

# БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского  
государственного университета

  
А.Д.Король

27 июня 2025 г.

Регистрационный №УД- 14020/уч.



## МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В МАШИННОМ ОБУЧЕНИИ

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для  
специальности:

**1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям)**

Направление специальности:

1-31 03 03-01 Прикладная математика (научно-производственная деятельность)

2025 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 03-2021 и учебного плана БГУ №G 31-1-212/уч. от 22.03.2022.

**СОСТАВИТЕЛЬ:**

*Н.М.Дмитрук*, заведующий кафедрой методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

*О.И.Костюкова*, главный научный сотрудник отдела нелинейного и стохастического анализа Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси», доктор физико-математических наук, профессор;

*И.К.Асмыкович*, доцент кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой методов оптимального управления БГУ  
(протокол № 10 от 27.05.2025)

Научно-методическим Советом БГУ  
(протокол № 11 от 26.06.2025)

Заведующий кафедрой



Н.М.Дмитрук



## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

### **Цели и задачи учебной дисциплины**

**Цель учебной дисциплины** «Методы оптимизации в машинном обучении» – изучение методов современной оптимизации, применяемых для решения задач, возникающих в машинном обучении, в частности, особенностей оптимизации в нейронных сетях и алгоритмах обучения с подкреплением. Образовательная цель: формирование и развитие практико-ориентированной компетентности, позволяющей использовать полученные знания для решения задач в сфере профессиональной и социальной деятельности. Развивающая цель: формирование знаний, умений и навыков анализа и решения различных оптимизационных задач, связанных с машинным обучением.

### **Задачи учебной дисциплины:**

1. Освоение теоретических основ и практических навыков для анализа и решения различных оптимизационных задач.
2. Формирование представлений об эффективных методах оптимизации, актуальных для нейронных сетей и обучения с подкреплением.
3. Выработка практических навыков реализации численных методов оптимизации, актуальных для машинного обучения.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к **дисциплинам по выбору** компонента учреждения высшего образования.

Программа составлена с учетом межпредметных связей с учебными дисциплинами. Основой для изучения учебной дисциплины являются дисциплины модуля «Математический анализ», дисциплины «Линейная алгебра», «Методы оптимизации». Сведения из дисциплины «Методы оптимизации в машинном обучении» служат базой для выполнения курсовых и дипломных работ.

### **Требования к компетенциям**

Освоение учебной дисциплины «Методы оптимизации в машинном обучении» должно обеспечить формирование следующей компетенции:

### ***Специализированные компетенции:***

Использовать классические и современные методы численного решения оптимизационных задач в применении к проблемам машинного обучения, реализовывать их для решения практических задач.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

### **знать:**

- формулировки и основные классы задач непрерывной оптимизации, формулировки задач машинного обучения как задач оптимизации;
- концепции выпуклости и невыпуклости в оптимизации и их влияние при выборе метода решения соответствующих задач;
- методы первого и второго порядков, включая градиентные методы, алгоритмы стохастического градиентного спуска, адаптивные градиентные алгоритмы и другие современные методы, актуальные для нейронных сетей;

**уметь:**

– формулировать прикладные задачи как задачи оптимизации, сводить поставленную задачу к одному из основных классов и обосновывать выбор метода их решения;

– применять изученные методы на практике для решения реальных задач в области машинного обучения и анализировать полученные результаты;

– реализовывать программно основные алгоритмы оптимизации;

**владеть:**

– навыком применения современных методов для решения задач машинного обучения;

– навыком применения средств и инструментов Matlab, Python для моделирования и численного решения практических задач.

**Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается в 7 семестре. В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Методы оптимизации в машинном обучении» отведено для очной формы получения высшего образования – 100 часов, в том числе 54 аудиторных часа, из них: лекции – 26 часов, лабораторные занятия – 28 часов. **Из них:**

Лекции – 26 часов, практические занятия – 26 часов, управляемая самостоятельная работа (УСР) – 2 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины 3 зачетных единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## Введение

Примеры оптимизационных задач, актуальных для машинного обучения. Цели и задачи курса. Сведения из линейной алгебры, используемые в курсе.

