0,55, 21$, и во оставшімъ третей ε изъ C' , получимъ остаткомъ $35^{\circ} 44' 44'' 93$. И такъ должно разрѣшитьъ прямоугольнымъ триаг., въ которомъ нѣтъ дѣи сторонамъ $a' = 80000''$, $b = 20000''$, и сдерживающіеся нѣмощи углы $C' = 49^{\circ} 56' 38'' 93$.

Для прочтѣнн угловъ вѣдѣтъ, что $A' = 103^{\circ} 56' 36'' 86$, $B' = 40 36 24'' 75$, а третей стороны $c' = 31244'' 36$, и наконецъ, прибавляя $\frac{1}{2} \varepsilon$ къ угламъ A'' и B'' прямоугольнаго триаг. для опредѣленія угловъ A и B триаг. сферическаго, будемъ нѣтъ вѣдѣтъ рѣшеніе

$$A' = a = 103^{\circ} 05' 97''.40$$

$$B' = b = 46\ 87\ 55.82$$

$$C = 200^{\circ} - c' = 197\ 87\ 55.69.$$

§ VII. О многоугольниках и семайцати сторонахъ

Мы заключаемъ при приложении тригонометрическихъ истинъ, взявъ изъ превосходнаго сочиненія Гаусса (Gauss), употребяго на стр. 118, способъ вписать правильнымъ многоугольникомъ 17-ти сторонамъ, посредствомъ простаго разрѣшенія уравненій втораго степени.

Положимъ ду $y = \frac{200^{\circ}}{17} = \varphi$, будемъ имѣть во первыхъ уравненіи

$$\cos \varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \cos 9\varphi + \cos 11\varphi + \cos 13\varphi + \cos 15\varphi = 1.$$

Ибо если, назвавъ первый членъ Р, умножимъ всѣ члены на $2\cos \varphi$, и потомъ перемножимъ каждое произведеніе двухъ косинусовъ на синусы простыхъ дугъ по формулѣ

$$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B),$$

то получимъ

$$2P \cos \varphi = 1 + 2\cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi + 2\cos 6\varphi + \dots + 2\cos 14\varphi + \cos 16\varphi.$$

Но такъ какъ $16\varphi = 200^{\circ}$, то имѣемъ $\cos 2\varphi = \cos(200^{\circ} - 16\varphi) = -\cos 16\varphi$, $\cos 4\varphi = \cos(200^{\circ} - 12\varphi) = -\cos 12\varphi$, и такъ далѣе $\cos 16\varphi = -\cos \varphi$. Слѣд.

$$2P \cos \varphi = 1 - 2\cos 16\varphi - 2\cos 12\varphi - 2\cos 10\varphi \dots - 2\cos 5\varphi - \cos \varphi, \text{ или}$$

$$2P \cos \varphi = 1 + \cos \varphi - 2P, \text{ или } 2P(1 + \cos \varphi) = 1 + \cos \varphi. \text{ И такъ } P = \frac{1}{2}$$

Положимъ это, раздѣлимъ сумму членовъ составляющихъ Р на двѣ части, именно:

$$x = \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \cos 11\varphi$$

$$y = \cos \varphi + \cos 9\varphi + \cos 13\varphi + \cos 15\varphi.$$

Во первыхъ получимъ $x + y = 1$, и умноживъ потомъ каждыя членъ x на четыре члена y , и зачтя произведенія косинусовъ на синусы простыхъ дугъ, будемъ имѣть по сокращенію

$$xy = 2(\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi + \dots + \cos 16\varphi)$$

$$\text{или } xy = -2(\cos 15\varphi + \cos 13\varphi + \cos 11\varphi + \dots + \cos \varphi)$$

или наконецъ $xy = -1$.

Посредствомъ этихъ уравненій находимъ

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}, \quad y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}.$$

Раздѣлимъ теперь снова каждую сумму x и y на двѣ части, именно

$$x = s + t$$

$$s = \cos 3\varphi + \cos 5\varphi$$

$$t = \cos 7\varphi + \cos 11\varphi$$

$$y = u + v$$

$$u = \cos \varphi + \cos 13\varphi$$

$$v = \cos 9\varphi + \cos 15\varphi,$$

имѣемъ подобнымъ образомъ

$$u = -\frac{1}{2} \qquad \text{и} \qquad w = -\frac{1}{2}.$$

Такъ что можно будетъ опредѣлить четыре числа x, t, u, v по помощи двухъ новыхъ уравненій.

$$\begin{aligned} \text{Напомнимъ, что} \quad \cos \varphi + \cos 13\varphi &= u \quad \text{и} \quad \cos \varphi \cos 13\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(\cos 12\varphi + \cos 14\varphi) = -\frac{1}{2}(\cos 8\varphi + \cos 6\varphi) = -\frac{1}{2}v, \end{aligned}$$

найдемъ изъ четвертаго уравненія второе степени, вычитая $\cos \varphi$, и опуская сторону преобладающаго многоугольника, которая равняется $2 \sin \varphi$ или $2\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$

Что касается до способа, которому слѣдуетъ для раздѣленія этихъ различныхъ уравненій, то онъ зависитъ отъ теоріи основанной на неопредѣленномъ анализѣ, дого изложеніе можно найти въ сочиненіи Гаусса, или въ *Опытѣ теоріи чиселъ*. Тамъ помѣщено полное доказательство слѣдующемъ весьма замѣчательномъ теоремѣ.

Если число n есть простое, и если $n-1$ происходитъ отъ произведенія первыхъ множителей $2\alpha, 3\beta, 5\gamma$, и проч. то дѣлители числа n равныхъ частей можеть быть всегда приведено въ разрѣшенію n уравненію 2 я степени, β третьей, γ пятой и т. д.

Б О Н Е Ц Ъ.

