УДК 372.851

ОСОБЕННОСТИ ТРАНСФОРМАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЦИФРОВУЮ ЭПОХУ

В. А. Тестов[1], Р. А. Попков[2]

[1]Вологодский государственный университет, Вологда, Россия, vladafan@inbox.ru
[2]Национальный исследовательский университет ИТМО, Санкт Петербург, Россия, rpopkov@itmo.ru

Показывается, что цифровая трансформация общества и образования связана с новым этапом математизации знаний. Появились и новые возможности для обучения в связи с появлением мощных СКА. Поэтому необходимо менять как содержание математических курсов, так и методы их преподавания, отдавая предпочтение исследовательскому обучению и применению СКА, в частности системе SageMath.

Ключевые слова: математизация знаний; математическое моделирование; исследовательское обучение; компьютерные эксперименты.

FEATURES OF TRANSFORMATION OF MATHEMATICAL EDUCATION IN THE DIGITAL AGE

Vladimir Afanasyevich Testov[1], Roman Andreevich Popkov[2]

[1]Vologda State University, Vologda, Russia, vladafan@inbox.ru
[2]National Research University ITMO, St. Petersburg, Russia, rpopkov@itmo.ru

It is shown that the digital transformation of society and education is associated with a new stage in the mathematization of knowledge. There are also new learning opportunities due to the advent of powerful SKA. Therefore, it is necessary to change both the content of mathematical courses and the methods of teaching them, giving preference to research training and the use of SKA, in particular the SageMath system.

Keywords: mathematization of knowledge; mathematical modeling; research training; computer experiments.

Введение

В современном мире происходит стремительный процесс цифровой трансформации различных сторон жизни общества. Этот процесс представляет собой очередную информационную революцию, возникновение таких математизированных областей знаний, как искусственный интеллект, большие данные, нейросети и т.д. Эта революция является результатом синергии двух процессов, проходивших до этой поры независимо друг от друга – процесса информатизации общества и процесса математизации научных знаний [1]. Процесс математизации знаний начался давно, задолго до появления компьютеров. Необходимо заметить, что на протяжении всей истории развития математики ее основные результаты были получены сначала с помощью экспериментов и индуктивных рассуждений. Но еще в античности появились **предпосылки для превращения** математики в теоретическую науку, основанную на аксиоматическом методе. Наиболее полное представление о математике того периода дают «Начала» Евклида. Однако в тот же период Архимед показал эффективность применения в математике также экспериментальных методов, которые позволяют получить важные результаты.

Теоретико-множественный подход и аксиоматический метод наиболее широкое развитие получили в период с конца XIX и по 60-е годы XX века. Аксиоматическое мышление оказало существенное влияние на развитие всей математики, которая стала образцом использования в науке точных понятий и логических рассуждений. Такое понимание математики проникло и в школьные и вузовские математические курсы, в которых преподаватели стремились все логически обосновать и доказать. Однако во многих случаях логическую стройность они были вынуждены заменить только ее видимостью. Начиная с 70-х годов XX века идеи аксиоматической парадигмы в математике стали уступать место другим направлениям, которые ближе к практике и экспериментам. Ряд крупных математиков (В.И. Арнольд, М. Клайн и др.) выступили с критикой аксиоматического мышления, утверждая, что математика перестала удовлетворять критериям абсолютной истинности и неизменности.

Методология исследования

В настоящее время характерной методологической чертой математики становится взаимодействие в ней различных методов и направлений, в том числе экспериментальных и теоретических методов, жесткого и мягкого моделирования и т.д. Это взаимодействие создает синергетический эффект, который способствует выходу математических исследований на новый уровень [2].

С появлением современных программных средств для обработки математических данных существенно увеличились возможности проведения экспериментов с объектами математических исследований, заменяющими реальные натурные эксперименты. Все явственнее становится необходимость внедрения методов экспериментальной математики не только в научные исследования, но и в образовательный процесс. Эти методы могут служить ключом к успешной реализации исследовательского обучения как в школьных, так и в университетских математических курсах, что открывает новые горизонты для повышения эффективности подготовки будущих специалистов [3].

Результаты и их обсуждение

Как показывает анализ содержания современных математических курсов, у многих преподавателей наблюдается стремление по-прежнему все обосновать и доказать, в то время как методы исследовательского обучения получают недостаточное применение. Содержание математических курсов остается верным традициям и не отражает современных реалий, связанных с появлением новой парадигмы в математике и новых компьютерных технологий [4]. Обучение математике должно сосредоточиться на достижении понимания основных идей и на развитии навыков творческого мышления, а не на запоминании информации или на овладении рутинными вычислительными навыками.

