

ЭРМИТОВА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ТИПА С УЗЛАМИ ПЯТОЙ КРАТНОСТИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА УРЫСОНА

М. В. Игнатенко

Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск, ignatenkomv@bsu.by

Рассмотрена задача построения интерполяционных формул эрмита типа относительно произвольной чебышевской системы функций с узлами произвольной кратности для операторов, заданных на функциональных пространствах.

Приведенные операторные формулы содержат интегралы Стильтьеса и дифференциалы Гато интерполируемого оператора и являются инвариантными для специального класса операторных многочленов соответствующих степеней.

Применение интерполяционных правил Эрмита проиллюстрировано на примере построения явной интерполяционной формулы относительно алгебраической системы функций с узлами пятой кратности для оператора Урысона.

Ключевые слова: интерполяционная задача Эрмита; операторный многочлен; операторное интерполирование; дифференциал Гато; интеграл Стильтьеса; оператор Урысона.

HERMITE INTERPOLATION FORMULA OF ALGEBRAIC TYPE WITH FIFTH MULTIPLICITY NODES FOR OPERATOR URYSON

M. V. Ignatenko

Belarusian State University, Belarus, Minsk, ignatenkomv@bsu.by

The problem of constructing Hermite-type interpolation formulas with respect to an arbitrary Chebyshev system of functions with nodes of arbitrary multiplicity for operators defined on function spaces is considered.

The presented operator formulas contain the Stieltjes integrals and the Gateaux differentials of the interpolated operator and are invariant for a special class of operator polynomials of the corresponding degrees.

The application of the Hermite interpolation rules is illustrated by the example of constructing an explicit interpolation formula with respect to an algebraic system of functions with nodes of the fifth multiplicity for the Urysohn operator.

Keywords: Hermite interpolation problem; operator polynomial; operator interpolation; Gateaux differential; Stieltjes integral; Urysohn operator.

Введение

Рассмотрим на числовом множестве D чебышевскую систему непрерывно дифференцируемых необходимое число раз функций $\{\varphi_k(s)\}$ и соответствующие многочлены вида

$$P_n(s) = \sum_{k=0}^n a_{nk} \varphi_k(s), \quad (1)$$

где a_{nk} – комплексные или действительные числа ($k = 0, 1, \dots, n$; $n = 0, 1, 2, \dots$). По определению чебышевской системы функций любой многочлен степени n вида (1) будет иметь на D не более чем n корней с учетом их кратностей.

Положим

$$H_n(f; s) = \sum_{k=0}^m \sum_{v=0}^{\alpha_k-1} H_{vk}^{(m)}(s) f^{(v)}(s_k). \quad (2)$$

Здесь $H_{vk}^{(m)}(s) \equiv H_{v,k}^{(m)}(s)$ – многочлены вида (1), такие, что $\frac{d^j}{ds^j} H_{vk}^{(m)}(s_i) = \delta_{ki} \delta_{jv}$ ($0 \leq j \leq \alpha_i - 1$; $i = 0, 1, \dots, m$), где δ_{pq} – символ Кронекера, s_k – различные точки из D и $f(s)$ – дифференцируемая $\alpha_k - 1$ раз в каждой точке s_k функция ($k = 0, 1, \dots, m$; $n = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1$). Интерполяционный многочлен Эрмита (2) всегда существует и единственен для любой системы функций Чебышева $\{\varphi_q(s)\}_{q=0}^n$. Известно, что если $f(s)$ является многочленом вида (1) степени не выше n , то $H_n(f; s)$ тождественно совпадает с ним.

Через $\sigma_m(s) = \sum_{k=0}^m H_{0k}^{(m)}(s)$ обозначим сумму фундаментальных многочленов $H_{0k}^{(m)}(s)$ ($k = 0, 1, \dots, m$) чебышевской системы функций $\{\varphi_q(s)\}_{q=0}^n$, которая является постоянной величиной или некоторой функцией на множестве D .

