

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕРЕГУЛЯРНОЙ ОБЛАСТИ

Ц. Дун

*Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск,
741704563cc@gmail.com*

Рассмотрен спектральный метод численного решения двумерных эллиптических задач в полигональной области с использованием преобразования Шварца-Кристоффеля. Основная идея заключается в конформном отображении исходной многоугольной области P на прямоугольную область $R \in (a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$, что позволяет свести задачу к вычислениям в области регулярной геометрии. На основе численных экспериментов показано, что спектральный метод Чебышева частично сохраняет свои преимущества в сравнении с методом конечных разностей при решении эллиптических задач в полигональной области с использованием преобразования Шварца-Кристоффеля.

Ключевые слова: Отображение Шварца-Кристоффеля; Уравнение Пуассона; нерегулярные области; спектральный метод Чебышева.

SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATIONS IN AN IRREGULAR DOMAIN

J. Dong

Belarussian state university, Belarus, Minsk, 741704563cc@gmail.com

A spectral method for numerical solution of two-dimensional elliptic problems in a polygonal domain using the Schwarz-Christophel transform is considered. The main idea is to conformally map the original polygonal domain P onto a rectangular domain $R \in (a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$, which allows reducing the problem to calculations in a domain of regular geometry. Based on numerical experiments, it is shown that the Chebyshev spectral method partially retains its advantages in comparison with the finite difference method when solving elliptic problems in a polygonal domain using Schwarz-Christophel transform.

Keywords: Schwarz-Christoffel; mapping; Poisson equation; irregular regions; spectral Chebyshev method.

Эффективность спектрального метода Чебышева [1] существенно ограничена случаем краевых задач в области прямоугольной формы. В

данной работе исследуется возможность использования данного метода для численного решения двумерных эллиптических уравнений в нерегулярной области P посредством конформного отображения P в прямоугольник $R \in (a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$, используя преобразования Шварца-Кристоффеля [2]. Рассмотрим особенности данного подхода на примере уравнения Пуассона в многоугольной области P с однородными граничными условиями Дирихле:

$$\begin{cases} \alpha_1 u_{xx} + \alpha_2 u_{yy} = f, & (x, y) \in P \\ u = u_0(x, y), & (x, y) \in \partial P \end{cases} \quad (1)$$

Преобразование Шварца-Кристоффеля устанавливает взаимно-однозначное соответствие между координатами $(x, y) \in P$ и $(\xi, \eta) \in R$. Подробно остановимся на формализме трансформации операторов при преобразованных координат и последующей дискретизации задачи.

Несложно получить выражения для производных в старых координатах через производные в новых координатах. Учитывая соотношения Коши – Римана

$$x_\xi = y_\eta, \quad x_\eta = -y_\xi. \quad (2)$$

имеем

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{J} (\tilde{u}_\xi y_\eta - \tilde{u}_\eta y_\xi) = \frac{1}{J} [(\tilde{u} y_\eta)_\xi - (\tilde{u} y_\xi)_\eta] \\ u_y &= \frac{1}{J} (\tilde{u}_\eta x_\xi - \tilde{u}_\xi x_\eta) = \frac{1}{J} [(\tilde{u} x_\xi)_\eta - (\tilde{u} x_\eta)_\xi] \end{aligned} \quad (3)$$

где $J = J(\xi, \eta) = x_\eta y_\xi - x_\xi y_\eta = x_\xi^2 + x_\eta^2 > 0$ — Якобиан преобразования, $\tilde{u} = \tilde{u}(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$.

Аналогично, для вторых производных

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\tilde{u}_\xi x_\xi^2 + \tilde{u}_\eta x_\xi x_\eta}{J} \right) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\tilde{u}_\eta x_\eta^2 + \tilde{u}_\xi x_\xi x_\eta}{J} \right) \right) \right] \\ u_{yy} &= \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\tilde{u}_\eta x_\eta^2 + \tilde{u}_\xi x_\xi x_\eta}{J} \right) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\tilde{u}_\xi x_\xi^2 + \tilde{u}_\eta x_\xi x_\eta}{J} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (1) и приводя подобные будем иметь

$$\begin{cases} C_1 \tilde{u}_{\xi\xi} + C_2 \tilde{u}_{\eta\eta} + C_3 \tilde{u}_{\xi\eta} + C_4 \tilde{u}_\xi + C_5 \tilde{u}_\eta = \hat{f}, & (\xi, \eta) \in R \\ \tilde{u} = \tilde{u}_0, & (\xi, \eta) \in \partial R \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \alpha_1 x_\xi^2 + \alpha_2 x_\eta^2, & C_2 &= \alpha_1 x_\eta^2 + \alpha_2 x_\xi^2, & C_3 &= 2(\alpha_1 - \alpha_2) x_\xi x_\eta \\ C_4 &= \alpha_1 x_\xi^2 + \alpha_2 x_\eta^2, & C_5 &= \alpha_1 x_\eta^2 + \alpha_2 x_\xi^2, & C_6 &= 2(\alpha_1 - \alpha_2) x_\xi x_\eta \\ C_4 &= \frac{1}{J} (\alpha_1 - \alpha_2) (3x_\xi x_\eta^2 x_{\xi\xi} + x_\eta^3 x_{\xi\eta} - x_\xi^3 x_{\xi\xi} - 3x_\xi^2 x_\eta x_{\xi\eta}) \\ C_5 &= \frac{1}{J} (\alpha_1 - \alpha_2) (x_\eta^3 x_{\xi\xi} + x_\xi^3 x_{\xi\eta} - 3x_\xi x_\eta^2 x_{\xi\eta} - 3x_\xi^2 x_\eta x_{\xi\xi}) \\ \hat{f} &= J^{-2} \tilde{f}(\xi, \eta) = J^{-2} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \end{aligned} \quad (6)$$

