БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

_________________А.Д.Король

25 апреля 2025 г.

Регистрационный № 2762/б.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине
для специальности:

6-05-0533-09 Прикладная математика

2025 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-09-2023, учебных планов: № 6-53-57/01, № 6-53-57/02,№ 6-53-57/03, № 6-53-57/04 от 15.05.2023.

СОСТАВИТЕЛИ:

Е.С. Чеб, доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЗЕНЗЕНТЫ:

Ф.Е. Ломовцев, профессор кафедры интеллектуального математического моделирования Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;
Н.Н. Гринчик, старший научный сотрудник ГНУ «Институт тепло и массообмена им. Лыкова» НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой компьютерных технологий и систем БГУ
(протокол № 11 от 22.04.2025)

Научно-методическим советом БГУ
(протокол№ 9 от 24.04.2025)

Заведующий кафедрой ________________ В.В.Казаченок

Савелева Т.В.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Функциональный анализ и интегральные уравнения» отражает важное направление развития современной математики, поскольку в ней рассматриваются не отдельные объекты типа функций или уравнений, а обширные классы пространств со структурой векторного пространства и операторов в этих пространствах. Этот подход позволяет с единой точки зрения рассмотреть вопросы решения задач, например, вычислительной математики, сформировать у будущих специалистов абстрактное мышление и получить необходимую базу знаний для их дальнейшего применения в различных областях знаний.

В настоящее время общепризнанна объединяющая роль функционального анализа. Его идеи и методы широко используются в теории дифференциальных и интегральных уравнений, математической физики, в математической экономике, в теории численных методов, в теории управления и других теоретических и прикладных дисциплинах.

Функциональный анализ весьма обширен и интенсивно развивается.

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины – ознакомить студентов с основами современного анализа в бесконечномерных линейных пространствах, обобщающего как теорию линейных операторов в конечномерных пространствах, так и понятие предела последовательности и функций и других понятий конечномерного анализа; показать применение основных понятий и методов функционального анализа к различным областям математики, таким как: интегральные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных, вариационное исчисление, выпуклый анализ, оптимальное управление и др.

Образовательная цель: научить студентов основополагающим принципам и фактам функционального анализа, показать разнообразие конкретных реализаций общих конструкций, обеспечить возможность дальнейшего самостоятельного освоения современных методов непрерывного анализа.

Развивающая цель: расширить математический кругозор, поднять уровень математической культуры за счет работы с объектами более высокого уровня абстракции, по сравнению с конечномерным анализом.

Задачи учебной дисциплины:

1. Изучение основных принципов и методов функционального анализа.
2. Формирование умений в области применения основных методов функционального анализа при решении теоретических и прикладных задач естествознания.
3. Получение практических навыков работы с методами функционального анализа.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Функциональный анализ и интегральные уравнения» относится **к модулю** «Дифференциальные уравнения и функциональный анализ» компонента учреждения образования.

Связи с другими учебными дисциплинами. Функциональный анализ и интегральные уравнения тесно связан с такими дисциплинами как: «Линейная алгебра», «Дифференциальное и интегральное исчисление», «Численные методы», «Теория вероятностей и математическая статистика» и «Методы оптимизации».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения» должно обеспечить формирование следующей **специализированной компетенции:**

Использовать основные положения функционального анализа при решении прикладных задач, возникающих в различных областях естествознания, в частности, описываемых интегральными уравнениями.

В результате изучения дисциплины студент должен

знать:

- основные понятия суммируемости функций по Лебегу;
- основные понятия и методы теории банаховых и гильбертовых пространств;
- основные понятия теории линейных ограниченных операторов и функционалов;
- теорию разрешимости операторных уравнений 1-го и 2-го рода;

уметь:

- исследовать множества в банаховых пространствах и последовательности на сходимость;
- исследовать отображения в банаховых пространствах;
- аппроксимировать функции в гильбертовом пространстве рядами Фурье;
- вычислять норму линейного ограниченного оператора и функционала;
- вычислять сопряженный оператор в гильбертовом пространстве;
- решать интегральные уравнения Фредгольма и Вольтера аналитическими методами и методом последовательных приближений;
- использовать основные результаты функционального анализа в практической деятельности;

иметь навык:

