С.М. Агеев, А.А. Ворошилов

О новом доказательстве теоремы Брауэра о неподвижной точке

Одним из центральных результатов многих областей современной математики является теорема Брауэра о неподвижной точке (см., например [1]).

Теорема 1. (Брауэр).

Любое непрерывное отображение f: $D^n \to D^n$ n-мерного диска в себя имеет неподвижную точку, то есть существует такая точка $x_0 \in D^n$, что $f(x_0)=x_0$.

Её доказательство было получено в начале прошлого века, и с той поры много усилий было приложено для его шлифовки, а также для поиска разнообразных обобщений и применений этой теоремы [2,3].

Так как диск D^n гомеоморфен симплексу T^n, то можно сформулировать теорему таким образом: всякое непрерывное отображение f: $T^n \to T^n$ имеет неподвижную точку.

Хорошо известными рассуждениями [3] теорема 1 редуцируется к ей равносильной:

Теорема 2.

Не существует непрерывного отображения $\varphi: T^n \to \partial T^n$, тождественного на ∂T^n.

Как правило, доказательство теоремы 2 осуществляется с использованием широко известной леммы Шпернера [1] и, по общему убеждению, представляет собой сложный комплекс рассуждений. В предлагаемой работе найден существенно новый подход, позволяющий избежать леммы Шпернера и основывающийся на применении теоремы Эйлера для графов. Кроме того, что это позволяет упростить классическое доказательство теоремы, появляется также возможность получения новых перспективных результатов в теории неподвижных точек отображений.

§1. Разбиения n-мерного симплекса на клетки.

Введём понятие *барицентрического подразделения* конечного симплициального комплекса. Барицентрическое подразделение К\` комплекса К определяется по индукции. Для нульмерного комплекса К положим К\`=К. Если определено барицентрическое подразделение для комплексов размерности $\leq$s и К – некоторый (s+1)-мерный комплекс, то построим прежде всего барицентрическое подразделение s-мерного остова K^s. Пусть T^{s+1} – произвольный (s+1)-мерный симплекс комплекса К. Его граница лежит в K^s, и потому при барицентрическом подразделении остова K^s она тоже подразделится. Эту подразделённую границу мы обозначим через Σ^s и построим над Σ^s пирамиду, вершину которой выберем внутри симплекса T^{s+1}. Тело пирамиды $a\Sigma^s$ совпадает с T^{s+1}, так что мы получим подразделение симплекса T^{s+1}. Построив такие подразделения для всех (s+1)-мерных симплексов, мы получим барицентрическое подразделение комплекса К. Если вершины пирамид брать каждый раз совпадающими с центром тяжести соответствующего симплекса, то получающееся барицентрическое подразделение называют *собственным*. Обозначим его βК.

Рассмотрим некоторую триангуляцию L симплекса T^n и её собственные барицентрические подразделения βL и β^2L. Обозначим Q_v=St(v; β^2L), где $v \in \beta L^{(0)}$ (т.е. v пробегает множество барицентров граней L) (рис.1). Так как Q_v звездно относительно v, то Q_v гомеоморфно симплексу T^n.

Обозначим через σ(Δ) барицентр симплекса Δ. Симплексам $< \sigma(\Delta^0), \sigma(\Delta^1), \ldots, \sigma(\Delta^n) >$ барицентрического подразделения βL взаимно-однозначно соответствуют последовательности граней $\{\Delta^0, \Delta^1, \ldots, \Delta^n\}$ из L, образующие возрастающие цепочки $\Delta^0 \subset \Delta^1 \subset \ldots \subset \Delta^n$. Более точно структуру симплексов βL описывает следующее предложение.