ПОГРѢШНОСТИ

Стр.		Напечатано:	Должно читаться
2	29	BEF.	DEF
8	6	6	8
10	24	уг. $B \cong C$	уг. $B \cong I..$
11	6	линии AC	линии AB
10	26	продолживъ CE до C'	продолживъ ее до C
20	20	уг. KBC'	уг. KBC
21	29	опять послѣдовательно по спросивъ	послѣдовательно опять спросивъ
92	12	другой	другую
95	25	$AE \times AE$	$AE \times AD.$
123	21	и половини	и половинны
162	10	ACB'	ASB'
186	31	Плоскость MH.	плоскость IGH.
226	82	уг. DOP	уг. DOF
232	85	$BE + IE$	$BE + CI.$
—	38	$BE > DE$ и заключе- нъ $DE > BE.$	$DE > BE$ и заключе- нъ $DE > E$
—	11	$DE = BE = CE$	$DE = BE = CI$
—	1	$IBC = BCI$	$IBC = BCI.$
—	9	Ф. 271	Ф. 273.
265	18	$2\pi \times MN^2 \times CI.$	$2\pi \times MN \times CI^2$
279	3	съ ABD углы	съ AB углы ABD.
280	42	$\frac{p}{q}$	$\frac{p}{r}$
282	89	C	C
—	40	функцией отъ p	функцией отъ r
283	и н 9	$\frac{x}{r^2}$	$\frac{x}{r}$
—	10	$\frac{p}{q}$	$\frac{p}{r}$
—	84	$\frac{\varphi(4p, q)}{4q}$	$\frac{\varphi(4p, q)}{4r}$
288	18	$\frac{\varphi : (2 + 1)}{m'}$	$\frac{\varphi : (1 + 2)}{m'}$
298	15	$\frac{m'}{n} > 1,$	$\frac{m'}{n} < 1,$
298	19	предположенія XXII,	предположенія XXXIII
295	19	$\sin \cos.$	$\sin \cos.$
—	28	$S = fgh \sin \alpha \sin \beta \sin E,$	$S = fgh \sin \alpha \sin \gamma \sin E$
299	26	AI = AB	IK = AB.
302	22	p	q
306	8	$S - H$	$S + H$
306	17	$\frac{1}{2} \frac{a}{\sin^2 \frac{\pi}{n}}$	$\frac{1}{2} \frac{a}{\sin \frac{\pi}{n}}$

808	16	$\text{ayry } XZ = 0$
808	9	$\sin \frac{b+a-c}{2}$
810	1	$\frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C}{\cos \frac{1}{2} c}$
838	12	$(8C + 20)$
887	26	$\frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{R}$
889	4	$\sin - m$
—	20	$\sin b$
—	35	$R, \cos a,$
841	4	$\frac{1}{2} V(5 - V'5)$
—	34	$2 - \sin a \cos b$
843	1	XXV
—	28	$0 - 0,784 \dots$
846	17	$\frac{\cos \frac{1}{2} p}{R^2}$
848	4	$\tan (a - b)$
847	17	$1 + \sin - A$
—	27	$1.2.3.4$
848	5	$\frac{x \cdot \tan A}{1 + A}$
—	16	$\frac{x^3}{1.2}$
849	1	$\frac{\tan A^2}{A^2}$
—	19	$e - x) - 1$
—	21	$e - x) - 1$
850	4	$\frac{2}{3} z^3$
851	8	$(50^\circ - z)$
852	20	$\cos 2 a$
855	25	ABC
852	8	$a - b$
859	25	$41^\circ 1' 30''$
871	22	$\cos a \tan c$
878	6	sur. 16
880	20	$R^2 \sin^2 a - \sin^2 b$
881	17	$2 \sin \frac{1}{2} (p+q) (p-q)$
887	24	$\tan \frac{1}{2} (a+b)$
893	2	ABC
—	6 n 11	$AC < 100, b < 100$
897	33	$1. (C - 9)$
898	6 n	$23 \frac{1}{b} B^3, \frac{1}{b}$
—	16	c
900	16	$a \sin b = (\dots)$
—	19	$e^{CV} - 1$
—	34	$\frac{a}{b^2} \frac{b^3}{2a^2} \frac{b^3}{2a^2}$

$\text{ayry } XZ = C$
$\sin \frac{b+c-a}{2}$
$\frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C}{\cos \frac{1}{2} c}$
$\sin (8C + 20)$
$\frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{R}$
$-\sin m,$
$\sin a,$
$R \cos a$
$-\frac{1}{2} V(5 - V'5)$
$2 \sin a \cos b$
XXIV
$0.781 \dots$
$\frac{\cos \frac{1}{2} p}{R^2}$
$\tan (a - b)$
$1 - \sin A$
$1.2.3$
$\frac{x \cdot \tan A}{1 + A}$
$\frac{x^3}{1.2}$
$\frac{\tan A^2}{A^2}$
$e - x) - 1$
$e - x) - 1$
$\frac{2}{3} z^3$
$\cos (60^\circ - z)$
$\cos 2 a$
ABD
$b - a$
$41^\circ 1' 30''$
$\cos a \tan c$
sur. 16
$R^2 \sin^2 a \sin^2 b$
$2 \sin \frac{1}{2} (p+q) \sin \frac{1}{2} (p-q)$
$\tan \frac{1}{2} (a-b)$
ABC
$AC > 10^0, b < 100$
$1. \sin (1 - 9)$
$\frac{1}{6} B^3, \frac{1}{6}$
C
$a \sin B = b(\dots)$
$e^{C1} - 1$
$\frac{b}{b^2} \frac{b^3}{2a^2} \frac{b^3}{2a^2}$

ПОГРѢШНОСТИ

		Напечатано	Должно быть
Стр	стр.		
3	29	BEF.	DEF
6	6	6	2
10	24	уг. B = C,	уг. B = E.
11	6	линии AC	линии AB
19	26	продолжить CE до C'	продолжить ее до C
20	20	уг. KBC	уг. KBC'
21	29	опять построения по строению	последовательно отъ одного построения
92	12	другую	другую
93	23	AE × AE	AE × AD.
123	21	и половины	и половины
162	10	ACB'	ASB'
196	33	Плоскость MN.	плоскость MN.
226	52	уг. DQP	уг. DOF
232	35	BE + EF	BE + CE
—	38	DE > BE и наконец DE > BE.	DE > BE, и наконец DE > BE
—	41	DE' = BE' = CE'	DE' = BE' = CE'
—	1	ГBC' = BCF	ГBC' = BCF.
—	9	Ф. 271	Ф. 273.
265	15	$\frac{1}{2} \pi \times MN \times CI$.	$\frac{1}{2} \pi \times MN \times CI$
279	5	съ ABD углы	съ AB углы ABD.
280	42	$\frac{p}{q}$	$\frac{p}{r}$
—	—	C	C
282	39	r^2	r
—	40	функцией отъ p	функцией отъ r
283	и н д	x	x
—	10	r^2	r
—	84	$\frac{\varphi(4p, q)}{4q}$	$\frac{\varphi(4p, q)}{4p}$
286	13	$\frac{\varphi : (z + 2)}{\varphi : (2 + 1)}$	$\frac{\varphi : (z + 2)}{\varphi : (z + 1)}$
288	15	$\frac{m'}{n} > 1$.	$\frac{m}{n} < 1$.
298	19	предположения XXII.	предположения XXXIII.
295	19	sin COS.	sin COS.
—	28	$S = fgh \sin \alpha \sin \beta \sin E$,	$S = fgh \sin \alpha \sin \gamma \sin E$
299	26	AI = AB	IK = AB.
302	22	p	q
303	8	S — H	S + H
—	—	$\frac{1}{2} a$	$\frac{1}{2} a$
306	17	$\frac{2}{\sin^2 \frac{\pi}{n}}$	$\frac{2}{\sin \frac{\pi}{n}}$