- исследования множеств в банаховых и гильбертовых пространствах;
- аппроксимации функций в гильбертовых пространствах;
- аналитического исследования на разрешимость операторных уравнений первого и второго рода;
- исследования на разрешимость интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера;
- самообразования и способами использования аппарата функционального анализа для проведения математических и

междисциплинарных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5 семестре. В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения» отведено для очной формы получения высшего образования: 108 часов, в том числе 68 аудиторных часов, лекции – 34 часа, практические занятия –34 часа. **Из них:**

Лекции – 34 часа, практические занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Введение

Предмет и основные методы дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения». Исторические сведения о возникновении и развитии этого раздела математики, его место среди других математических наук.

Раздел 1. Нормированные векторные пространства

Тема 1.1. Метрические и нормированные пространства.

Определения метрического и нормированного векторного пространств, открытые и замкнутые множества в них. Предельные точки и точки прикосновения множества. Замыкание множества. Построение замыкания.

Тема 1.2. Сходящиеся последовательности.

Определение сходящейся последовательности и ее свойства. Сходимость в пространствах непрерывных функций и пространстве бесконечных числовых последовательностей.

Тема 1.3. Аппроксимация в нормированных пространствах.

Построение элемента наилучшей аппроксимации в конечномерных и в строго нормированных пространствах.

Тема 1.4. Банаховы пространства и ряды в них.

Последовательность Коши и ее свойства. Полные и неполные пространства. Пополнение нормированных векторных пространств. Пространство суммируемых по Лебегу функций и его полнота.

Тема 1.5. Принцип сжимающих отображений в банаховых пространствах.

Сжимающее отображение и неподвижная точка. Применение принципа сжимающих отображений в линейной алгебре, к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера второго рода, к решению задачи Коши для дифференциальных уравнений.

Раздел 2. Гильбертовы пространства и аппроксимация

Тема 2.1. Пространства со скалярным произведением.

Скалярное произведение и его свойства. Гильбертовы пространства. Пространство квадратично суммируемых по Лебегу функций как гильбертово пространство.

Тема 2.2. Элемент наилучшей аппроксимации и проекция.

Аппроксимация в евклидовых и в гильбертовых пространствах. Аппроксимация и проекция. Ортогональное разложение гильбертова пространства.

Тема 2.3. Ортогональные системы и ряды Фурье.

Полные ортонормированные системы в пространстве функций. Аппроксимация рядами Фурье и ее применение. Изоморфизм гильбертовых пространств.

Раздел 3. Линейные ограниченные операторы

Тема 3.1. Линейный ограниченный оператор и его норма.

Определение нормы линейного ограниченного оператора. Пространство линейных ограниченных операторов и сходимость в нем. Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха-Штейнгауза.

Тема 3.2. Обратные операторы.

Левый и правый обратные операторы, и разрешимость операторного уравнения. Непрерывная обратимость оператора и корректная разрешимость операторного уравнения.

Тема 3.3. Метод резольвент.

Линейные операторные уравнения первого и второго рода и их решение. Решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера методом резольвент.

Раздел 4. Сопряженное пространство и сопряженные операторы

Тема 4.1. Линейные ограниченные функционалы и их норма.

Геометрический смысл линейного функционала. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве. Вычисление нормы.

Тема 4.2. Сопряженное пространство.

Структура сопряженного пространства. Сопряженное пространство к евклидовому и гильбертовому. Продолжение линейного ограниченного функционала. Построение продолжения.

Тема 4.3. Сопряженные и самосопряженные операторы.

Определение сопряженного оператора в гильбертовом пространстве и его свойства. Норма самосопряженного оператора в гильбертовых пространствах. Операторы ортогонального проектирования.

Тема 4.4. Собственные векторы и собственные значения.

Собственные векторы и собственные значения самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве и их свойства. Вычисление нормы самосопряженного оператора. Симметричность дифференциального оператора.

Раздел 5. Компактные множества и компактные операторы

Тема 5.1. Компактные и предкомпактные множества.

Определение предкомпактного множества в банаховом пространстве и его свойства. Критерий предкомпактности Хаусдорфа. Теорема Арцела-Асколи предкомпактности в пространстве непрерывных функций. Компактные множества. Критерий конечномерности банахова пространства.

