

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король

27 июня 2025 г.

Регистрационный № 2810/б.



ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине
для специальностей:

6-05-0533-06 Математика

6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки

Профилизации:

Математика,

Искусственный интеллект и математическая экономика

6-05-0533-08 Компьютерная математика и системный анализ

2025 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-06-2023, ОСВО 6-05-0533-07-2023, ОСВО 6-05-0533-08-2023 и учебных планов БГУ: № 6-5.4-54/01, № 6-5.4-55/01, № 6-5.4-56/01 от 15.05.2023, № 6-5.4-54/11ин, № 6-5.4-55/11ин, № 6-5.4-56/11ин. от 31.05.2023, № 6-5.4-55/04 от 15.05.2024.

СОСТАВИТЕЛИ:

Татьяна Семеновна Якименко, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Алексей Иванович Азаров, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Марина Викторовна Игнатенко, заведующий кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Ольга Александровна Архипенко, старший преподаватель кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета;

Дмитрий Васильевич Филимонов, старший преподаватель кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета;

Вероника Эдуардовна Грицель, ассистент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

РЕЦЕНЗЕНТ:

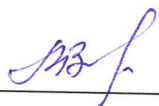
Чайковский Михаил Викторович, доцент кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования БГУ
(протокол № 17 от 02.06.2025)

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 11 от 26.06.2025)

Заведующий кафедрой



М.В.Игнатенко

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время численные методы являются одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов математики. Это связано как с бурным развитием вычислительной техники, наращиванием ее мощности, так и широким применением средств математического моделирования практически во всех сферах жизнедеятельности человека для оптимизации исследуемого объекта или прогнозирования ситуации. Поэтому в последнее время разрабатывается много новых численных процедур, применяемых как к новым, так и классическим объектам исследования, при этом многие классические алгоритмы решения задач претерпевают изменения с целью улучшения их вычислительных свойств.

Все это определяет важность учебной дисциплины «Численные методы» в учебном процессе, а также обуславливает необходимость внесения своевременных изменений и дополнений в ее содержание.

Учебная программа учебной дисциплины «Численные методы» разработана для студентов III–IV курса очной (дневной) формы обучения по специальностям 6-05-0533-06 Математика, 6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки (профилизация: Математика), 6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки (профилизация: Искусственный интеллект и математическая экономика) и 6-05-0533-08 Компьютерная математика и системный анализ механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

Цели и задачи учебной дисциплины

Дисциплина «Численные методы» имеет прикладную направленность.

Основная цель учебной дисциплины заключается в освоении учащимися современной технологией математического моделирования, основанной на использовании численных методов и прикладного программного обеспечения.

Задачи дисциплины состоят в изучении основных принципов построения численных методов и оценки их вычислительных качеств, изучении основных методов численного решения задач линейной алгебры, анализа и дифференциальных уравнений, развития умения и навыков выбора адекватного алгоритма, его программной реализации, интерпретации результатов численных расчетов и степени их достоверности.

Опыт преподавания дисциплины «Численные методы» на механико-математическом факультете БГУ показывает, что обучение на практических занятиях должно проводиться в двух направлениях: изучения основ численных методов на примере решения теоретических задач и выполнения расчетных работ с использованием компьютеров. При этом только непосредственное общение исследователя с конкретными задачами кроме возможности закрепить лекционный материал, помогает дать общее представление и выработать необходимую интуицию для нахождения эффективных путей решения задач вычислительной математики.

В последние годы высокая техническая оснащенность и рост возможностей вычислительной техники позволяют существенно обогатить практическую сторону вычислительного практикума. Использование современных компьютерных математических систем (Maple, MathCAD, MatLAB, Mathematica и др.), а, также стандартных библиотек численного анализа позволяют, не углубляясь в знание частных вопросов, сосредоточиться непосредственно на объекте (цели) исследования, ускорить процесс получения решения типовых задач. Как следствие, решение большего числа разнообразных задач способствует приобретению студентами некоторого опыта практических расчетов. При этом спектр рассматриваемых проблем расширяется от типичных до достаточно сложных в вычислительном отношении задач, требующих для численной реализации использования мощных компьютеров. Появляется возможность уделять больше внимания анализу характеристик вычислительных алгоритмов и связи практических результатов с полученными теоретическими оценками.

