

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король

27 июня 2025 г.

Регистрационный № 3024/б.



АЛГОРИТМЫ И СТРУКТУРЫ ДАННЫХ

Учебная программа для учреждения образования по учебной дисциплине для
специальности

6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки

Профилизация: Математическое и программное обеспечение
мобильных устройств

2025 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-07-2023; учебных планов БГУ № 6-5.4-55/02 от 15.05.2023, № 6-5.4-55/12ин. от 31.05.2023.

СОСТАВИТЕЛЬ:

Людмила Андреевна Пилипчук, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

А.И. Калинин, профессор кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук;

В.В. Голенков, профессор кафедры интеллектуальных информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, доктор технических наук,

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования БГУ
(протокол № 17 от 02.06.2025)

Научно-методическим Советом БГУ
(протокол № 11 от 26.06.2025)

Заведующий кафедрой



М.В.Игнатенко



ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Учебная дисциплина «Алгоритмы и структуры данных» знакомит студентов с такими фундаментальными понятиями как информация, размерность задачи, трудоемкость алгоритмов, используемыми при разработке алгоритмов и оценке их качества. В учебную программу учебной дисциплины включены разделы, позволяющие строить эффективные алгоритмы для разнообразных задач дискретной и комбинаторной оптимизации, задач матричного анализа и математического программирования. с использованием различных структур данных. Рассматриваются модели линейного программирования для построения алгоритмов в условиях наличия информации с неточными входными данными.

Основной целью учебной дисциплины является ознакомление студентов с основными идеями, методами и алгоритмическими стратегиями, что позволит подготовить их к решению реальных задач, возникающих на практике.

Развивающей целью учебной дисциплины является дальнейшее формирование у студентов навыков алгоритмического мышления и умения применять его в конкретных задачах, а также. изучение современных структур данных и обоснование выбора соответствующих структур в зависимости от набора базовых операций.

Основными задачами дисциплины являются изучение терминологии, основных утверждений и методов их доказательства, освоение приемов решения типовых задач, а также ознакомление со способами моделирования практических задач в терминах задач из рассматриваемых разделов дискретной математики, матричного анализа и математического программирования.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием

Учебная дисциплина относится к модулю «Дискретная математика» компонента учреждения образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Учебная дисциплина предполагает освоение основ теории алгоритмов в рамках курса «Методы программирования», предварительное ознакомление с алгоритмическими парадигмами при изучении дисциплин «Практикум по программированию», «Технологии программирования», «Вычислительная геометрия». При изучении некоторых тем предполагается выполнение учебных заданий, закрепляющих знания по изученным ранее математическим дисциплинам («Алгебра и теория чисел», «Математический анализ»), расширяющих математический аппарат теории графов, излагаемой в курсе «Дискретная математика и теория графов». Кроме того, разделы, излагаемые в шестом семестре, также рассматривают вопросы, ранее освещенные в дисциплинах «Компьютерная математика», «Численные методы» и «Теория вероятностей и математическая статистика».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Алгоритмы и структуры данных» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

Специализированные компетенции:

Применять основные понятия, утверждения и методы для решения базовых задач дискретной математики.

В результате изучения данной дисциплины студент должен **знать:**

- понятие размерности задачи и трудоемкости алгоритма;
- основные способы решения рекуррентных уравнений
- структуры данных, используемые при оценке алгоритмов;
- приемы декомпозиции;
- понятия полиномиальной разрешимой и NP-полной задач;
- способы организации структур данных и технологии их использования;
- виды поисковых деревьев;
- базовые алгоритмы на графах;
- базовые алгоритмы на мультиграфах;

уметь:

- определять трудоемкость алгоритмов;
- применять структуры данных для построения алгоритмов;
- использовать принципы динамического программирования для решения задач об оптимальных путях;
- использовать принципы декомпозиции для задач разреженного матричного анализа;
- разрабатывать программные реализации основных алгоритмов и структур данных;
- применять основные алгоритмы и структуры данных для практических задач;
- разрабатывать эффективные алгоритмы поиска на графах и мультиграфах;

иметь навык:

- проектирования и реализации структур данных;
- оценки трудоемкости алгоритмов;
- решения алгоритмических задач на основе известных алгоритмических стратегий с применением современных технологий теоретической информатики.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5,6 семестре. В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Алгоритмы и структуры данных» отведено для **очной формы** получения высшего образования – 210 часов, в том

числе 122 аудиторных часов, лекции – 54 часа, лабораторные занятия – 68 часов. **Из них:**

5 семестр:

Лекции – 20 часов, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа (УСР) – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачёт.

6 семестр:

Лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа (УСР) – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1 Анализ алгоритмов

Тема 1.1 Введение. Основные понятия и определения. Принципы оценки алгоритмов

Объект и предмет дисциплины. Определение алгоритма. Историческое развитие теории алгоритмов и ее место среди других математических наук и в естествознании. Формальное описание задачи. Размерность задачи. Трудоемкость алгоритма. Асимптотики O , Ω , Θ . Полиномиальные и экспоненциальные алгоритмы. Прикладное значение эффективности алгоритмов – временная и пространственная сложность алгоритма, O -нотация. Дихотомия: оценка трудоемкости алгоритма. Примеры алгоритмов решения задач и оценка их трудоёмкости.

Тема 1.2 Рекуррентные уравнения и методы их решения. Оценка трудоемкости алгоритмов с использованием рекуррентных уравнений

Понятие рекуррентного уравнения. Полное рекуррентное уравнение. Основные методы решения рекуррентных уравнений: метод итераций, метод рекурсивных деревьев, метод подстановок. Оценка трудоемкости алгоритмов с использованием рекуррентных уравнений.