808	15	$\text{ayry XZ} = c$
809	9	$\sin \frac{b+a-c}{2}$
810	1	$\frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C}{\cos \frac{1}{2} c}$
833	13	$(8C + x^0)$
837	25	$\frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{R}$
839	4	$\sin - m$
—	30	$\sin b$
—	35	$R, \cos a,$
841	4	$= \frac{1}{2} \sqrt{15} - \sqrt{5}$
—	51	$2 - \sin a \cos b$
843	1	XXV
—	26	$0 - 0,741 \dots$
846	17	$\frac{\cos \frac{1}{2} p}{R^2}$
848	4	$\tan (a - b)$
847	17	$1 - 1 \sin - A$
—	27	$1, 2, 3, 4$
848	6	$x \cdot \frac{\tan A}{1 - A}$
—	16	$\frac{x^3}{1, 2}$
849	1	$\frac{\tan A^4}{A^4}$
—	19	$e - x) 1$
—	21	$e - x) 1$
850	4	$\frac{2}{3} z^5$
851	3	$(60^0 - z)$
853	39	$\cos 3 a$
855	25	ABC
852	8	a, b
858	23	$41' 430''$
871	23	$\cos a \tan c$
878	0	$\sin r. 16$
880	20	$R^2 \sin^2 a - \sin^2 b$
881	17	$2 \sin \frac{1}{2} (p+q) (p-q)$
887	24	$\tan \frac{1}{2} (a+b)$
893	2	ABC
—	6 = 11	$AC < 100, b < 100$
897	33	$1, (C - y)$
899	0 = 23	$\frac{1}{b} B^3, \frac{\theta^3}{b}$
—	15	c
900	16	$a \sin B = (\dots)$
—	19	$e \sqrt{1 - t}$
—	23	$a \frac{b^3}{2a^3} \frac{b^3}{2a^3}$

$\text{ayry XZ} = C$
$\sin \frac{b+c-a}{2}$
$\frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C}{\cos \frac{1}{2} c}$
$\sin (8C + x^0)$
$\frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{R}$
$-\sin m,$
$\sin a,$
$R \cos a$
$-\frac{1}{2} (6 - \sqrt{5})$
$2 \sin a \cos b$
XXIV
$0,741 \dots$
$\frac{\cos \frac{1}{2} p}{R^2}$
$\tan (a - b)$
$1 - 1 \sin A$
$1, 2, 3$
$x \cdot \frac{\tan A}{1 - A} \pm$
$\frac{x^3}{1, 2}$
$\frac{\tan A^4}{A^4}$
$e - x) 1$
$e - x) 1$
$\frac{2}{3} z^5$
$(60^0 - z)$
$\cos 3 a$
ABD
$b - a$
$41' 430''$
$\cos a \tan c$
$\sin r. 16$
$R^2 \sin^2 a - \sin^2 b$
$2 \sin \frac{1}{2} (p+q) (p-q)$
$\tan \frac{1}{2} (a-b)$
ACB
$AC > 100, b < 100$
$1, (C - y)$
$\frac{1}{b} B^3, \frac{\theta^3}{b}$
C
$a \sin B = b (\dots)$
$e \sqrt{1 - t}$
$b \frac{b^3}{2a^3} \frac{b^3}{2a^3}$

ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ.

	Съ
Книга первая. Начала.....	1
Книга вторая О кругѣ и изысканіи условь.....	34
Книга третья Отношенія фигуръ.....	61
Задачи относящіяся къ третьей книгѣ.....	86
Книга четвертая. Правильныя многоугольники и изысканіе круга	100
Примененіе къ книгѣ IV. О наибольшихъ и наименьшихъ ве- личинахъ	181
Книга пятая Плоскости и многогранные углы.....	190
Книга шестая Многогранники ..	194
Книга седьмая Шаръ	204
Прибавленіе къ шестой и седьмой книжкамъ. О правильныхъ мо- нотранникахъ	214
Книга осьмая. О преломл. кривыхъ тѣлахъ.....	218

Привѣчаніе I. О мнѣстоимыхъ наклоніяхъ и опредѣленіяхъ... 271

Привѣчаніе II. На показательство XIX предложенія I книги,
и мнѣстоимыхъ (другихъ) именныхъ предъ описаній
Геніетунни..... 276

Привѣчаніе III. На приближительный выносъ предложенія XVI,
книги IV..... 281

Привѣчаніе IV. Въ коніюльъ показывается, что отношенія
оудуности въ статисту и въ обрату статис-
ти, суть числа мѣстоприимья..... 286

Привѣчаніе V. Въ коніюльъ предлагается аналитическое рѣ-

шени розлитими поперечними лініями отримані в трикутнику, виміряли у четыре діаметри, паралельні до трьох інших 291
--

Прибаваніє VI. О внаслідок вимірювання ліній линій менших ліній в їхньому плані 294
Прибаваніє VII. О сферических лінійних ліній 300
Прибаваніє VIII. На предположеніє XXV, яким VII —
Прибаваніє IX. О призначеніє лінійних ліній 304
Прибаваніє X. О лінійних сферических трикутників 307
Прибаваніє XI. На предположеніє III, яким VIII 313
Прибаваніє XII. О лінійних і лінійних лінійних ліній 314

