УДК 51.37

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ WOLFRAM MATHEMTICA ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО КУРСУ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»

К. В. Василевский[1], И. С. Козловская [2]

[1]Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск, VasilevskyK@bsu.by
[2]Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск, Kozlovskaja@bsu.by

В статье рассматриваются современные подходы к преподаванию математических дисциплин, исследуется их значимость при преподавании курса «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» в Белорусском государственном университете.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения; компьютерная алгебра; волновое уравнение; уравнение теплопроводности.

USING THE WOLFRAM MATHEMTICA PACKAGE WHEN CARRYING OUT LABORATORY WORK IN THE COURSE "PARTIAL DERIVATIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS"

K. V. Vasilevsky[1], I. S. Kozlovskaya[2]

[1]Belarussian state university, Belarus, Minsk, VasilevskyK@bsu.by
[2]Belarussian state university, Belarus, Minsk, Kozlovskaja@bsu.by

The article discusses modern approaches to teaching mathematical disciplines and explores their significance when teaching the course "Partial differential equations and their applications" at the Belarusian State University.

Keywords: differential equations; computer algebra; wave equation; heat conduction equation.

Введение

В настоящее время возникает необходимость приближения курса «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» к современному уровню математической науки с одной стороны, а с другой – потребностью включения в него элементов приложений математики, отвечающих потребностям современной практики.

Поэтому при чтении лекций по курсу «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» в качестве материала, иллюстрирующего возможности математического моделирования в различных ситуациях [1] , активно используются примеры исследований в конкретной предметной области. Основная задача состоит в том, чтобы научить студента умению применять на практике методы решения задач, возникающих в прикладных вопросах, связанных с математическими модулями, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Использование системы компьютерной алгебры WOLFRAM MATHEMTICA при проведении лабораторных работ

Для более глубокого понимания студентами изучаемых ими классических математических тем и применением их для решения практических задач используются современные средства компьютерной математики. Применение компьютерной математики существенно расширяет возможности автоматизации всех этапов математического моделирования, так как представляет совокупность теоретических, алгоритмических, аппаратных и программных средств, предназначенных для эффективного решения на компьютерной технике всех видов математических задач, включая символьные преобразования и вычисления с высокой степенью визуализации всех видов вычислений.

Системы компьютерной математики позволяют провести исследование проблемы, анализ данных, моделирование, тестирование, проверку существования решения, оптимизацию, документирование и оформление результатов, они позволяют сосредоточить основное внимание на существе проблемы, оставляя в стороне технику классической математики, детали вычислительных методов и алгоритмических процедур, нюансы языков программирования и команд операционной системы.

Такое расширение роли инструментария математики и информатики в содержании математического образования может стать эффективным способом воплощения деятельностного подхода к обучению, расширения понимания роли математики как средства решения реальных практических задач.

В частности на лабораторных работах по курсу «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» [2] пакет Wolfram Mathematica используется для решения уравнений в частных производных методом характеристик и анимации полученного решения с помощью функций Plot и Manipulate при различных значениях параметров; для решения задач Коши и Гурса для уравнений в частных производных второго порядка и визуализации решения с помощью функции Plot3D; для визуализации процесса распространения тепла в стержне в зависимости от различных внешних условий; для построения эквипотенциальных поверхностей электромагнитных полей, для решения смешанных задач методом Фурье и визуализаций решений, в том числе электрических и магнитных полей на основании полученных результатов.

Пример 1. Задача Дирихле внутри круга.

$$\Delta u = r^4 \cos(2\varphi) + r^3 \sin(3\varphi),\quad 0<r<4,\quad 0<\varphi<2\pi,$$

$$u\,|_{r=4} = 2\cos(4\varphi) + 3\sin\varphi.$$

Решение данной задачи в Wolfram Mathematica (рис. 1):

```
In[1]:= peqn = {Laplacian[u[r, φ], {r, φ}, "Polar"] == r^4 Cos[2 φ] + r^3 Sin[3 φ]};

In[2]:= pbc = {u[4, φ] == 2 Cos[4 φ] + 3 Sin[φ]};

In[3]:= sol = u[r, φ] /. DSolve[{peqn, pbc}, u[r, φ], {r, φ}][[1]]; sol // TraditionalForm

Out[3]//TraditionalForm=
```

$$\frac{1}{128} r\left(r^3 \cos(4\varphi) + 96\sin(\varphi)\right) + \frac{1}{32}\left(r^2-16\right) r^2 \left(\left(r^2+16\right)\cos(2\varphi) + 2r\sin(3\varphi)\right)$$

Рис. 1. Решение задачи Примера 1 в Wolfram Mathematica.

Исходное уравнение записываем с помощью функции **Laplacian**, а третьим аргументом указываем, что система координат полярная.