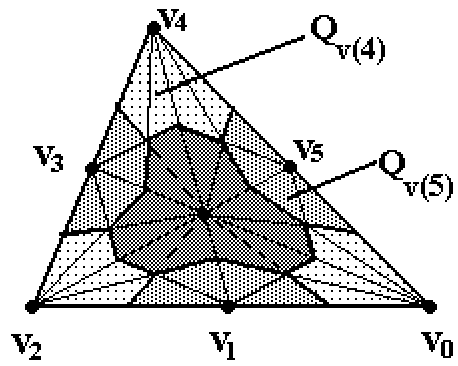

рис.1

<u>Лемма 1.</u> $\{v_0, v_1, \ldots, v_m\}$ образуют симплекс $\beta L \Leftrightarrow Q_{v(0)} \cap Q_{v(1)} \cap \ldots \cap Q_{v(m)} \neq \varnothing$.

<u>Необходимость</u>:

Т.к. очевидно, что барицентр $\sigma(< v_0, v_1, \ldots, v_m >) \in Q_{v(0)} \cap Q_{v(1)} \cap \ldots \cap Q_{v(m)}$, то необходимость установлена.

<u>Достаточность</u>:

Прежде всего заметим, что $Q_{v(0)} \cap Q_{v(1)} \cap \ldots \cap Q_{v(m)}$ есть непустой полиэдр относительно триангуляции $\beta^2 L$. Рассмотрим некоторую его вершину v, которая представляет собой барицентр симплекса δ из βL. Несложно видеть, что $v_i \in \delta$ $\forall i \leq m$ и, следовательно, $\delta = < v_0, v_1, \ldots, v_m >$.■

Обозначим $\Pi = Q_{v(0)} \cap Q_{v(1)} \cap \ldots \cap Q_{v(m)} \neq \varnothing$ для симплекса $< v_0, v_1, \ldots, v_m >$ из βL.

<u>Лемма 2.</u> $\Pi \cap <v_0, v_1, \ldots, v_m> = \sigma(<v_0, v_1, \ldots, v_m>)$.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим $\Pi \cap <v_0, v_1, \ldots, v_m>$. Этому пересечению принадлежит барицентр $\sigma(<v_0, v_1, \ldots, v_m>)$. Если пересечению принадлежит ещё какая-то точка симплекса $<v_0, v_1, \ldots, v_m>$, то принадлежит целиком некоторая его грань, и, следовательно, ещё хотя бы одна вершина. Но больше ни одна вершина разбиения βL не может принадлежать всем $Q_{v(i)}$. Значит, $\Pi \cap <v_0, v_1, \ldots, v_m>$ есть барицентр $\sigma(<v_0, v_1, \ldots, v_m>)$.■

Рассмотрим $S = \Pi \cap <v_0, v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_p>$

<u>Лемма 3.</u> S совпадает с симплексом $< \sigma(<v_0, v_1, \ldots, v_m>), \sigma(<v_0, v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}>), \ldots, \sigma(<v_0, v_1, \ldots, v_p>) >$ из $\beta^2 L$, порождённым вершинами $\sigma<v_0, v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_i>$.

<u>Доказательство.</u>

$[Q_{v(0)} \cap Q_{v(1)} \cap \ldots \cap Q_{v(m)}] \cap <v_0, v_1, \ldots, v_m> = \sigma(<v_0, v_1, \ldots, v_m>) \in S$

$[Q_{v(0)} \cap Q_{v(1)} \cap \ldots \cap Q_{v(m)} \cap Q_{v(m+1)}] \cap <v_0, v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}> = \sigma(<v_0, v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}>) \in S$

…

$[Q_{v(0)} \cap Q_{v(1)} \cap \ldots \cap Q_{v(m)} \cap \ldots \cap Q_{v(p)}] \cap <v_0, v_1, \ldots, v_m, \ldots, v_p> = \sigma(<v_0, v_1, \ldots, v_m, \ldots, v_p>) \in S$

Таким образом,

$[Q_{v(0)} \cap Q_{v(1)} \cap \ldots \cap Q_{v(m)}] \cap <v_0, v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_p> =$

$= < \sigma(<v_0, v_1, \ldots, v_m>), \sigma(<v_0, v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}>), \ldots, \sigma(<v_0, v_1, \ldots, v_p>) >$.■

Рассмотрим объединение всех пересечений различных звёзд $Q_{v(i)}$ в количестве ровно n. Следующая лемма позволяет выявить в этом объединении структуру графа.