Более того, часть времени, освобождающегося за счет использования современной вычислительной техники, позволяет уделять больше внимания детальному рассмотрению теоретических задач вычислительной математики. Это несомненно является важным моментом вычислительного практикума, поскольку как правило именно такого рода задачи помогают усваиванию, закреплению и более полному пониманию основных определений, понятий, результатов и алгоритмов вычислительной математики. Кроме того, решение теоретических задач позволяет установить связь между различными Разделами математики, в частности, численного анализа, и, как следствие, способствует полноте восприятия курса по численным методам. При этом значительно возрастает роль самостоятельной работы студентов над предметом, без чего его успешное освоение представляется маловероятным. Общая оценка качества усвоения студентами учебного материала осуществляется в ходе выполнения индивидуальных заданий.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Численные методы» относится:

- **к модулю** «Прикладные методы анализа» компонента учреждения образования для специальности 6-05-0533-06 Математика;
- **к модулю** «Прикладные методы анализа» 1 компонента учреждения образования для специальности 6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки (профилизация: Математика) и 6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки (профилизация: Искусственный интеллект и математическая экономика);
- **к модулю** «Численные методы» компонента учреждения образования для специальности 6-05-0533-08 Компьютерная математика и системный анализ.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Учебная дисциплина «Численные методы» базируется на знаниях, полученные при изучении дисциплин «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения» и «Уравнения математической физики» связана с дисциплиной «Исследование операций».

Требование к компетенции

Освоение учебной дисциплины должно обеспечить формирование у студентов следующей *специализированной* компетенции:

Осуществлять обоснованный выбор рациональной численной методики для решения типовых математических задач, проводить ее реализацию с использованием современных программных средств компьютерных вычислений, оценивать корректность полученных результатов и анализировать возможности альтернативных подходов.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- источники погрешности численных результатов;
- понятия устойчивости, сходимости и вычислительной сложности численных алгоритмов;
- требования корректности постановки задачи;
- основные приемы оценки погрешности численных методов;
- назначение и вычислительные качества наиболее популярных численных методов интерполирования (формулы Лагранжа и Ньютона, метод наилучшего приближения в среднеквадратичной норме), приближенного интегрирования (формулы трапеций и Симпсона, формулы типа Гаусса наивысшей алгебраической степени точности), для задач алгебры, дифференциальных уравнений (метод Гаусса, LU-факторизация, итерационные методы Рунге-Кутты, Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации, минимальных невязок, сопряженных градиентов, методы Рунге-Кутты и Адамса, метод стрельбы, быстрое дискретное преобразование Фурье);
- достоинства и недостатки явных и неявных численных методов решения дифференциальных уравнений;
- современные тенденции в развитии методов численного решения математических и прикладных задач;

уметь:

- оценить корректность постановки задачи;
- выбрать адекватный метод для численного решения поставленной задачи;
- использовать численные методы для решения математических задач алгебры, анализа и дифференциальных уравнений;
- анализировать достоверность и трактовать численные результаты;

иметь навык:

- работы с современными программными средствами численного решения математических и прикладных задач;
- программирования численных алгоритмов;
- априорной и апостериорной оценки погрешности численного решения задач алгебры и анализа.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5-7 семестрах.

В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Численные методы» отведено для специальности 6-05-0533-06 Математика, 6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки (профилизация: Искусственный интеллект и математическая экономика) очной формы обучения 288 часов, для специальности 6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки (профилизация: Математика) очной (дневной) формы обучения 270 часов, в том числе 140 аудиторных часов (лекции – 52 часа, лабораторные занятия – 88 часов). Из них:

Очная форма	Трудоемкость, зач. ед.	Экз., сем.	Зач., сем.	Аудиторные часы	Из них		
					Лекции	Лабораторные занятия	УСР
5 сем.	3		5	54	18	32	4
6 сем.	3		6	50	16	30	4
7 сем.	3	7		36	18	16	2
Всего	9			140	52	78	10