Для визуализации данного решения потребуется переход в декартовы координаты (рис. 2).

```
In[5]:= solCart = TransformedField["Polar" → "Cartesian",
    1/128 r (r^3 Cos[4 φ] + 96 Sin[φ]) + 1/32 r^2 (-16 + r^2) ((16 + r^2) Cos[2 φ] + 2 r Sin[3 φ]),
    {r, φ} → {x, y}];
  U[x_, y_] := FullSimplify[solCart, Trig → True];

  U[x, y]
Out[5]=
```

$$\frac{1}{128}\left(x^4 + 96y - 6x^2y^2 + y^4 + 4(x-y)(x+y)\left(-16+x^2+y^2\right)\left(16+x^2+y^2\right) + 8\left(-16+x^2+y^2\right)\left(3x^2y - y^3\right)\right)$$

Рис. 2. Переход к декартовым координатам.

С помощью функции **TransformField** переходим к декартовым координатам. И, наконец, визуализация (рис. 3):

```
In[7]:= Plot3D[U[x, y], {x, y} ∈ Region[Disk[{0, 0}, 4]], Boxed → False, Mesh → False,
   AxesStyle → Arrowheads[0.05], LabelStyle → Directive[Blue, 14, Italic, Bold]]
```

Out[7]=

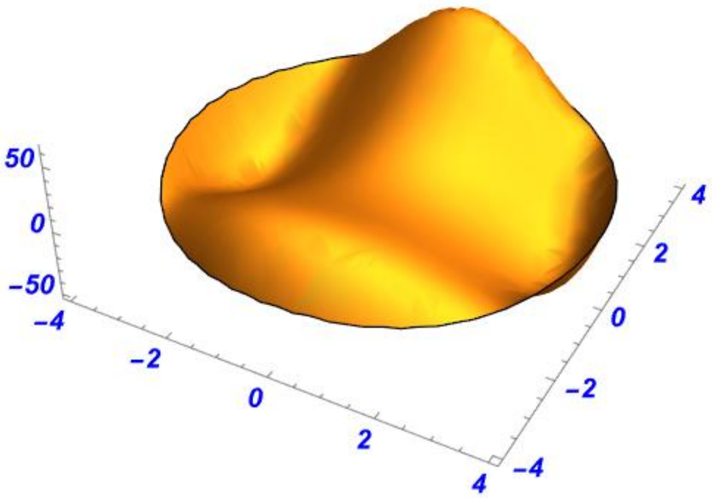

Рис. 3. Визуализация решения в трехмерном пространстве.

Здесь использованы новые возможности Wolfram Mathematica в части выбора переменных из заданной геометрической области (в функции **Plot3D** с помощью функции **Region** вторым аргументом указываем, что переменные *x* и *y* принадлежат кругу с центром в начале координат радиуса 4).

Кроме того, с помощью функции **StreamPlot** можно также визуализировать электрическое поле, которое задается с помощью градиента (функция **Grad**) от электрического потенциала, указав через **Region** принадлежность *x* и *y* кругу с центром в начале координат радиуса 4 (рис. 4).

```
In[8]:= EPField = StreamPlot[Evaluate[-Grad[U[x, y], {x, y}]], {x, y} ∈ Region[Disk[{0, 0}, 4]],
    PlotRange → 2, PlotTheme → "Scientific"];

In[9]:= CReg = Graphics[{Yellow, Disk[{0, 0}, 4]}];
   Show[CReg, EPField, Axes → True, AxesLabel → {x, y}, Frame → False,
    AxesStyle → Arrowheads[0.05], LabelStyle → Directive[Blue, 14, Italic, Bold]]
```

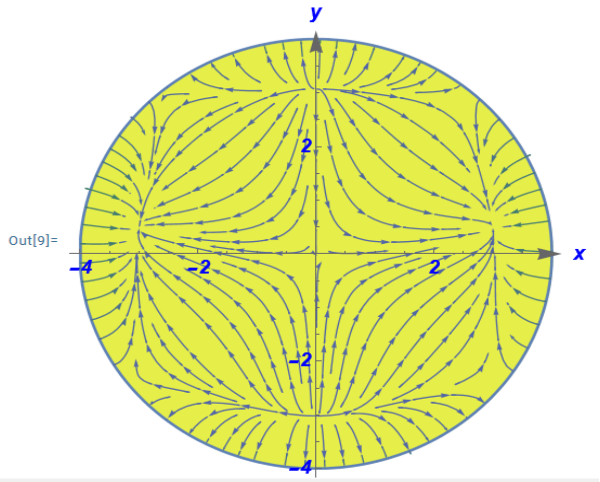

Рис. 4. Визуализация электрического поля.

Заключение

Использование системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica повышает значимость курса «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения», как инструмента математического моделирования и демонстрирует современные принципы в программировании сложных научно-технических задач.

Таким образом, включение реальных прикладных задач в курс «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» и использование технических и программных средств позволило с одной стороны разнообразить формы и методы обучения, способствующие прежде всего, заинтересованности студентов в успешном освоении курса и высокому качеству получаемых знаний, с другой стороны, стимулировать студентов к проведению научных исследований, созданию инновационных проектов.

Библиографические ссылки

1. *Корзюк В.И.* Уравнения математической физики. Учебное пособие. М.: ЛЕНАНД. 2021.

2. *Дайняк В. В., Козловская И. С., Чеб Е. С.* Практикум по дифференциальным уравнениям в частных производных: методические указания и задания для самостоятельных и лабораторных работ. В шести частях. Часть 1. Минск: БГУ. 2023.