<u>Лемма 4.</u> $[Q_{v(0)} \cap Q_{v(1)} \cap \ldots \cap Q_{v(n-1)}]$ есть отрезок либо два отрезка с общим концом.

<u>Доказательство.</u> Как было показано ранее,

$[Q_{v(0)} \cap Q_{v(1)} \cap \ldots \cap Q_{v(n-1)}] \cap <v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}> = \sigma(<v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}>)$.

К симплексу $<v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}>$ в комплексе βL примыкает один или два n-мерных симплекса βL. Если это два симплекса $<v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n^*>$ и $<v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n^{**}>$, то

$[Q_{v(0)} \cap Q_{v(1)} \cap \ldots \cap Q_{v(n-1)}] = <v_n^*, \sigma(< v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}>)> \cup <v_n^{**}, \sigma(< v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}>)>$ – два отрезка с общим концом. Если же $<v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}>$ лежит на границе βL и к нему примыкает один n-мерный симплекс, то, соответственно, и $[Q_{v(0)} \cap Q_{v(1)} \cap \ldots \cap Q_{v(n-1)}]$ состоит из одного отрезка.■

<u>§2. Комбинаторное утверждение о «цветной» точке инцидентности.</u>

Итак, симплекс T^n мы разбили на множества Q_i таким образом, что если $Q_{i(0)} \cap Q_{i(1)} \cap \ldots \cap Q_{i(n)}$ непусто, то $Q_{i(0)} \cap Q_{i(1)} \cap \ldots \cap Q_{i(n)} = \{pt\}$, а $Q_{i(0)} \cap Q_{i(1)} \cap \ldots \cap Q_{i(n-1)}$ гомеоморфно D^1. Пометим все вершины v_i первого барицентрического подразделения βL числами от 0 до n (или, по-другому, цветами от 0 до n). Обозначим T^{n-1}_k (n-1)-мерную грань, противоположную вершине v_k. Вначале пометим "0" вершины v_i, принадлежащие грани T^{n-1}_0. Далее пометим "1" вершины v_i, принадлежащие T^{n-1}_1, кроме принадлежащих $T^{n-1}_1 \cap T^{n-1}_0$ – они уже помечены "0". Пометим "2" все вершины $v_i \in T^{n-1}_2$ кроме уже помеченных "0" или "1", и т.д. Дойдя до грани T^{n-1}_n, пометим "n" все непомеченные ещё вершины $v_i \in T^{n-1}_{n-1}$. Каждую оставшуюся вершину v_i, не лежащую на границе T^n, пометим произвольным числом j. В соответствии с вершинами пометим и $Q_{v(i)}$. Итак, каждое множество Q_j будет помечено числом из набора 0, 1,…, n. Справедлива следующая

<u>Лемма 5.</u> Найдутся (n+1) множеств $Q_{i(0)}$, $Q_{i(1)}$,…,$Q_{i(n)}$, помеченные различными числами, и имеющие общую точку, которую мы назовём «цветной» точкой инцидентности.

<u>Доказательство</u> осуществим от противного:

Предположим, что не существует "соседних" множеств Q_j, помеченных от 0 до n.

Как ранее было показано, $[Q_{v(0)} \cap Q_{v(1)} \cap \ldots \cap Q_{v(n-1)}]$ состоит из одного отрезка или из двух с общей вершиной, которые гомеоморфны отрезку. Таким образом, мы имеем граф из соответствующих пересечений. Ориентируем специальным образом некоторые рёбра графа, а именно – те, которые являются пересечением n множеств Q_j, помеченных числами 0, 1,…, n–1. Пусть это $Q_{v(0)}$, $Q_{v(1)}$,…, $Q_{v(n-1)}$, причём $Q_{v(k)}$ помечено числом k для каждого k. Их пересечениями являются отрезки $<\sigma, v^*>$ и $<\sigma, v^{**}>$,где $\sigma=\sigma(<v_0, v_1,\ldots, v_{n-1}>)$, а v^* и v^{**}– барицентры n-мерных симплексов, примыкающих к $<v_0, v_1,\ldots, v_{n-1}>$. Пересечение может состоять и из одного отрезка.

