

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра компьютерных технологий и систем

РУДИНСКИЙ Егор Викторович

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ПЕРВОГО РОДА, ВОЗНИКАЮЩИХ В ЗАДАЧАХ
КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Дипломная работа

Научный руководитель:
кандидат физико-математических
наук, доцент Чеб Е.С.

Допущен к защите

«___» _____ 2025 г

Заведующий кафедрой компьютерных
технологий и систем, доктор педагогических
наук, кандидат физико-математических наук,
профессор В. В. Казачёнок

Минск, 2025

РЕФЕРАТ

Дипломная работа, 45 с., 10 источников, 11 рис.

Ключевые слова — ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА, НЕКОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА, РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ТИХОНОВА, МЕТОД НЕВЯЗКИ, ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, КОМПЬЮТЕРНАЯ ТОМОГРАФИЯ, УРАВНЕНИЕ РАДОНА.

Объект исследования – интегральные уравнения Фредгольма первого рода, возникающие в задачах компьютерной томографии и других областях, связанных с восстановлением данных из проекций.

Цель работы – исследовать численные методы решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода и оценить их применимость к задачам компьютерной томографии, включая использование вейвлетного подхода и методов регуляризации.

Методы исследования – теоретический анализ некорректных задач и методов их регуляризации, реализация численных алгоритмов (метод Тихонова, метод невязки, вейвлет-разложения), численное моделирование и сравнение устойчивости решений.

Результаты работы – проведено сравнение трёх подходов: регуляризации Тихонова, в том числе типа свёртки, метода невязки и вейвлетного метода, показано, что применение вейвлет-разложения улучшает устойчивость и точность восстановления, разработаны и протестированы численные алгоритмы, подтверждающие теоретические выводы, сформулированы рекомендации по применению различных методов в задачах восстановления изображений.

РЭФЕРАТ

Дыпломная работа, 45 с., 10 крыніц, 11 мал.

Ключавыя словы – ІНТЭГРАЛЬНАЕ РАЎНАННЕ ФРЕДГОЛЬМА, НЕКАРЭКТНАЯ ЗАДАЧА, РЭГУЛЯРЫЗАЦЫЯ ЦІХАНАВА, МЕТАД НЕВЯЗКИ, ВЕЙВЛЕТ-ПЕРАЎТВАРЭННЕ, КАМПУТАРНАЯ ТАМАГРАФІЯ, РАЎНАННЕ РАДОНА.

Аб'ект даследавання – інтэгральныя ўраўненні Фредгольма першага роду, якія ўзнікаюць у задачах кампутарнай тамаграфіі і іншых галінах, звязаных з аднаўленнем дадзеных з праекцый.

Мэта работы – даследаваць лікавыя метады рашэння інтэгральных раўнанняў Фредгольма першага роду і ацаніць іх дастасавальнасць да задач кампутарнай тамаграфіі, уключаючы выкарыстанне вейвлетнага падыходу і метадаў рэгулярызацыі.

Метады даследавання – тэарэтычны аналіз некарэктных задач і метадаў іх рэгулярызацыі, рэалізацыя лікавых алгарытмаў (метады Ціханава, метады невязкі, вейвлет-раскладання), колькасную мадэляванне і параўнанне ўстойлівасці рашэнняў.

Вынікі работы – праведзена параўнанне трох падыходаў: рэгулярызацыі Ціханава, у тым ліку тыпу скрутка, метаду невязкі і вейвлетнага метаду, паказана, што прымяненне вейвлет-раскладання паляпшае ўстойлівасць і дакладнасць аднаўлення, распрацаваны і пратэставаны лікавыя алгарытмы, якія пацвярджаюць тэарэтычныя высновы, сфармуляваны рэкамендацыі па ўжыванні розных метадаў у задачах аднаўлення малюнкаў.

SUMMARY

Diploma work, 45 p., 10 sources, 11 figures.

Keywords – FREDHOLM INTEGRAL EQUATION, ILL-POSED PROBLEM, TIKHONOV REGULARIZATION, RESIDUAL METHOD, WAVELET TRANSFORM, COMPUTED TOMOGRAPHY, RADON EQUATION.

Object of the research – Fredholm integral equations of the first kind, which arise in problems of computed tomography and other areas related to data recovery from projections..

Purpose of the work – to investigate numerical methods for solving Fredholm integral equations of the first kind and to evaluate their applicability to computed tomography problems, including the use of the wavelet approach and regularization methods.

Methods of research – posed problems and methods of their regularization, implementation of numerical algorithms (Tikhonov method, residual method, wavelet decomposition), numerical modeling and comparison of stability of.

Results of the work – comparison of three approaches: Tikhonov regularization, including the convolution type, the residual method, and the wavelet method. It is shown that the use of wavelet decomposition improves the stability and accuracy of reconstruction, numerical algorithms have been developed and tested, confirming theoretical conclusions, and recommendations for the use of various methods in image restoration tasks have been formulated.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА.....	8
1.1 Физические процессы, приводящие к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода.....	8
1.2 Задачи компьютерной томографии, приводящие к уравнению Фредгольма первого рода	10
1.3 Некорректные задачи компьютерной томографии.....	11
1.4 Различные методы регуляризации, используемые для решения некорректных задач	13
1.5 Введение в вейвлет-преобразование.....	14
1.6 Применимость вейвлетного анализа к интегральным уравнениям первого рода	15
Глава 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ	17
2.1 Метод регуляризации Тихонова.....	17
2.2 Метод невязки.....	20
2.3 Сравнительный анализ метода Тихонова и метода невязки	21
2.4 Уравнение Радона в задачах компьютерной томографии	22
Глава 3. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА.....	24
3.1 Решение уравнения методом Тихонова.....	24
3.2 Решение уравнения методом невязки.....	26
3.3 Уравнение Фредгольма 1 рода в задачах компьютерной томографии	27
3.4 Построение вейвлетного разложения для ядра и правой части уравнения.....	29
3.5 Метод решения интегрального уравнения в вейвлет-базисе	30
3.6 Пример применения: восстановление изображения с использованием вейвлетного подхода	32
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	35
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	36

ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	37
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	40
ПРИЛОЖЕНИЕ В.....	42
ПРИЛОЖЕНИЕ Г	44

ВВЕДЕНИЕ

Интегральные уравнения Фредгольма первого рода занимают важное место в математическом моделировании физических процессов, в том числе тех, что лежат в основе современных методов медицинской визуализации, таких как компьютерная томография. Эти уравнения возникают при восстановлении внутренней структуры объектов на основе измерений, полученных с их поверхности или на ограниченном множестве проекций. Однако особенности математической постановки таких задач делают их существенно более сложными для решения.

Основная сложность при работе с интегральными уравнениями первого рода заключается в их некорректной постановке в смысле Адамара: даже незначительные искажения входных данных могут вызывать существенные отклонения в решении. В связи с этим возникает необходимость применения методов, направленных на стабилизацию решения, таких как регуляризация и другие специальные численные подходы.

В последние годы наблюдается активное развитие вычислительных методов, адаптированных к решению задач подобного типа. Среди них особое внимание уделяется методу Тихонова, методам минимизации невязки, а также вейвлет-анализу. Последний позволяет эффективно работать с функциями и операторами, обладающими локальными особенностями, что делает его особенно актуальным при обработке изображений и реконструкции сигналов.

Настоящее исследование посвящено анализу численных методов решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода, возникающих в приложениях к задачам компьютерной томографии. В первой главе рассматриваются теоретические аспекты таких уравнений, приводятся физические примеры, обсуждаются особенности некорректных задач и способы их регуляризации, а также вводятся основы вейвлет-преобразования. Вторая глава содержит описание основных численных методов, используемых в задачах восстановления изображений, и рассматривает уравнение Радона как математическую модель томографии. В третьей главе изложены практические аспекты реализации рассмотренных методов, включая построение вейвлетных разложений и численные эксперименты по восстановлению изображений.

Цель данной работы — проанализировать применимость различных численных методов к решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода в задачах томографического восстановления, сравнить их эффективность и показать преимущества использования вейвлет-базисов в данной области.

Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

1.1 Физические процессы, приводящие к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода

Во многих физических задачах наблюдаемая величина $g(x)$ связана с искомой функцией $f(s)$ посредством интегрального оператора с ядром $K(x, s)$:

$$g(x) = \int_a^b K(x, s)f(s)ds, \quad (1.1)$$

такое уравнение описывает ситуацию, когда измерения $g(x)$ являются результатом интегрирования некоторой плотности или распределения $f(s)$, которое и требуется восстановить. Ниже приведены примеры физических процессов, сводящихся к уравнению Фредгольма первого рода.

В задачах электродинамики, например при зондировании среды, измеряется результирующее электромагнитное поле $E(x)$, которое является свёрткой поля возбуждения и отклика среды. Такая задача моделируется уравнением:

$$E(x) = \int_{\Omega} G(x, s)J(s)ds, \quad (1.2)$$

где $G(x, s)$ — функция Грина, описывающая распространение поля от источника в точке s к точке наблюдения x , а $J(s)$ — плотность токов, которую требуется найти.

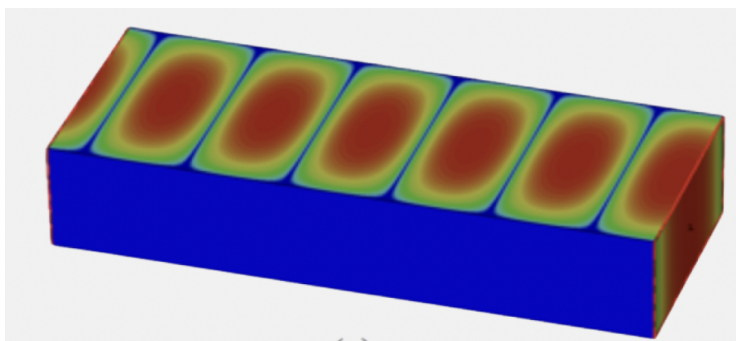


Рисунок 1.1 – распределение электромагнитных волн

Задачи о рассеянии волн на поверхностях и препятствиях также могут быть сформулированы в виде интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Интегральные уравнения позволяют описать взаимодействие волн с заданными границами и определить рассеянное поле. В задачах обратного рассеяния (например, в радиолокации) измеряется рассеянное поле на границе области, тогда как распределение рассеивателя внутри среды неизвестно. Математическая модель имеет вид:

$$u_{sc}(x) = \int_{\Omega} K(x, s) \eta(s) ds, \quad (1.3)$$

где $u_{sc}(x)$ — измеренное рассеянное поле, $\eta(s)$ — коэффициент рассеяния, подлежащий восстановлению, $K(x, s)$ — ядро, определяемое физикой распространения волны.

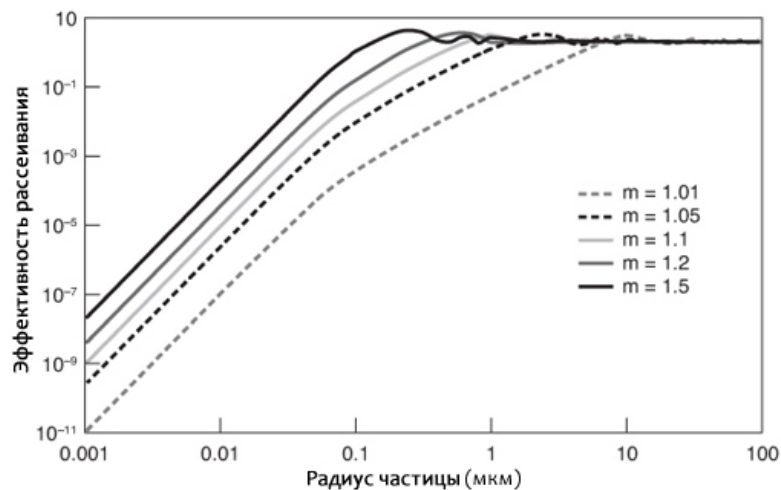


Рисунок 1.2 – рассеяние световых волн

Акустика и распространение звука.

В акустике распространение звуковых волн в неоднородной среде также может описываться интегральными уравнениями. Например, давление $p(x)$ в точке x может выражаться через распределение источников звука $q(s)$:

$$p(x) = \int_{\Omega} G(x, s) q(s) ds, \quad (1.4)$$

где $G(x, s)$ — акустическая функция Грина, учитывающая характеристики среды и геометрию задачи [1]



Рисунок 1.3 – рассеяние световых волн

1.2 Задачи компьютерной томографии, приводящие к уравнению Фредгольма первого рода

Для примера можно привести томографию органов и тканей человека. В медицинской томографии используются различные методы, такие как компьютерная томография или позитронно-эмиссионная томография, для создания изображений внутренних органов и тканей. Одной из ключевых проблем в этой области является восстановление трехмерного распределения плотности или активности внутренних структур на основе полученных экспериментальных данных.

Предположим, что имеется набор экспериментальных данных в виде проекций или измерений, полученных в различных точках. Пусть $g(x)$ представляет собой вектор данных, полученных от детекторов, которые измеряют интенсивность прошедших через орган лучей. Основная цель состоит в том, чтобы восстановить плотность или активность внутренних структур, представленную неизвестной функцией $f(y)$, где y – координаты внутри органа.

Интегральное уравнение Фредгольма первого рода, связанное с этой задачей восстановления изображения, может быть записано следующим образом:

$$\int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy = g(x), \quad (1.5)$$

где Ω – область интегрирования, которая представляет собой объем органа или область, в которой мы хотим восстановить изображение. Функция $K(x, y)$, известная как ядро интегрального уравнения.

Часто ядро зависит от конкретного метода томографии, используемого для сбора данных. Например, для аналоговой компьютерной томографии, ядро может представлять собой интеграл от плотности объекта по лучевым проекциям. Для позитронно-эмиссионной томографии ядро может отражать вероятность эмиссии фотонов в точке y и их регистрации в точке x .

Задача состоит в том, чтобы решить интегральное уравнение, т.е. определить функцию $f(y)$ на основе известных экспериментальных данных $g(x)$ и ядра $K(x, y)$.

Решение этого уравнения позволит восстановить трехмерное распределение плотности или активности внутренних структур органа и создать изображение, которое может быть использовано для диагностики и лечения.

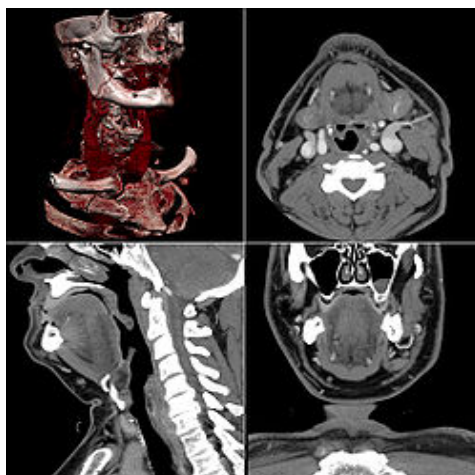


Рисунок 1.4 – снимки компьютерной томографии

Однако стоит отметить, что восстановление изображения в медицинской томографии является сложной задачей, и для ее решения применяются различные численные методы, одним из которых является метод регуляризации Тихонова.

1.3 Некорректные задачи компьютерной томографии

Все задачи, сводящиеся к решению уравнений с операторами, можно условно разделить на три группы:

- корректно поставленные;
- некорректно поставленные, регуляризируемые;

- некорректно поставленные, нерегуляризуемые.

Перед тем как перейти к “некорректным задачам”, разберемся, что такое “корректная задача”. Для ее постановки должно выполняться три условия:

- Решение существует для любой непрерывной на отрезке функции
- Решение всегда единственно. Таким образом, предполагается, что ядро оператора является замкнутым множеством. Тогда если решение есть, то оно единственно.
- Решение должно быть устойчиво, т.е. для любой последовательности $f_n \rightarrow \bar{f}$, $Au_n = f_n$, $A\bar{u} = \bar{f}$ последовательность $u_n \rightarrow \bar{u}$

Если хотя бы одно из этих условий нарушено — задача считается некорректной. В частности, интегральные уравнения Фредгольма первого рода обычно не удовлетворяют третьему условию — их решения крайне чувствительны к малейшим погрешностям в исходных данных [2].