Тема 5.2. Непрерывные отображения на компактах.

Теорема Кантора и Вейерштрасса. Экстремум линейного непрерывного функционала.

Тема 5.3. Компактные операторы.

Структура компактного оператора. Компактные самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах и их собственные векторы.

Тема 5.4. Альтернатива Фредгольма.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ[1]

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**Нормированные векторные пространства**	**8**	**8**				**2**	
1.1	Метрические и нормированные пространства.	2	4					опрос и проверка отчета по практической работе
1.2	Сходящиеся последовательности.	2	2					опрос и проверка отчета по практической работе
1.3	Аппроксимация в нормированных пространствах.	1						опрос
1.4	Банаховы пространства и ряды в них.	1						опрос
1.5	Принцип сжимающих отображений в банаховых пространствах.	2	2				2	коллоквиум, проверка отчета по лабораторной работе
2	**Гильбертовы пространства и аппроксимация**	**6**	**6**				**2**	
2.1	Пространства со скалярным произведением.	2	2					опрос и проверка отчета по

								практической работе
2.2	Элемент наилучшей аппроксимации и проекция.	2	2					контрольная работа №1
2.3	Ортогональные системы и ряды Фурье.	2	2				2	коллоквиум, проверка отчета по лабораторной работе
3	**Линейные ограниченные операторы**	**6**	**6**					
3.1	Линейный ограниченный оператор и его норма.	2	2					опрос и проверка отчета по практической работе
3.2	Обратные операторы.	2	2					опрос и проверка отчета по практической работе
3.3	Метод резольвент.	2	2					опрос и проверка отчета по практической работе
4	**Сопряженное пространство и сопряженные операторы**	**8**	**6**					
4.1	Линейные ограниченные функционалы и их норма.	2	2					опрос и проверка отчета по практической работе
4.2	Сопряженное пространство.	2	2					опрос и проверка отчета по практической работе
4.3	Сопряженные и самосопряженные операторы.	2	2					опрос и проверка отчета по практической работе
4.4	Собственные векторы и собственные значения.	2						опрос
5	**Компактные множества и компактные операторы**	**6**	**4**					

5.1	Компактные и предкомпактные множества.	2	2					опрос и проверка отчета по практической работе
5.2	Непрерывные отображения на компактах.	1						опрос
5.3	Компактные операторы.	1	2					опрос и контрольная работа №2
5.4	Альтернатива Фредгольма.	2						опрос

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Дайняк, В. В. Банаховы пространства : методические указания и задания к практическим занятиям по курсу "Функциональный анализ и интегральные уравнения" для студентов факультета прикладной математики и информатики / В. В. Дайняк, Е. С. Чеб ; БГУ, ФПМИ, Кафедра компьютерных технологий и систем. – Минск : БГУ, 2021. – 67 с. – URL: https://elib.bsu.by/handle/123456789/275205.
2. Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа : учебное пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – Изд. 2-е, стер. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2024. – 271 с. – URL: https://e.lanbook.com/book/210290.
3. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон. – 6-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 560 с.– URL: https://e.lanbook.com/book/189430.
4. Филимоненкова, Н. В. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие для студ. технических направлений бакалавриата и направлений "Прикладная математика", "Прикладная математика и информатика" технических вузов / Н. В. Филимоненкова– Санкт-Петербург; Москва; Краснодар : Лань, 2024. – 229 с. – URL:https://e.lanbook.com/book/212057.
5. Филимоненкова, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу: учебное пособие для студ. технических направлений бакалавриата и направлений "Прикладная математика", "Прикладная математика и информатика" технических вузов / Н. В. Филимоненкова. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар : Лань, 2024. – 168 с. –URL: https://e.lanbook.com/book/212048.

Дополнительная литература

1. Антоневич, А. Б.Функциональный анализ и интегральные уравнения : учеб. пособие для студ. учр. / А. Б. Антоневич, М. Х. Мазель, Я. В. Радыно. –Минск : БГУ, 2011. – 319 с. – URL: http://elib.bsu.by/handle/123456789/14907.
2. Богачев, В.И. Действительный и функциональный анализ: Университетский курс/ В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. – М.: РХД, 2009. – 724с.
3. Гуревич, А.П. Сборник задач по функциональному анализу/ А.П. Гуревич, В.В. Корнев, А.П. Хромов. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2022. – 192 с.
4. Дайняк, В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.1. / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2013. – 52 с.
5. Дайняк, В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.2. / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2015. – 56 с.

