

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король

23 мая 2025 г.

Регистрационный № 2830/6.



ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для
специальности:

6-05-0533-09 Прикладная математика

2025 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-09-2023, учебных планов БГУ: №6-5.3-57/01 от 15.05.2023, №6-5.3-57/02 от 15.05.2023, №6-5.3-57/03 от 15.05.2023, №6-5.3-57/04 от 15.05.2023.

СОСТАВИТЕЛИ:

А.М. Будник – доцент кафедры вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Ю.Н. Горбачёва – старший преподаватель кафедры вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета;

В.И. Репников – заведующий кафедрой вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТ:

П.П. Матус – главный научный сотрудник отдела информационных технологий Института математики НАН Беларуси, член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор;

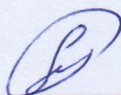
С.И. Чубаров – заведующий кафедрой информатики и методики преподавания информатики Учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

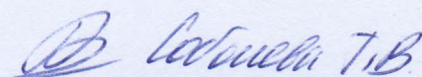
Кафедрой вычислительной математики БГУ
(протокол № 13 от 15.05.2025);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 10 от 22.05.2025)

Заведующий кафедрой _____



В.И.Репников



ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины – обучение студентов основам вычислительных методов решения задач линейной алгебры.

Задачи учебной дисциплины:

1. Обучение студентов теоретическим основам построения и исследования численных методов и алгоритмов решения задач линейной алгебры;
2. Ознакомление студентов с классическими и современными методами численного решения задач линейной алгебры;
3. Формирование у студентов твердых навыков в выборе алгоритмов для решения конкретной задачи (ориентируясь на теоретические характеристики данного алгоритма);
4. Приобретение студентами практического опыта при программной реализации вычислительных алгоритмов.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к модулю «Методы численного анализа» государственного компонента.

Связи с другими учебными дисциплинами: дисциплины государственного компонента модулей «Геометрия и алгебра», «Математический анализ», дисциплина государственного компонента «Основы и методологии программирования» модуля «Программирование».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Вычислительные методы алгебры» должно обеспечить формирование следующих **базовых профессиональных компетенций**:

Использовать принципы численных методов и навыки прикладного численного моделирования для решения основных задач высшей математики и математической физики, выбирать оптимальный алгоритм для решения конкретных задач.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные методы решения систем линейных алгебраических уравнений;
- методы решения полной и частичной проблем собственных значений;
- методы исследования свойств приближенных алгоритмов линейной алгебры;

уметь:

- применять прямые и итерационные методы для нахождения решений систем линейных алгебраических уравнений, вычисления определителей и обращения матриц;
- решать полную и частичную проблемы собственных значений;

иметь навыки:

- использования конкретных алгоритмов для решения задач линейной алгебры;

– программной реализации методов численного решения основных задач линейной алгебры, возникающих в различных областях естествознания.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5 семестре. В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Вычислительные методы алгебры» отведено **для очной формы** получения высшего образования – 108 часов, в том числе 68 аудиторных часов: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 34 часа. Из них:

Лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа (УСР) – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1 Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Тема 1.1 Элементы теории погрешностей. Нормы вектора и матрицы. Устойчивость. Обусловленность

Предмет «Вычислительные методы алгебры» и основные задачи, излагаемые в указанном курсе. Элементы теории погрешностей. Нормы вектора и матрицы. Общая характеристика проблем решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решения задач на собственные значения, понятий корректности и устойчивости СЛАУ. Устойчивость решения СЛАУ по правой части и коэффициентная устойчивость. Число обусловленности матрицы и его свойства. Хорошо обусловленные и плохо обусловленные СЛАУ.