"Некорректная задача" - это задача, которая не имеет единственного или устойчивого решения, либо не имеет решения вовсе. В контексте интегральных уравнений Фредгольма первого рода, некорректные задачи могут возникать по нескольким причинам:

- Несовместность: В случае, когда интегральное уравнение Фредгольма первого рода является несовместным, то есть не существует решения, мы имеем дело с некорректной задачей. Несовместность может возникать, например, когда информация, содержащаяся в уравнении или граничных условиях, противоречива или несовместима с другими аспектами системы. В таких случаях уравнение может не иметь решений или иметь бесконечное число решений.
- Недостаточность данных: Интегральные уравнения Фредгольма первого рода могут быть плохо обусловленными или требовать большего количества информации для получения устойчивого решения. Если недостаточно данных или информации для определения решения, возникает некорректная задача. Например, при восстановлении функции по ее интегральному преобразованию или решению обратной задачи, недостаточность данных может привести к неопределенности или неустойчивости решения.
- Шум и погрешности: В реальных приложениях интегральных уравнений Фредгольма первого рода неизбежно возникают шумы и погрешности измерений. Эти шумы и погрешности могут приводить к неопределенности в решении и делать задачу некорректной. Например,

при решении обратных задач в медицине или обработке сигналов, шумы и погрешности могут затруднять точное восстановление исходной информации.

Приведем небольшой пример некорректности. Для этого рассмотрим уравнение

$$g(x) = \int_0^1 K(x, s)f(s)ds. \quad (1.6)$$

Пусть $g_\delta(x)$ — экспериментальные данные с малым шумом δ . Несмотря на то, что $\|g_\delta - g\| \ll 1$, приближённое решение f_δ может отличаться от истинного f очень сильно: $\|f_\delta - f\| \gg \|g_\delta - g\|$.

1.4 Различные методы регуляризации, используемые для решения некорректных задач

Методы регуляризации являются важным инструментом для стабилизации численного решения некорректных задач, возникающих при решении интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Методы регуляризации позволяют справляться с проблемами неопределённости и неустойчивости решений, обеспечивая их большую надёжность и точность. Среди наиболее распространённых методов можно выделить: метод Тихонова, методы сглаживания (фильтрационные), регуляризацию с использованием резольвенты, методы снижения размерности, а также подходы к выбору оптимального параметра регуляризации.

Конкретный выбор метода зависит от характеристик задачи, доступных исходных данных и требований к получаемому решению. При этом важно учитывать как природу исходной проблемы, так и допустимый уровень приближённости решения.

В целом, регуляризация является ключевым инструментом при решении некорректных задач, в том числе интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Она позволяет повысить устойчивость и качество численных решений в условиях ограниченности и зашумлённости данных. Выбор оптимального метода регуляризации и соответствующего параметра является ключевым аспектом при решении некорректных задач и обеспечивает надежные и стабильные результаты [8].

1.5 Введение в вейвлет-преобразование

Вейвлет-преобразование — это способ анализа функции, сигнала или изображения, позволяющий исследовать их локально во времени (или пространстве) и одновременно по частотному содержанию. В отличие от преобразования Фурье, которое использует бесконечные синусоиды и теряет информацию о времени, вейвлет-преобразование использует функции с компактной поддержкой, позволяющие сохранить локальные особенности сигнала.

Основой вейвлет-преобразования служит так называемый материнский (базовый) вейвлет — функция, обладающая компактной поддержкой и определёнными математическими свойствами, например нулевой средней,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0, \quad (1.7)$$

т.е. график исходной функции должен быть знакопеременным вокруг нуля на оси времени и иметь нулевую площадь. А также ограниченность,

$$\|\psi(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty, \quad (1.8)$$

т.е. квадрат нормы функции должен быть конечным.

Вейвлеты классифицируются на непрерывные и дискретные. В практических задачах, таких как обработка сигналов, изображений и численное решение уравнений, чаще всего используется дискретное вейвлет-преобразование. Оно позволяет представить данные в виде набора коэффициентов, соответствующих разным масштабам и позициям. Это коэффициенты аппроксимации

$$c_A[s, l] = \sum_n x[n] \phi\left(\frac{n - 2^s l}{2^s}\right) \quad (1.9)$$

и коэффициенты детализации

$$c_D[s, l] = \sum_n x[n] \psi\left(\frac{n - 2^s l}{2^s}\right). \quad (1.10)$$

Соответственно, где s — это масштабный коэффициент. Увеличение s обеспечивает более широкое и обобщенное представление о сигнале (низкочастотные компоненты). l — это коэффициент преобразования, который определяет местоположение в анализируемом сигнале. Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ являются производными от выбранного вейвлета.

Главное преимущество вейвлетов в контексте интегральных уравнений заключается в способности эффективно разлагать как правую часть уравнения, так и ядро интегрального оператора в разреженные матрицы. Это делает вычисления проще и позволяет использовать регуляризацию прямо в вейвлетном базисе.

К тому же, за счёт того, что вейвлеты имеют компактную поддержку, удаётся добиться быстрой работы и устойчивости к шуму. Это особенно важно в задачах компьютерной томографии, где данные часто бывают сильно зашумлены.

1.6 Применимость вейвлетного анализа к интегральным уравнениям первого рода

Интегральные уравнения первого рода, особенно уравнения Фредгольма, часто относятся к числу некорректных задач. Это значит, что даже небольшие ошибки во входных данных — например, шум из реальных измерений — могут сильно повлиять на результат. Поэтому важно преобразовать такие уравнения в более устойчивую форму с помощью численных методов, таких как, например, вейвлет-преобразование.

Вейвлетный анализ особенно полезен в этом контексте, так как он позволяет локализовать особенности функции как по времени (или пространству), так и по частоте. Это делает возможным точное выявление и подавление шумовых компонент, не затрагивая при этом важных особенностей сигнала.

Вейвлеты обладают рядом полезных свойств: компактной поддержкой, ортонормированностью, разреженностью разложений, что делает их эффективными при аппроксимации гладких и кусочно-гладких функций. Эти свойства важны при дискретизации ядра интегрального уравнения, так как позволяют получить разреженную матрицу оператора, существенно снижающую вычислительную сложность задачи. Когда интегральный оператор свертки разлагается в вейвлет-базисе, его представление становится почти диагональным — многие элементы матрицы оказываются близкими к нулю. Это упрощает регуляризацию задачи, поскольку позволяет применять

стабилизацию решений не ко всей матрице, а только к её существенным элементам. Таким образом, вейвлетный подход к решению интегральных уравнений первого рода позволяет: эффективно бороться с шумами, улучшать устойчивость численных методов, снижать размерность задачи за счёт разреженных матриц, легко адаптировать регуляризационные методы к локальным особенностям данных [3].

Глава 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

2.1 Метод регуляризации Тихонова

Метод регуляризации Тихонова является одним из подходов к решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода, которые могут быть недостаточно обратимыми или иметь неустойчивые решения. Этот метод был разработан советским математиком Андреем Николаевичем Тихоновым в 1965 году и широко используется для решения различных проблем в численных методах [7].

Для описания метода регуляризации Тихонова и его применения рассмотрим конкретный пример интегрального уравнения Фредгольма первого рода:

$$\int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad (2.1)$$

где $K(x, s)$ – ядро интегрального уравнения, $y(s)$ – неизвестная функция, $f(x)$ – известная функция.

Если интегральное уравнение не имеет точного решения или оно слишком чувствительно к ошибкам в данных, можно использовать метод регуляризации Тихонова. Его цель — получить устойчивое и приближённое решение.

Суть метода в том, чтобы добавить к уравнению специальный дополнительный член, который помогает получить уравнение второго рода. В общем виде уравнение с регуляризацией Тихонова записывается так:

$$\int_a^b K(x, s)y(s)ds + \alpha R(f(x)) = f(x), \quad (2.2)$$

где α – параметр регуляризации, который регулирует вклад регуляризующего члена $R(f(x))$.

Обычно используется L_2 -норма регуляризирующего члена:

$$R(f(x)) = \int_a^b \left| \frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m} \right|^2 dx, \quad (2.3)$$

где m – параметр, который обычно выбирается равным 1 или 2 в зависимости от задачи.