Раздел 2 Структуры данных

Тема 2.1 Способы организации базовых структур данных

Понятие абстракции. Абстрактные типы данных (АТД), их реализация структурами данных (СД): связный список, стек, очередь, очередь с приоритетом. Способы организации базовых структур данных: массив, простой список, мультисписок, стек, очередь. Реализация базовых операций и их трудоемкость.

Тема 2.2 Специальная древовидная структура данных: куча

Абстрактный тип данных приоритетная очередь (англ. priority queue). Представление структуры данных куча в памяти компьютера. Способы реализации структуры данных куча с помощью корневых деревьев. Бинарная куча. D-куча. Биномиальная куча. Куча Фибоначчи. Реализация базовых операций и их трудоемкость. Реализация расширенного набора операций и их трудоемкость. Технологии использования корневых деревьев для реализации базового и расширенного набора операций структуры данных куча и оценка их трудоемкости. Стратегии выбора оптимальных структур данных. Использование структуры данных куча для разработки эффективных алгоритмов решения прикладных задач на примерах реализации индексных методов поиска кратчайших путей в орграфах.

Тема 2.3 Специальная структура данных: система непересекающихся множеств

Система непересекающихся множеств – СНМ (англ. disjoint set union). Способы представления системы непересекающихся множеств с помощью массива и связного списка с указателем на представителя. Представление системы непересекающихся множеств с помощью корневых деревьев с эвристиками объединения по размеру и сжатия пути. Реализация базовых операций и оценка их трудоемкости. Использование структуры данных СНМ для разработки эффективных алгоритмов построения фундаментальных разрезов графа на примерах прикладных задач потокового программирования.

Тема 2.4 Сортировка

Основные понятия и определения. Классификация сортировок по их основной операции (обменные, вставочные, сливающие). Устойчивость сортировок. Сортировка с помощью прямого включения, алгоритм двоичного включения. Алгоритм сортировки выбором. Алгоритмы сортировки с помощью обменов: пузырьковая сортировка, сортировка слиянием. Сортировка с помощью разделения: быстрая сортировка Хоара. Оценка трудоемкости базовых алгоритмов внутренней сортировки.

Раздел 3 Операции с деревьями

Тема 3.1 Деревья. Технологии реализации базовых операций с использованием корневых деревьев

Остовное дерево графа (англ. spanning tree). Минимальное остовное дерево графа (англ. minimum spanning tree). Алгоритмы Прима и Крускала построения минимального остовного дерева графа и их трудоемкость. Корневое дерево (англ. root tree). Представление остовного дерева графа в памяти компьютера с помощью корневых структур: списка предков узлов, списка направлений дуг, списка уровней узлов и списка династического обхода корневого дерева. Эффективные алгоритмы поиска единственной цепи в дереве между заданными узлами, узлов поддеревьев, листьев дерева с использованием корневых структур и оценка их трудоемкости. Визуализация деревьев. Технологии преобразования деревьев в задачах потокового программирования с использованием корневых структур.

Тема 3.2 Фундаментальная система циклов и разрезов

Методы, алгоритмы и технологии построения базиса пространства решений однородной системы с матрицей инцидентности графа. Фундаментальная система циклов (ФСЦ). Фундаментальная система разрезов (ФСР). Алгоритмы и технологии построения ФСЦ и ФСР с использованием корневых структур и оценка их трудоемкости. Визуализация ФСЦ и ФСР. Использование ФСЦ и ФСР для разработки базисных методов построения оптимальных решений задач потокового программирования.

Раздел 4 Алгоритмы на графах и мультиграфах

Тема 4.1 Представление графов и мультиграфов. Базовые операции

Методы хранения графов в памяти компьютера. Матрица смежности. Матрица инцидентности. Представление ориентированных графов списками дуг. Списки наследников узлов. Списки предшественников узлов. Списки наследников и предшественников узлов. Алгоритмы упорядочения списковых структур узлов и дуг. Алгоритм поиска наследников и его трудоемкость. Алгоритм поиска предшественников и его трудоемкость. Алгоритм поиска наследников и предшественников и его трудоемкость. Визуализация графов. Реализация базовых операций и их трудоемкость. Мультисписки. Методы хранения ориентированных мультиграфов в памяти компьютера. Визуализация мультиграфов. Стратегии выбора оптимальных структур данных.

Тема 4.2 Стратегии и алгоритмы обхода узлов графа

Графовые модели. Дерево достижимости. Задача построения дерева достижимости узлов графа. Корневые деревья. Алгоритм поиска в глубину (DFS) в графе и его трудоемкость. Алгоритм поиска в ширину (BFS) в графе и его трудоемкость. Связность, двудольность графа. Выделение связных компонент графа. Выделение сильно связных компонент графа. Топологическая сортировка узлов графа. Стратегии выбора оптимальных структур данных.

Раздел 5 Задача оценки потоков на ненаблюдаемой части сети

Тема 5.1 Задача минимизации размера множества контролируемых узлов графа

Математическая модель задачи идентификации местоположения специальных программируемых устройств (датчиков) (англ. Sensor Location Problem, SLP) в узлах двунаправленного графа. NP - полная проблема минимизации размера множества контролируемых узлов. Стратегии идентификации узлов для локализации датчиков. Сбор, обработка, анализ информации о функции потока. Оценка потоков в той части сети, которая не наблюдается. Примеры оптимальных и субоптимальных решений задачи SLP.