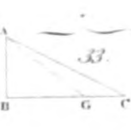
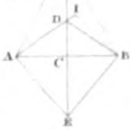
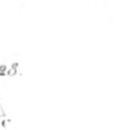
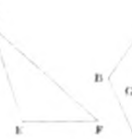
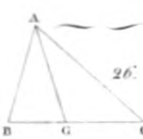
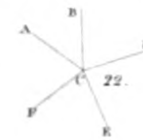
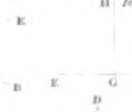
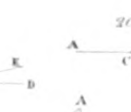
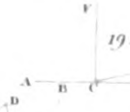
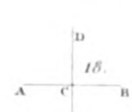
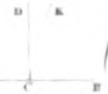
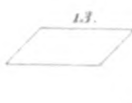
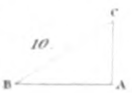
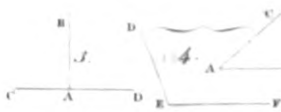
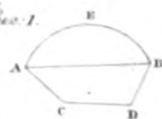
ТРИГОНОМЕТРІЯ

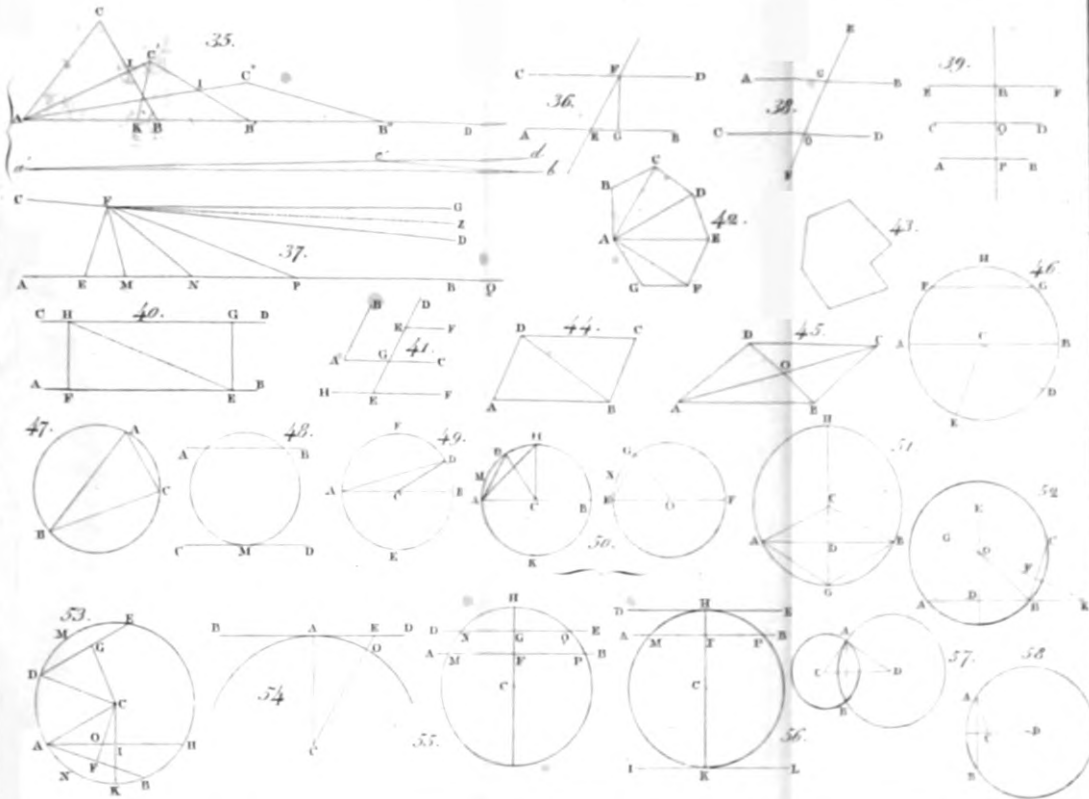
Початок 316
Ділення окружності 316
Означення синуса, косинуса, тангенса, і проч. 317
Теорема і формули співвідношення до синуса, косинуса, і проч. 318
О составленіи таблиць синусов 321
Начала на котрихъ означаются різніє прямолиней- нихъ трикутників 321
Розв'язання прямолинейнихъ трикутників 324
Правило розв'язання прямолинейнихъ трикутників 324
Начала на котрихъ означаются розв'язання сферическихъ прямолинейнихъ трикутників 324
Розв'язання прямолинейнихъ сферическихъ трикутників 326
Начала для розв'язання сферическихъ трикутників 327
Розв'язання сферическихъ трикутників 328
Правило розв'язання сферическихъ трикутників 328
Прибаваніє, інтерваліи до себе різніє лінійні і лінійні лінійні трикутники 329
§ I О прямолинейнихъ трикутникахъ, котрихъ два угла третьою лінією 329
§ II Розв'язання третього случаю прямолинейнихъ трикут- никівъ по двомъ різнімъ 330

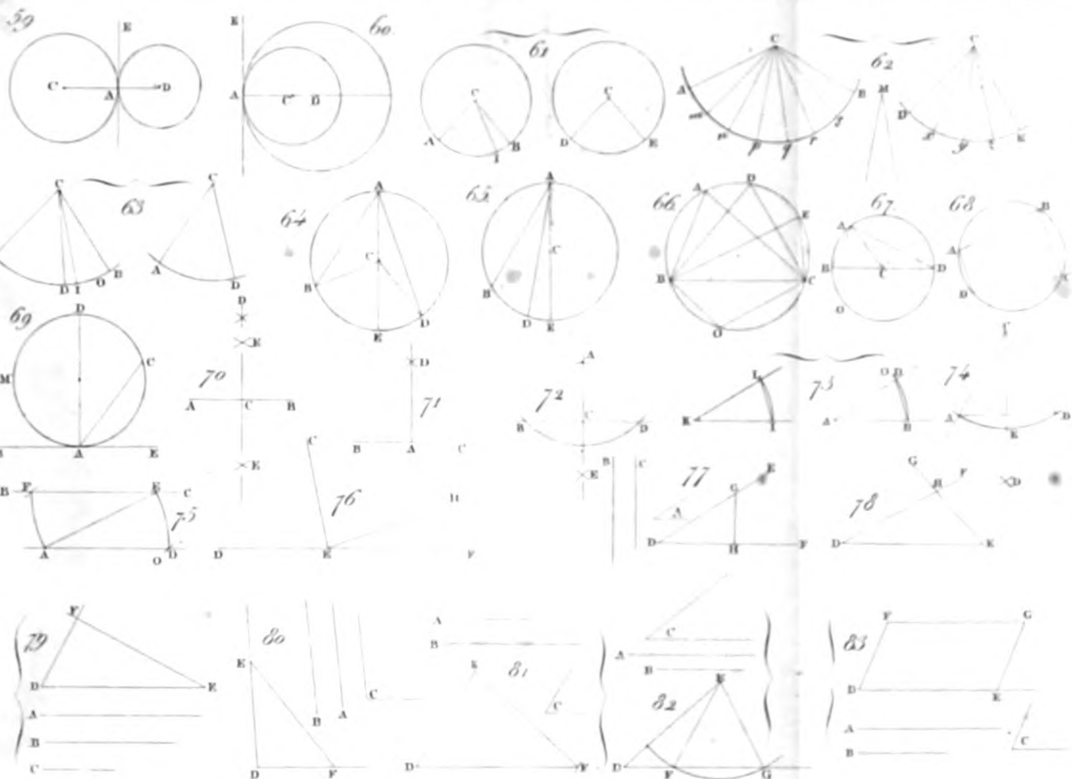
- § III. Разрѣшеніе третьяго случая сферическихъ тригономическихъ, посредствомъ рядовъ..... III
- § IV. Разрѣшеніе сферическаго тригономическаго, котораго одна сторона не а раздѣляется отъ 100° III
- § V. Разрѣшеніе сферическихъ тригономическихъ, въ которыхъ стороны очень малы, въ отношеніи къ радіусу шара..... III
- § VI. О сферическихъ тригономическихъ функцияхъ по двамъ весьма острымъ угламъ..... III
- § VII. О произведеніи множимаго вѣдѣ сгнѣсцати ступеней..... III