Один из самых важных моментов в методе Тихонова — правильно выбрать параметр регуляризации α . От него зависит, насколько хорошо будет найденное решение: с одной стороны — чтобы оно было точным, а с другой — устойчивым к шуму в исходных данных. Существует несколько подходов к определению оптимального значения этого параметра, среди которых можно выделить следующие:

- Метод скользящего контроля: предполагает разбиение имеющихся данных на обучающую и валидационную подвыборки. Для каждого значения α рассчитывается ошибка на валидации, и в качестве оптимального выбирается то значение, при котором ошибка минимальна.
- Метод L-кривой: основан на построении графика зависимости нормы регуляризирующего слагаемого от нормы решения. Оптимальное значение α соответствует точке максимальной кривизны на этой диаграмме.
- Метод минимизации относительной ошибки: заключается в выборе такого α , при котором достигается минимальная относительная погрешность между восстановленным решением и эталонным.
- Анализ компонент (сингулярных значений): метод использует спектральные свойства оператора (например, сингулярные значения матрицы), и параметр регуляризации подбирается с учётом распределения этих значений.
- Использование априорной информации: если известно, что искомое решение обладает определёнными свойствами (например, гладкость или разреженность), это может быть учтено при выборе соответствующего значения α , обеспечивающего наилучшее соответствие предполагаемой структуре решения

Метод регуляризации Тихонова приводит к решению задачи минимизации функционала:

$$\min_f \left[\int_a^b (K(x, s)y(s)ds - f(x))^2 ds + \alpha R(f) \right], \quad (2.4)$$

где первый член представляет собой квадрат невязки между решением и данными, а второй член является регуляризационным членом.

Чтобы перейти к численному решению, нужно дискретизировать уравнение. Разбиваем отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ на сетку из узлов:

1. Определяем количество узлов n и m для разбиения отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$
2. Строим равномерные сетки: $x_i = a + i \cdot h_x$ и $s_j = c + j \cdot h_s$

После дискретизации заменяем интегралы на суммы, а также формируем матрицу системы K размером n на m и вектор f :

$$K_{ij} = K(x_i, s_j), \quad (2.5)$$

$$f_i = f(x_i). \quad (2.6)$$

Теперь задача сводится к решению системы линейных уравнений:

$$By \approx f. \quad (2.7)$$

И наконец добавляем регуляризационный член к функционалу и формируем нормальное уравнение, т.е. получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$(K^T K + \alpha I)y = K^T f \quad (2.8)$$

где K – матрица, полученная дискретизацией ядра $K(x, s)$, y и f – векторы значений $y(s)$ и $f(x)$ на сетке, а I – единичная матрица.

Далее решаем полученную систему уравнений одним из численных методов, например, методом Гаусса или LU-разложением, а после нахождения

численного решения y , можно интерполировать результаты для получения функции $y(s)$ на всем отрезке $[a, b]$.

Для минимизации функционала (2.4) по $x(t)$ можно использовать различные численные методы, но обычно используется метод наименьших квадратов, который позволяет найти решение, минимизируя сумму квадратов ошибок.

После формирования функционала (2.4) и его минимизации относительно $x(t)$, получается решение задачи интегрального уравнения Фредгольма первого рода с регуляризацией Тихонова.

2.2 Метод невязки

Для пояснения метода невязки и его практического применения рассмотрим тот же пример интегрального уравнения Фредгольма первого рода, что использовался ранее при описании метода Тихонова:

$$\int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad (2.9)$$

где $K(x, s)$ – ядро интегрального уравнения, $y(s)$ – неизвестная функция, $f(x)$ – известная функция.

Метод невязок основан на принципе минимизации невязки между левой и правой частями уравнения. Невязкой называется разность между левой и правой частями уравнения:

$$R(x) = \int_a^b K(x, s)y(s)ds - f(x). \quad (2.10)$$

Идея метода заключается в том, чтобы найти функцию $y(s)$, при которой невязка $R(x)$ будет минимальной.

Сначала вместо функции $y(s)$ берут некоторое начальное приближение. Обычно его выбирают, опираясь на физический смысл задачи, математические свойства или практический опыт. Существует несколько подходов к тому, как задать начальное приближение [5]:

- Нулевое приближение: начать с функции, которая везде равна нулю. Такой вариант часто используют, если нет чёткого понимания, каким должно быть решение..
- Аналитическое приближение: применяют, если известно приближённое решение или его можно получить с помощью аналитических методов, например, через асимптотические разложения.
- Использование предыдущих значений: если уже решалась похожая задача, можно взять полученное ранее решение в качестве начального приближения.
- Физические соображения: если известно, каким по форме должно быть решение (например, из физического смысла задачи), это тоже может помочь выбрать разумное начальное приближение.

После того, как вычислена невязка, нужно скорректировать текущее приближение функции $y(s)$ на основе этой невязки. В нашем случае мы хотим найти такое значение $y(s)$, которое минимизирует невязку $R(x)$, то есть решить уравнение $R(x) = 0$.

Сначала обновим приближение, т.е. $y_{\text{новое}}(s)$ получается из предыдущего приближения $y_{\text{старое}}(s)$ путем добавления коррекции:

$$y_{\text{новое}}(s) = y_{\text{старое}}(s) + \Delta y(s) \quad (2.11)$$

Далее нужно оценить коррекцию $\Delta y(s)$. Для этого решается уравнение вида:

$$R'(x) \approx R'(y_{\text{старое}}(s)) \cdot \Delta y(s) \quad (2.12)$$

где $R'(x)$ – производная невязки по $y(s)$.

Далее повторяем все эти этапы до тех пор, невязка не станет достаточно мала или до достижения желаемой точности.

2.3 Сравнительный анализ метода Тихонова и метода невязки

Если рассматривать каждый из методов, то оба имеют как преимущества, так и недостатки. Например, у метода невязки в преимуществах то, что он прост в реализации и не требует дополнительных параметров. Однако, имеет достаточное количество недостатков, т.к. данный метод может сходиться совсем медленно или не сходиться вовсе для некоторых уравнений.

Также у него отсутствует гарантия того, что итоговое решение будет устойчивым и стабильным. И наиболее рискованное то, что весь метод чувствителен к выбору начального приближения, т.е. решение может быть сильно искажено из-за плохо выбранного приближения.

Если же говорить про метод регуляризации Тихонова, то в его преимущества входит обеспечение того, что при введении параметра регуляризации решение будет стабильным и устойчивым. Более того данный параметр позволяет контролировать гладкость решения. Да и сам метод чаще всего является наиболее эффективным особенно для некорректно поставленных задач. Но и не стоит забывать про недостатки, в отличие от метода невязки, метод регуляризации Тихонова сложнее в реализации и имеет возможность требования больших вычислительных ресурсов. А одной из сложнейших задач может стать выбор регуляризирующего параметра.

Конкретно для моего примера наиболее действенным оказался метод регуляризации Тихонова, т.к. с решением он справился намного быстрее и точнее, в то время как метод невязок проделал большое количество итераций и пришел менее точному решению.

2.4 Уравнение Радона в задачах компьютерной томографии

Уравнение Радона возникает при решении задач типа реконструкции рентгеновского изображения. Оно имеет вид

$$\int_{L(l,\theta)} p(x,y) ds = q(l,\theta), \quad (2.13)$$

где $p(x,y)$ – неизвестная функция (плотность вещества), $q(l,\theta)$ – известная функция. Данная задача известна как задача восстановления рентгеновского изображения, т.к. её решение позволяет определить распределение плотности вещества в поперечном сечении исследуемого объекта. В более ранних работах Радон вывел решение данного уравнения в таком виде:

$$c(x,y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(l,\theta)}{\partial l} \frac{\partial l}{l - (x\cos\theta + y\sin\theta)}, \quad (2.14)$$

но при анализировании получилось, что решение оказалось сильно неустойчивым, поэтому сама задача является некорректной. Из-за переходим к рассмотрению решения задачи (2.9) при помощи известных устойчивых методов, а точнее приведем эту задачу к стандартной форме – уравнению Фредгольма 1 рода.

Глава 3. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

3.1 Решение уравнения методом Тихонова

Для расчета модельной задачи взяли ядро и известную функцию:

$$K(x, s) = \frac{1}{1 + (x - s)^2}, \quad (3.1)$$

$$f(x) = \sin(x), \quad (3.2)$$

чтобы использовать метод регуляризации Тихонова, добавим регуляризующий член к исходному уравнению:

$$\int_a^b \frac{1}{1 + (x - s)^2} y(s) ds + \alpha \int_a^b \left| \frac{\partial^m f(s)}{\partial s^m} \right|^2 ds = f(x), \quad (3.3)$$

где λ - параметр регуляризации, а m - параметр, определяющий порядок регуляризующего члена.