Для координатного преобразования, отображающего шестиугольник в прямоугольник (см. Рис. 1), использованы отображение Шварца-Кристоффеля (SC), и соответствующие инструменты SC Matlab [3; 4].

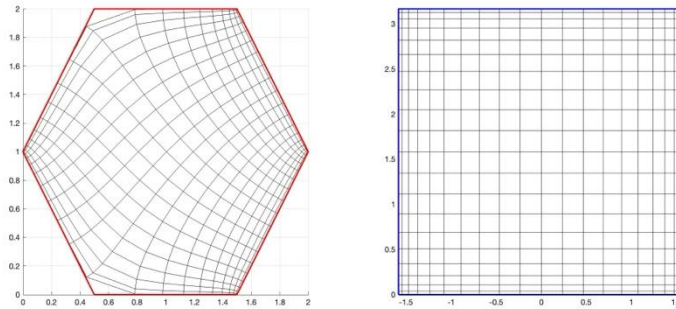


Рис. 1. Преобразования координат, отображающие шестиугольник в прямоугольник.

Результаты численного эксперимента для задачи (1), $\alpha_1 = \alpha_2$, $f(x, y) = -2\pi^2 \sin(\pi x) \cos(\pi y)$ и краевыми условиями, которые определяются точным решением $u_0 = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$, представлены на Рис. 2. Для решения задачи использованы спектральный метод Чебышева и разностный метод [5].

Из рисунка видно, что при увеличении размера сетки погрешность спектрального метода убывает быстрее, чем погрешность метода конечных разностей. Сходимость обоих методов ограничена, поскольку преобразования Шварца – Кристофера, выполняются, вообще говоря, приближенно. Кроме того, отсутствия гладкости границы шестиугольной

области, порождает особенности в коэффициентах задачи (6), что негативно сказывается на точности, как спектрального, так и разностного методов.

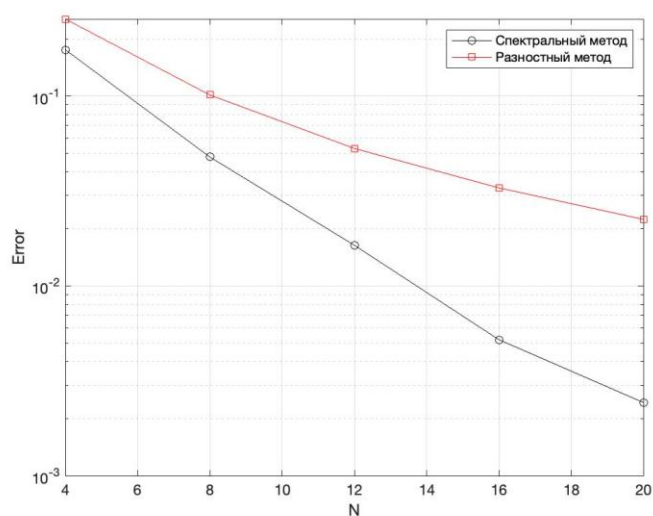


Рис. 2. Относительная погрешность спектрального и разностного методов в зависимости от количества узлов сетки N

Принимая во внимание отмеченные выше обстоятельства, можно сделать заключение, что в рамках рассмотренного подхода спектральный метод Чебышева частично сохраняет преимущества в эффективности по сравнению с разностным методом, однако, данные преимущества не столь значимы, как при решении задач в прямоугольной области [5]. Представленная методика может быть использована для решения эллиптических задач более общего вида.

Библиографические ссылки

1. *Boyd J.P.* Chebyshev and Fourier spectral methods. New York: Dover Publications, 2000. 594 p.
2. *Driscoll T.A., Trefethen L.N.* Schwarz-Christoffel Mapping. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
3. *Hao Y., Simoncini V.* Matrix equation solving of PDEs in polygonal domains using conformal mappings // *Journal of Numerical Mathematics*. 2021. Т. 29. № 3. С. 221–244.
4. *Driscoll T.A.* Algorithm 843: Improvements to the Schwarz-Christoffel Toolbox for MATLAB // *ACM Transactions on Mathematical Software*. 2005. Vol. 31. P. 239–251.
5. *Волков В.М., Дун Цзинхуэй.* О реализации спектрального метода Чебышёва для двумерных эллиптических моделей со смешанными производными // *Труды Института математики НАН Беларуси*. 2024. Т. 32. № 2. С. 82–92.