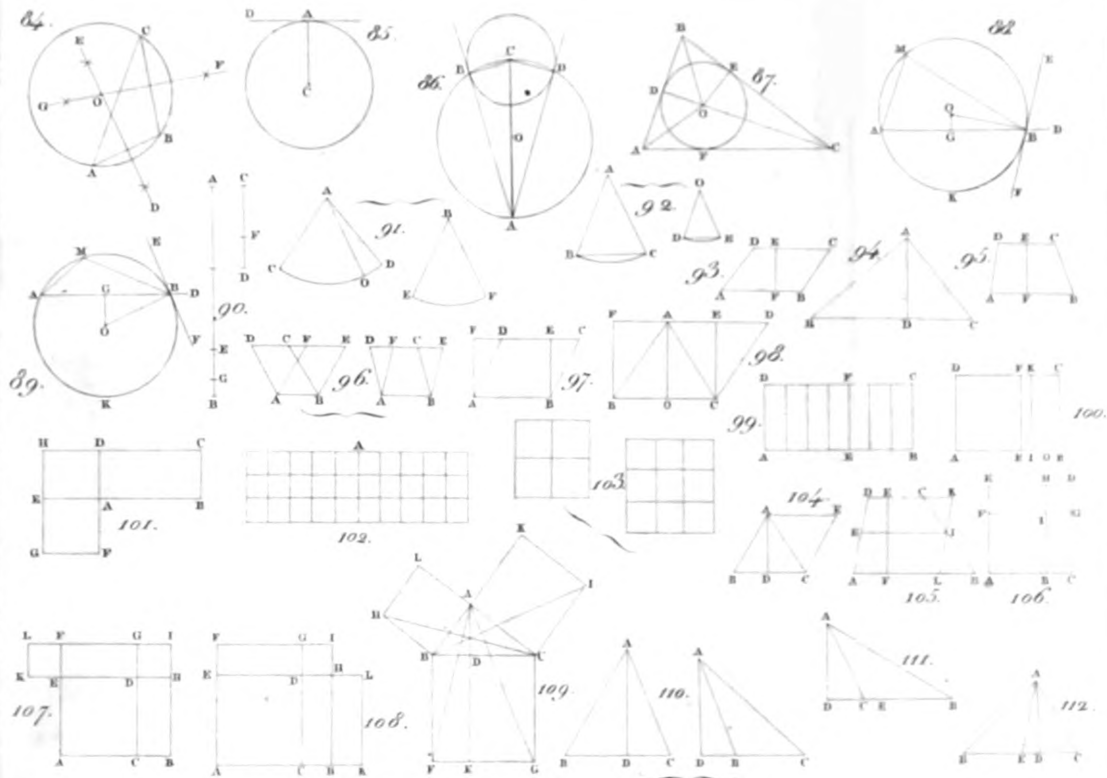


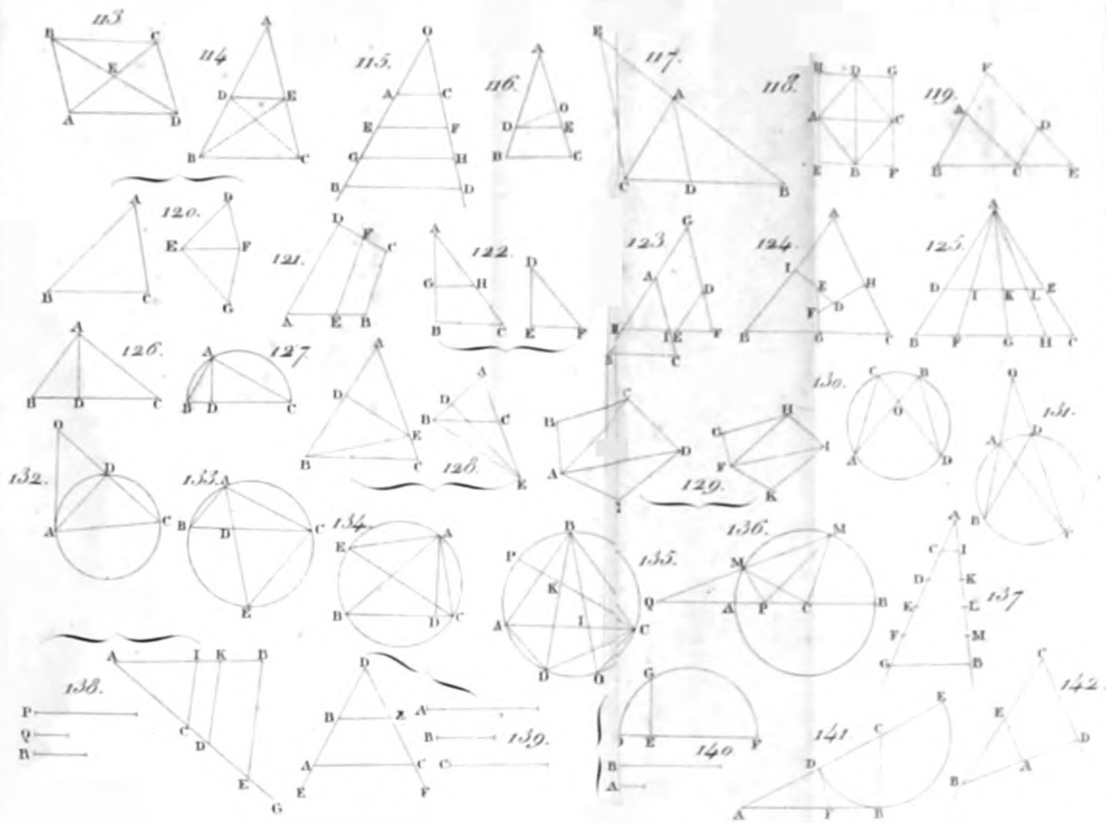
Fig. 1.