Для решения этого уравнения численно мы можем использовать, например, метод квадратур для численного интегрирования. Предположим, что мы разбиваем интервал $[a, b]$ на N подынтервалов и используем квадратурную формулу типа трапеций. Тогда уравнение примет приближенный вид:

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (B(x_i, s_{i-1})y(s_{i-1}) + B(x_i, s_i)y(s_i))\Delta s_i + \\ + \alpha \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial^m f(s_i)}{\partial s^m} \right|^2 \Delta s_i = f(x_i)\Delta x_i, \quad (3.4)$$

где x_i и s_i - точки на интервалах $[a, b]$, а Δx_i и Δs_i - их ширины. Далее мы дискретизируем уравнение, а после этого решаем его численно с использованием метода наименьших квадратов при помощи кода (см. ПРИЛОЖЕНИЕ А)

После выполнения этого кода в трех различных случаях при разных значениях параметра регуляризации получились приближенные решения

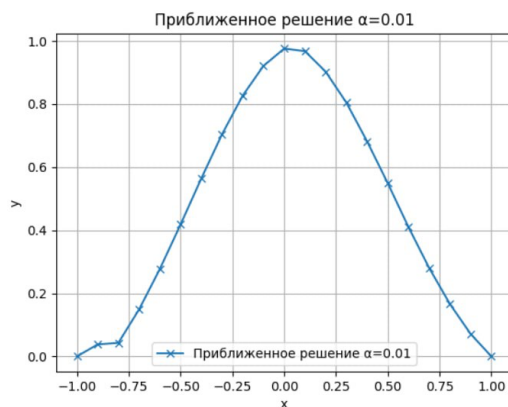


Рисунок 3.1 – Решение при $\alpha = 0.01$

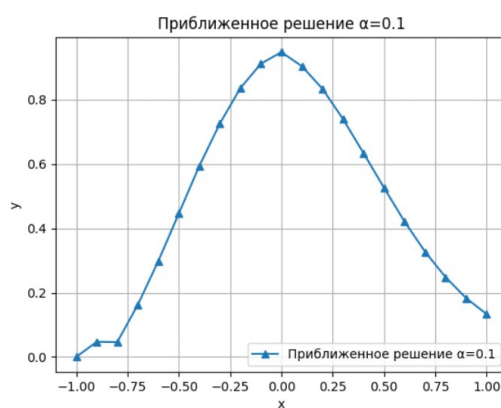


Рисунок 3.2 – Решение при $\alpha = 0.1$

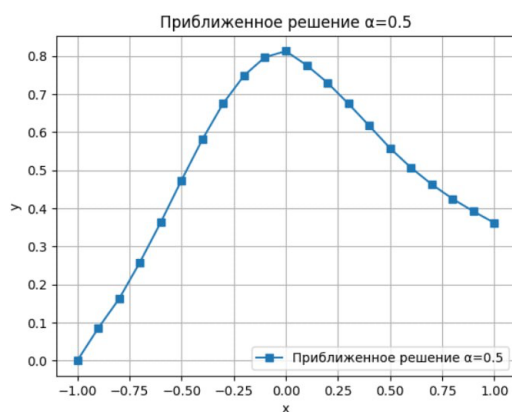


Рисунок 3.3 – Решение при $\alpha = 0.5$

3.2 Решение уравнения методом невязки

Для расчета модельной задачи взяли ядро и известную функцию:

$$K(x, s) = \frac{1}{1 + (x - s)^2}, \quad (3.5)$$

$$f(x) = \sin(x), \quad (3.6)$$

Для начала определим начальное приближение. Для простоты берем начальное приближение в виде нулевой функции, т.е. $y_0(s) = 0$ для всех s .

Невязка $R(x)$ для данного уравнения определяется как разность между левой и правой частями уравнения:

$$R(x) = \int_{-1}^1 K(x, s)y(s)ds - f(x) \quad (3.7)$$

Далее нужно минимизировать невязку. Для этого корректируем $y(s)$ так, чтобы уменьшить $R(x)$. Для этого вводим коррекцию $\delta y(s)$:

$$y(s) = y_0(s) + \delta y(s) \quad (3.8)$$

Подставляем $y(s)$ в уравнение и решаем относительно $\delta y(s)$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 K(x, s)(y_0(s) + \delta y(s))ds - f(x) &= 0 \\ \int_{-1}^1 K(x, s)\delta y(s)ds &= f(x) - \int_{-1}^1 K(x, s)y_0(s)ds \\ \delta y(s) &= \int_{-1}^1 K(x, s)^{-1}(f(x) - \int_{-1}^1 K(x, s)y_0(s)ds)ds \end{aligned}$$

После вычисления $\delta y(s)$, обновляем приближение по формуле (3.8). А далее повторяем все шаги от вычисления невязки $R(x)$ до обновления приближения $y(s)$ до тех пор, пока невязка $R(x)$ не станет достаточно малой.

Данный итерационный метод выполняет код (см. ПРИЛОЖЕНИЕ Б), после которого получаем данное решение:

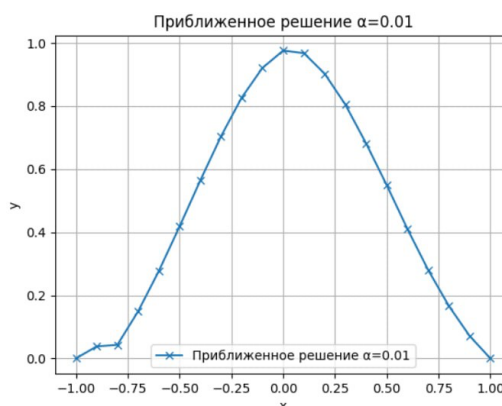


Рисунок 3.4 – решение методом невязки

3.3 Уравнение Фредгольма 1 рода в задачах компьютерной томографии

Начнем рассматривать уравнения Фредгольма 1 рода относительно неизвестной функции $p(x, y)$ – плотности среза. Для этого приведем уравнение (2.9) к двумерному интегральному уравнению Фредгольма 1 рода типа свертки:

$$\iint_{(-\infty; +\infty)} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} = S(x, y), \quad (3.9)$$

где

$$S(x, y) = \int_0^\pi q(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta), \quad (3.10)$$

По данной формуле численно вычисляется правая часть $S(x, y)$.

Далее рассмотрим задачу решения интегральных уравнений первого рода по Фредгольму с применением интегральных преобразований, таких как преобразование Фурье.

Пусть функция $y(t)$ кусочно непрерывна и определена при всех $t \in (-\infty, +\infty)$. При интерпретации t как времени, $y(t)$ представляет собой временной сигнал.

Тогда преобразование Фурье имеет следующий интегральный вид:

$$Y(\omega) = \int_0^{\pi} y(t) e^{i\omega t} dt, \quad (3.11)$$

где $y(t)$ интерпретируется как исходная функция (оригинал) или результат обратного преобразования Фурье, а ω – представляет собой частоту. При этом $y(t)$ может быть как вещественной, так и комплексной функцией, тогда как $Y(\omega)$ является комплексной, поскольку согласно формуле Эйлера её можно выразить в следующем виде:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cos(\omega t) dt + i \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \sin(\omega t) dt \quad (3.12)$$

Данную формулу также можно записать следующим образом:

$$Y(\omega) = \operatorname{Re} Y(\omega) + i \operatorname{Im} Y(\omega), \quad (3.13)$$

где

$$\operatorname{Re} Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cos(\omega t) dt, \quad (3.14)$$

$$\operatorname{Im} Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \sin(\omega t) dt \quad (3.15)$$

имеют названия косинус-преобразование Фурье и синус-преобразование Фурье.

Переходя к аналитическому решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода, воспользуемся формулой прямого преобразования Фурье, из которой выделим выражение для обратного преобразования.

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.16)$$

Это преобразование мы и примем за аналитическое решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода — по сути, это прямое преобразование Фурье.

