УДК 519.65

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПРОИЗВОДНОЙ ПО НОРМАЛИ ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ, ЗАДАННОЙ ТРИАНГУЛЯЦИЕЙ

Г. С. Плисюк[1], О. А. Лаврова[2]

[1]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь, mmf.plisyuk@bsu.by
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь, lavrovaoa@bsu.by

В работе рассмотрен численный алгоритм нахождения производной скалярного поля по направлению внешней нормали к поверхности, заданной триангуляцией, в точке поверхности. Разработана и представлена компьютерная реализация данного алгоритма, а также результаты его тестирования.

Ключевые слова: триангуляция поверхности; нормаль; скалярное поле; производная по направлению; линейная интерполяция.

ALGORITHM FOR COMPUTATION OF THE NORMAL DERIVATIVE FOR A SCALAR FIELD ON A SURFACE DEFINED BY TRIANGULATION

G. S. Plisiuk[1], O. A. Lavrova[2]

[1]Belarussian state university, Minsk, Belarus, mmf.plisyuk@bsu.by
[2]Belarussian state university, Minsk, Belarus, lavrovaoa@bsu.by

The study considers a numerical algorithm for finding the derivative of a scalar field in the direction of the outer normal to a surface defined by triangulation at a point on the surface. A computer implementation of this algorithm is developed and presented, as well as the results of its testing.

Keywords: surface triangulation; normal; scalar field; directional derivative; linear interpolation.

Введение

В 60-х годах XX века с появлением стабильных магнитных жидкостей начала активно развиваться новая область научного знания – феррогидродинамика. С того момента учеными многих стран написано несколько тысяч работ о свойствах магнитных жидкостей, их движении, о взаимодействии магнитных жидкостей с магнитным и электрическим полем, о применении магнитных жидкостей в технике, биологии и медицине. Также зарегистрировано множество авторских свидетельств и патентов об устройствах и приборах различного назначения с использованием магнитных жидкостей [1].

При практическом решении задач феррогидродинамики часто применяют компьютерное моделирование изучаемых процессов и явлений. Однако данный вид моделирования сопряжен с некоторыми особенностями: для целого ряда возникающих в ходе этого процесса задач найти их аналитическое решение не представляется возможным.

В частности, для описания движения и деформации магнитной жидкости при действии на нее магнитного поля необходимо вычислять значение магнитной силы на свободной поверхности этой жидкости. Для этого необходимо знать значение производной магнитного потенциала в направлении внешней нормали к поверхности жидкости в указанной точке этой поверхности.

Если с теоретической точки зрения подобная задача достаточно подробно изучена и решена, то на практике, зачастую, неизвестно ни точное аналитическое задание поверхности, ни аналитическое выражение магнитного потенциала – известны только их численные приближения.

Указанные выше обстоятельства позволяют говорить об актуальности разработки компьютерного алгоритма, который позволит производить численный расчет производной скалярного поля по направлению внешней нормали к заданной поверхности в точке этой поверхности.

Описание алгоритма

Постановка задачи. Исходными данными задачи являются произвольные поверхность, скалярное поле, а также точка, принадлежащая поверхности. Задача состоит в том, чтобы найти значение производной скалярного поля по направлению внешней нормали к заданной поверхности в указанной точке.

При этом поверхность задается приближенно своим дискретным представлением, которое состоит из множества плоских треугольных элементов, определенных своими вершинами, и описания соседства через ребра каждого треугольника. Подобное представление, называющееся триангуляцией, усложняет задачу оценки единичного нормального вектора в точках поверхности, так как оно искажает исходную поверхность, что может значительно сказаться на результатах приближения.

В свою очередь, информация о скалярном поле представлена только его значениями в вершинах сетки триангуляции. Вследствие этого точное значение производных недоступно и необходимо пользоваться их приближениями в интересующей точке, построенными на основе кусочно-линейной интерполяции скалярного поля на триангуляции поверхности. Точка поверхности, в которой необходимо посчитать производную, задается узлом треугольной сетки на поверхности.

Основные идеи алгоритма. С теоретической точки зрения производная скалярного поля по направлению нормали к поверхности в любой точке поверхности вычисляется согласно общей формуле [2, с. 268]:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(\vec{x}) = \left(\vec{n}(\vec{x}), \operatorname{grad} f(\vec{x})\right), \tag{1}$$

где в правой части стоит скалярное произведение векторов нормали к поверхности $\vec{n}(\vec{x})$ и градиента скалярного поля $\operatorname{grad} f(\vec{x})$ в точке поверхности $\vec{x}$.

Таким образом, общий алгоритм разбивается на два: алгоритм вычисления нормали к поверхности в точке поверхности и алгоритм вычисления градиента скалярного поля в этой же точке.