Тема 5.2 Оптимальные решения. Моделирование ненаблюдаемой части графа.

Моделирование линейной системы ненаблюдаемой части двунаправленной графа. Единственное решение. Оптимальное решение. Примеры оптимальных решений. Методы и технологии декомпозиции потоков. Алгоритмы и технологии построения оптимальных решений задачи SLP. Визуализация процесса построения оптимальных решений задачи SLP.

Тема 5.3 Субоптимальные решения. Декомпозиция базисных графов

Методы, алгоритмы и технологии моделирования линейной системы ненаблюдаемой части графа. Матрица инцидентности графа. Декомпозиция базисных графов. Декомпозиция потоков. Методы, алгоритмы и технологии построения субоптимальных решений задачи SLP. Примеры субоптимальных

решений. Визуализация процесса построения субоптимальных решений задачи SLP.

Раздел 6 Разреженный матричный анализ и технологии декомпозиции

Тема 6.1 Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с большой разреженной подматрицей. Нахождение соответствия между столбцами базисного минора и семейством корневых структур для представления базиса в памяти компьютера. Построение частного решения разреженной системы и оценка его трудоемкости. Декомпозиция разреженной и общей части системы. Алгоритмы и технологии построения базиса пространства решений (характеристических векторов) соответствующей однородной разреженной СЛАУ. Методы, алгоритмы и технологии построения общего решения разреженной СЛАУ с учетом типа разреженности.

Тема 6.2 Декомпозиция разреженных систем

Декомпозиция переменных разреженной СЛАУ по наборам узлов и дуг базисной матрицы, Эффективные алгоритмы построения базисных графов, базиса пространства решений и частных решений разреженных систем с использованием корневых структур. Методы, алгоритмы и технологии построения общего решения разреженной СЛАУ с учетом типа разреженности. Использование методов, алгоритмов и технологий декомпозиция для решения прикладных задач разреженного матричного анализа. Визуализация процесса построения общего решения.

Тема 6.3 Применение принципов декомпозиция для моделирования ненаблюдаемой части двунаправленного графа

Система сохранения потока. Условия существования решения линейной системы с матрицей инцидентности графа. Теорема Кронекера-Капелли. Эффективный алгоритм проверки условий существования решений системы баланса. Условия единственности решения системы для ненаблюдаемой части двунаправленного графа. Моделирование ненаблюдаемой части двунаправленного графа. Проблема минимизации размера множества контролируемых узлов для размещения датчиков. Применение результатов разреженного матричного анализа, алгоритмической теории графов и теоретической информатики. Алгоритмические, структурные и технологические решения задачи SLP.

Раздел 7 Оптимальные пути

Тема 7.1. Применение принципов динамического программирования для решения задач о кратчайших путях

Постановка задачи построения кратчайшего пути в орграфе. Индексные методы. Уравнение Беллмана. Применение принципов динамического программирования для решения задач о кратчайших путях. Неотрицательные веса: алгоритм Дейкстры. Произвольные веса: алгоритмы Форда-Беллмана, Флойда и их трудоёмкость. Поиск контура отрицательного веса. Алгоритмические, структурные и технологические решения задачи построения кратчайшего пути в орграфе.

Тема 7.2. Математические модели задач о кратчайших путях

Математическая модель задачи о кратчайшем пути между фиксированными узлами орграфа. Базисные методы. Дерево достижимости. Начальное допустимое решение. Применение принципов преобразования базисов (корневых деревьев) для численного решения задач о кратчайших путях. Алгоритмические, структурные и технологические решения задачи построения кратчайшего пути в орграфе. Технологии преобразования деревьев в задачах о кратчайших путях с использованием корневых структур. Визуализация итерационного процесса.

Тема 7.3. Двухкритериальные задачи потокового программирования

Задача о кратчайшем пути среди путей максимальной ширины. Задача поиска путей максимальной ширины среди кратчайших путей. Задача о максимальном потоке минимальной стоимости. Алгоритмические и структурные решения двухкритериальных задач с применением индексных методов построения кратчайших путей, основанных на принципах динамического программирования. Уравнение Беллмана. Базисный метод построения оптимальных решений двухкритериальных задач с использованием корневых деревьев. Технологии преобразования деревьев в задачах о кратчайших путях с использованием корневых структур. Оптимальное корневое дерево. Визуализация итерационного процесса.

Раздел 8 Задачи линейной оптимизации с неточными данными

Тема 8.1. Моделирование оптимальных параметров целевой функции

Математические модели линейных задач оптимизации в конечномерных пространствах. Допустимое решение. Математические модели обратных задач в соответствии с выбранной нормой для моделирования параметров целевой функции. Моделирование оптимальных значений параметров целевой функции. Формирование новых коэффициентов целевой функции, для которых заданное допустимое решение является оптимальным. Модели, методы, алгоритмы и технологии решения обратных задач изменения параметров целевой функции.