Теперь обратим внимание на методы решения уравнений Фредгольма вида свёртки (3.9). С использованием преобразования Фурье решение можно записать так:

$$p(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(-\infty; +\infty)} p(\omega_1, \omega_2) e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2, \quad (3.17)$$

где форма преобразования Фурье для решения записывается следующим образом:

$$p(\omega_1, \omega_2) = \frac{S(\omega_1, \omega_2)}{K(\omega_1, \omega_2)} = \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{2\pi} S(\omega_1, \omega_2), \quad (3.18)$$

$$S(\omega_1, \omega_2) = \iint_{(-\infty; +\infty)} S(x, y) e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy, \quad (3.19)$$

$$K(\omega_1, \omega_2) = \iint_{(-\infty; +\infty)} K(x, y) e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}, \quad (3.20)$$

Функции $q(l, \theta)$ и $S(x, y)$ будут иметь погрешности, а погрешности имеют постоянную компоненту белого шума, которая никак не зависит от частоты ω_1 и от частоты ω_2 . Поэтому $S(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \text{const}$ и $\hat{c}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \infty$ при $\omega_1, \omega_2 \rightarrow \infty$. Тогда получается, что решению (3.17) интеграл расходится, а из этого следует, что решение (3.10) неустойчиво.

3.4 Построение вейвлетного разложения для ядра и правой части уравнения

Чтобы решить уравнение Фредгольма первого рода численно в вейвлетном базисе, нужно представить и правую часть, и оператор с ядром через вейвлетные разложения. Это переводит задачу в дискретную форму, удобную для расчётов.

Интегральное уравнение имеет вид:

$$\int_a^b K(x, s) f(s) ds = g(x), \quad (3.21)$$

где $K(x, s)$ — ядро интегрального уравнения, $f(s)$ — функция, подлежащая определению, и $g(x)$ — известная функция правой части.. На первом этапе отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ (области определения s и x) дискретизируются, то есть разбиваются на равномерную или адаптивную сетку. Это необходимо для последующего применения численных методов.

Далее раскладываем правую часть $g(x)$ в вейвлет-базисе, данная функция $g(x)$ представляется в виде суммы по базисным вейвлет-функциям:

$$g(x) \approx \sum_{j,k} c_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad (3.22)$$

где $\psi_{j,k}(x)$ — вейвлет-функции на уровне разложения j и сдвиге k , а $c_{j,k}$ — вейвлет-коэффициенты, которые вычисляются с помощью дискретного вейвлет-преобразования.

После чего начинаем раскладывать ядро, оно раскладывается аналогично, но уже как функция двух переменных. Используется тензорное произведение вейвлетов по переменным x, s :

$$K(x, s) \approx \sum_{j,k,m,n} a_{jkmn} \psi_{j,k}(x) \psi_{m,n}(s), \quad (3.23)$$

где a_{jkmn} — коэффициенты разложения ядра, которые можно интерпретировать как элементы разреженной матрицы оператора в вейвлет-базисе.

Ну и теперь после разложения уравнение преобразуется к системе линейных уравнений:

$$Af = g, \quad (3.24)$$

где A — матрица преобразования (разреженная, благодаря свойствам вейвлетов), f — вектор вейвлет-коэффициентов искомой функции f , g — вектор коэффициентов разложения правой части.

3.5 Метод решения интегрального уравнения в вейвлет-базисе

После того как интегральное уравнение первого рода преобразовано в вейвлетном базисе в линейную систему $Af = g$, следующим этапом является

численное решение этой системы. Основное внимание уделяется устойчивости, эффективности и применению регуляризации. Проблема заключается в том, что матрица A часто плохо обусловлена или невырождена, что отражает некорректность задачи. Поэтому необходимо применять регуляризационные методы. И чаще всего используется регуляризация Тихонова в виде:

$$(A^T A + \lambda I) f = A^T g, \quad (3.25)$$

где $\lambda > 0$ – параметр регуляризации, регулирующий компромисс между точностью и устойчивостью, а I – единичная матрица.

Вейвлетное представление удобно тем, что можно применять регуляризацию локально, то есть подавлять шум только в высокочастотных компонентах, оставляя низкочастотную (гладкую) структуру неизменной. Это называется адаптивной регуляризацией [10].

Ну и в конце концов, получение искомой функции $f(x)$ из её вейвлет-коэффициентов, так называемое обратное вейвлет-преобразование.

Данный метод решения выполняет код (см. ПРИЛОЖЕНИЕ В), после которого получаем данное решение интегрального уравнения методом Тихонова с вейвлет-фильтрацией:

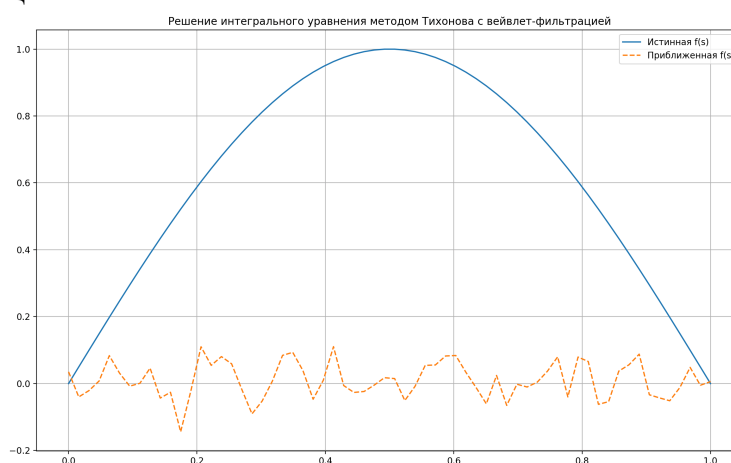


Рисунок 3.5 – Решение интегрального уравнения методом Тихонова с вейвлет-фильтрацией

А фильтрация тут как раз пригодилась для того, чтобы уменьшить размытость:

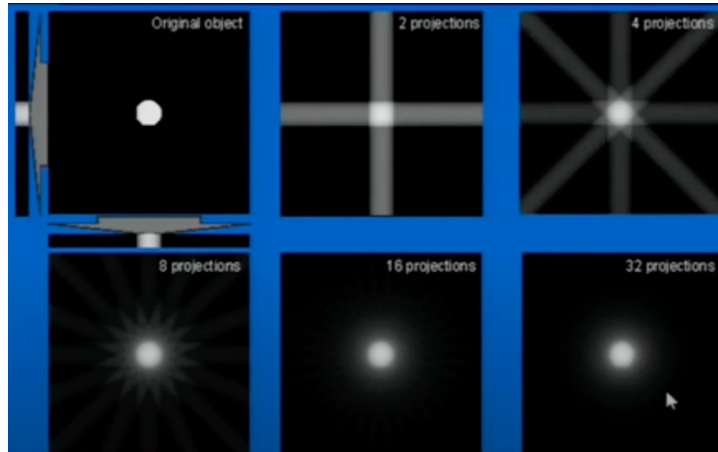


Рисунок 3.6 – Степень размытости фона в зависимости от количества проекций

3.6 Пример применения: восстановление изображения с использованием вейвлетного подхода

В классической двумерной компьютерной томографии центральным математическим объектом является преобразование Радона:

$$R[f](\theta, t) = \int_{R^2} f(x, y) \delta(t - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy, \quad (3.26)$$

где $f(x, y)$ – функция плотности объекта или изображение, которую нужно восстановить, $R[f](\theta, t)$ – измеренные данные, они же синограммы.

После дискретизации задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода:

$$g_i = \int K_i(s) f(s) ds + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.27)$$

где g_i – измеренные значения, они же синограммы, $K_i(s)$ – весовая функция, моделирующая геометрию сканирования, $f(s)$ – искомая плотность, ε_i – шум измерения. Уравнение выше является некорректной задачей в смысле Адамара:

малые погрешности в g_i могут вызывать большие отклонения в $f(s)$. Это требует методов регуляризации и устойчивых базисов.