В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Численные методы» отведено для специальности 6-05-0533-08 Компьютерная математика и системный анализ очной (дневной) формы обучения 270 часов, в том числе 142 аудиторных часа (лекции – 52 часа, лабораторные занятия – 90 часов). Из них:

Очная форма	Трудоемкость, зач. ед.	Экз., сем.	Зач., сем.	Аудиторные часы	Из них		
					Лекции	Лабораторные занятия	УСР
5 сем.	3		5	54	18	32	4
6 сем.	3		6	34	16	16	2
7 сем.	3	7		54	18	32	4
Всего	9			142	52	80	10

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Введение

Об основных задачах и содержании вычислительной математики. Содержание и назначение вычислительного эксперимента в трактовке А.А. Самарского.

Тема 2. Элементы теории погрешностей

Значащие и верные цифры в записи приближенного числа. Абсолютная и относительная погрешности. Погрешности арифметических операций. Прямая и обратная задачи теории погрешностей. Примеры неустойчивых алгоритмов. Погрешность вычислений на ЭВМ. Погрешность округлений и компьютерная запись чисел.

Тема 3. Интерполирование и приближение функций

Системы функций Чебышева. Интерполирование обобщенными многочленами. Алгебраическое интерполирование. Построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа. Конечные разности. Разделенные и разности, их свойства. Интерполяционный многочлен Ньютона. Представление погрешности интерполирования. Минимизация погрешности интерполирования дискретно заданных функций. Многочлены Чебышева. Минимизация погрешности интерполирования для функций, заданных на отрезке. Интерполирование по равноотстоящим узлам. Интерполирование сплайнами. Интерполяционная задача Эрмита. Тригонометрическое интерполирование. Дискретное и быстрое преобразование Фурье. Численное дифференцирование и оценка его погрешности. Задача аппроксимации. Метод наименьших квадратов.

Тема 4. Приближенное вычисление интегралов

Квадратурные формулы общего вида. Квадратурные формулы, основанные на алгебраическом интерполировании. Простейшие квадратурные правила Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования. Составные квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования. Правила Рунге и Эйткена практической оценки погрешности квадратурных формул. Квадратурные формулы типа Гаусса. Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы. Частные случаи квадратур Гауссова типа. Вычисление интегралов от функций специального вида.

Тема 5. Обобщение интерполирования и численного интегрирования на случай функций многих переменных

Интерполирование многочленами многих переменных. Численное дифференцирование функций многих переменных. Вычисление кратных интегралов. Метод Монте-Карло.

Тема 6. Численные методы решения систем ЛАУ

Нормы векторов и матриц. Оценка погрешности решения систем ЛАУ. Число обусловленности. Прямые методы. Метод Гаусса. Выбор ведущего элемента. LU факторизация. Разложение Холецкого. Метод прогонки и ортогонализации. Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации.

Сходимость итерационных методов. Оценка числа итераций. Выбор оптимального параметра. Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации. Методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов.

Тема 7. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц

Свойства собственных векторов и собственных значений матриц. Преобразование подобия. Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского. Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений. Метод вращений. Понятие о QR алгоритме.

Тема 8. Решение нелинейных уравнений и систем

Отделение корней. Метод дихотомии. Кратные корни. Корни полиномов. Метод простой итерации. Условие сходимости и скорость сходимости. Метод Ньютона. Квадратичная сходимость. Модификации метода Ньютона. Понятие о методах нелинейной оптимизации. Градиентные методы. Обзорное занятие по теме «Численные методы линейной алгебры и методы решения нелинейных уравнений»

Тема 9. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Одношаговые методы. Метод Эйлера. Оценка скорости сходимости. Методы Рунге-Кутты. Многошаговые методы. Устойчивость, условие корней. Метод Адамса. Понятие о жестких системах ОДУ. А-устойчивость. Метод Гира.

Тема 10. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Разностный метод решения краевой задачи для уравнения второго порядка. Методы построения разностных схем. Интегро-интерполяционный метод. Понятие о компактных разностных схемах. Метод Галеркина. Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем. Разностные методы решения краевых задач для нелинейных ОДУ. Методы редукции краевых задач к задачам Коши. Методы дифференциальной прогонки и метод стрельбы.