Тема 8.2. Моделирование параметров нижних и верхних границ

Математические модели обратных задач линейной оптимизации для моделирования параметров нижних и верхних границ в соответствии с выбранной нормой. Частично допустимое решение. Математические модели обратных задач в соответствии с выбранной нормой для моделирования параметров нижних и верхних границ. Формирование новых параметров нижних и верхних границ, для которых заданное частично допустимое решение является допустимым. Модели, методы, алгоритмы и технологии решения обратных задач изменения параметров нижних и верхних границ.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов				Количество часов УСР	Формы контроля знаний
		Лекции	Практические (семинарские)	Лабораторные занятия	Иное		
Раздел 1 Анализ алгоритмов							
1.1	Введение. Основные понятия и определения. Принципы оценки алгоритмов	2				1	Опрос
1.2	Рекуррентные уравнения и методы их решения. Оценка трудоемкости алгоритмов с использованием рекуррентных уравнений	2		4			Опрос, отчет по аудиторным практическим упражнениям
Раздел 2 Структуры данных							
2.1	Способы организации базовых структур данных	2		2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой, контрольная работа
2.2	Специальная древовидная структура данных куча	2		2		1	Отчет по аудиторным практическим упражнениям
2.3	Система непересекающихся множеств	2		4		1	Отчет по аудиторным практическим упражнениям,

2.4	Сортировка	2		4			Опрос, отчет по аудиторным практическим упражнениям
Раздел 3 Операции с деревьями							
3.1	Деревья. Технологии реализации базовых операций с использованием корневых деревьев	2		4			Отчет по лабораторной работе с устной защитой, контрольная работа
3.2	Фундаментальная система циклов и разрезов	2		4			Отчет по лабораторной работе с устной защитой,
Раздел 4 Алгоритмы на графах/мультиграфах							
4.1	Представление графов и мультиграфов. Базовые операции	2		4		1	Отчет по лабораторной работе с устной защитой, контрольная работа
4.2	Стратегии и алгоритмы обхода узлов графа	2		2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой
Раздел 5 Задача оценки потоков на ненаблюдаемой части сети							
5.1	Задача минимизации размера множества контролируемых узлов графа	2		2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой
5.2	Оптимальные решения. Моделирование ненаблюдаемой части графа.	2		2			Отчет по аудиторным практическим упражнениям, контрольная работа
5.3	Субоптимальные решения. Декомпозиция базисных графов	4		4			Отчет по лабораторной работе с устной защитой
Раздел 6 Разреженный матричный анализ и технологии декомпозиции							
6.1	Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений	2		2			Отчет по аудиторным практическим упражнениям, контрольная работа

6.2	Декомпозиция разреженных систем	4		4			Отчет по лабораторной работе с устной защитой
6.3	Применение принципов декомпозиции для моделирования ненаблюдаемой части двунаправленного графа	2		2		1	Отчет по аудиторным практическим упражнениям
Раздел 7 Оптимальные пути							
7.1	Применение принципов динамического программирования для решения задач о кратчайших путях	4		4			Отчет по аудиторным практическим упражнениям
7.2	Математические модели задач о кратчайших путях	2		2		1	Отчет по аудиторным практическим упражнениям, контрольная работа
7.3	Двухкритериальные задачи потокового программирования	4		2		1	Отчет по аудиторным практическим упражнениям, контрольная работа
Раздел 8 Задачи линейной оптимизации с неточными данными							
8.1	Моделирование оптимальных параметров целевой функции	4		4		1	Отчет по лабораторной работе с устной защитой
8.2	Моделирование параметров нижних и верхних границ	4		2			Отчет по аудиторным практическим упражнениям, контрольная работа
	ВСЕГО ЧАСОВ	54		60		8	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Кормен, Томас Х. и др. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен [и др.] – 3-е изд. :Пер. с англ.– М.: Вильямс, 2013. – 1328 с.
2. Габасов, Р. Методы линейного программирования. Ч.3. Специальные задачи / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова – М.: URSS, 2018. – 368 с.
3. Пилипчук, Л. А. Линейные неоднородные задачи потокового программирования: учебно-методическое пособие. - Минск : БГУ, 2009. – 222 с.
4. Пилипчук. Л. А. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений. – Минск: БГУ, 2012. – 260 с.
5. Фидлер М. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерман. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 288 с.
6. Апанасевич, С. А. Структуры и алгоритмы обработки данных. Линейные структуры : учебное пособие / С. А. Апанасевич. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. – 134 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/206261>.
7. Павлов, Л. А. Структуры и алгоритмы обработки данных : учебник / Л. А. Павлов, Н. В. Первова. – Изд. 3-е, стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. – 254 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/156929>.
8. Андрианова, А. А. Алгоритмизация и программирование. Практикум : учебное пособие / А. А. Андрианова, Л. Н. Исмагилов, Т. М. Мухтарова. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. – 236 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/206258>.
9. Лафоре, Р. Структуры данных и алгоритмы Java / Роберт Лафоре ; [пер. с англ. Е. Матвеев]. – 2-е изд. – Санкт-Петербург ; Москва ; Минск : Питер, 2023. – 701 с.
10. Pilipchuk. L. A. Sparse Linear Systems and Their Applications. – Minsk: BSU, 2013. – 235 p.

Дополнительная литература

1. Ahuja, R.K. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications / R.K. Ahuja, T.L. Magnanti, J.B. Orlin. – New Jersey: Prentice Hall, 1993. – 864 p.
2. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. – М.: Мир, 1988. – 416 с. Алгоритмы и структуры данных / Н. Вирт. – Санкт-Петербург: Невский диалект, 2001. – 352 с.
3. Пилипчук, Л.А. Алгоритмы и технологии построения решений разреженных недоопределенных линейных систем в Wolfram Mathematica / Л.А. Пилипчук, А.А. Лагуто // Технологии информатизации и управления: сб. науч. ст. в 2 кн / РИВШ; под ред. А.М. Кадана, Е.А. Свирского. – Минск, 2017. – Вып. 3, кн. 2. – С.264–272.