Выберем вектор $\overrightarrow{w^*}$, идущий по отрезку $[\sigma, v^*]$, так, чтобы набор $<\overrightarrow{\sigma v_0}, \overrightarrow{\sigma v_1}, \ldots, \overrightarrow{\sigma v_{n-2}}, \overrightarrow{w^*}>$ образовывал правый базис. Аналогично поступим с отрезком $[\sigma, v^{**}]$. В этом случае, очевидно, направление стрелок по $[\sigma, v^*]$ и $[\sigma, v^{**}]$ будет согласованным. Рассмотрим конец какой-нибудь стрелки из расставленных нами. Либо эта точка лежит на границе T^n и тогда стрелка обрывается на его границе, либо эта точка является пересечением (n+1) множества Q_j: $Q_{v(0)}$, $Q_{v(1)}$,…, $Q_{v(n-1)}$, $Q_{v(n)}$. Мы предположили, что не существует "соседних" множеств Q_j, помеченных числами от 0 до n и, следовательно, какое-нибудь из $Q_{v(0)}$, $Q_{v(1)}$,…, $Q_{v(n-1)}$ помечено одинаковым образом с $Q_{v(n)}$. Пусть, для определённости, это $Q_{v(i)}$. В наборе $Q_{v(0)}$, $Q_{v(1)}$,…, $Q_{v(n-1)}$ заменим $Q_{v(i)}$ на $Q_{v(n)}$. Пересечение этих n множеств образует новые два отрезка (или один отрезок), исходящий из конца рассмотренной стрелки. В соответствии с нашим правилом, на них будут расставлены стрелки. Докажем, что их направление будет согласовано с направлением предыдущей стрелки.

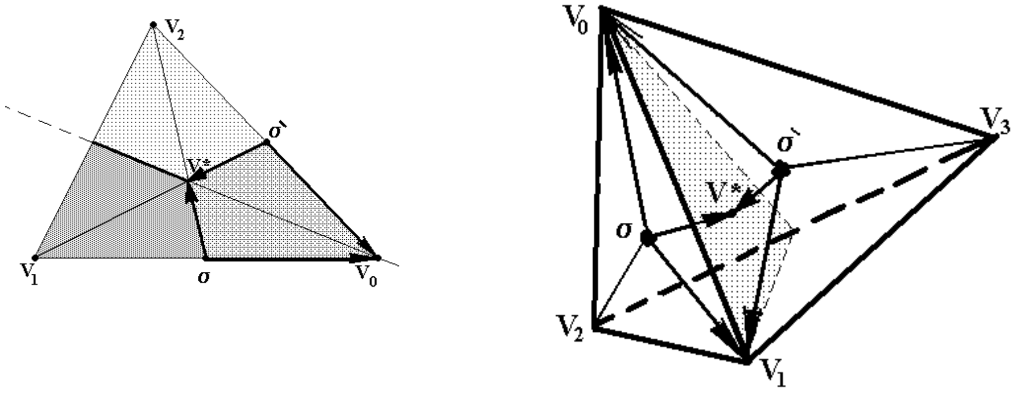

рис.2

<u>Лемма 6.</u> Через v* обозначим барицентр n-мерного симплекса $<v_0, v_1, \ldots, v_n>$, через σ - барицентр $<v_0, v_1,\ldots, v_{n-1}>$, σ\` - барицентр $<v_0, v_1,\ldots, v_{i-1}, v_n, v_{i+1},\ldots, v_{n-1}>$.