Формулы Эрмита для операторов, дифференциалы Гато которых содержат произведение направлений

Пусть X и Y – некоторые заданные множества функций и F – оператор, отображающий X в Y . Рассмотрим операторы $F(x)$, для которых

вычисленные ν -е дифференциалы Гато $\delta^\nu F[x; h_1, h_2, \dots, h_\nu]$ содержат произведение заданных направлений $h_1(s), h_2(s), \dots, h_\nu(s)$. В частности, если

$F(x) = f(t, x(s))$, где $f(t, u)$ – скалярная функция аргументов t и u , то $\delta^k F[x; h_1, h_2, \dots, h_k]$

операторы Гаммерштейна, Урысона и др. Пусть $\delta^\nu F[x; h_\nu]$ – дифференциал ν -го порядка, когда первые $\nu - 1$ направления $h_i(s) \equiv 1$, а ν -е направление есть функция $h_\nu(s)$.

Рассмотрим операторы

$$D_m(x) = b(t) + \sum_{i=0}^m \int_a^b b_i(t, s) \varphi_i(x(s)) ds, \quad (3)$$

где $b(t)$ – произвольно заданная функция, а $b_i(t, s)$ – некоторые функции, для которых интегралы, входящие в (3), существуют, и необходимые в дальнейшем преобразования допустимы.

Приведем [1] операторные интерполяционные формулы эрмита типа с узлами произвольной кратности, содержащие интегралы Стильтеса и дифференциалы Гато интерполируемого оператора, на основе фундаментальных многочленов эрмита интерполирования для скалярных функций.

Т е о р е м а. Оператор

$$\begin{aligned} H_n(x) = & F(x_0) \sigma_m(x) + \sum_{k=0}^m \sum_{\nu=1}^{\alpha_k-1} \delta^\nu F[x_k; H_{\nu k}^{(m)}(x)] + \\ & + \sum_{k=1}^m \int_0^1 H_{0k}^{(m)}[x(\tau)] d_\tau F[x_0(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_k(\cdot) - x_0(\cdot))], \end{aligned} \quad (4)$$

где числовая функция

$$\chi(\tau, t) = \begin{cases} 1, & \tau \geq t; \\ 0, & \tau < t, \end{cases} \quad 0 < \tau < 1; \quad \chi(0, t) \equiv 0, \quad \chi(1, t) \equiv 1, \quad (5)$$

является эрмитовым интерполяционным многочленом относительно узлов $x_k(t) \in X$ кратности α_k ($k = 0, 1, \dots, m; \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1 = n$) для оператора $F(x)$ и удовлетворяет условиям

$$\delta^\nu H_n[x_k; h_{k1} h_{k2} \dots h_{k\nu}] = \delta^\nu F[x_k; h_{k1} h_{k2} \dots h_{k\nu}] \quad (0 \leq \nu \leq \alpha_k - 1; \quad k = 0, 1, \dots, m). \quad (6)$$

Если $\sigma_m(x)$ – постоянная на D величина, а интерполируемый оператор $F(x)$ имеет вид (3), где $[a, b] = [0, 1]$, то $H_n(x) \equiv F(x)$.

Интерполяционный многочлен Эрмита относительно узлов пятой кратности для оператора Урысона

Пусть $F(x) = \int_0^1 K[t, s, x(s)] ds$ – оператор Урысона, узлы интерполирования $x_v(s) \in C[0, 1]$ ($v = 0, 1, \dots, m$) и $\varphi_k(s) = s^k$ – алгебраическая система функций ($k = 0, 1, \dots, 4m + 3$), $t \in [c, d]$.