6. Дайняк, В.В. Гильбертовы пространства и аппроксимация [Электронный ресурс]: методические указания и задания к практическим занятиям по курсу "Функциональный анализ и интегральные уравнения" для студентов факультета прикладной математики и информатики / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб; БГУ, ФПМИ, Кафедра компьютерных технологий и систем. – Минск : БГУ, 2020. –52 с. –URL: https://elib.bsu.by/handle/123456789/256668.

7. Дайняк, В.В. Метрические пространства [Электронный ресурс]: методические указания и задания к практическим занятиям по курсу "Функциональный анализ и интегральные уравнения" для студентов факультета прикладной математики и информатики / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб; БГУ, ФПМИ, Кафедра компьютерных технологий и систем. – Минск : БГУ, 2020. – URL:https://elib.bsu.by/handle/123456789/241306.

8. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа/ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2023. – 572 с.

9. Лебедев, В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика/ В.И.Лебедев. – 4 изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. – 296 с.

10. Терсенов, А. С. Лекции по прикладному функциональному анализу : учебник для вузов / А. С. Терсенов. – Москва : Издательство Юрайт, 2025. – 83 с. — (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-18812-7. – Текст : электронный //Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/568927

11. Треногин, В.А. Функциональный анализ: в 2 т. Т 1./В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – М.: Издательский центр «Академия», 2012. – 240 с.

12. Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу/ В.А.Треногин, Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 240 с.

13. Хелемский, А.Я. Лекции по функциональному анализу/ А.Я. Хелемский. – М.: МЦНМО, 2009. – 304с.

14. Чеб, Е. С.Функциональный анализ и интегральные уравнения [Электронный ресурс] : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)», направление специальности: 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (научно-производственная деятельность)» / Е. С. Чеб ; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. компьютерных технологий и систем. –Минск : БГУ, 2020. – URL:https://elib.bsu.by/handle/123456789/244161.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и текущей аттестации.

Для диагностики компетенций в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы:

1. Устный опрос.
2. Отчет по практической работе.
3. Отчет по лабораторной работе.
4. Коллоквиум.
5. Контрольная работа.

Контрольные мероприятия проводятся в соответствии с учебно-методической картой дисциплины. В случае неявки на контрольное мероприятие по уважительной причине студент вправе по согласованию с преподавателем выполнить его в дополнительное время. Для студентов, получивших неудовлетворительные отметки за контрольные мероприятия, либо не явившихся по неуважительной причине, по согласованию с преподавателем и с разрешения заведующего кафедрой мероприятие может быть проведено повторно.

Отметка за практическую работу и типовой расчет включает:

- ответ (полнота ответа) – 30 %;
- выполнение индивидуального задания – 70 %.

Коллоквиумы используются для обобщения исистематизации учебного материала. В коллоквиум включаются теоретический вопрос и решение практической задачи. При оценивании коллоквиума вниманиеобращается на:

- содержание и последовательность изложения теоретического вопроса – 30%;
- соответствие и полноту раскрытия вопроса – 30 %;
- грамотный научный подход к решению практической задачи – 40%.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ и интегральные уравнения» учебным планом предусмотрен **экзамен.**

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

- устный опрос –10%.
- проверка отчета по практической работе – 15%.
- коллоквиум – 35%.
- проверка контрольной работы – 40%.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе итоговой отметки текущей аттестации (модульно-рейтинговой системы оценки знаний) 40 % и экзаменационной отметки 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.5. Принцип сжимающих отображений в банаховых пространствах.

Сжимающее отображение и неподвижная точка. Применение принципа сжимающих отображений в линейной алгебре, к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера второго рода, к решению задачи Коши для дифференциальных уравнений.(2ч.)

Усвоение материала контролируется в выполненном задании (4 задания, индивидуальные варианты заданий представлены в LMS Moodle).

Форма контроля – отчет.

Тема 2.3.Ортогональные системы и ряды Фурье.