4. Пилипчук, Л.А. Теоретико-графовые свойства декомпозиции разреженных недоопределенных систем специального вида / Л.А. Пилипчук, А.А. Лагуто // Материалы Международного конгресса по информатике: Информационные системы и технологии (CSIST'2016), 24–27 октября 2016 г. – Минск: БГУ, Беларусь.–2016. с. 1061–1067.

5. Пилипчук, Л.А. Оптимальные пути: алгоритмические, структурные и технологические решения / Л.А. Пилипчук, А.С. Пилипчук, Е.Н. Полячок // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – Т. 10. №3. – 2020. – С. 143–151.

6. Pilipchuk, L.A. Sparse linear systems: theory of decomposition, methods, technology, applications and implementation in Wolfram Mathematica / L.A. Pilipchuk, A.S. Pilipchuk // American Institute of Physics. AIP Conf. Proc. Vol. 1690, 060006 (2015); doi: 10.1063/1.4936744. 9 p.

7. Йенсен, П. Потокное программирование / П. Йенсен, Д. Барнес. – М.: Радио и связь, 1984. – 392 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Диагностика результатов учебной деятельности по учебной дисциплине проводится преподавателем, как правило, во время аудиторных занятий. Для диагностики используются:

- устный опрос;
- выполнение лабораторных работ, заданий для УСР и аудиторных практических упражнений;
- выполнение контрольных работ.

Отметка за ответы на лекциях и практических занятиях определяется полнотой ответа, обоснованием аргументов, приведением практических примеров и т.д.

Формой промежуточной аттестации в 5-м семестре по дисциплине учебным планом очной формы обучения предусмотрен **зачет**, в 6-м – **экзамен**.

Зачет по дисциплине проходит в форме контрольного опроса в устной или письменной форме, выполнения заданий на компьютере. Явка студента на зачет является обязательной.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты,

определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

- устный опрос – 30%;
- выполнение лабораторных работ, заданий для УСР и аудиторных практических заданий – 30%;
- выполнение контрольных работ – 40%.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе итоговой отметки текущей аттестации (модульно-рейтинговой системы оценки знаний) 40 % и экзаменационной отметки 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.1. Введение. Основные понятия и определения. Принципы оценки алгоритмов (1 ч)

Исследовать сложность алгоритмов дихотомии, определить размерность задачи и данные,

Форма контроля – опрос.

Тема 2.2 Специальная древовидная структура данных куча (1 ч)

Реализовать с помощью корневых деревьев структуры данных: бинарная куча, D-куча, биномиальная куча, куча Фибоначчи. Выполнить реализацию расширенного набора операций и оценку их трудоемкости.

Форма контроля – отчет по аудиторным практическим упражнениям, контрольная работа.

Тема 2.3 Система непересекающихся множеств (1 ч)

Исследовать использование структуры данных СНМ для разработки эффективных алгоритмов построения фундаментальных разрезов графа на примерах прикладных задач потокового программирования. Реализовать систему непересекающихся множеств с помощью корневых деревьев с эвристиками объединения по размеру и сжатия пути.

Форма контроля – отчет по аудиторным практическим упражнениям,

Тема 4.1 Представление графов и мультиграфов. Базовые операции (1 ч)

Реализовать представление ориентированных графов и мультиграфов в памяти компьютера списками дуг. Выполнить упорядочения списковых структур узлов и дуг для выполнения операций эффективного поиска наследников узлов, предшественников узлов, наследников и предшественников узлов. Дать оценку трудоемкости базовых операций. Выполнить визуализацию графов в соответствии с введенным упорядочением списковых структур.

Форма контроля – отчет по лабораторной работе с устной защитой контрольная работа

Тема 6.3 Применение принципов декомпозиция для моделирования ненаблюдаемой части двунаправленного графа (1 ч)

Проверить условия существования решений системы баланса. Реализовать эффективный алгоритм проверки условий существования решений системы баланса. Реализовать моделирование ненаблюдаемой части двунаправленного графа. Исследовать проблему минимизации размера множества контролируемых узлов орграфа для размещения датчиков. Проверить условия единственности решения системы для ненаблюдаемой части двунаправленного графа. Применить результаты разреженного матричного анализа, алгоритмической теории графов и теоретической информатики для построения алгоритмических, структурных и технологических решений задачи SLP.

Форма контроля – отчет по аудиторным практическим упражнениям.

Тема 7.2. Математические модели задач о кратчайших путях (1 ч)

Решить задачу о кратчайшем пути с использованием базисного метода. Построить начальное допустимое решение. Применить принципы преобразования базисов (корневых деревьев) для численного решения задач о кратчайших путях. Выполнить визуализацию итерационного процесса.

Форма контроля – отчет по аудиторным практическим упражнениям, контрольная работа

Тема 7.3. Двухкритериальные задачи потокового программирования (1 ч)

Решить одну из двухкритериальных задач: кратчайшего пути среди путей максимальной ширины, поиска путей максимальной ширины среди кратчайших путей и задачу о максимальном потоке минимальной стоимости. Выполнить визуализацию итерационного процесса.

Форма контроля – отчет по аудиторным практическим упражнениям, контрольная работа

Тема 8.1. Моделирование оптимальных параметров целевой функции (1 ч)

Построить математическую модель прямой задачи линейной оптимизации. Построить допустимое решение. Построить математическую модель обратной задачи в соответствии с выбранной нормой для моделирования параметров целевой функции. Реализовать моделирование оптимальных значений параметров целевой функции. Сформировать новые коэффициенты целевой функции, для которых заданное допустимое решение является оптимальным.