## Раздел 1. Основы теории оптимизации

### *Тема 1.1. Задачи математической оптимизации и их приложения*

Общая формулировка задачи математической оптимизации. Основные понятия. Классы задач непрерывной оптимизации в конечномерных пространствах: линейное, квадратичное, выпуклое программирование. Экстремальные задачи в бесконечномерных пространствах: вариационное исчисление и оптимальное управление. Безусловная, условная оптимизация. Эквивалентные преобразования задач.

### *Тема 1.2. Элементы выпуклого анализа*

Выпуклые множества. Аффинные множества. Выпуклые конусы. Аффинные, выпуклые, конические оболочки. Операции, сохраняющие выпуклость. Разделяющая и опорная гиперплоскость. Теоремы отделимости. Выпуклые функции. Выпуклые функции. Свойство сильной выпуклости. Свойства выпуклых функций, операции, сохраняющие выпуклость. Эпиграф функции, свойства эпиграфа выпуклой функции. Дифференциальные критерии выпуклой функции, критерии сильной выпуклости.

### *Тема 1.3. Двойственность и условия оптимальности*

Функция Лагранжа, двойственная функция и двойственная задача. Условие Слейтера. Основные результаты теории двойственности. Условия оптимальности Каруша-Куна-Таккера, условия дополняющей нежесткости. Анализ чувствительности.

### *Тема 1.4. Задачи регрессии и классификации*

Линейная регрессия. Анализ решения. Переобучение и способы регуляризации. Негладкая оптимизация. Линейная бинарная классификация. Логистическая регрессия. Метод опорных векторов. Применение условий оптимальности и теории двойственности в задачах регрессии и классификации.

## Раздел 2. Численные алгоритмы

### *Тема 2.1. Минимизация функций одной переменной*

Классификация численных алгоритмов, основные принципы построения итеративных алгоритмов, скорости сходимости. Задачи одномерной оптимизации. Унимодальные функции и методы поиска их точек минимума. Дихотомический поиск. Метод «золотого сечения».

### *Тема 2.2. Методы первого порядка*

Методы спуска: общая схема методов спуска. Правила выбора направления и шага. Правило Армико, процедура бэктрекинга. Метод градиентного спуска, сходимость в гладком случае (выпуклые, сильно

выпуклые). Примеры. Ускоренные градиентные методы, метод тяжелого шарика. Метод сопряженных градиентов. Условная оптимизация. Метод проекции градиента. Метод Франк-Вульфа. Стохастический градиентный спуск. Методы уменьшения дисперсии. Адаптивные градиентные методы. Обучение нейронных сетей с точки зрения оптимизации.

### ***Тема 2.3. Методы Ньютона и квазиньютоновские методы***

Методы Ньютона. Сходимость метода Ньютона. Квазиньютоновские методы. Метод Ньютона в задаче с ограничениями-равенствами. Анализ сходимости. Обобщение метода Ньютона на случай старта из недопустимой точки. Методы линеаризации и последовательного квадратичного программирования.

## **Раздел 3. Оптимальное управление и обучение с подкреплением**

### ***Тема 3.1. Классическое динамическое программирование***

Дискретная задача оптимального управления. Основные понятия и взаимосвязь постановок. Детерминированное и стохастическое динамическое программирование: принцип оптимальности, функция Беллмана, инвариантное погружение, уравнения Беллмана. Оптимальная политика. Q-функция и уравнение Беллмана для Q-функции. Задачи с конечным и бесконечным горизонтом. Примеры.

### ***Тема 3.2. Обучение с подкреплением***

Модель взаимодействия агента со средой. Марковский процесс принятия решений: пространство состояний, пространство действий, динамика среды, траектория, награда, дисконтирование, политика. Эпизодичные среды. Примеры. Связь оптимального управления и обучения с подкреплением.