Полные ортонормированные системы в пространстве функций. Аппроксимация рядами Фурье и ее применение. Изоморфизм гильбертовых пространств. (2 ч.)

Управляемая самостоятельная работы предполагает изучение учебного материала темы по основной и дополнительной литературе. Усвоение материала контролируется в выполненном задании (4 задания, индивидуальные варианты заданий представлены в LMS Moodle).

Форма контроля – отчет.

Примерная тематика практических занятий

Материалы к практическим занятиям с индивидуальными заданиями для каждого студента представлены в следующих материалах:

- Дайняк, В.В. Теория нормированных векторных пространств: метод. указания и задания / В.В.Дайняк, Е.С.Чеб. – Минск: БГУ, 2005. – 82 с.
- Дайняк В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.1./ В.В.Дайняк, Е.С.Чеб. – Минск: БГУ, 2013. – 52 с.
- Дайняк В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.2./ В.В.Дайняк, Е.С.Чеб. – Минск: БГУ, 2015. – 56 с.
- Дайняк, В. В. Банаховы пространства : метод. указания и задания / В.В.Дайняк, Е.С.Чеб. – Минск : БГУ, 2021. – 67 с.
- Дайняк, В.В. Гильбертовы пространства и аппроксимация: метод. указания и задания / В.В. Дайняк, Е.С.Чеб; БГУ, ФПМИ, Кафедра компьютерных технологий и систем. – Минск : БГУ, 2020. – 52 с.

Практическое занятие № 1. Некоторые методы решения линейных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера с вырожденным ядром.

Практическое занятие № 2. Метрические и нормированные пространства. Способы задания метрики и нормы. Эквивалентные нормы.

Практическое занятие № 3. Предел последовательности в нормированном пространстве.

Практическое занятие № 4. Открытые, замкнутые, ограниченные, выпуклые множества в нормированном пространстве.

Практическое занятие № 5. Банаховы пространства и отображения в них.

Практическое занятие № 6. Сжимающие отображения и метод последовательных приближений.

Практическое занятие № 7. Гильбертовы пространства. Вычисление проекции и аппроксимация рядами Фурье.

Практическое занятие № 8. Линейные ограниченные операторы и их норма.

Практическое занятие № 9. Левый и правый обратные операторы. Непрерывная обратимость.

Практическое занятие № 10. Метод резольвент решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера второго рода.

Практическое занятие № 11. Норма линейного ограниченного функционала. Структура сопряженного пространства.

Практическое занятие № 12. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве и его применение.

Практическое занятие № 13. Компактные операторы.

Практическое занятие № 14. Собственные векторы и собственные значения компактного самосопряженного оператора.

Практическое занятие № 15. Решение интегральных уравнений Фредгольма с симметричным ядром.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется ***практико-ориентированный подход,*** который предполагает***:***

- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Функциональный анализ и интегральные уравнения» используются современные информационные ресурсы, размещенные на образовательном портале: комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, методические указания к практическим занятиям, материалы текущего контроля и промежуточнойаттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к экзамену, задания, вопросы для самоконтроля, список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа №1 (примерный вариант)

Вариант 1.

1. Найти предел последовательности в пространстве $CL_2[0,1]$, если он существует

$$x_n(t) = n^2 e^{-nt}.$$

2. Исследовать на замкнутость или не замкнутость множество в $C[-1,1]$

$$M = \{x(t) \in C[-1,1] : 1 < x(t) \le 2\}.$$

3. Удовлетворяет ли отображение условию Липшица в пространстве $L_2[0,1]$

$$f(x) = \int_0^1 t^5 s^2 x(s)ds.$$

4. Найти проекцию элемента $x_0(t) = t^3 + t^2$ на подпространство $L \subset L_2[-1,1]$

$$L = \left\{ x(t) : x(t) = x(-t), \int_0^1 t^3 dt = 0 \right\}.$$

5. Решить уравнение Вольтерра

$$x(t) + \int_0^t \cos(t) e^{t-s}\, x(s)\, ds = e^{t-\sin t}.$$

Вариант 2.