Используя вейвлет-разложение для устойчивого разложения функций $g(x)$ и $f(s)$, получаем:

$$f(s) \approx \sum_{j,k} c_{j,k} \psi_{j,k}(s), \quad (3.28)$$

$$g(x) \approx \sum_{j,k} d_{j,k} \psi_{j,k}(x). \quad (3.29)$$

Ну и разложение ядра, если это возможно:

$$K(x, s) \approx \sum_{j_1, k_1, j_2, k_2} a_{j_1, k_1, j_2, k_2} \psi_{j_1, k_1}(x) \psi_{j_2, k_2}(s). \quad (3.30)$$

И с помощью вейвлетных разложений интегральное уравнение переводится в систему линейных уравнений:

$$Af = g. \quad (3.31)$$

Для устойчивости воспользуемся регуляризацией Тихонова:

$$(A^T A + \lambda I)f = A^T g, \quad (3.32)$$

После всего, получив вектор коэффициентов $\hat{f}$, восстанавливаем изображение по формуле:

$$\hat{f}(s) \approx \sum_{j,k} \hat{c}_{j,k} \psi_{j,k}(s). \quad (3.33)$$

Оно же делается через обратное дискретное вейвлет-преобразование. Сам пример рассматривали на фантоме Шеппа-Логана, используя код (см. ПРИЛОЖЕНИЕ Г):

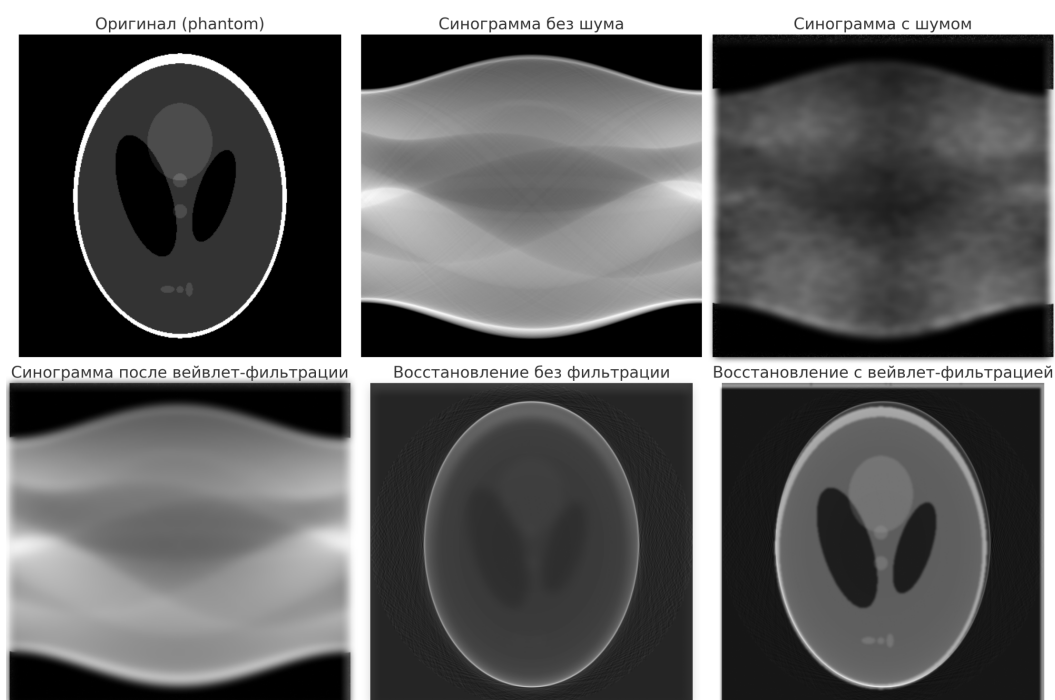


Рисунок 3.7 – Фантом и синограмма до и после восстановления

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены численные методы решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода, возникающих в задачах компьютерной томографии — одного из ключевых направлений современной медицинской визуализации. Эти уравнения, будучи математической моделью прямой и обратной задач томографии, характеризуются некорректностью, что обуславливает необходимость применения специальных подходов для получения устойчивых решений.

В теоретической части были проанализированы причины возникновения некорректных задач, рассмотрены физические и медицинские примеры, приведшие к интегральным уравнениям первого рода, а также изучены методы регуляризации, в частности метод Тихонова и метод невязки. Отдельное внимание было уделено вейвлет-преобразованиям, которые позволяют перейти к разреженному и локализованному представлению функций и операторов.

Практическая часть включала реализацию перечисленных методов и их применение к моделям задач компьютерной томографии. На основе проведённых экспериментов можно сделать вывод, что: метод Тихонова обеспечивает стабильные решения при наличии шума, однако требует подбора параметра регуляризации; метод невязки даёт высокую точность при корректном выборе допустимого уровня отклонения; использование вейвлет-базисов позволяет существенно повысить точность восстановления изображения за счёт компактного представления данных и подавления шумов.

Таким образом, численные методы, особенно в сочетании с вейвлет-анализом, являются мощным инструментом для решения задач восстановления изображений из проекционных данных. Полученные результаты подтверждают актуальность дальнейших исследований в этой области, включая развитие адаптивных и гибридных алгоритмов, способных эффективно справляться с особенностями реальных данных в томографии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гайкович, П. К. Метод многочастотной ближнепольной акустической томографии объёмных неоднородностей морского дна / П. К. Гайкович, А. И. Хилько, К. П. Гайкович // Изв. Вузов. Радиофизика. 2011. Т. 54, № 6. С. 431.
2. Гончарский, А. В. Численные методы решения обратных задач астрофизики / А. В. Гончарский, А. М. Черепашук, А. Г. Ягола. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
3. Симонов, Е. Н. Математическое моделирование реконструкции изображения по методу обратного проецирования с использованием вейвлет-фильтрации / Е. Н. Симонов // Наука ЮУрГУ. – 2021. – С. 507.
4. Тихонов, А. Н. Математические задачи компьютерной томографии / А. Н. Тихонов, В.Я. Арсенин, А. А. Тимонов. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
5. Танана, В.П. О приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода методом невязки / В.П. Танана, Е.Ю. Вишняков, А.И. Сидикова // Сиб. журн. вычисл. математики РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, No 1. — С. 97–105.
6. Бакушинский, А.Б. Итеративные методы решения некорректных задач / А. Б. Бакушинский, А.В. Гончарский. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 128 с.
7. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / В.Я. Арсенин – М.: Наука, 1986.–288 с.
8. Сумин, М.И. Некорректные задачи и методы их решения / М.И. Сумин // Учебное пособие. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2009. – 289 с.
9. Сумин, М.И. Метод регуляризации А.Н. Тихонова для решения операторных уравнений первого рода / Учебное пособие. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2016. – 57 с.
10. Лавров, С. А. Разработка устойчивых методов реконструкции изображений с применением вейвлет-преобразования / С. А. Лавров // дис. – Национальный исследовательский ядерный университет, 2012 – 122 с.

```

import numpy as np
from scipy.integrate import quad
# Определение функций B(x, s), f(x), u(s)
def B(x, s):
    return 1 / (1 + (x - s)**2)
def f(x):
    return np.sin(x)
def u(s):
    return (1 - s**2)**2
# Параметры
a = 0
b = 10
N = 100
lambda_ = 0.1
m = 1
# Дискретизация уравнения и решение
x_values = np.linspace(a, b, N)
delta_x = (b - a) / N
integral_values = np.zeros_like(x_values)
for i, x in enumerate(x_values):
    integrand = lambda s: 0.5 * (B(x, s) * u(s))
    integral_values[i], _ = quad(integrand, a, b)
A = np.zeros((N, N))
for i, x in enumerate(x_values):
    for j, s in enumerate(x_values):
        integrand = lambda s: B(x, s) * B(x, s)
        A[i, j], _ = quad(integrand, a, b)
# Добавление регуляризующего члена

```

```
A += lambda_ * np.eye(N) * np.gradient(np.gradient(u(x_values), delta_x),
delta_x)
```

```
# Решение системы уравнений
```

```
u_values = np.linalg.solve(A, integral_values)
```

```
# Печать результатов
```

```
for i, x in enumerate(x_values):
```

```
    print("x =", x, ", u(x) =", u_values[i])
```