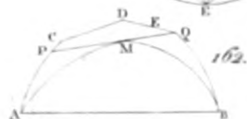
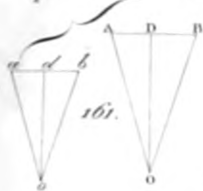
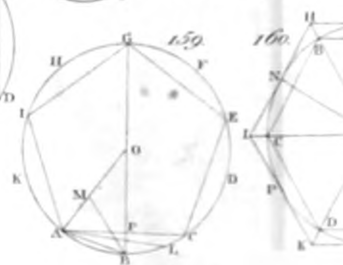
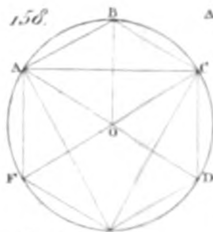
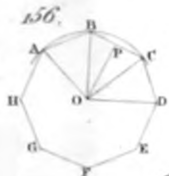
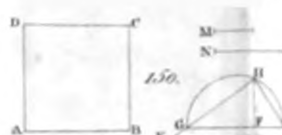
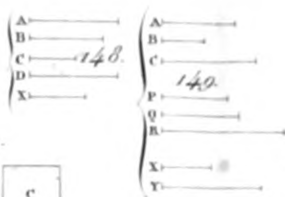
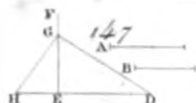