Тема 11. Численное решение интегральных уравнений Фредгольма

Основные подходы к решению интегральных уравнений. Метод Фурье для численного решения интегральных уравнений типа свертки.

Тема 12. Построение и исследование разностных схем для задач математической физики

Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Канонический вид и условие устойчивости двухслойных разностных схем. Устойчивость, аппроксимация и сходимость. Разностные схемы для уравнения переноса. Спектральный критерий устойчивости. Разностные схемы для эллиптических уравнений. Принцип максимума. Обзорное занятие по теме «Методы численного решения дифференциальных уравнений». Реализация разностных схем. Метод переменных направлений и метод дробных шагов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

для специальности 6-05-0533-08 Компьютерная математика и системный анализ

Очная (дневная) форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий
(ДОТ)

Номер раздела, темы	Название темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6		7	9
1	Введение	1						Опрос
2	Элементы теории погрешностей				2			Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; контрольная работа
3	Интерполирование и приближение функций	11			14		2	Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; контрольная работа
4	Приближенное вычисление интегралов	4			10		2	Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; контрольная работа
5	Обобщение интерполирования и численного интегрирования на случай функций многих переменных	2			6			Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; контрольная работа
	ВСЕГО 5 семестр	18			32		4	Зачет

6	Численные методы решения систем ЛАУ	10				6		2	Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; 2-е контрольные работы
7	Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц	2				4			Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; контрольная работа
8	Решение нелинейных уравнений и систем	4				6			Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; контрольная работа
	Всего 6 семестр	16				16		2	Зачет
9	Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	4				12			Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; контрольная работа
10	Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	6				12		2	Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; 2-е контрольные работы
11	Численное решение интегральных уравнений Фредгольма	2							Опрос, отчет по домашнему заданию
12	Построение и исследование разностных схем для задач математической физики	6				8		2	Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; контрольная работа
	Всего 7 семестр	18				32		4	Экзамен
	ИТОГО	52				80		10	

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

для специальностей 6-05-0533-06 Математика

6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки (профилизация: Искусственный интеллект и математическая экономика)

6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки (профилизация: Математика)

Очная (дневная) форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название темы	Количество аудиторных часов					Количество-часов УСП	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6		7	9
1	Введение	1						Опрос
2	Элементы теории погрешностей				2			Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; контрольная работа
3	Интерполирование и приближение функций	11			14		2	Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; контрольная работа
4	Приближенное вычисление интегралов	4			10		2	Опрос, отчет по

12

									лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; контрольная работа
5	Обобщение интерполирования и численного интегрирования на случай функций многих переменных	2				6			Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; контрольная работа
	ВСЕГО 5 семестр	18				32		4	Зачет
6	Численные методы решения систем ЛАУ	10				10		2	Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; 2-е контрольные работы
7	Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц	2				8			Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; контрольная работа
8	Решение нелинейных уравнений и систем	4				12		2	Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; контрольная работа
	Всего 6 семестр	16				30		4	Зачет
9	Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	4				6			Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; контрольная работа
10	Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	6				6		2	Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; 2-е контрольные работы

11	Численное решение интегральных уравнений Фредгольма	2							Опрос, отчет по домашнему заданию	
12	Построение и исследование разностных схем для задач математической физики	6				4			Опрос, отчет по лабораторной работе; отчет по домашнему заданию; контрольная работа	
	Всего 7 семестр	18				16		2	Экзамен	
	ИТОГО	52				78		10		

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Фаддеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры : учебник / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. - Изд. 4-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. - 734 с. - По ссылке доступна электронная версия 2022 года издания. - URL: <https://e.lanbook.com/book/210368>.
2. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики : учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон. - Изд. 8-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. - 664 с. - По ссылке доступна электронная версия 2022 года издания. - URL: <https://e.lanbook.com/book/210674>.
3. Демидович, Б. П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения : учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова ; под ред. Б. П. Демидовича. - Изд. 5-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. - 400 с. - По ссылке доступна электронная версия 2022 года издания. - URL: <https://e.lanbook.com/book/210437>.
4. Гулин, А. В. Введение в численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие / А.В. Гулин, О.С. Мажорова, В.А. Морозова. - Москва: ИНФРА-М, 2022. - 368 с. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1852192>.
5. Пантелеев, А. В. Численные методы. Практикум : учебное пособие / А. В. Пантелеев, И. А. Кудрявцева. - Москва : ИНФРА-М, 2023. - 512 с. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/2002583>.