С учетом тождества $\sigma_m(x) = \sum_{k=0}^m H_{0k}(x) \equiv 1$, справедливого для рассматриваемой алгебраической системы функций, интерполяционный многочлен Эрмита (4) относительно узлов пятой кратности, т.е. $\alpha_v = 5$; $v = 0, 1, \dots, m$, примет вид

$$\begin{aligned} H_{5m+4}(x) = \sum_{k=0}^m \int_0^1 \{ & K[t, s, x_k(s)] H_{0k}^{(m)}(x(s)) + \\ & + K'_x[t, s, x_k(s)] H_{1k}^{(m)}(x(s)) + K''_x[t, s, x_k(s)] H_{2k}^{(m)}(x(s)) + \\ & + K'''_x[t, s, x_k(s)] H_{3k}^{(m)}(x(s)) + K^{(4)}_x[t, s, x_k(s)] H_{4k}^{(m)}(x(s)) \} ds, \end{aligned}$$

где операторы $H_{vk}^{(m)}(x(s)) \equiv H_{vk}^{(m)}(x)$ ($v = 0, 1, 2, 3, 4$) задаются равенствами

$$H_{0k}^{(m)}(x) = l_k^5(x) \left[1 + C_{1k}(x - x_k) + C_{2k}(x - x_k)^2 + C_{3k}(x - x_k)^3 + C_{4k}(x - x_k)^4 \right],$$

$$H_{1k}^{(m)}(x) = l_k^5(x) \left[(x - x_k) + C_{1k}(x - x_k)^2 + C_{2k}(x - x_k)^3 + C_{3k}(x - x_k)^4 \right],$$

$$H_{2k}^{(m)}(x) = \frac{l_k^5(x)}{2} \left[(x - x_k)^2 + C_{1k}(x - x_k)^3 + C_{2k}(x - x_k)^4 \right],$$

$$H_{3k}^{(m)}(x) = \frac{l_k^5(x)}{6} \left[(x - x_k)^3 + C_{1k}(x - x_k)^4 \right], \quad H_{4k}^{(m)}(x) = \frac{l_k^5(x)}{24} (x - x_k)^4,$$

$$C_{1k} = -\frac{5\omega_m''(x_k)}{2\omega_m'(x_k)}, \quad C_{2k} = -\frac{5\omega_m'''(x_k)}{6\omega_m'(x_k)} + \frac{15}{4} \left[\frac{\omega_m''(x_k)}{\omega_m'(x_k)} \right]^2,$$

$$C_{3k} = -\frac{35}{8} \left[\frac{\omega_m''(x_k)}{\omega_m'(x_k)} \right]^3 + \frac{5\omega_m''(x_k)\omega_m'''(x_k)}{2[\omega_m'(x_k)]^2} - \frac{5\omega_m^{(4)}(x_k)}{24\omega_m'(x_k)},$$

$$C_{4k} = \frac{35}{8} \left[\frac{\omega_m''(x_k)}{\omega_m'(x_k)} \right]^4 - \frac{35[\omega_m''(x_k)]^2\omega_m'''(x_k)}{8[\omega_m'(x_k)]^3} + \frac{5}{12} \left[\frac{\omega_m'''(x_k)}{\omega_m'(x_k)} \right]^2 +$$

$$+ \frac{5\omega_m''(x_k)\omega_m^{(4)}(x_k)}{8[\omega_m'(x_k)]^2} - \frac{\omega_m^{(5)}(x_k)}{24\omega_m'(x_k)}, \quad \omega_m(x) = \prod_{i=0}^m (x - x_i),$$

$$l_k(x) = \frac{\omega_m(x)}{\omega_m'(x_k)(x - x_k)}, \quad x = x(s), \quad x_k = x_k(s), \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Заключение

Отметим, что полученные результаты могут быть использованы как основа для построения приближенных методов решения интегральных, дифференциальных и других видов нелинейных операторных уравнений. Достаточно полная теория операторного интерполирования изложена в монографиях [2; 3].

Библиографические ссылки

1. *Игнатенко М. В.* Операторные интерполяционные формулы эрмитова типа с узлами произвольной кратности, основанные на тождественных преобразованиях функций // *Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук.* 2018. Т. 54, № 3. С. 263–272.
2. *Янович Л. А., Игнатенко М. В.* Основы теории интерполирования функций матричных переменных. – Минск: Беларуская навука, 2016. 281 с.
3. *Янович Л. А., Игнатенко М. В.* Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц. – Минск: Беларуская навука, 2020. 476 с.