Современные системы компьютерной алгебры (СКА) предоставляют замечательную возможность проведения таких экспериментов [5]. Эти системы не требуют от человека владения глубокими программистскими навыками, и их команды близки естественному языку. Использование СКА можно начать внедрять с самых первых дней пребывания студентов в вузе. В этот период представляется разумным сосредоточиться на задачах, с которыми студенты сталкивались в школе, но которые предоставляют хорошие примеры для будущих абстрактных понятий. Если говорить об алгебраических дисциплинах, то одним из лучших вариантов такого выбора являются задачи по теории чисел. Они являются одними из самых сложных задач на ЕГЭ, а восторг, испытываемый студентом от того, сколь эффективно СКА решает сложную задачу, является хорошей мотивацией для дальнейшего изучения математики и ее приложений, например в криптографии.

Выбор конкретной системы компьютерной алгебры является делом вкуса. Мы советуем обратить внимание на систему *SageMath*. Она бесплатная и свободно распространяемая, богатая возможностями и продолжающаяся развиваться, её синтаксис подобен *Python*-у. Приведём несколько примеров (после знака # в *Sage* приводится комментарий).

1. Выясните, какой остаток даёт число $\underbrace{2025\,2025...2025}_{100}$ при делении на 133. Совершенно естественно сначала посмотреть какие-то частные случаи:

```
sage: mod(2025, 133); mod(20252025, 133), mod(202520252025, 133)
sage: # mod(a, b) – остаток от деления a на b
        (30, 115, 112)
```

Это показывает, что найти какую-либо закономерность, даже если она есть, трудно. Поэтому стоит предложить студентам сразу перейти к заданному числу. Конечно, можно организовать для этого цикл, но есть способ проще.

```
sage: str_n = '2025' * 100 # создаём строку из ста блоков 2025
sage: n = Integer(str_n) # преобразовываем строку в целое число
sage: mod(n,133) # смотрим остаток
    30
```

Здесь вполне уместно провести небольшое исследование и составить таблицу остатков в зависимости от количества блоков, например, от 1 до 100.

2. Определите, сколькими нулями оканчивается число 2025!

Данная задача является поводом вспомнить основную теорему арифметики и *понять* благодаря чему на конце числа получаются нули. Как эту задачу решить в *Sage*? Разумеется, не нужно выводить само это число на экран и считать нули вручную. Систему нужно спрашивать именно то, что мы хотим узнать – это важный навык при работы и стоит сразу приучать к нему студентов.

```
sage: n = factorial(2025) # мы не выводим на экран само число!
sage: str_n = str(n) # преобразовываем числа в строку
sage: len(str_n) # длина строки
    5819
sage: str_n.rstrip('0') # удаление из строки нулей на конце
sage: len(str_n) – len(str_n.rstrip('0'))
    505
```

Заключение

В заключение отметим, что эксперименты в системах компьютерной алгебры являются, если несколько изменить метафору Дэнила Деннета [6], «насосами мышления», которые при правильном использовании «накачивают» ум и гипотезами, и примерами, и конструкциями. В конечном итоге, всё это способствуем тому, к чему мы и стремимся – *пониманию*.

Библиографические ссылки

1. *Тестов В.А.* Цифровизация науки и образования как результат синергии процессов информатизации и математизации // Педагогическая информатика. 2024. № 2. С. 111-120.
2. *Перминов Е.А., Тестов В.А.* Математизация профильных дисциплин как основа фундаментализации IT-подготовки в вузах // Образование и наука. 2024.Т. 26, №7. С. 12–43.

3. *Вавилов Н.А., Халин В.Г.,* Юрков А.В. Небеса падают: Математика для нематематиков //Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2023, Т. 511, № 1. С. 144-160.

4. *Попков Р.А., Москаленко М.А., Табиева А.В., Матвеева М.В*. Алгебра vs компьютерная алгебра в контексте массового математического образования // Современное профессиональное образование. 2024. №3. С. 50-53.

5. *Тестов В.А., Попков Р.А.* Исследовательское обучение математике и системы компьютерной алгебры //Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 4(53). С. 52−68.

6. *Деннет Д.* Насосы интуиции и другие инструменты мышления. М.: Издательство АСТ: CORPUS. 2019. 576 с.