### ***Тема 3.3. Алгоритмы обучения с подкреплением***

Классификация алгоритмов обучения с подкреплением. Критерии оценки алгоритмов. Аппроксимация в пространстве состояний. Аппроксимация в пространстве политик. Q-обучение, SARSA.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий  
(ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Введение	1						
<b>1</b>	<b>Основы теории оптимизации</b>	<b>7</b>			<b>8</b>			
1.1	Задачи математической оптимизации и их приложения	2						Устный опрос
1.2	Элементы выпуклого анализа	2			2			Решение задач
1.3	Двойственность и условия оптимальности	3			2			Решение задач
1.4	Задачи регрессии и классификации				4			Расчетно-графическое задание №1
<b>2</b>	<b>Численные алгоритмы</b>	<b>10</b>			<b>10</b>		<b>2</b>	
2.1	Минимизация функций одной переменной	1			2			Устный опрос
2.2	Методы первого порядка	6			6		2	Решение задач. Расчетно-графическое задание №2
2.3	Методы Ньютона и квазиньютоновские методы	3			2			Расчетно-графическое задание №3
<b>3</b>	<b>Оптимальное управление и обучение с подкреплением</b>	<b>8</b>			<b>8</b>			
3.1	Классическое динамическое программирование	3			2			Устный опрос. Решение задач

3.2	Обучение с подкреплением	2			2			Решение задач
3.3	Алгоритмы обучения с подкреплением	3			4			Контрольная работа
	<b>Итого:</b>	<b>26</b>			<b>26</b>		<b>2</b>	

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Основная литература

1. Дайзенрот, М. П. Математика в машинном обучении / М. П. Дайзенрот, Ф. А. Альдо, С. О. Чен – СПб.: Питер, 2024. – 512 с.
2. Выпуклая оптимизация : учебное пособие / Е.А. Воронцова, Р.Ф. Хильдебранд, А.В. Гасников, Ф.С. Стонякин. – Москва : МФТИ, 2021. – 364 с. Электронный доступ – <https://hal.science/hal-03376610/document>
3. Галеев, Э. М. Краткий курс теории экстремальных задач : учебное пособие для студ. вузов, обуч. по спец. "Математика" / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. - Изд. 2-е, испр. - Москва : ЛЕНАНД : URSS, 2023. - 204 с.
4. Бахтин, В. И. Конечномерные экстремальные задачи : [гладкие, линейные, выпуклые] : учебное пособие для студ. учреждений высшего образования по математическим специальностям / В. И. Бахтин, А. В. Лебедев. - Москва : ЛЕНАНД : URSS, 2023. - 108 с.

### Дополнительная литература

1. Методы оптимизации : электронный учебно-методический комплекс для специальностей: 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)»; 1-31 03 04 «Информатика»; 1-31 03 05 «Актуарная математика»; 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (по направлениям)», 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» / В. В. Альсевич [и др.] ; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. методов оптимального управления. – Минск : БГУ, 2020. – 203 с. – URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/243989>.
2. Boyd, S. Convex optimization / S. Boyd, L. Vandenberghe – Cambridge University press, 2004.
3. Wright, S.J. Numerical optimization / S.J. Wright, J. Nocedal – Springer, 1999.
4. Dvurechensky, P. First-Order Methods for Convex Optimization / P. Dvurechensky, S. Shtern, M. Staudigl // EURO Journal on Computational Optimization. – 2021. – № 9. Электронный доступ – <https://arxiv.org/abs/2101.00935>.
5. Bertsekas D. Reinforcement learning and optimal control. – Athena Scientific, 2019. Электронный доступ – <https://web.mit.edu/dimitrib/www/rlpreface.pdf>.
6. Гасников, А.В. Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска : учебное пособие / А. В. Гасников. – М.: МФТИ, 2018. – 291 с. Электронный доступ – <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1711/1711.00394.pdf>
7. Нестеров Ю.Е. Методы выпуклой оптимизации / Ю.Е. Нестеров – М.: МЦНМО, 2010.

