УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛИТЫ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

А. И. Мирончук

ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», РФ, ДНР, Донецк,
a.i.mironchuk@yandex.ru

В данной работе с применением методов комплексных потенциалов, малого параметра и обобщенных наименьших квадратов получено решение задачи линейной вязкоупругости для многосвязной анизотропной плиты с квадратным отверстием. Для определения искомых функций использовано представление в виде рядов Лорана. При этом формируется переопределённая система линейных алгебраических уравнений для вычисления коэффициентов этих рядов. Используя известные функции приближений и представления степенями малого параметра, были определены значения изгибающих моментов в произвольные моменты времени.

Ключевые слова: вязкоупругость; многосвязная плита; комплексные потенциалы теории изгиба плит; метод малого параметра; обобщенный метод наименьших квадратов.

STUDY OF THE STRESS-STRAIN STATE OF A VISCOELASTIC PLATE WITH A CURVILINEAR HOLE

A. I. Mironchuk

Donetsk State University, Russian Federation, Donetsk People's Republic, Donetsk,
a.i.mironchuk@yandex.ru

In this paper, using the methods of complex potentials, small parameter and generalized least squares, a solution to the problem of linear viscoelasticity for a multiply connected anisotropic plate with a square hole is obtained. To determine the desired functions, a representation in the form of Laurent series is used. In this case, an overdetermined system of linear algebraic equations is formed to calculate the coefficients of these series. Using known approximation functions and representations by powers of a small parameter, the values of bending moments at arbitrary moments of time were determined.

Keywords: viscoelasticity; multiply connected plate; complex potentials of plate bending theory; small parameter method; generalized least squares method.

Введение

Тонкие пластинки, находящиеся в условиях поперечного изгиба и называемые в этом случае тонкими плитами, находят широкое применение в авиастроении, приборостроении и в других областях современной техники. Зачастую эти плиты по технологическим или эксплуатационным причинам имеют отверстия, около которых при изгибе возникают высокие концентрации изгибающих моментов (а, следовательно, и напряжений), которые необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Для случая стационарного состояния, когда напряженно-деформированное состояние (НДС) многосвязных плит не изменяется со временем, в работах [1–4] предложены методы решения таких задач, даны решения различных задач инженерной практики. Но в реальных случаях НДС тел после приложения внешних воздействий с течением времени изменяется, что нужно учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Для многосвязных пластин, находящейся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, методы решения таких задач предложены в работах [5; 6], а в работе [7] они распространены на случай изгиба тонких плит с эллиптическими отверстиями и трещинами. Наиболее часто встречающиеся же случаи плит с криволинейными контурами не рассматривались.

Постановка и метод решения задачи

Рассмотрим тонкую вязкоупругую анизотропную плиту с квадратным отверстием. В случае такой плиты отверстие представлялось квадратом $ABCD$ с центром в начале координат и сторонами длины $2a_1$ каждая: $AB = BC = CD = DA = 2a_1$. Тогда вершины квадрата находятся в точках $A(a_1, a_1)$, $B(-a_1, a_1)$, $C(-a_1, -a_1)$, $D(a_1, -a_1)$. Стороны квадрата DA, AB, BC, CD рассматривались внешними берегами эллиптических разрезов L_1, L_2, L_3 и L_4.

Следуя предложенным в работах [5] подходам, задачу определения вязкоупругого состояния плиты будем решать методом малого параметра с использованием комплексных потенциалов. При таком подходе комплексные потенциалы теории изгиба тонких плит [1; 4] разлагаются в ряды по малому параметру вида [7]

$$W_k'(z_k) = \sum_{j=0} \lambda^j W_{jk}'(z_k) \tag{1}$$

где λ – малый параметр, в качестве которого выбирается изменение во времени коэффициента Пуассона ν_{12}; $W'_{jk}(z_k)$ – производные комплексных потенциалов приближений, имеющие в данном случае вид

$$W'_{jk}\left(z_k\right)=\Gamma_{jk}z_k+\sum_{l=1}^{4}W'_{jkl}\left(z_k\right) \tag{2}$$

Γ_{jk} – комплексные постоянные, которые находятся из решения известных систем [7]; $W'_{jkl}\left(z_k\right)$ – функции, голоморфные вне контуров L_{kl} областей S_k, получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями.

