УДК 519.1 + 378.147

О КОМПЬЮТЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ В КУРСЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

С. В. Костин

ГБОУ города Москвы «Школа № 1788», Россия, Москва
Российский технологический университет МИРЭА, Россия, Москва
kostinsv77@mail.ru

Отмечена полезность компьютерного моделирования различных математических структур (таких как графы, отношения, кольца, решетки и т. д.) при изучении дискретной математики. В качестве примера рассмотрено компьютерное моделирование рефлексивных, симметрических и транзитивных отношений на множестве.

Ключевые слова: компьютерное моделирование; дискретная математика; отношение на множестве; преподавание математики.

ABOUT COMPUTER MODELING IN THE COURSE OF DISCRETE MATHEMATICS

S. V. Kostin

SBEI of Moscow «School № 1788», Russia, Moscow
Russian Technological University MIREA, Russia, Moscow
kostinsv77@*mail.ru*

The usefulness of computer modeling of various mathematical structures (such as graphs, relations, rings, lattices, etc.) in the study of discrete mathematics is noted. As an example, computer modeling of reflexive, symmetric and transitive relations on a set is considered.

Keywords: computer modeling; discrete mathematics; relation on a set; teaching mathematics.

Введение

В настоящее время прослеживается тенденция к постепенному увеличению доли так называемых «дискретных» или «конечных» разделов математики (таких как комбинаторика, теория графов, кодирование и др.) в общем объеме математических знаний, которые преподаются школьникам и студентам.

В значительной степени это связано, по-видимому, с развитием вычислительной техники, поскольку в основе ее работы лежат различные дискретные устройства. Однако даже в «чистой» математике в последнее время наблюдается определенное смещение интересов от «непрерывных» к «дискретным» разделам (об этом можно судить, например, по увеличению количества и «толщины» математических журналов, посвященных такому разделу дискретной математики, как комбинаторика).

Наш опыт преподавания дискретной математики показывает, что значительно оживить учебный процесс и ввести в него элементы математического исследования, если угодно, элементы своеобразного «математического эксперимента», можно путем использования компьютерной техники для моделирования дискретных объектов (таких как графы, отношения, кольца, рекуррентные последовательности и т. д.) [1–7].

В данной работе мы хотели бы обсудить некоторые возможные постановки задач, которые допускают компьютерное исследование и математический эксперимент.

Исследование отношений на множестве

Пусть множество A состоит из n элементов. Зададим следующий вопрос: сколько различных бинарных отношений можно ввести на множестве A? Сколько из этих отношений являются рефлексивными, симметрическими, транзитивными? Сколько из этих отношений являются отношениями эквивалентностями?

Вопрос об общем количестве различных отношений и вопрос о количестве различных рефлексивных и симметрических отношений достаточно просто решается без использования компьютера. Покажем это.

Пусть $M = M(\rho)$ — матрица бинарного отношения ρ на множестве $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то есть квадратная матрица n-го порядка такая, что элемент M_{ij} этой матрицы равен 1, если $x_i \xrightarrow{\rho} x_j$ (элемент x_i находится в отношении ρ к элементу x_j), и равен 0 в противном случае.

Количество различных отношений на множестве A равно количеству различных булевых матриц размера $n \times n$, то есть равно $N(n) = 2^{n^2}$. (Булевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны числу 0 или числу 1.)

Отношение ρ является рефлексивным тогда и только тогда, когда все элементы матрицы $M(\rho)$, стоящие на главной диагонали, равны 1. Поэтому количество различных рефлексивных отношений на множестве A равно $N_{\mathrm{refl}}(n) = 2^{n(n-1)}$.

Отношение ρ является симметрическим тогда и только тогда, когда матрица $M(\rho)$ является симметрической. Поэтому количество различных симметрических отношений на множестве A равно

$N_{\text{sym}}(n) = 2^{n(n+1)/2}$.

К сожалению, количество различных транзитивных отношений на множестве A так просто найти нельзя. И здесь на помощь приходит компьютерная техника.

Можно доказать, что отношение ρ является транзитивным тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: если рассмотреть булево произведение $M(\rho)*M(\rho)$ матрицы $M(\rho)$ на себя, то во всех позициях, в которых в матрице $M(\rho)*M(\rho)$ стоят единицы, в матрице $M(\rho)$ тоже должны стоять единицы.

Указанное условие можно достаточно легко запрограммировать на компьютере и найти таким образом количество различных транзитивных отношений.

Результаты проведенных студентами расчетов (при $n=1$, 2, 3, 4) приведены в таблице.

Результаты численного эксперимента

рефлекс.	симметр.	транзит.	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
–	–	–	0	0	260	56878
–	–	+	0	6	132	3602
–	+	–	0	3	46	923
–	+	+	1	3	10	37
+	–	–	0	0	32	3692
+	–	+	0	2	24	340
+	+	–	0	0	3	49
+	+	+	1	2	5	15
$\sum$			2	16	512	65536

Из таблицы видно, что свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности могут сочетаться между собой во всех восьми возможных сочетаниях. Иначе говоря, круги Эйлера, изображающие множество всех рефлексивных отношений, множество всех симметрических отношений и множество всех транзитивных отношений находятся на диаграмме Эйлера — Венна в «общем положении».