Тогда базис $< \overrightarrow{\sigma`v_0},\ldots,\overrightarrow{\sigma`v_{i-1}},\overrightarrow{\sigma`v_n},\overrightarrow{\sigma`v_{i+1}},\ldots,\overrightarrow{\sigma`v_{n-2}},\overrightarrow{v^*\sigma`} >$ **будет правым.**

Из леммы следует, что по отрезку [v*, σ\`] стрелка будет исходить из v\*, т.е. согласована с предыдущей (где [v\*, σ\`] есть пересечение $Q_{v(0)},\ldots, Q_{v(i-1)}, Q_{v(n)}, Q_{v(i+1)},\ldots, Q_{v(n-1)}$).

<u>Доказательство.</u>

Докажем равносильное утверждение о том, что $< \overrightarrow{\sigma`v_0},\ldots,\overrightarrow{\sigma`v_{i-1}},\overrightarrow{\sigma`v_n},\overrightarrow{\sigma`v_{i+1}},\ldots,\overrightarrow{\sigma`v_{n-2}},\overrightarrow{\sigma`v^*} >$ является левым базисом.

Вначале рассмотрим случай i=n–1. Пусть (n-1)-мерная гиперплоскость Г проходит через грань $<v_0, v_1,\ldots, v_{n-2}>$ и барицентр грани $<v_{n-1}, v_n>$. Она содержит барицентр симплекса v*, а барицентры граней σ и σ\` лежат в разных полупространствах относительно Г. (На рисунке 2 изображены случаи n=2 и n=3).

Заменим теперь систему векторов $<\sigma v_0, \sigma v_1,\ldots, \sigma v_{n-2}, \sigma v^*>$ эквивалентной: $<\sigma v_0-\sigma v^*, \sigma v_1-\sigma v^*,\ldots, \sigma v_{n-2}-\sigma v^*, \sigma v^*>=<v^*v_0, v^*v_1,\ldots, v^*v_{n-2}, \sigma v^*>$. Вторая система – в данном случае $<\sigma`v_0, \sigma`v_1,\ldots, \sigma`v_{n-2}, \sigma`v^*>$ – будет эквивалентна $<\sigma`v_0-\sigma`v^*, \sigma`v_1-\sigma`v^*,\ldots, \sigma`v_{n-2}-\sigma`v^*, \sigma`v^*>=<v^*v_0, v^*v_1,\ldots, v^*v_{n-2}, \sigma`v^*>$. У этих систем все векторы, кроме последних, совпадают и лежат в Г. А векторы $\overrightarrow{\sigma v^*}$ и $\overrightarrow{\sigma`v^*}$ направлены в разные подпространства относительно Г. Значит, эти системы имеют разные ориентации, что и требовалось доказать.