1. Найти предел последовательности в пространстве ℓ_4, если он существует

$$x^{(n)} = \left(\frac{\sqrt[3]{n}}{n+1,}, \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1,}, \ldots \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1,}, 0, 0, \ldots \right).$$

2. Исследовать на замкнутость или не замкнутость множество в ℓ_2

$$M = \left\{ x \in \ell_2 : \sum_{i=1}^{k} x_i = 0 \right\}.$$

3. Удовлетворяет ли отображение условию Липшица в пространстве ℓ_2

$$f(x) = \left(\frac{1}{5} x_1 + \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{5^k} x_k + \frac{1}{k+1}, ... \right).$$

4. Найти проекцию элемента $x_0 = (1,1,2,2,0,...) \in \ell_2$ на подпространство $L \subset \ell_2$

$$L = \{ x \in \ell_2 : x_1 - x_3 = 0, x_2 - 4x_4 = 0 \}.$$

5. Решить уравнение Вольтерра

$$x(t) - \int_1^t \frac{t\cos(t)}{s\cos(s)} x(s)\, ds = e^t \cos(t).$$

Контрольная работа №2 (примерный вариант)

Вариант 1.

1. Доказать, что оператор $A: X \to Y$ является линейным, ограниченным и найти его норму

$$X = L_3[0,1], \quad Y = L_{5/2}[-1,2],$$

$$Ax(t) = \int_0^{1/2} t^4 s^3 x(s)\, ds.$$

2. Показать, что оператор ограничен и найти к нему сопряженный в пространстве $L_2[0,1]$

$$Ax(t) = \int_{t^5}^{1} tg(t) s^2 x(s) ds + \int_0^{1/2} t\, s^4 x(s) ds.$$

3. Выяснить, при каких значениях параметров разрешимо интегральное уравнение

$$x(t) + 6\int_0^1 (t^2 - 2st) x(s) ds = at + bt^3.$$

4. Является ли множество M равностепенно непрерывным в пространстве $C[0,1]$?

$$M = \left\{ \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha t} \middle| \alpha \in R,\ 0 < \alpha < +\infty \right\}.$$

5. С помощью теоремы Рисса вычислить норму функционала в пространстве $L_2[-1,1]$

$$f(x) = \int_0^1 t x(t) dt - \int_{-1/2}^{1/2} t^6 x(t^3) dt.$$

Вариант 2.

1. Доказать, что оператор $A: X \to Y$ является линейным, ограниченным и найти его норму

$$X = C[-1,1],\ \ Y = L_3[0,1],$$

$$Ax(t) = \int_{-1}^{1} t^2 \operatorname{sgn}(s-0{,}5)\, x(s)\, ds - tx(1).$$

2. Показать, что оператор линеен и ограничен и найти к нему сопряженный в пространстве $L_2[0,1]$

$$Ax(t) = \int_0^{\cos t} e^t tg(s) x(s)\, ds - \int_1^{t^2} t^5 s^3 x(s)\, ds.$$

3. Выяснить, при каких значениях параметров разрешимо интегральное уравнение

$$x(t) + \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(4ts - s^2)x(s)ds = at^3 + bt^2.$$

4. Является ли множество M равностепенно непрерывным в пространстве $C[0,1]$?

$$M = \left\{ x(t) = \frac{nt}{1+n^3t^3}, n \in N, t \in [0,1] \right\}.$$

5. По определению вычислить норму функционала в пространстве $C[-3,5]$

$$f(x) = x(-2) - x(-1) - \int_{-1}^{3} t^3\, x(t)\, dt - 2x(2) + 3x(4).$$

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Метрические пространства. Способы задания расстояния. Прикладные задачи и способы задания метрики.
2. Векторные пространства. Примеры. Базис и размерность.
3. Нормированные векторные пространства. Примеры. Свойства нормы. Эквивалентные нормы. Теорема об эквивалентных нормах в конечномерных пространствах.
4. Неравенства Гельдера, Юнга, Минковского. Пространство $CL_p[a,b]$, $\ell_p, p \geq 1$.
5. Открытые, замкнутые, ограниченные и выпуклые множества в нормированных векторных пространствах и их свойства. Примеры.
6. Внутренние, внешние, граничные и предельные точки. Примеры. Теорема о замкнутом множестве. Всюду плотные и нигде не плотные множества.
7. Предел последовательности в нормированном пространстве. Свойства предела. Теорема о точке прикосновения.