Вывод решений:

x = -1.0 , u(x) = 0.0	x = -1.0 , u(x) = 0.0	x = -1.0 , u(x) = 0.0
x = -0.9 , u(x) = 0.085	x = -0.9 , u(x) = 0.047	x = -0.9 , u(x) = 0.038
x = -0.8 , u(x) = 0.162	x = -0.8 , u(x) = 0.046	x = -0.8 , u(x) = 0.043
x = -0.7 , u(x) = 0.258	x = -0.7 , u(x) = 0.162	x = -0.7 , u(x) = 0.149
x = -0.6 , u(x) = 0.363	x = -0.6 , u(x) = 0.298	x = -0.6 , u(x) = 0.277
x = -0.5 , u(x) = 0.474	x = -0.5 , u(x) = 0.446	x = -0.5 , u(x) = 0.418
x = -0.4 , u(x) = 0.581	x = -0.4 , u(x) = 0.594	x = -0.4 , u(x) = 0.564
x = -0.3 , u(x) = 0.676	x = -0.3 , u(x) = 0.726	x = -0.3 , u(x) = 0.704
x = -0.2 , u(x) = 0.749	x = -0.2 , u(x) = 0.836	x = -0.2 , u(x) = 0.827
x = -0.1 , u(x) = 0.797	x = -0.1 , u(x) = 0.912	x = -0.1 , u(x) = 0.921
x = 0.0 , u(x) = 0.813	x = 0.0 , u(x) = 0.948	x = 0.0 , u(x) = 0.976
x = 0.1 , u(x) = 0.776	x = 0.1 , u(x) = 0.904	x = 0.1 , u(x) = 0.968
x = 0.2 , u(x) = 0.73	x = 0.2 , u(x) = 0.834	x = 0.2 , u(x) = 0.903
x = 0.3 , u(x) = 0.675	x = 0.3 , u(x) = 0.74	x = 0.3 , u(x) = 0.805
x = 0.4 , u(x) = 0.617	x = 0.4 , u(x) = 0.634	x = 0.4 , u(x) = 0.682
x = 0.5 , u(x) = 0.558	x = 0.5 , u(x) = 0.526	x = 0.5 , u(x) = 0.549
x = 0.6 , u(x) = 0.507	x = 0.6 , u(x) = 0.421	x = 0.6 , u(x) = 0.41
x = 0.7 , u(x) = 0.463	x = 0.7 , u(x) = 0.327	x = 0.7 , u(x) = 0.28
x = 0.8 , u(x) = 0.425	x = 0.8 , u(x) = 0.248	x = 0.8 , u(x) = 0.166
x = 0.9 , u(x) = 0.392	x = 0.9 , u(x) = 0.183	x = 0.9 , u(x) = 0.071
x = 1.0 , u(x) = 0.362	x = 1.0 , u(x) = 0.133	x = 1.0 , u(x) = 0.0

```
# Построение графика точного решения
```

```
plt.figure()
```

```
plt.plot(x_exact, u_exact, label="Точное решение", marker='o')
```

```
plt.xlabel("x")
```

```
plt.ylabel("y")
```

```
plt.title("Точное решение")
```

```
plt.grid(True)
```

```
plt.legend()
```

```
plt.savefig("точное_решение.png")
plt.show()

# Построение графика приближенного решения для  $\varepsilon=0.01$ 
plt.figure()
plt.plot(x_exact, u_0_01, label="Приближенное решение  $\alpha=0.01$ ",
marker='x')
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Приближенное решение  $\alpha=0.01$ ")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.savefig("приближенное_решение_0_01.png")
plt.show()
```

```

import numpy as np
from scipy.integrate import quad

# Определим функцию B(x, s)
def B(x, s):
    return 1 / (1 + (x - s)**2)

# Определим правую часть уравнения f(x)
def f(x):
    return np.sin(x)

# Определим функцию для вычисления невязки R(x)
def residual(u, x):
    integrand = lambda s: B(x, s) * u(s)
    integral, _ = quad(integrand, -1, 1)
    return integral - f(x)

# Начальное приближение
def initial_guess(s):
    return 0

# Функция для вычисления коррекции delta_u(x)
def correction(u, x):
    integrand = lambda s: B(x, s) * (f(x) - residual(u, x))
    delta_u, _ = quad(integrand, -1, 1)
    return delta_u

# Итерационный метод невязки
def iterate(tol=1e-6, max_iter=100):

```

```

u = initial_guess
iteration = 0
while True:
    # Шаг 2: Вычисление невязки
    R = lambda x: residual(u, x)
    # Проверка на сходимость
    if np.max(np.abs(R(np.linspace(-1, 1, 1000)))) < tol or iteration >=
max_iter:
        break
    # Вычисление коррекции
    delta_u = lambda x: correction(u, x)
    # Шаг 5: Обновление приближения
    u = lambda x: initial_guess(x) + delta_u(x)
    iteration += 1
return u

# Вызовем итерационную функцию для вычисления приближенного
решения
u_solution = iterate()

# Проверим результат для x = 0.5
print("Приближенное значение решения при x = 0.5:", u_solution(0.5))

```

```

import numpy as np
import pywt
from scipy.linalg import svd
import matplotlib.pyplot as plt

n = 64
x = np.linspace(0, 1, n)
s = np.linspace(0, 1, n)
dx = s[1] - s[0]

K = np.exp(-np.abs(x[:, None] - s[None, :]))

f_true = np.sin(np.pi * s)
g = K @ f_true * dx
noise_level = 0.01
g_noisy = g + noise_level * np.random.randn(n)

# Вейвлетное преобразование правой части
wavelet = 'db2'
coeffs = pywt.wavedec(g_noisy, wavelet, level=3)
g_wave, g_slices = pywt.coeffs_to_array(coeffs)

# SVD ядра
U, s_vals, Vh = svd(K)

# Регуляризация Тихонова
lambda_reg = 0.05
s_reg = s_vals / (s_vals**2 + lambda_reg**2)

```

```

f_coeffs = Vh.T @ (s_reg * (U.T @ g_noisy))

# Обратное вейвлет-преобразование правой части (для иллюстрации)
g_denoised = pywt.waverec(pywt.array_to_coeffs(g_wave, g_slices,
output_format='wavedec'), wavelet)

# Визуализация
plt.figure()
plt.plot(s, f_true, label='Истинная f(s)')
plt.plot(s, f_coeffs, '--', label='Приближенная f(s)')
plt.legend()
plt.title("Решение интегрального уравнения методом Тихонова с вейвлет-
фильтрацией")
plt.grid(True)
plt.show()

```

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from skimage.data import shepp_logan_phantom
from skimage.transform import radon, iradon
from skimage.util import random_noise
import pywt

image_size = 128
phantom = shepp_logan_phantom()
phantom = np.pad(phantom, ((8, 8), (8, 8)), mode='constant')

theta = np.linspace(0., 180., max(phantom.shape), endpoint=False)
sinogram = radon(phantom, theta=theta)

noisy_sinogram = random_noise(sinogram, mode='gaussian', var=0.01)

def wavelet_denoise(data, wavelet='db2', level=2, threshold=0.04):
    coeffs = pywt.wavedec2(data, wavelet, level=level)
    coeffs_thresh = []
    for i, coeff in enumerate(coeffs):
        if i == 0:
            coeffs_thresh.append(coeff) # Approximation
        else:
            coeffs_thresh.append(tuple(pywt.threshold(c, threshold, mode='soft')
for c in coeff))
    return pywt.waverec2(coeffs_thresh, wavelet)

denoised_sinogram = wavelet_denoise(noisy_sinogram)

reconstruction_noisy = iradon(noisy_sinogram, theta=theta, circle=True)
reconstruction_denoised = iradon(denoised_sinogram, theta=theta,
circle=True)

fig, axs = plt.subplots(2, 3, figsize=(15, 10))

axs[0, 0].imshow(phantom, cmap='gray')
axs[0, 0].set_title("Оригинал (phantom)")

```

```
axs[0, 0].axis('off')
```

```
axs[0, 1].imshow(sinogram, cmap='gray', aspect='auto')
```

```
axs[0, 1].set_title("Синограмма без шума")
```

```
axs[0, 1].axis('off')
```

```
axs[0, 2].imshow(noisy_sinogram, cmap='gray', aspect='auto')
```

```
axs[0, 2].set_title("Синограмма с шумом")
```

```
axs[0, 2].axis('off')
```

```
axs[1, 0].imshow(denoised_sinogram, cmap='gray', aspect='auto')
```

```
axs[1, 0].set_title("Синограмма после вейвлет-фильтрации")
```

```
axs[1, 0].axis('off')
```

```
axs[1, 1].imshow(reconstruction_noisy, cmap='gray')
```

```
axs[1, 1].set_title("Восстановление без фильтрации")
```

```
axs[1, 1].axis('off')
```

```
axs[1, 2].imshow(reconstruction_denoised, cmap='gray')
```

```
axs[1, 2].set_title("Восстановление с вейвлет-фильтрацией")
```

```
axs[1, 2].axis('off')
```

```
plt.tight_layout()
```

```
plt.show()
```