Форма контроля – отчет по лабораторной работе с устной защитой.

Примерный перечень лабораторных занятий

1. Анализ алгоритмов. Размерность задачи, асимптотики, полиномиальные и экспоненциальные алгоритмы.
2. Рекуррентные уравнения и методы их решения. Оценка трудоемкости алгоритмов с использованием рекуррентных уравнений
3. Структуры данных «Связный список», «Стек». Слияние двух отсортированных списков. Реализация стека на связном списке. Проверка баланса скобок. Рекурсивное обращение стека.
4. Структуры данных «Очередь», «Очередь с приоритетом». Реализация очереди на списке.
5. Специальная структура данных: куча. Способы реализации структуры данных куча с помощью корневых деревьев. Бинарная куча. D-куча. Биномиальная куча. Куча Фибоначчи. Реализация базовых операций и реализация расширенного набора операций.
6. Специальная структура данных: система непересекающихся множеств. Представление системы непересекающихся множеств с помощью корневых деревьев с эвристиками объединения по размеру и сжатия пути. Реализация базовых операций. Использование структуры данных СНМ для разработки эффективных алгоритмов построения фундаментальных разрезов графа на примерах прикладных задач потокового программирования.
7. Сортировки вставками, выбором, слиянием. Исследование эффективности «быстрой сортировки» при выборе различных опорных элементов.
8. Эффективность сортировки вставками для почти упорядоченного массива при реализации на очереди с приоритетом.
9. Представление ориентированных графов и мультиграфов в памяти компьютера. Списки дуг. Упорядочение списковых структур узлов и дуг для выполнения операций эффективного поиска наследников узлов, предшественников узлов, наследников и предшественников узлов. Оценка трудоемкости базовых операций. Визуализация графов в соответствии с введенным упорядочением списковых структур.
10. Генерация и визуализация ориентированных графов и мультиграфов.
11. Стратегии и алгоритмы обхода узлов графа. Алгоритм поиска в глубину (DFS) в графе и его трудоемкость. Алгоритм поиска в ширину (BFS) в графе и его трудоемкость. Задача построения дерева достижимости узлов графа. Топологическая сортировка узлов графа.
12. Математическая модель задачи идентификации местоположения специальных программируемых устройств (датчиков) (SLP) в узлах графа. Проблема минимизации размера множества контролируемых узлов. Стратегии идентификации узлов для локализации датчиков. Сбор, обработка, анализ информации о функции потока. Система оценки потоков в той части сети,

которая не наблюдается. Оптимальные решения. Примеры оптимальных решений задачи SLP.

13. Математическая модель задачи идентификации местоположения датчиков (SLP) в узлах графа. Стратегии идентификации узлов для локализации датчиков. Сбор, обработка, анализ информации о функции потока. Система оценки потоков в той части сети, которая не наблюдается. Субоптимальные решения. Примеры субоптимальных решений задачи SLP.

14. Моделирование линейной системы ненаблюдаемой части двунаправленного графа. Единственное решение. Оптимальное решение. Методы и технологии декомпозиции потоков. Алгоритмы и технологии построения оптимальных решений задачи SLP. Визуализация процесса построения оптимальных решений задачи SLP.

15. Субоптимальные решения. Декомпозиция базисных графов. Методы, алгоритмы и технологии моделирования линейной системы ненаблюдаемой части графа. Матрица инцидентности графа. Декомпозиция базисных графов. Декомпозиция потоков. Методы, алгоритмы и технологии построения субоптимальных решений задачи SLP. Визуализация процесса построения субоптимальных решений задачи SLP.

16. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с большой разреженной подматрицей. Построение частного решения разреженной системы. Алгоритмы и технологии построения базиса пространства решений соответствующей однородной разреженной СЛАУ. Методы, алгоритмы и технологии построения общего решения разреженной СЛАУ с учетом типов разреженности.

17. Декомпозиция разреженных систем. Эффективные алгоритмы построения базисных графов, базиса пространства решений и частных решений разреженных систем с использованием корневых структур.

18. Методы, алгоритмы и технологии построения общего решения разреженной СЛАУ с учетом типа разреженности. Использование методов, алгоритмов и технологий декомпозиции для решения прикладных задач разреженного матричного анализа. Визуализация процесса построения общего решения.

19. Задача SLP. Применение принципов декомпозиции для моделирования ненаблюдаемой части двунаправленного графа

20. Система сохранения потока. Условия существования решения линейной системы с матрицей инцидентности графа. Теорема Кронекера-Капелли. Эффективный алгоритм проверки условий существования решений системы баланса.

21. Задача SLP. Моделирование линейной системы ненаблюдаемой части двунаправленного графа. Условия единственности решения системы для ненаблюдаемой части двунаправленного графа.

22. Проблема минимизации размера множества контролируемых узлов для размещения датчиков. Применение результатов разреженного матричного

анализа, алгоритмической теории графов и теоретической информатики. Алгоритмические, структурные и технологические решения задачи SLP.

23. Применение принципов динамического программирования для решения задач о кратчайших путях. Индексные методы. Уравнение Беллмана.

24. Неотрицательные веса: алгоритм Дейкстры.

25. Произвольные веса: алгоритмы Форда-Беллмана, Флойда. Поиск контура отрицательного веса. Алгоритмические, структурные и технологических решения задачи построения кратчайшего пути в орграфе.