8. Аппроксимация в нормированных пространствах. Теоремы о существовании и единственности элемента наилучшей аппроксимации.

9. Банаховы пространства. Примеры. Принцип вложенных шаров.

10. Ряды в банаховых пространствах. Критерий полноты пространства.

11. Пополнение нормированных векторных пространств.

12. Пространство суммируемых по Лебегу функций $Lp[a,b]$.

13. Отображения в нормированных пространствах. Теорема о непрерывном отображении, непрерывность композиции отображений.

14. Сжимающие отображения. Теоремы о неподвижной точке сжимающего отображения. Локальный принцип сжимающих отображений.

15. Применение принципа сжимающих отображений в линейной алгебре.

16. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям второго рода.

17. Предгильбертовы пространства. Свойства скалярного произведения. Примеры.

18. Гильбертовы пространства. Примеры. Теорема об элементе наилучшей аппроксимации.

19. Проекция в гильбертовом пространстве. Теорема о проекции.

20. Ортогональное дополнение. Ортогональное разложение гильбертова пространства в прямую сумму. Теорема о всюду плотном множестве.

21. Ортогональные системы и ряды Фурье в гильбертовых пространствах. Теорема о разложении в ряд Фурье. Экстремальное свойство отрезка ряда Фурье. Аппроксимация рядами Фурье.

22. Полные ортонормированные системы в гильбертовом пространстве и их существование. Примеры полных ортонормированных систем в конкретных пространствах. Изоморфизм гильбертовых пространств.

23. Линейные ограниченные операторы. Ограниченность и непрерывность. Примеры линейных ограниченных операторов. Ограниченность интегрального оператора в пространствах $C[a.b]$, $L_p[a.b]$, $p\geq 1$.

24. Пространство линейных ограниченных операторов и его полнота. Равномерная сходимость. Примеры.

25. Сильная сходимость в пространстве $B(X,Y)$. Принцип равномерной ограниченности.

26. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее применение.

27. Обратные операторы. Непрерывная обратимость оператора и ее критерий. Левый и правый обратные операторы и разрешимость уравнения $Ax=y$. Теорема Банаха об обратном операторе.

28. Непрерывная обратимость оператора I-A. Применение теории обратных операторов к интегральным уравнениям второго рода. Метод резольвент.

29. Сопряженное пространство. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

30. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного ограниченного функционала. Следствия из теоремы Хана-Банаха.
31. Сопряженный оператор и его норма. Свойства операции сопряжения.
32. Применение сопряженного оператора. Теорема о замыкании множества значений линейного ограниченного оператора.
33. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, их свойства.
34. Норма самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.
35. Собственные векторы и собственные значения самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.
36. Операторы ортогонального проектирования и их свойства.
37. Компактные множества в банаховых пространствах. Критерий компактности Хаусдорфа.
38. Предкомпактные множества в банаховых пространствах. Теорема Арцела-Асколи.
39. Лемма о почти перпендикуляре. Критерий конечномерности нормированного пространства.
40. Пространство компактных операторов. Примеры.
41. Разрешимость уравнений второго рода с компактным оператором.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Уравнения математической физики	Компьютерных технологий и систем	Предложения отсутствуют	Рекомендовать к утверждению учебную программу (протокол № 11 от 22.04.2025)
Вычислительные методы алгебры	Вычислительной математики	Предложения отсутствуют	Рекомендовать к утверждению учебную программу (протокол № 11 от 22.04.2025)
Методы оптимизации	Методов оптимального управления	Предложения отсутствуют	Рекомендовать к утверждению учебную программу (протокол № 11 от 22.04.2025)

Заведующий кафедрой
компьютерных технологий и систем, ________________ В.В.Казаченок
д. пед.н., профессор

22 апреля 2025 г.

Заведующий кафедрой
вычислительной математики, ________________ В.И.Репников
канд.физ.-мат.н., доцент

22 апреля 2025 г.

Заведующий кафедрой
методов оптимального управления, ________________ Н.М. Дмитрук
канд.физ.-мат.н., доцент

22 апреля 2025 г.

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УО

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
______________________________ (протокол № ____ от ________ 202_ г.)
(название кафедры)

Заведующий кафедрой
______________________ ________________

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
______________________ __________________