Аппроксимация нормали к поверхности в заданной вершине поверхности $\vec{n}(\vec{x})$ считается согласно алгоритму, который описан и реализован в соответствующей работе [3] и основывается на методике, описанной в статье [4].

Чтобы посчитать градиент в интересующей вершине, рассматриваются сначала все треугольники, которые разделяют нужную вершину. На каждом из этих треугольников строится линейная интерполяция исходного скалярного поля по значениям в вершинах треугольников в виде:

$$f(\vec{x}) = (\vec{g}, \vec{x}) + b, \tag{2}$$

где в правой части стоит сумма линейного сдвига b и скалярного произведения постоянного вектора-градиента $\vec{g}$ и радиус-вектора точки $\vec{x}$.

В результате этой процедуры имеем постоянный градиент $\vec{g}_{\Delta_i}$ для каждого треугольника Δ_i, одной из вершин которого является интересующая точка. Для получения приближения градиента скалярного поля в заданной вершине, строится взвешенная сумма полученных градиентов по одной из формул, представленных ниже:

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \frac{\sum_i S(\Delta_i)\vec{g}_{\Delta_i}}{\sum_i S(\Delta_i)}, \tag{3}$$

$$\operatorname{grad} f\left(\vec{x}\right)=\frac{\sum_i \left\|\vec{g}_{\Delta_i}\right\| \vec{g}_{\Delta_i}}{\sum_i \left\|\vec{g}_{\Delta_i}\right\|}, \qquad (4)$$

где $S\left(\Delta_i\right)$ – площадь треугольника Δ_i, $\left\|\vec{g}_{\Delta_i}\right\|$ – норма вектора $\vec{g}_{\Delta_i}$, а суммирование производится по всем треугольникам Δ_i, содержащим заданную точку.

Итоговая производная скалярного поля по направлению внешней нормали к поверхности в заданной точке вычисляется по формуле (1).

Компьютерная реализация алгоритма. В качестве компьютерной среды для реализации вышеописанного алгоритма был выбран численный пакет MATLAB, так как он предоставляет функциональность, которая необходима при разработке компьютерной реализации алгоритма.

В частности, MATLAB предоставляет специальный тип данных *triangulation*. Этот тип данных используется для создания в памяти представления любых двумерных или трехмерных данных триангуляции в матричном формате [5].

Более того, к объектам, представленным с использованием типа данных *triangulation*, можно выполнять различные топологические и геометрические запросы.

Например, можно найти треугольники или тетраэдры, содержащие указанную вершину, треугольники или тетраэдры, которые имеют общее ребро, центры описанных вокруг них окружностей и другие свойства [5].

MATLAB также предоставляет функциональность по чтению файлов формата STL, одного из самых распространенных на данный момент для хранения 3D-геометрии [6].

Функция *stlread* позволяет путем чтения STL-файла создать объект типа *triangulation* с возможностью использовать всю доступную для него функциональность [5].

Заключение

По итогам данной работы разработан и реализован средствами MATLAB компьютерный алгоритм для расчета производной произвольной трехмерной скалярной функции, заданной своими значениями в вершинах сетки триангуляции, в направлении нормали к поверхности, заданной этой триангуляцией в указанной точке этой поверхности.

Также данный алгоритм был успешно протестирован на работоспособность и точность на тестовых задачах, для которых возможно указать аналитическое решение.

В дальнейшем для моделирования поведения шара из магнитной жидкости в магнитном поле разработанный алгоритм планируется использовать совместно с алгоритмом, описанным в работе [7], нахождения численного решения задачи феррогидростатики о расчете магнитного потенциала внутри магнитожидкостного шара и вне его.

Библиографические ссылки

1. *Ryapolov, P.; Vasilyeva, A.; Kalyuzhnaya, D.; Churaev, A.; Sokolov, E.; Shel'deshova, E.* Magnetic Fluids: The Interaction between the Microstructure, Macroscopic Properties, and Dynamics under Different Combinations of External Influences. Nanomaterials 2024, 14, 222.
2. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа (в трех томах). Москва: Дрофа, 2004, т. II: 720 с.
3. *Плисюк Г. С.* Аппроксимация нормали и кривизны для поверхности, заданной триангуляцией/ Курсовая работа, Минск: ММФ БГУ, 2024.
4. *Koffi Bi, D.-A.,* 2021, Numerical characterization of curvatures and normal vectors at multiphase flows interfaces PhD thesis Université Gustave Eiffel.
5. MathWorks MATLAB Documentation [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.mathworks.com/help/matlab/index.html (дата доступа 27.03.2025).
6. The 10 Most Popular 3D File Formats [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://all3dp.com/2/most-common-3d-file-formats-model/ (дата доступа 27.03.2025).
7. *Кацкель Е. Ф.* Численное решение трехмерной задачи феррогидростатики/ Дипломная работа, Минск: ММФ БГУ, 2021.