26. Математическая модель задачи о кратчайшем пути между фиксированными узлами орграфа. Базисные методы. Дерево достижимости. Начальное допустимое решение.

27. Применение принципов преобразования базисов (корневых деревьев) для численного решения задач о кратчайших путях.

28. Алгоритмические, структурные и технологических решения задачи построения кратчайшего пути в орграфе. Технологии преобразования деревьев в задачах о кратчайших путях с использованием корневых структур. Визуализация итерационного процесса.

29. Двухкритериальные задачи потокового программирования.

30. Задача о кратчайшем пути среди путей максимальной ширины.

31. Задача поиска путей максимальной ширины среди кратчайших путей.

32. Задача о максимальном потоке минимальной стоимости.

33. Алгоритмические и структурные решения двухкритериальных задач с применением индексных методов построения кратчайших путей, основанных на принципах динамического программирования. Уравнение Беллмана. Визуализация итерационного процесса.

34. Базисный метод построения оптимальных решений двухкритериальных задач с использованием корневых деревьев. Технологии преобразования деревьев в задачах о кратчайших путях с использованием корневых структур. Оптимальное корневое дерево. Визуализация итерационного процесса.

35. Математические модели линейных задач оптимизации в конечномерных пространствах. Допустимое решение.

36. Математические модели обратных задач в соответствии с выбранной нормой для моделирования параметров целевой функции.

37. Моделирование оптимальных значений параметров целевой функции.

38. Формирование новых коэффициентов целевой функции, для которых заданное допустимое решение является оптимальным.

39. Модели, методы, алгоритмы и технологии решения обратных задач изменения параметров целевой функции.

40. Математические модели обратных задач линейной оптимизации для моделирования параметров нижних и верхних границ в соответствии с выбранной нормой.

41. Частично допустимое решение. Математические модели обратных задач в соответствии с выбранной нормой для моделирования параметров нижних и верхних границ.

42. Формирование новых параметров нижних и верхних границ, для которых заданное частично допустимое решение является допустимым.

43. Модели, методы, алгоритмы и технологии решения обратных задач изменения параметров нижних и верхних границ.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

Следующие подходы могут быть использованы при организации образовательного процесса:

- **эвристический подход**, в основе которого
- индивидуализация обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексия собственную образовательную деятельности;
- демонстрация многообразия решений большинства профессиональных задач.
- **метод развития критического мышления**, то есть способности оценивать и анализировать ситуации с различных позиций, с целью получения обоснованного решения.
- **метод учебной дискуссии**, который, с одной стороны, предполагает наличие у учащихся умения ясно и точно формулировать свои мысли, строить систему аргументированных доказательств; с другой стороны, учит их мыслить, вести дискуссии, доказывать свою правоту. Преподаватель должен сам демонстрировать перед учениками образец такого стиля аргументации, учить их точно излагать свои мысли и терпимо относиться к формулировкам оппонентов, уважительно вносить поправки в их аргументацию, ненавязчиво сохранять за собой право на последнее слово, не претендуя на обладание истиной в последней инстанции.
- анализ ситуации, используя профессиональные знания, собственный опыт, дополнительную литературу и иные источники (**кейс-метод**).
- **практико-ориентированный подход**, основанный на решении проектных задач. Данный подход предполагает
 - освоение дисциплины через решение практических задач, приближенных к профессиональным;
 - приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
 - ориентацию на реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
 - использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- изучение основной и дополнительной литературы по учебной дисциплине;
- изучение материалов электронных источников по вопросам учебной дисциплины, в том числе размещенных в электронной библиотеке БГУ elib.bsu.by;
- подготовка к лабораторным занятиям и контрольным работам;
- выполнение домашних заданий и лабораторных работ, в том числе проектных заданий.

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендуется использовать возможности образовательного портала edummf.bsu.by и системы управления обучением Moodle для размещения текущей организационной информации и учебно-программных материалов, в том числе вопросов к экзаменам/зачетам, а также контроля выполнения заданий.

Основной формой УСР с учетом специфики дисциплины является самостоятельное под методическим управлением преподавателя выполнение студентами учебных (исследовательских) заданий. Количество часов на УСР указано в учебно-методической карте. Конкретная форма проведения и контроля УСР выбирается преподавателем. В качестве основного вида контроля предполагается проверка выполнения заданий для УСР (примерный их перечень указан выше). Кроме того, знание материала, рассматриваемого студентами в рамках УСР, проверяется в числе прочих при прохождении промежуточной аттестации (на экзаменах или зачетах).

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Трудоемкость алгоритмов.
2. Рекуррентные уравнения и методы их решения.
3. Структуры данных «Связный список», «Стек», «Очередь».
4. Правила выбора оптимальных структур данных. Преимущества и недостатки списков, стеков, очередей, очередей с приоритетом.
5. Структура данных: куча.
6. Бинарная куча. D-куча. Базовые операции.
7. Биномиальная куча. Куча Фибоначчи. Базовые операции.
8. Структура данных: система непересекающихся множеств (СНМ).
9. Использование структуры данных СНМ для построения фундаментальных разрезов графа на примерах прикладных задач потокового программирования.
10. Сортировки вставками, выбором, слиянием.