Дополнительная литература

6. Волков, В. М. Численные методы : учеб.-метод. пособие для студ. учреждений высш. образования, обуч. по спец. 1-31 03 08 "Математика и инф. технологии (по напр.)" : в 2 ч. / В. М. Волков ; БГУ. - Минск : БГУ, 2016. Ч. 1 : - Минск : БГУ, 2016. - 87 с. : ил. ; 20х14 см. - На обл. также: БДУ 95. - Библиогр.: с. 80. - Ссылка на ресурс: URL: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/161943>.
7. Кремень, Е. В. Численные методы. Практикум в MathCad : учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по математическим спец. / Е. В. Кремень, Ю. А. Кремень, Г. А. Расолько. - Минск : Высшэйшая школа, 2019. - 255 с.
8. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики : учебное пособие / Г. И. Марчук. - 4-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 608 с. - Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/210302>.
9. Слабнов, В. Д. Численные методы : учебник / В. Д. Слабнов. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2020. - 389 с. - По ссылке доступна электронная версия 2022 года издания. - URL: <https://e.lanbook.com/book/215762>.

10. Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. - М.: Наука, 1967. - 500 с.
11. Крылов, В. И. Вычислительные методы. В 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. - М.: Наука, 1976. - Т. 1. - 304 с.
12. Крылов, В. И. Вычислительные методы. В 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. - М.: Наука, 1977. - Т. 2. - 400 с.
13. Крылов, В. И. Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. - Мн.: Наука и техника, 1982. - 286 с.
14. Крылов, В. И. Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. - Мн.: Наука и техника, 1986. - 311 с.
15. Мысовских, И. П. Лекции по методам вычислений: учеб. пособие / И. П. Мысовских. - СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1998. - 470 с.
16. Березин, И. С. Методы вычислений. В 2 т. / И. С. Березин, Н.П. Жидков. - М.: Физматгиз, 1962. Т. 2. - 640 с.
17. Самарский, А.А. Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А.В. Гулин. - М.: Альянс, 2016. - 432 с.
18. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. - М.: Наука, 1983. - 616 с.
19. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. - М.: Наука, 1987. - 600 с.
20. Волков, В. М. Численный анализ и оптимизация / В. М. Волков, О. Л. Зубко, И. Н. Катковская, И. Л. Ковалева, В. Г. Кротов, П. Лима. - Минск: Белгослес, 2017. - 207 с.
21. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. - М.: Academia, 2018. - 96 с.
22. Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. - М.: Наука, 1989. 432 с.
23. Годунов, С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. - М.: Наука, 1977. - 440 с.
24. Бахвалов, Н. С. Численные методы : учеб. пособие для студ. физико-матем. спец. вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. - 8-е изд. - М. ; СПб. : Лаборатория Базовых Знаний : Физматлит : Невский Диалект, 2000. - 622 с. Экземпляры: Всего: 3, из них: АБУ-1, КХН-1, СЧЗ-1
25. Игнатенко, М. В. Методы вычислений. Интерполирование и интегрирование: курс лекций / М. В. Игнатенко. - Минск : БГУ, 2006. - 116 с.
26. Сборник задач по методам вычислений : учеб. пособие для студ. учрежд., обеспеч. получение высш. образования по физ.-мат. спец. / [А. И. Азаров и др.] ; под ред. П. И. Монастырного. - Минск : Издательский центр БГУ, 2007. - 376 с.
27. Самарский, А. А. Введение в численные методы : учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский. - Изд. 5-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2009. - 288 с. : ил. ; 20x13 см. - (Классическая учебная литература по математике) (Учебники для вузов. Специальная литература). - На

обл. также: Знание. Уверенность. Успех!. Библиогр.: с. 281. Экземпляры: Всего: 5, из них: АБУ-5.

28. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы. Решения задач и упражнения : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по спец. 01.05.01 "Фундаментальные математика и механика" / Н. С. Бахвалов, А. А. Корнев, Е. В. Чижонков ; МГУ им. М. В. Ломоносова. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва : Лаборатория знаний, 2016. - 352 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Рекомендуются следующие формы диагностики результатов учебной деятельности: опрос, отчет по лабораторным работам, отчет по домашнему заданию, контрольные работы.

Оценка за ответы на лекциях (опрос) и лабораторных занятиях включает в себя полноту ответа, примеров из практики и т. д.

Оценка отчетов по лабораторным может включать в себя корректность используемых методов исследования, привлечение знаний из сопредельных областей, организация работы группы.

Контроль УСР проводится преподавателем с использованием ИКТ в форме опроса и проверки результатов выполнения работы.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Численные методы» учебным планом предусмотрен в 5 и 6 семестрах – **зачет**, в 7 семестре – **экзамен**.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

- отчеты по лабораторным работам – 50%;
- контрольные работы – 50%.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе итоговой отметки текущей аттестации (модульно-рейтинговой системы оценки знаний) 40 % и экзаменационной отметки 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 3. Интерполирование и приближение функций (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [26]: гл. 6, задачи и упражнения 43–62.

Форма контроля – отчет по домашнему заданию.

Тема 4. Приближенное вычисление интегралов (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [26]: гл. 8, задачи и упражнения 118-164.

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

Тема 6. Численные методы решения систем ЛАУ (2 ч.)

Исследовать зависимость количество итераций для достижения заданной точности в методе сопряженных градиентов с переобусловливателем iLU в зависимости от размерности матрицы (матрица Пуассона, функции МАТЛАБ pcg, gallery, ilu).

Форма контроля – отчет по домашнему заданию.

Тема 10. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [26]: гл. 10.5, задачи и упражнения 63-72.

Форма контроля – отчет по домашнему заданию.

*Для специальностей 6-05-0533-06 Математика
6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки (профилизация:
Искусственный интеллект и математическая экономика)
6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки (профилизация:
Математика)*

Тема 8. Решение нелинейных уравнений и систем (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [26]: гл. 5.2, задачи и упражнения 55-62.

Форма контроля – отчет по домашнему заданию.

*Для специальности 6-05-0533-08 Компьютерная математика и
системный анализ*

Тема 12. Построение и исследование разностных схем для задач математической физики (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [26]:

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются

1) эвристический подход:

- осуществление студентами лично-значимых открытий окружающего мира;

- демонстрация многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;

- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;
- индивидуализация обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;

2) *практико-ориентированный подход:*

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентация на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

3) *методы и приемы развития критического мышления,* которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

4) *метод группового обучения,* который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- изучение литературы и материалов электронных источников по проблемам дисциплины;
- работы, предусматривающие аналитическое решение задач и выполнение заданий лабораторных занятий;
- выполнение домашнего задания;
- подготовка к лабораторным занятиям;
- курсовые, дипломные и научно-исследовательские работы, связанные с тематикой дисциплины;
- подготовка к участию в конференциях с докладами по проблемам дисциплины.

Для организации дистанционной и самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендуется использовать современные информационные ресурсы, размещенные на образовательном портале <https://edummf.bsu.by> смешанного и дистанционного обучения БГУ и содержащие учебные материалы для электронного сопровождения изучаемой дисциплины.