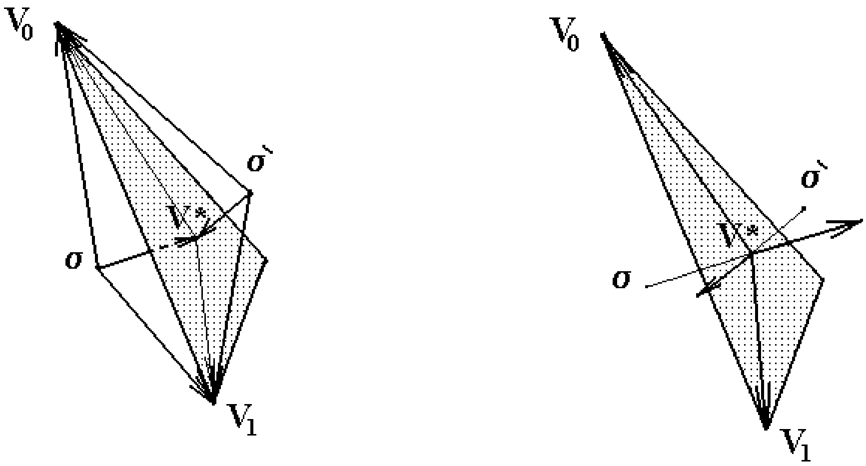

рис.3

В общем случае (i≠n–1) предполагаем, что базисы имеют одинаковую ориентацию. Но тогда и $<\sigma v_0,\ldots, \sigma v_{i-1}, \sigma v_{n-1}, \sigma v_{i+1}\ldots, \sigma v_{n-2}, \sigma v^*>$ имеет ту же ориентацию, что и $<\sigma`v_0,\ldots, \sigma`v_{i-1}, \sigma`v_{n-1}, \sigma`v_{i+1}\ldots, \sigma`v_{n-2}, \sigma`v^*>$, так как $\sigma v_{n-1}=-(\sigma v_0+\ldots+\sigma v_i+\ldots+\sigma v_{n-2})$ и $\sigma`v_{n-1}= -(\sigma`v_0+\ldots+\sigma`v_i+\ldots+\sigma`v_{n-2})$. Но тогда опять концы векторов $v_0,\ldots, v_{i-1}, v_{i+1},\ldots, v_{n-1}$, v* лежат в одной гиперплоскости, а σ и σ\`– в разных полупространствах, и, аналогично предыдущему случаю, наборы имеют разную ориентацию. Значит, наше предположение неверно, т.е. исходные наборы имеют разную ориентацию. ■

Определим, из какой точки границы T^n могут начинаться стрелки. На грани T^{n-1}_0 все точки принадлежат множествам, помеченным нулём, на грани T^{n-1}_1 – помеченным “0” или “1”, на T^{n-1}_2 – “0”, “1” или “2” и т.д. Поэтому пересечение Q = $Q_{v(0)}\cap\ldots\cap Q_{v(n-1)}$ множеств $Q_{v(i)}$, помеченных разными числами от 0 до n-1, имеет общие точки с границей симплекса T^n, лежащие только на грани T^{n-1}_{n-1}. Покажем, что на границе существует единственная точка принадлежащая Q, которую мы обозначим через P. Для этого рассмотрим барицентр лежащего на грани T^{n-1}_{n-1} (n–1)-мерного симплекса $\delta=<w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}>\in\beta L$, вершины которого помечены 0, 1, … , n-1. Вершина w_{n-1} цвета (n-1) лежит в T^{n-1}_{n-1}. Оставшиеся вершины с цветами 0, 1, … , n-2 образуют (n-2)-мерную грань δ. Следовательно, они принадлежат $T^{n-1}_{n-1}\cap T^{n-1}_{n-2}$ и, в частности, $w_{n-2}\in T^{n-1}_{n-1}\cap T^{n-1}_{n-2}$. Аналогично, $w_{n-3}\in T^{n-1}_{n-1}\cap T^{n-1}_{n-2}\cap T^{n-1}_{n-3}$, …, $w_0\in T^{n-1}_{n-1}\cap T^{n-1}_{n-2}\cap\ldots\cap T^{n-1}_0=v_n$. Таким образом, $w_0=v_n$ – вершина T^{n-1}_{n-1}. Вершина w_1 также определена однозначно, т.к. $w_1\in<v_n, v_0>$ и $<w_0, w_1>$ - одномерная грань δ. Аналогично определяется $w_2\in<v_n, v_0, v_1>$ и т.д. Значит, δ определяется однозначно, а вместе с тем доказано, что барицентр δ является искомой единственной точкой P.

Завершим доказательство леммы 5 следующими рассуждениями. Так как количество рёбер в ранее построенном графе конечно, а в любой вершине графа, лежащей во внутренности T^n, сходится ровно два ребра с согласованными направлениями, то эйлеров путь (то есть ломаная, идущая по ребрам графа и согласованная с его направлениями), исходящий из вершины P, должен быть бесконечным. Полученное противоречие доказывает Лемму 5.■

§3. Завершение доказательства теоремы Брауэра.

Пометим (n–1)-мерные грани симплекса T^n числами 0, 1,…, n и обозначим через A_i прообраз $\varphi^{-1}(T^{n-1}_i)$ (n–1)-мерной грани, помеченной числом i. Ввиду непрерывности φ, A_i – замкнутые множества, причём $A_i\supset T^{n-1}_i$ и $A_0\cup A_1\cup\ldots\cup A_n=T^n$.