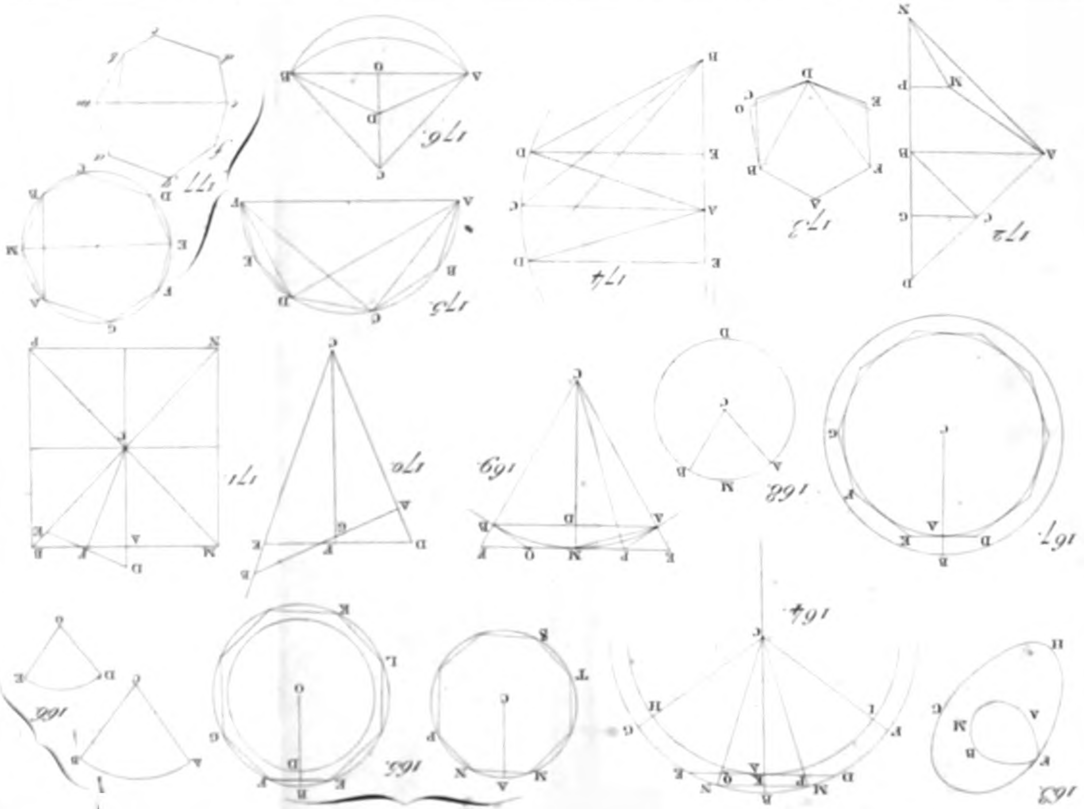




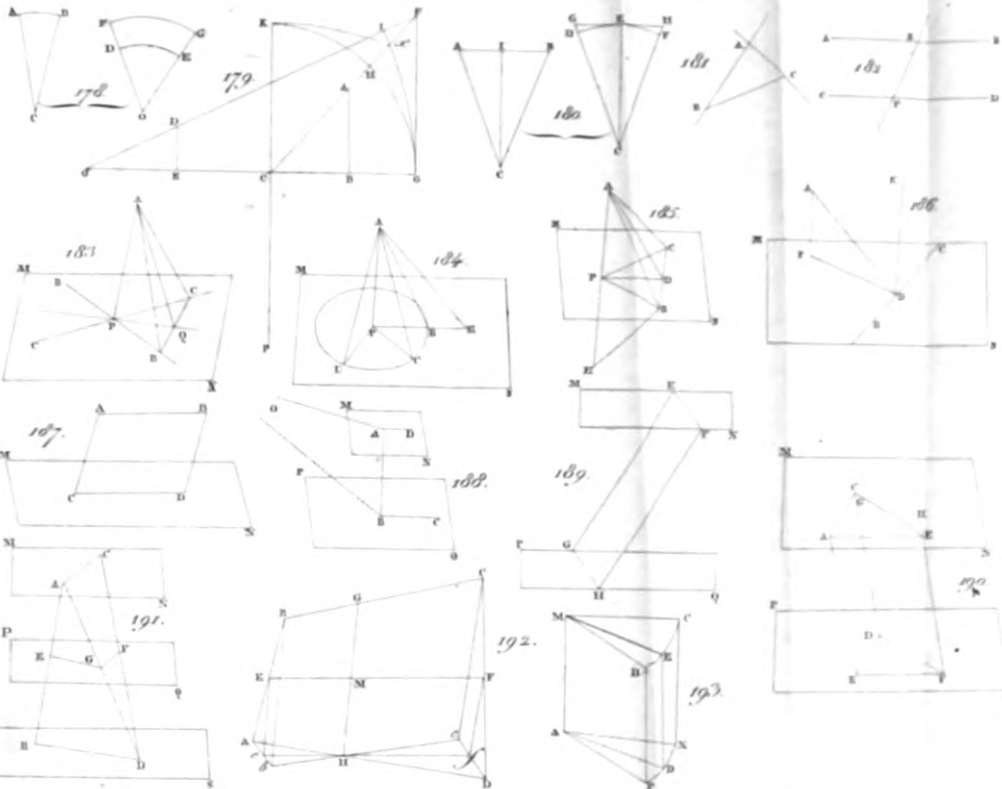


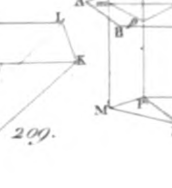
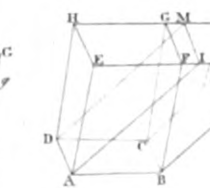
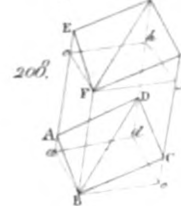
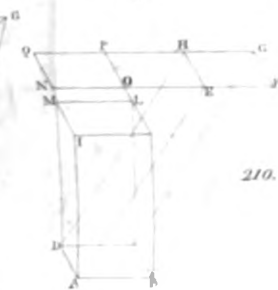
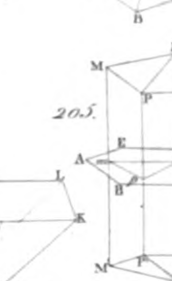
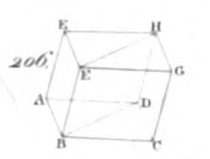
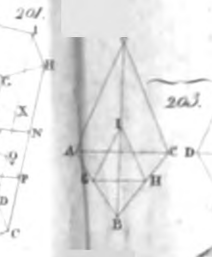
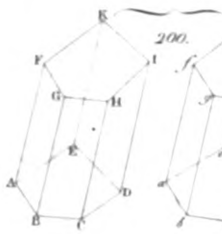
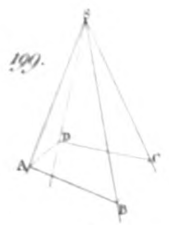
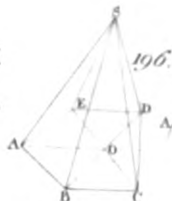
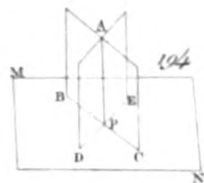


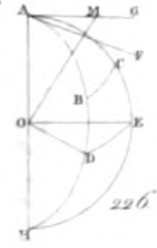
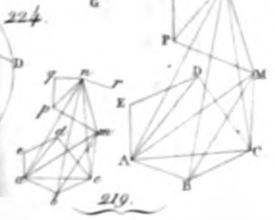
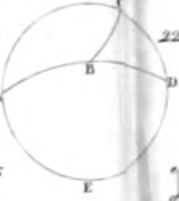
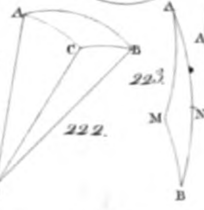
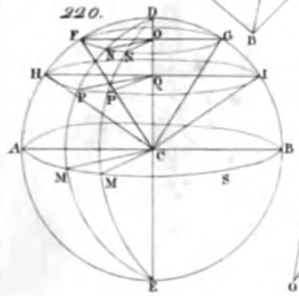
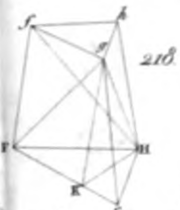
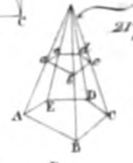
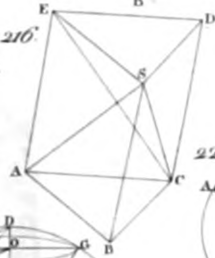
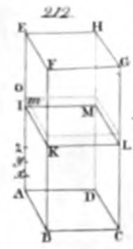
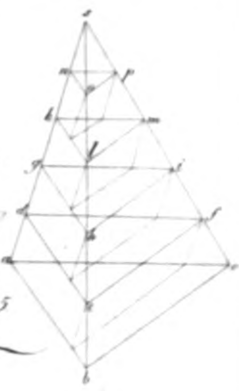
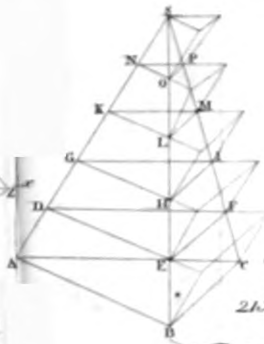
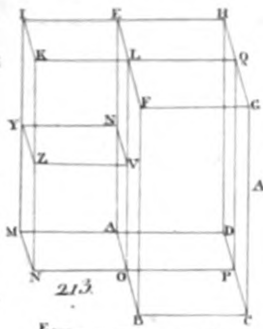
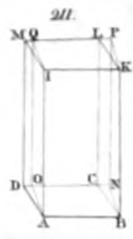


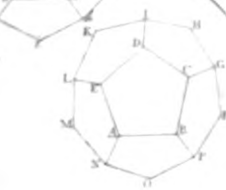
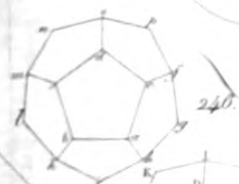
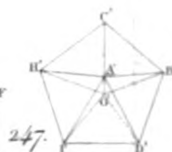
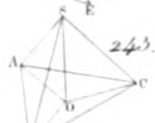
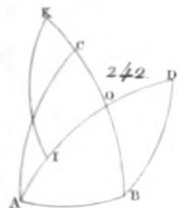
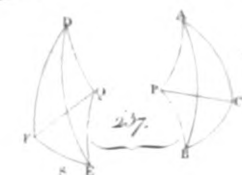
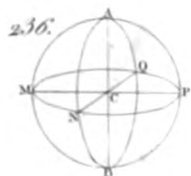
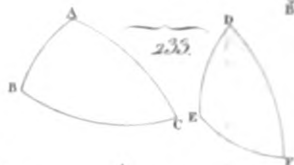
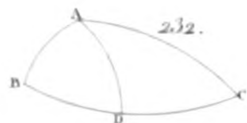
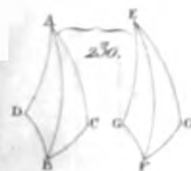
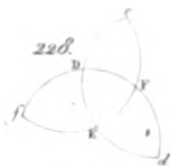
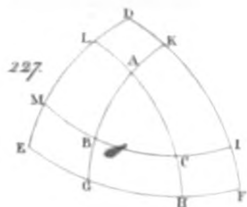