Тема 1.2 Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Общая характеристика прямых методов решения СЛАУ. Теорема об LU-разложении. Схема единственного деления и ее связь с теоремой об LU-разложении. Методы Гаусса с выбором главного элемента. Вычисление определителей и обращение матриц с помощью метода Гаусса. Разложение Холецкого. Метод квадратного корня. Метод правой прогонки решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей. Связь метода прогонки с методом Гаусса. Теорема о корректности метода прогонки. Методы левой и встречной прогонки. Ортогональные преобразования. QR-разложение. Методы отражений, вращений и ортогонализации.

Тема 1.3 Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Общая характеристика итерационных методов решения СЛАУ. Классификация итерационных процессов. Сходимость матричной геометрической прогрессии. Методы простой итерации и Зейделя. Теоремы сходимости. Методы Якоби и Гаусса-Зейделя. Итерационные методы вариационного типа и теоремы их сходимости. Методы покоординатного и градиентного спуска, релаксации и минимальных невязок.

Раздел 2 Методы решения задач на собственные значения

Тема 2.1 Полная проблема собственных значений

Общая постановка задачи на собственные значения. Устойчивость задачи на собственные значения. Методы Данилевского, Крылова, Леверье и видоизменение Фаддеева. Использование верхней формы Хессенберга для построения собственного многочлена. Преобразование матрицы по методам отражений и вращений. Итерационный метод вращений. QR-алгоритм.

Тема 2.2 Частичная проблема собственных значений

Степенной метод вычисления наибольшего по модулю собственного значения и его модификации. Метод обратных итераций. Метод λ -разности.

Ступенчатый степенной метод. Ускорение сходимости итерационных процессов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Методы решения систем линейных алгебраических уравнений	24			22		2	
1.1	Элементы теории погрешностей. Нормы вектора и матрицы. Устойчивость. Обусловленность	4			4			Экспресс-опрос
1.2	Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений	10			10			Отчет по лабораторной работе, экспресс-опрос
1.3	Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений	10			8		2	Отчет по лабораторной работе, экспресс-опрос Контрольная работа №1 по темам 1.1-1.3
2	Методы решения задач на собственные значения	10			8		2	

2.1	Полная проблема собственных значений	6			6			Отчет по лабораторной работе, экспресс-опрос
2.2	Частичная проблема собственных значений	4			2		2	Отчет по лабораторной работе, экспресс-опрос Контрольная работа №2 по темам 2.1-2.2

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Волков, Е. А. Численные методы : учебное пособие [для вузов] / Е. А. Волков. - Изд. 7-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. - 248 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/254663>.
2. Гулин, А.В. Введение в численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, / А.В. Гулин, О.С. Мажорова, В.А. Морозова. – Москва: ИНФРА-М, 2022. – 367 с. – URL: <https://znanium.ru/catalog/document?id=390201>.
3. Пантелеев, А. В. Численные методы. Практикум: учебное пособие / А. В. Пантелеев, И. А. Кудрявцева. – Москва: ИНФРА-М, 2023. – 511 с. – Текст: электронный. – URL: <https://znanium.ru/catalog/document?id=427023>.
4. Слабнов, В. Д. Численные методы : учебник [для вузов] / В. Д. Слабнов. – Изд. 3-е, стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. – 389 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/359849>.
5. Фаддеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры : учебник / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. - Изд. 4-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. - 734 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/210368>.

Дополнительная литература

1. Vorst van der H. Iterative Krylov methods for large linear systems. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 221 p.
2. Открытая энциклопедия свойств алгоритмов. Статья «QR-алгоритм» URL: <http://algowiki-project.org>
3. Открытая энциклопедия свойств алгоритмов. Статья «Метод Якоби (вращений) для решения спектральной задачи у симметричных матриц» URL: <http://algowiki-project.org>
4. Открытая энциклопедия свойств алгоритмов. Статья «Метод Гивенса (вращений) QR-разложения квадратной матрицы (вещественный вариант)» URL: <http://algowiki-project.org>
5. Открытая энциклопедия свойств алгоритмов. Статья «Классическая ортогонализация Грамма-Шмидта» URL: <http://algowiki-project.org>
6. Открытая энциклопедия свойств алгоритмов. Статья «Прогонка, точечный вариант» URL: <http://algowiki-project.org>
7. Саад, Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем / Ю. Саад. – М.: Издательство Московского университета, 2013. – 306 с.
8. Калиткин, Н.Н. Численные методы: в 2 кн. Кн. 1. Численный анализ: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / Н.Н. Калиткин, Е.А. Альшина. – М.: Издательский центр «Академия», 2013 – 304 с.
9. Калиткин, Н. Н. Численные методы: учебное пособие / Н.Н. Калиткин. – БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.