Примерный перечень вопросов к зачету

5 семестр

1. Системы функций Чебышева. Определение и примеры. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы система функций была чебышевской
2. Интерполирование обобщенными многочленами
3. Постановка задачи. Достаточное условие существования и единственности интерполяционного обобщенного многочлена
4. Алгебраическое интерполирование
5. Алгебраическое интерполирование как частный случай интерполирования обобщенными многочленами.
6. Представление алгебраического интерполяционного многочлена в форме Лагранжа. Инвариантность относительно алгебраических многочленов соответствующей степени
7. Конечные разности
8. Определение, таблица. Свойства линейности и равенства постоянной величине для многочленов соответствующей степени
9. Представление конечной разности произвольного порядка через значения функции
10. Представление значения функции через значения последовательных конечных разностей
11. Разделенные разности
12. Определения, таблица. Свойства линейности и равенства постоянной величине для многочленов соответствующей степени
13. Представление Разделенных разностей произвольного порядка через значения функции. Свойство симметрии
14. Представление значения функции через значения последовательных разделенных разностей
15. Представление разделенной разности через производную функции соответствующего порядка
16. Связь между разделенными и конечными разностями для равноотстоящих аргументов. Выражение конечной разности через производную функции
17. Интерполяционная формула Ньютона. Определение, построение, свойство инвариантности относительно многочленов соответствующей степени
18. Многочлены Чебышева. Определение, корни, точки экстремума
19. Приведенный многочлен Чебышева, его норма в пространстве непрерывных функций
20. Оценка остаточного члена интерполяционного полинома и ее минимизация
21. Представление погрешности интерполирования в форме Лагранжа
22. Минимизация погрешности интерполяционного полинома дискретных функций в фиксированной точке

23. Минимизация погрешности интерполяционного полинома по норме в пространстве непрерывных функций на заданном отрезке
24. Интерполирование по равноотстоящим узлам
25. Формула Ньютона для интерполирования в начале таблицы. Погрешность интерполирования
26. Формула Ньютона для интерполирования в конце таблицы. Погрешность интерполирования
27. Тригонометрическое интерполирование. Дискретное преобразование Фурье
28. Существование и единственность тригонометрического интерполяционного многочлена
29. Случай равноотстоящих узлов
30. Дискретное (прямое) преобразование Фурье
31. Дискретное (обратное) преобразование Фурье
32. Определение интерполяционного сплайна. Схема построения
33. Постановка задачи аппроксимации. Метод наименьших квадратов
34. Квадратурные формулы общего вида. Определение.
35. Квадратуры, основанные на алгебраическом интерполировании
36. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы квадратурная формула была интерполяционной
37. Алгебраическая степень точности квадратурной формулы. Ее максимальное значение, выраженное через число узлов квадратурной формулы. Связь между точностью и числом узлов квадратурной формулы
38. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса
39. Определение. Степень точности
40. Частные случаи формулы Ньютона-Котеса. Представление погрешности
41. Составные квадратурные формулы
42. Составные квадратурные формулы общего вида
43. Примеры построения составных квадратурных формул
44. Алгебраическая степень точности составной квадратурной формулы
45. Представление погрешности составной квадратурной формулы
46. Правило Рунге практической оценки погрешности квадратурных формул
47. Квадратурные формулы типа Гаусса. Определение.
48. Необходимое и достаточное условие того, чтобы квадратурная формула была точна для многочленов максимально возможной степени
49. Существование и единственность квадратурной формулы гауссова типа
50. Свойство положительности квадратурных коэффициентов
51. Представление остаточного члена формулы типа Гаусса
52. Частные случаи квадратурных формул гауссова типа
53. Квадратурная формула гауссова типа с весом Якоби
54. Квадратурные формулы гауссова типа с весом Чебышева-Эрмита

55. Квадратурные формулы гауссова типа с весом Чебышева-Лагерра
56. Вычисление кратных интегралов
57. Кубатурные формулы, основанные на интерполировании.
Существование и единственность
58. Свойство инвариантности интерполяционной кубатурной формулы относительно многочленов соответствующей степени
59. Методы построения кубатурных формул
60. Метод Монте-Карло