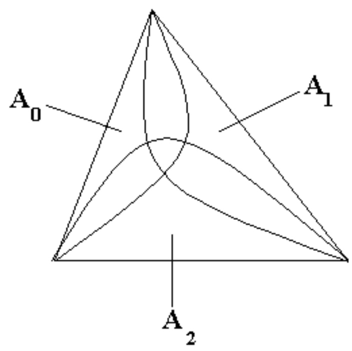

рис.4

Тогда, очевидно, теорема 2 сводится к теореме:

Теорема 3.

Пусть $A_0, A_1,\ldots, A_n$ – замкнутые подмножества $T^n = <a_0, a_1,\ldots, a_n>$, такие, что

(i) $A_i\supset T^{n-1}_i = <a_0, a_1,\ldots, a_{i-1}, a_{i+1},\ldots, a_n>$, i=1,…,n

(ii) $A_0\cup A_1\cup\ldots\cup A_n=T^n$

Тогда $A_0\cap A_1\cap\ldots\cap A_n\neq\varnothing$.

Степенью мелкости комплекса называется диаметр наибольшего входящего в комплекс симплекса. Она равна наибольшей из длин рёбер (одномерных симплексов) комплекса.

Лемма 6. [5] ***Мелкость собственного барицентрического подразделения K\` не превосходит $\delta(1-1/(r+1))$, где δ – степень мелкости исходного комплекса K, а r – его размерность.***

Производя барицентрическое подразделение s раз, мы получим комплекс $K^{(s)}$, степень мелкости которого не превосходит величины $\delta(1-1/(r+1))^s$.

Таким образом, для любого полиэдра K существуют сколь угодно мелкие симплициальные подразделения. Рассмотрим некоторую триангуляцию L симплекса T^n мелкости меньше 1. Произведём разбиение β^2L на Q_j и пометим Q_j в соответствии с ранее описанным правилом. По Лемме 5, находим цветную точку инцидентности. Выбираем $a_{01}\in Q_0^1\cap A_0$, $a_{11}\in Q_1^1\cap A_1,\ldots$, $a_{n1}\in Q_n^1\cap A_n$. $\rho(a_{p1}, a_{q1})<2$ $\forall p$, q = 0, 1,…, n ввиду выбранной мелкости подразделения. После этого производим разбиение β^sL мелкости уже меньше ½. Аналогично, выделяем Q_j, помечаем их, выбираем a_{02}, $a_{12}, \ldots$, a_{n2} в соседних множествах, помеченных по-разному. Здесь уже $\rho(a_{p2}, a_{q2})<1$ $\forall p, q = 0, 1, \ldots, n$. Продолжаем этот процесс и получаем последовательности $(a_{0k})^{\infty}{}_{k=1}$, $(a_{1k})^{\infty}{}_{k=1}, \ldots$, $(a_{nk})^{\infty}{}_{k=1}$. Выделим из них сходящиеся подпоследовательности $(a_{0k^i})^{\infty}{}_{i=1}$, $(a_{1k^i})^{\infty}{}_{i=1}, \ldots$, $(a_{nk^i})^{\infty}{}_{i=1}$. Обозначим через a_0, $a_1, \ldots$, a_n их пределы. Так как $a_{mk^s} \in A_m$ $\forall m, k^s$, а множества A_m замкнуты, то и предельные точки $a_m \in A_m$. Далее, т.к. $\rho(a_{pk^s}, a_{qk^s}) \to 0$, то $a_0=a_1=\ldots=a_n=a^*$. Таким образом, $a^* \in (A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n) \neq \varnothing$. Тем самым теорема 3 (а с ней и теорема Брауэра) доказана.

1. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности, «Наука», М.,1973
2. Канторович, Акилов Функциональный анализ, «Наука», М.,1977.
3. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ, «Мир», М., 1988.
4. Ху С.Ц. Теория гомотопий, «Мир», М., 1964.
5. Понтрягин Л.С. Основы комбинаторной топологии, «Наука», М.,1976.