10. Самарский, А.А. Численные методы: учебное пособие / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
11. Самарский, А.А. Введение в численные методы: Учебное пособие / А.А. Самарский. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 288 с.
12. Крылов, В.И. Вычислительные методы: Учебное пособие / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – М.: Наука, т. 1– 1976, 304 с., т. 2– 1977, 400 с.
13. Бахвалов, Н.С. Численные методы. Решение задач и упражнения: учебное пособие / Н.С. Бахвалов, А.А. Корнев, Е.В. Чижонков. – Москва: Бином, 2016. – 352 с.
14. Овсянникова, Н.И. Численные методы: учебное пособие / Н.И. Овсянникова. – М.: ИД Академии Жуковского, 2021. – 84 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущей аттестации: отчеты по лабораторным работам, письменные контрольные работы, устные экспресс-опросы.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Вычислительные методы алгебры» учебным планом предусмотрен зачет.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

- отчеты по лабораторным работам – 50 %;
- контрольные работы – 40 %;
- устный экспресс-опрос – 10 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (модульно-рейтинговой системы оценки знаний) – 60 % и отметки на зачете – 40 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

Тема 1.3. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (2 часа)

1. Исследовать обусловленность СЛАУ.
2. Решить СЛАУ указанным методом (Гаусса, LU-разложения, квадратного корня, прогонки, вращений, отражений).

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

3. Построить сходящийся итерационный процесс для решения СЛАУ указанным методом (простой итерации, Якоби, Гаусса-Зейделя, релаксации).

4. Исследовать сходимость итерационного процесса для решения СЛАУ.

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

Тема 2.2 Частичная проблема собственных значений (2 часа)

1. Применить указанный метод для нахождения собственных значений матрицы (метод Данилевского, Крылова, Леверье и Фаддеева).

2. Вычислить собственные значения и векторы матрицы итерационным методом вращений.

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

3. Применить к матрице QR-алгоритм

4. Найти одно или несколько ведущих собственных значений матрицы и соответствующие собственные векторы степенным методом.

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

Примерный перечень лабораторных занятий

Занятие 1. Прямая и обратная задачи теории погрешностей.

Занятие 2. Нормы векторов и матриц. Обусловленность СЛАУ.

Занятие 3. Метод Гаусса и его модификации.

Занятие 4. Вычисление определителей и обратных матриц с использованием метода Гаусса.

Занятие 5. Разложение Холецкого. Метод квадратного корня.

Занятие 6. Метод прогонки.

Занятие 7. Методы отражений и вращений.

Занятие 8. Методы простой итерации и Зейделя.

Занятие 9. Методы спуска, релаксации и минимальных невязок.

Занятие 10. Контрольная работа №1.

Занятие 11. Метод Данилевского.

Занятие 12. Метод Крылова.

Занятие 13. Метод вращений решения полной проблемы собственных значений.

Занятие 14. Степенной метод решения частичной проблемы собственных значений.

Занятие 15. Методы построения собственного многочлена, использующие формулы Ньютона и ортогональные преобразования.

Занятие 16. Контрольная работа №2.

Занятие 17. Итоговое занятие.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации занятий используется *практико-ориентированный подход*, который предполагает:

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности.