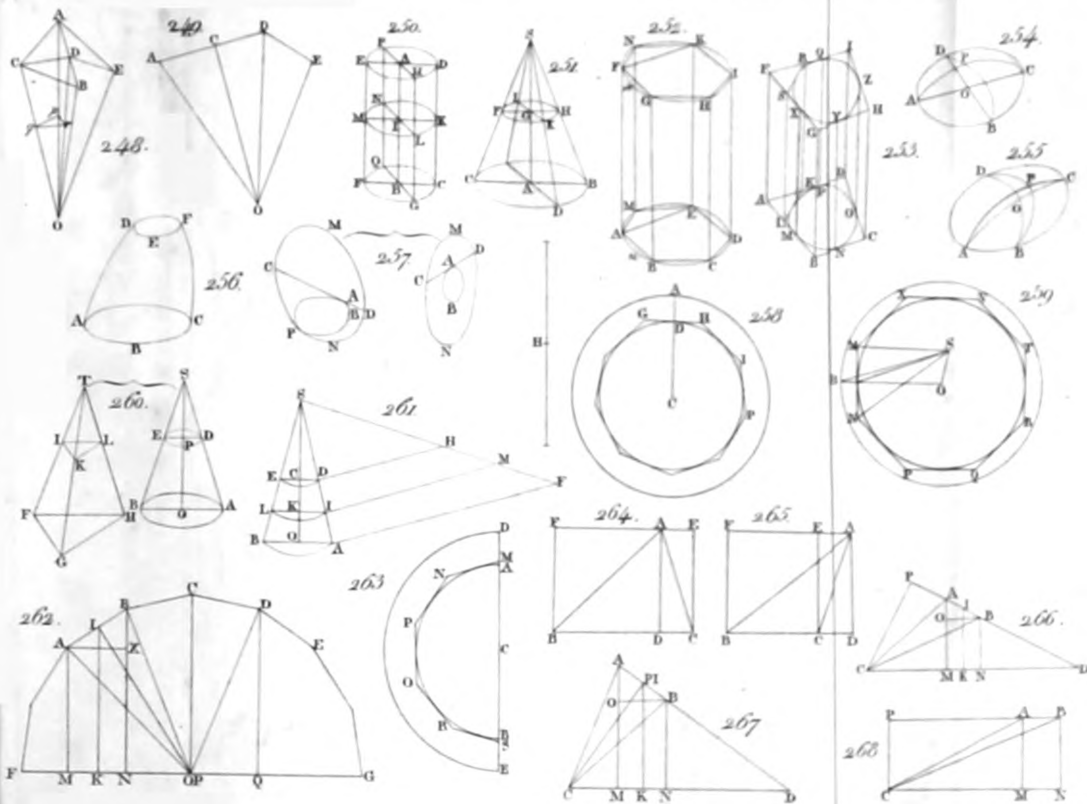
Geometriae Lib. 1. Cap. 7.











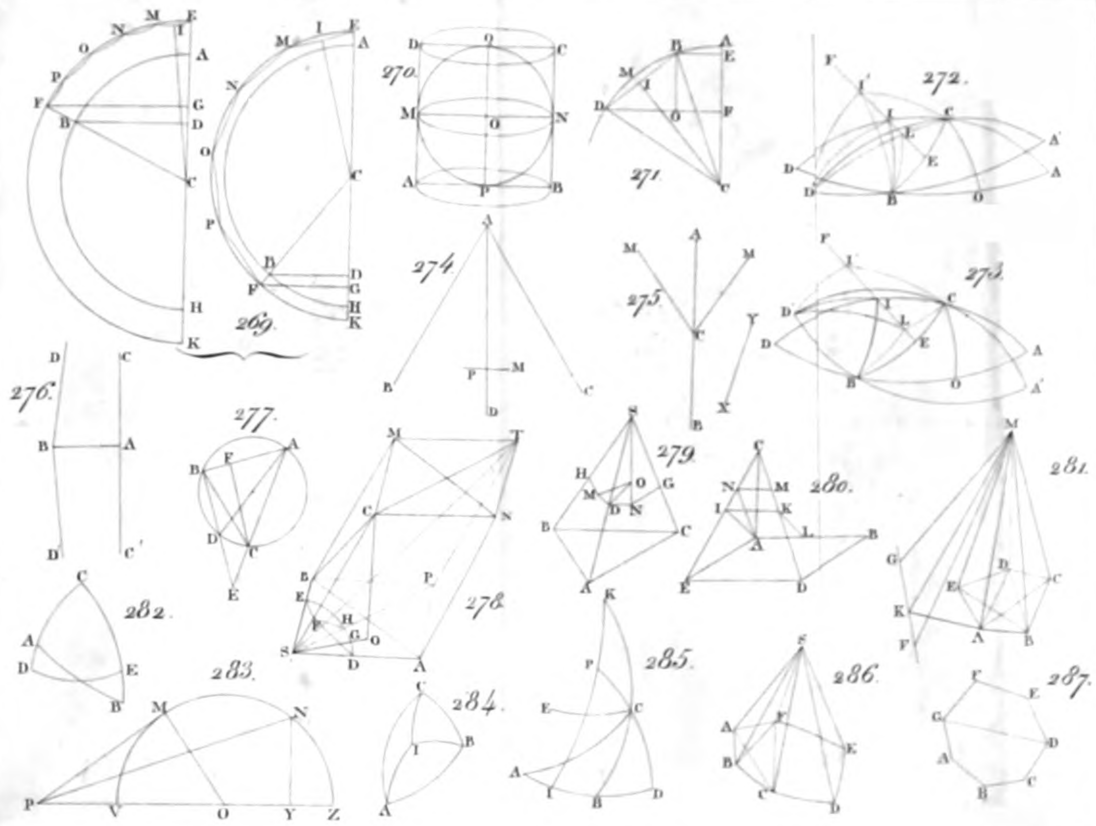


Fig. 1