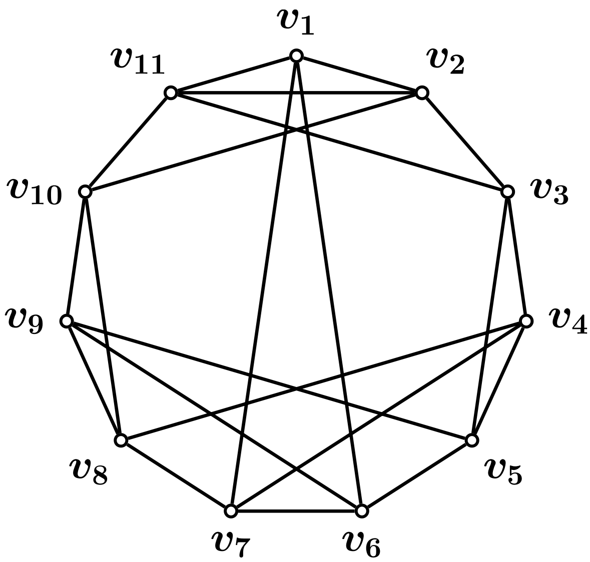
Рассмотренные нами вопросы далеко не исчерпывают чрезвычайно разнообразную и интересную тематику, связанную с изучением отношений на множестве. Можно изучать антирефлексивные отношения, антисимметрические отношения, связные отношения, отношения порядка (и их диаграммы Хассе), отношения толерантности и т. д.

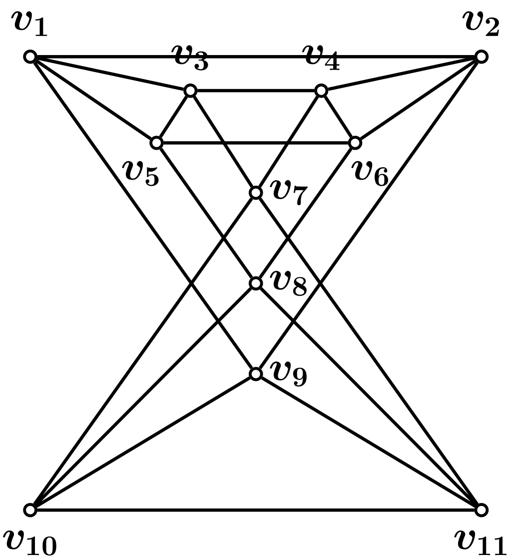
Компьютерное моделирование графов

С помощью компьютера можно изучать также другие дискретные объекты (графы, кольца, рекуррентные последовательности и т. д.).

Приведем в качестве примера задачу из теории графов, которая вызвала большой интерес у студентов (автором этой задачи является автор статьи): «Существует ли регулярный граф четвертой степени, содержащий 11 вершин, в котором между любыми двумя вершинами существует путь длины два?»

Читатели могут попытаться нарисовать граф, обладающий указанными свойствами. Однако сделать это не так-то просто. И здесь на помощь приходит компьютерная техника. Написав не очень сложную программу, можно поручить компьютеру перебрать все возможные регулярные графы четвертой степени, имеющие 11 вершин, в надежде найти граф, в котором между любыми двумя вершинами существует путь длины два. При этом можно воспользоваться следующим утверждением из теории графов: если A — матрица смежности графа G, то количество путей длины s из вершины v_i в вершину v_j графа G равно элементу $(A^s)_{ij}$ матрицы A^s. Поэтому условие, что в графе G между любыми двумя вершинами существует путь длины два, равносильно условию, что в матрице A^2 нет ненулевых элементов.





Регулярный граф четвертой степени с одиннадцатью вершинами,
в котором между любыми двумя вершинами существует путь длины два

После нескольких секунд (или минут) поисков компьютеру удается найти граф, обладающий указанными свойствами. Дальнейший анализ с помощью компьютера показывает, что такой граф единственен с точностью до изоморфизма. Два различных изображения этого графа приведены на рисунке. Любопытно, что ребра графа образуют два реберно непересекающихся гамильтоновых цикла.

Заключение

Наш опыт внедрения компьютеризации в курс дискретной математики показывает исключительную плодотворность этого процесса. Зачастую сформулированная преподавателем задача в дальнейшем существенно расширяется, дополняется и самостоятельно исследуется в новой, более интересной или общей постановке, уже самими студентами. Процесс обучения становится по-настоящему творческим.

По нашему мнению, курс дискретной математики является в каком-то смысле идеальным местом для использования в учебном процессе современных компьютерных технологий.

Мы были бы очень рады ознакомиться с опытом других преподавателей и будем благодарны за любые комментарии или замечания по затронутым в данной статье вопросам.

Библиографические ссылки

1. *Зыков К.А., Костин С.В.* Дискретная математика: практикум. М.: РТУ МИРЭА, 2024.

2. *Абросимов М.Б., Костин С.В.* К вопросу о примитивных однородных графах с экспонентом, равным 2 // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2017. № 10. С. 131–134.

3. *Абросимов М.Б., Костин С.В., Лось И.В.* О наибольшем числе вершин примитивных однородных графов порядка 2, 3, 4 с экспонентом, равным 2 // Прикладная дискретная математика. 2021. № 52. С. 97–104.

4. *Костин С.В.* Автономные рекуррентные последовательности // Фундаментальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования: сборник докладов X международной научной конференции (Елец, 20–22 сентября 2024 г.). Елец: Елецкий гос. ун-т имени И.А. Бунина, 2024. С. 134–139.

5. *Костин С.В.* Надо ли в школе изучать понятие «отношение»? // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2015. № 17. С. 255–259.

6. *Костин С.В.* Об изучении понятия «отношение» в вузовском курсе математики // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2014. № 16. С. 148–164.

7. *Костин С.В.* Тождества булевой алгебры множеств и логические равносильности // Тенденции и перспективы развития математического образования: материалы XXXIII международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (Киров, 25–27 сентября 2014 г.). Киров: Вятский гос. гуманит. ун-т, 2014. С. 192–194.