Также при организации образовательного процесса используется метод группового обучения, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине следует использовать современные информационные технологии: разместить в сетевом доступе комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, методические указания к лабораторным занятиям, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, экзамену, список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.). Эффективность самостоятельной работы студентов проверяется в ходе текущего и итогового контроля знаний. Для общей оценки качества усвоения студентами учебного материала рекомендуется использование рейтинговой системы.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент.
2. Структура погрешности. Понятие корректности.
3. Задачи теории погрешностей.
4. Нормы вектора и матрицы.
5. Обусловленность систем линейных алгебраических уравнений.
6. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Схема единственного деления.
7. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений с выбором главного элемента.
8. Вычисление определителей и обращение матриц методом Гаусса.
9. LU-разложение. Теорема существования.
10. Метод Гаусса и LU-разложение.

11. Метод квадратного корня решения систем линейных алгебраических уравнений.
12. Метод прогонки, как модификация метода Гаусса.
13. Обоснование метода прогонки решения систем линейных алгебраических уравнений. Теорема о корректности метода.
14. QR-разложение. Теорема существования.
15. Метод отражений решения систем линейных алгебраических уравнений.
16. Метод вращений решения систем линейных алгебраических уравнений.
17. Классификация итерационных процессов решения систем линейных алгебраических уравнений.
18. Сходимость матричной геометрической прогрессии.
19. Условия сходимости метода простой итерации решения систем линейных алгебраических уравнений.
20. Метод Якоби решения систем линейных алгебраических уравнений.
21. Метод Зейделя решения систем линейных алгебраических уравнений и условия его сходимости.
22. Метод Гаусса-Зейделя решения систем линейных алгебраических уравнений.
23. Решение систем линейных алгебраических уравнений и точка минимума соответствующего функционала.
24. Метод покоординатного спуска решения систем линейных алгебраических уравнений.
25. Метод градиентного спуска решения систем линейных алгебраических уравнений.
26. Метод релаксации решения систем линейных алгебраических уравнений.
27. Метод минимальных невязок решения систем линейных алгебраических уравнений.
28. Общие положения проблемы собственных значений.
29. Метод Данилевского. Регулярный случай.
30. Метод Данилевского. Нерегулярный случай.
31. Вычисление собственных векторов матрицы методом Данилевского.
32. Построение собственного многочлена методом Крылова. Случай, когда ранг матрицы совпадает с ее порядком.
33. Построение собственного многочлена методом Крылова. Случай, когда ранг матрицы меньше ее порядка.
34. Вычисление собственных векторов матрицы методом Крылова.
35. Алгоритм метода вращений решения полной проблемы собственных значений.
36. Доказательство сходимости итерационного процесса метода вращений.
37. Степенной метод решения частичной проблемы собственных значений. Нахождение наибольшего по модулю собственного значения и соответствующего собственного вектора.

38. Степенной метод решения частичной проблемы собственных значений. Нахождение наименьшего по модулю собственного значения и соответствующего собственного вектора.

39. Степенной метод решения частичной проблемы собственных значений. Случай кратного доминирующего собственного значения.

40. Степенной метод решения частичной проблемы собственных значений. Случай двух наибольших собственных значений, отличающихся знаками.

41. Степенной метод решения частичной проблемы собственных значений. Случай двух комплексно сопряженных наибольших по модулю собственных значений.

42. Степенной метод решения частичной проблемы собственных значений. Нахождение собственного значения, второго по величине модуля.

43. Метод Лаврентье построения собственного многочлена.

44. Метод Фаддеева построения собственного многочлена.

45. Метод интерполяции построения собственного многочлена. Верхняя форма Хессенберга матрицы.

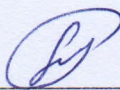
46. Применение метода отражений для построения собственного многочлена.

47. Применение метода вращений для построения собственного многочлена.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой
вычислительной математики
доцент, кандидат физ.-мат. наук



(подпись)

В.И.Репников

15.05.2025

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УО

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