11. Деревья. Базовые операции.
12. Остовное дерево графа. Минимальное остовное дерево. Алгоритмы Прима и Крускала.
13. Корневое дерево. Представление остовного дерева графа в памяти компьютера с помощью корневых структур
14. Фундаментальная система циклов.
15. Фундаментальная система разрезов.
16. Базис пространства решений однородной системы с матрицей инцидентности графа.
17. Методы хранения графов в памяти компьютера.
18. Представление ориентированных графов списками дуг.
19. Алгоритм поиска наследников узлов орграфа.
20. Алгоритм поиска предшественников узлов орграфа.
21. Алгоритм поиска наследников и предшественников узлов орграфа.
22. Визуализация графов и мультиграфов.
23. Стратегии и алгоритмы обхода узлов графа
24. Задача построения дерева достижимости узлов орграфа.
25. Алгоритм поиска в глубину (DFS) в графе.
26. Алгоритм поиска в ширину (BFS) в графе.
27. Связность, двудольность графа.
28. Топологическая сортировка узлов графа.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Трудоемкость алгоритмов.
2. Рекуррентные уравнения и методы их решения.
3. Структуры данных «Связный список», «Стек», «Очередь».
4. Правила выбора оптимальных структур данных. Преимущества и недостатки списков, стеков, очередей, очередей с приоритетом.
5. Структура данных: куча.
6. Бинарная куча. D-куча. Базовые операции.
7. Биномиальная куча. Куча Фибоначчи. Базовые операции.
8. Структура данных: система непересекающихся множеств (СНМ).
9. Использование структуры данных СНМ для построения фундаментальных разрезов графа на примерах прикладных задач потокового программирования.
10. Сортировки вставками, выбором, слиянием.
11. Деревья. Базовые операции.
12. Остовное дерево графа. Минимальное остовное дерево. Алгоритмы Прима и Крускала.
13. Корневое дерево. Представление остовного дерева графа в памяти компьютера с помощью корневых структур
14. Фундаментальная система циклов.
15. Фундаментальная система разрезов.

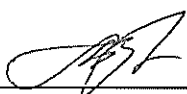
16. Базис пространства решений однородной системы с матрицей инцидентности графа.
17. Методы хранения графов в памяти компьютера.
18. Представление ориентированных графов списками дуг.
19. Алгоритм поиска наследников узлов орграфа.
20. Алгоритм поиска предшественников узлов орграфа.
21. Алгоритм поиска наследников и предшественников узлов орграфа.
22. Визуализация графов и мультиграфов.
23. Стратегии и алгоритмы обхода узлов графа.
24. Задача построения дерева достижимости узлов орграфа.
25. Алгоритм поиска в глубину (DFS) в графе.
26. Алгоритм поиска в ширину (BFS) в графе.
27. Связность, двудольность графа.
28. Топологическая сортировка узлов графа.
29. Математическая модель задачи идентификации местоположения специальных программируемых устройств (датчиков) (SLP) в узлах графа.
30. Оптимальные и субоптимальные решения задачи SLP.
31. Разреженные системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с матрицей инцидентности графа.
32. Методы, алгоритмы и технологии построения общего решения разреженной СЛАУ с учетом типов разреженности.
33. Декомпозиция разреженных СЛАУ. Эффективные алгоритмы построения базисных графов, базиса пространства решений и частных решений разреженных систем с использованием корневых структур.
34. Задача SLP. Применение принципов декомпозиция для моделирования ненаблюдаемой части двунаправленного графа
35. Система сохранения потока. Условия существования решения линейной системы с матрицей инцидентности графа. Теорема Кронекера-Капелли. Эффективный алгоритм проверки условий существования решений системы баланса.
36. Задача SLP. Моделирование линейной системы ненаблюдаемой части двунаправленной графа Условия единственности решения системы для ненаблюдаемой части двунаправленного графа.
37. Проблема минимизации размера множества контролируемых узлов для размещения датчиков в задаче SLP.
38. Алгоритмические, структурные и технологические решения задачи SLP.
39. Применение принципов динамического программирования для решения задач о кратчайших путях. Индексные методы. Уравнение Беллмана.
40. Задача о кратчайших путях. Алгоритм Дейкстры.
41. Задача о кратчайших путях. Алгоритмы Форда-Беллмана, Флойда.
42. Математическая модель задачи о кратчайших путях. Базисные методы. Дерево достижимости. Начальное допустимое решение.

43. Принципы преобразования базисов (корневых деревьев) для численного решения задач о кратчайших путях.
44. Двухкритериальные задачи потокового программирования.
45. Задача о кратчайшем пути среди путей максимальной ширины.
46. Задача поиска путей максимальной ширины среди кратчайших путей.
47. Задача о максимальном потоке минимальной стоимости.
48. Алгоритмические и структурные решения двухкритериальных задач с применением принципов динамического программирования Уравнение Беллмана.
49. Базисный метод построения оптимальных решений двухкритериальных задач с использованием корневых деревьев.
50. Математические модели линейных задач оптимизации в конечномерных пространствах. Допустимое решение.
51. Математические модели обратных задач в соответствии с выбранной нормой для моделирования параметров целевой функции.
52. Моделирование оптимальных значений параметров целевой функции.
53. Математические модели обратных задач линейной оптимизации для моделирования параметров нижних и верхних границ в соответствии с выбранной нормой.
54. Математические модели обратных задач для моделирования параметров нижних и верхних границ. Частично допустимое решение.
55. Модели, методы, алгоритмы и технологии решения обратных задач изменения параметров нижних и верхних границ.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой веб-технологий
и компьютерного моделирования
доцент, канд. физ.-мат. наук



М.В.Игнатенко

02.06.2025

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УО
на ____ / ____ учебный год

№п/ п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