6 семестр

1. Представление чисел с плавающей запятой и особенности арифметических операций с ними. Машинные эпсилон, ноль и бесконечность
2. Нормы векторов и матриц. Понятие согласованности и подчиненности матричных норм.
3. Число обусловленности матрицы системы ЛАУ. Невязка. Оценки погрешности при решении систем ЛАУ с возмущенной правой частью.
4. Метод Гаусса (вычислительная сложность, выбор ведущего элемента).
5. LU-декомпозиция.
6. Разложение Холецкого.
7. Метод простой итерации для решения систем ЛАУ.
8. Условия сходимости метода простой итерации и выбор оптимального итерационного параметра. Критерий остановки итераций.
9. Итерационный метод наименьших невязок.
10. Итерационные методы градиентного типа. Метод скорейшего спуска.
11. Неявные итерационные методы (Зейделя, Якоби, Последовательной верхней релаксации).
12. Свойства собственных векторов и собственных значений. Теорема Гершгорина. Преобразования подобия матриц.
13. Степенной метод вычисления границ спектра матрицы.
14. Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского.
15. Преобразования Гивенса. Метод вращений.
16. Ортогональная матрица. Преобразования Хаусхолдера и QR – разложение.
17. Методы решения нелинейных уравнений. Отделение корней. Метод дихотомии.
18. Метод неподвижной точки для решения нелинейных уравнений.
19. Метод релаксации и выбор оптимального итерационного параметра.
20. Итерационный метод Ньютона для решения нелинейных уравнений.
21. Квадратичная сходимость итерационного метода Ньютона. Локальная сходимость.

22. Модификации итерационного метода Ньютона для нелинейных уравнений и систем.

23. Численные методы нахождения экстремумов функций одной и нескольких переменных.

Примерный перечень вопросов к экзамену

7 семестр

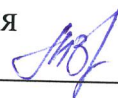
1. Прямая и обратная задачи теории погрешностей.
2. Примеры неустойчивых алгоритмов.
3. Погрешность вычислений на ЭВМ. Погрешность округлений и компьютерная запись чисел.
4. Оценка погрешности решения систем ЛАУ с возмущенной правой частью. Невязка. Число обусловленности матрицы системы ЛАУ.
5. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса (вычислительная сложность, выбор ведущего элемента).
6. LU-декомпозиция.
7. Разложение Холецкого.
8. Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации.
9. Условия сходимости метода простой итерации и выбор оптимального итерационного параметра. Критерий останова итераций.
10. Итерационный метод наименьших невязок.
11. Итерационные методы градиентного типа. Метод скорейшего спуска.
12. Неявные итерационные методы (Зейделя, Якоби, Последовательной верхней релаксации).
13. Проблема собственных значений.
14. Свойства собственных векторов и собственных значений. Теорема Гершгорина. Преобразования подобия матриц.
15. Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений.
16. Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского.
17. Метод вращений.
18. Ортогональная матрица. Преобразования Хаусхолдера и QR-разложение.
19. Методы решения нелинейных уравнений. Отделение корней. Метод дихотомии.
20. Метод неподвижной точки для решения нелинейных уравнений.
21. Метод релаксации и выбор оптимального итерационного параметра.
22. Итерационный метод Ньютона для решения нелинейных уравнений.
23. Квадратичная сходимость итерационного метода Ньютона. Локальная сходимость.
24. Модификации итерационного метода Ньютона для нелинейных уравнений и систем.

25. Численные методы нахождения экстремумов функций одной и нескольких переменных.
26. Метод Эйлера для решения задачи Коши.
27. Сходимость и оценка погрешности метода Эйлера.
28. Метод Рунге-Кутты.
29. Правило Рунге для апостериорной оценки погрешности методов решения задачи Коши.
30. Одношаговые численные методы решения задачи Коши. Методы Рунге-Кутты.
31. Многошаговые численные методы решения задачи Коши. Методы Адамса.
32. Устойчивость численных методов решения задачи Коши. Правило корней.
33. Численные методы решения жестких систем. А-устойчивость. Метод Гирра.
34. Численные методы решения краевых задач. Метод Стрельбы.
35. Разностный метод решения краевых задач.
36. Основные понятия теории разностных схем для уравнений математической физики. Аппроксимация (согласованность), устойчивость, сходимость, сеточный шаблон.
37. Разностные схемы для нестационарного уравнения теплопроводности.
38. Разностные схемы для уравнения переноса.
39. Разностные схемы для эллиптических уравнений.
40. Теорема Лакса об эквивалентности.
41. Метод гармоник для исследования устойчивости разностных схем.
42. Канонический вид и условие устойчивости двухслойных разностных схем.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой
веб-технологий и компьютерного моделирования
кандидат физ.-мат. наук, доцент



М.В.Игнатенко

02.06.2025

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УО
на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