Используя методы конформных отображений и разложения функций в ряды Лорана, найдем общие представления неизвестных функций. Отобразим конформно внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}|\geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} в областях S_k [8]. Тогда функции $W'_{jkl}\left(z_k\right)$, голоморфные вне контуров L_{kl} в областях будут голоморфными вне кругов $|\zeta_{kl}|\geq 1$ и могут быть представлены рядами Лорана, поэтому функции **Ошибка! Источник ссылки не найден.** примут вид

$$W'_{jk}\left(z_k\right)=\Gamma_{jk}z_k+\sum_{l=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kln}a_{jkln} \tag{3}$$

где a_{jkln} – постоянные, определяемые из граничных условий на контурах.

Граничным условиям будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [7]. Для этого на контурах плиты выберем набор точек $t_{lm}\left(x_{lm},\, y_{lm}\right)$ $\left(m=\overline{1,\, M_l}\right)$ в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Тогда для определения неизвестных постоянных a_{jkln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty}g_{0kli}\delta_{k,s}\,\varphi'_{kln}(t_{klm})\,a_{jkln}=\\=\frac{df_{jli}(t_{lm})}{ds}-2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}g_{0kli}\delta_{k,s}\Gamma_{jk}\\\left(i=1,2;\;\; m=\overline{1,\, M_l};\;\; l=\overline{1,\,4}\right)\end{gathered} \tag{4}$$

в которых g_{0kli}, $f_{jli}(t_{lm})$ – известные постоянные и функции, которые определяются из граничных условий на контурах плиты;

$$\delta_{k,s} = dz_k / ds, \quad \varphi'_{k l n} = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} \left(\zeta_{kl}^2 - m_{kl}\right)}, \quad t_{klm} = x_{lm} + \mu_k y_{lm}$$

Систему (4) будем решать с использованием сингулярных разложений [9; 10]. После ее решения комплексные потенциалы (2) будут известными и по ним можно найти значения моментов в любой момент времени.

Описание результатов численных исследований

Были проведены численные исследования напряженного состояния плиты из материалов алюминий (материал М1) и эпоксид (М2) [5]. Как показали численные исследования значения моментов для начального момента приложения нагрузки $(t = 0)$ полностью совпадают со случаем аналогичной задачи в упругой постановке. Чем выше «степень анизотропии», т. е. степень отличия a_{11} / a_{22} от 1, тем больше уровень концентрации изгибающих моментов M_θ (их максимальные по модулю значения).

При приближении к вершинам квадрата значения моментов растут, стремясь к бесконечности. Также установлено, что при переходе в стационарное состояние значения изгибающих моментов вблизи отверстия претерпевают значительные изменения, причем наибольшие изменения претерпевают значения моментов в точках E и F, соответствующих углам $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$. Так, если плита изготовлена из материала М1 значения M_θ в точке E увеличиваются на 2%, в точке F уменьшаются на 35%, в случае плиты из материала М2 значения M_θ в точке E увеличиваются на 3%, а в точке F – на 9%.

Заключение

В данной статье с использованием ОМНК решена задача линейной вязкоупругости для анизотропной (в частном случае изотропной) плиты с криволинейным отверстием, описаны результаты численных исследований для плиты с квадратным отверстием с установлением закономерностей изменения НДС плиты в зависимости от ее материала, геометрических характеристик отверстий и времени после начала загружения.

Исследования проводились по теме государственного задания в ФГБОУ ВО «ДонГУ» (№ госрегистрации 124012400354-0).

Библиографические ссылки

1. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. Москва: Гостехиздат, 1957.
2. *Меглинский В.В.* Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит// Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. Вып. 3. 1967. С. 97–127.
3. *Космодамианский А.С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. Киев. Донецк: Вища шк. 1976.
4. *Калоеров С.А.* Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит // Теорет. и прикладная механика. 2012. Вып. 4(50). С. 113–132.
5. *Калоеров С.А., Мироненко А.Б.* Исследование вязкоупругого состояния пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями // Прикладная механика. 2007. Т.43, №2. С.88–98.
6. *Калоеров С.А., Паршикова О.А.* Термовязкоупругое многосвязной анизотропной пластинки // Прикладная механика. 2012. № 3 (48). С. 103–116.
7. *Калоеров С.А., Занько А.И.*. Решение задачи линейной вязкоупругости для многосвязных анизотропных плит // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58, № 2. С. 141–151.
8. *Калоеров С.А., Горянская Е. С.* Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. Киев: А. С. К. 1998. С. 10–26.
9. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры. Москва: Наука, 1977.
10. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. Москва: Мир. 1980. 280 с.