## **Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки**

Для диагностики компетенций в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы:

1. Устная форма: устный опрос.
2. Письменная форма: расчетно-графические задания, контрольная работа.
3. Устно-письменная форма: решение задач, зачет по учебной дисциплине.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Методы оптимизации в машинном обучении» учебным планом предусмотрен **зачет**.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

- устный опрос – 10 %;
- расчетно-графические задания – 50 %;
- контрольная работа – 40 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) – 50 % и отметки на зачете – 50 %.

### **Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы**

#### ***Тема 2.2. «Методы первого порядка». (2 ч)***

Задание 1. Реализовать выбранный метод первого порядка (по вариантам индивидуальных заданий).

Задание 2. Провести численные эксперименты для ряда модельных задач безусловной минимизации с анализом результата и обоснованными выводами об эффективности методов.

Задание 3. Провести сравнительный анализ по группам методов и группам модельных примеров (групповое задание).

(Форма контроля – Расчетно-графическое задание №2)

Перечень используемых средств диагностики результатов управляемой самостоятельной работы студентов: расчетно-графические задания с использованием ЭВМ.

## Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса большинства практических занятий используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности.

При организации образовательного процесса используются следующие методы:

– **метод учебной дискуссии**, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме. Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

– **метод группового обучения**, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

В качестве технических средств для организации работы в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать Образовательный портал БГУ (<https://edufpmi.bsu.by>) – инструменты с эффективной функциональностью контроля, тренинга и самостоятельной работы.

### Методические рекомендации по организации самостоятельной работы

Для обеспечения возможности самостоятельной работы при изучении теории и выполнении практических заданий рекомендуется использовать изданные учебные пособия, размещенные в электронной библиотеке университета.

Для самоконтроля усвоения учебного материала рекомендуется использовать образовательный портал EDUFPMI, где размещены:

- учебно-методические материалы,
- учебные издания для теоретического изучения дисциплины,
- расчетно-графические задания и примеры их решений,
- материалы текущего контроля и текущей аттестации,
- вопросы для подготовки к зачету.

### Примерный перечень вопросов к зачёту

1. Классы задач непрерывной оптимизации в конечномерных пространствах. Эквивалентные преобразования задач.
2. Элементы выпуклого анализа: выпуклые множества, выпуклые функции, операции, сохраняющие выпуклость.

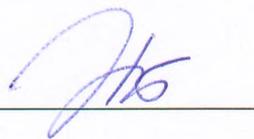
3. Основные результаты теории двойственности.
4. Условия оптимальности Каруша-Куна-Таккера.
5. Условия оптимальности и двойственности в задачах регрессии.
6. Задачи регрессии, регуляризация.
7. Применение условий оптимальности и двойственности в задачах регрессии.
8. Линейная бинарная классификация. Метод опорных векторов.
9. Применение условий оптимальности и двойственности в задачах классификации.
- 10.
11. Классификация численных алгоритмов решения задач оптимизации, основные принципы построения итеративных алгоритмов.
12. Унимодальные функции и методы поиска их точек минимума.
13. Методы спуска: общая схема методов спуска. Правила выбора направления и шага.
14. Метод градиентного спуска, сходимость в гладком случае.
15. Метод тяжелого шарика. Сходимость.
16. Метод Нестерова. Сходимость.
17. Метод сопряженных градиентов.
18. Метод проекции градиента.
19. Стохастический градиентный спуск.
20. Методы Ньютона. Сходимость метода Ньютона.
21. Квазиньютоновские методы.
22. Детерминированное и стохастическое динамическое программирование
23. Q-функция и уравнение Беллмана для Q-функции.
24. Модель взаимодействия агента со средой. Марковский процесс принятия решений. Связь оптимального управления и обучения с подкреплением.
25. Аппроксимация в пространстве состояний.
26. Аппроксимация в пространстве политик.
27. Q-обучение, SARSA.

1.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой  
методов оптимального управления  
канд. физ.-мат. наук, доцент



Н.М.Дмитрук

27.05.2025

## ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УО

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 202\_ г.)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_