

Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Физический факультет
Кафедра высшей математики и математической физики

СОГЛАСОВАНО

Заведующая кафедрой

_____ Кабанова О.С.

«22» мая 2025 г.

СОГЛАСОВАНО

Декан физического факультета

_____ Тиванов М.С.

«22» мая 2025 г.

МП

Функциональный анализ и теория функций

Электронный учебно-методический комплекс для специальностей:

7-07-0533-01 «Фундаментальная физика»;

профилизации специальности:

«Теоретическая физика и астрофизика»,

«Экспериментальная физика»;

7-07-0533-02 «Ядерная физика и технологии»;

профилизации специальности:

«Физика ядерных реакторов и установок»,

«Ядерная физика и электроника»

Регистрационный № 2.4.2-24 / 638

Автор:

Зеленков В. И., кандидат физико-математических наук, доцент.

Рассмотрено и утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ
Протокол № 10 от 22.05.2025 .

Минск 2025

УДК 517.98(075.8)
З-484

Утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ.
Протокол № 10 от 22.05.2025 г.

Решение о депонировании вынес: Совет физического факультета.
Протокол № 13 от 26 июня 2025 г.

Автор:

Зеленков Вадим Исаакович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математической физики физического факультета БГУ

Рецензенты:

Савва Вадим Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Белорусского государственного технологического университета;

Тимощенко Андрей Игоревич, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой ядерной физики физического факультета Белорусского государственного университета.

Зеленков, В. И. Функциональный анализ и теория функций : электронный учебно-методический комплекс для специальностей 7-07-0533-01 «Фундаментальная физика», 7-07-0533-02 «Ядерная физика и технологии» / В. И. Зеленков ; БГУ, Физический фак., Каф. высшей математики и математической физики. – Минск : БГУ, 2025. – 515 с. – Библиогр.: с. 502–505.

В электронном учебно-методическом комплексе (ЭУМК) по учебной дисциплине «Функциональный анализ и теория функций» приводятся основные понятия и теоретические сведения. Дается подробное решение большого числа типовых примеров и предлагается значительное количество задач различной степени сложности для самостоятельного решения. ЭУМК предназначен для студентов физического факультета БГУ, а также преподавателей высших учебных заведений при подготовке и проведении практических занятий по дисциплине «Функциональный анализ и теория функций».

Оглавление

Пояснительная записка	12
1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.	13
1.1. Ряды и преобразования Фурье	14
1.1.1. Основные определения	14
1.1.1.1. Евклидово пространство. Норма	14
1.1.1.2. Ортогональность	16
1.1.2. Тригонометрические ряды Фурье	17
1.1.2.1. Тригонометрическая ортогональная система, коэффициенты Фурье	17
1.1.2.2. Случай непериодической функции	20
1.1.2.3. Случай произвольного промежутка	21
1.1.2.4. Разложение только по косинусам или только по синусам	22
1.1.3. Другие свойства ряда Фурье	24
1.1.3.1. Интеграл Дирихле. Сходимость ряда Фурье	24
1.1.3.2. Равномерное приближение тригонометрическими полиномами	29
1.1.3.3. Комплексная форма записи ряда Фурье	31
1.1.4. Ряды Фурье по общим ортогональным системам	32
1.1.4.1. Приближение функций в среднем	32
1.1.4.2. Замкнутость и полнота ортогональных систем	34
1.1.4.3. Замкнутость и полнота тригонометрической ортогональной системы	37
1.1.5. Интеграл Фурье	40
1.1.6. Преобразование Фурье	45
1.1.6.1. Общие положения	45
1.1.6.2. Косинус- и синус-преобразования	46
1.1.6.3. Свойства преобразования Фурье	48
1.1.6.4. Замечания	54
1.1.7. Дискретное преобразование Фурье	55
1.1.7.1. Функция дискретной переменной	55
1.1.7.2. Дискретное преобразование Фурье	58
1.1.8. Коллекция формул	60

1.2. Цилиндрические функции	65
1.2.1. Уравнение Бесселя и его решения	65
1.2.1.1. Функция Бесселя первого рода	65
1.2.1.2. Функция Бесселя второго рода (функция Неймана)	70
1.2.1.3. Функции Бесселя третьего рода (функции Ханкеля)	75
1.2.2. Модифицированное уравнение Бесселя	76
1.2.2.1. Модифицированная функция Бесселя первого рода (функция Инфельда)	76
1.2.2.2. Модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда)	78
1.2.3. Рекуррентные соотношения	81
1.2.4. Производные	81
1.2.5. Производящая функция	81
1.2.6. Ортогональность и нули цилиндрических функций	83
1.2.6.1. Соотношение ортогональности	83
1.2.6.2. Нули функции Бесселя	85
1.2.7. Ряды Фурье – Бесселя	88
1.2.8. Интегралы, связанные с цилиндрическими функциями	90
1.2.8.1. Интеграл Бесселя	90
1.2.8.2. Интеграл Неймана	90
1.2.8.3. Интеграл Вебера	90
1.2.8.4. Формула Пуассона	90
1.2.9. Цилиндрические функции различных порядков	91
1.2.9.1. Общие положения	91
1.2.9.2. Цилиндрические функции полуцелого порядка. Сферические функции Бесселя	91
1.2.9.3. Дифференцирование по порядку	95
1.2.9.4. Асимптотические разложения	97
1.2.10. Цилиндрические функции в задачах физики	99
1.2.10.1. Задача о колебаниях нити	99
1.2.10.2. Колебания круглой мембраны	101
1.2.10.3. Уравнение Гельмгольца в сферических координатах	103
1.2.10.4. Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии	104
1.2.10.5. Гидродинамическая неустойчивость Рэлея–Плато	106
1.2.10.6. Течение жидкости в трубе с круговым сечением	109
1.2.10.7. Дифракция плоской электромагнитной волны на цилиндре	111
1.2.11. Коллекция формул	112
1.2.11.1. Гамма-функция Эйлера	112
1.2.11.2. Дигамма-функция	116
1.2.11.3. Разложения в ряд	118

1.2.11.4.	Производные и рекуррентные соотношения	118
1.2.11.5.	Производящая функция и следующие из нее разложения	118
1.2.11.6.	Соотношение ортогональности	119
1.2.11.7.	Интегралы, связанные с цилиндрическими функциями	120
1.2.11.8.	Асимптотические разложения.	120
1.3.	Ортогональные полиномы и присоединенные функции Лежандра	121
1.3.1.	Уравнение гипергеометрического типа	121
1.3.2.	Полиномы гипергеометрического типа. Формула Родрига . .	122
1.3.3.	Свойство ортогональности	124
1.3.3.1.	Соотношение ортогональности	124
1.3.3.2.	Разложение произвольных полиномов по ортогональным полиномам.	126
1.3.4.	Рекуррентное соотношение	126
1.3.5.	Другие свойства ортогональных полиномов	128
1.3.5.1.	Нули	128
1.3.5.2.	Замкнутость.	129
1.3.6.	Классические ортогональные полиномы (общие свойства).	129
1.3.6.1.	Вид весовой функции	129
1.3.6.2.	Семейства ортогональных полиномов	130
1.3.7.	Полиномы Лежандра	132
1.3.7.1.	Явный вид.	132
1.3.7.2.	Производящая функция	132
1.3.7.3.	Рекуррентные соотношения	134
1.3.7.4.	Дифференциальное уравнение	134
1.3.7.5.	Соотношение ортогональности	136
1.3.7.6.	Ряд Фурье – Лежандра	137
1.3.8.	Присоединенные функции Лежандра	138
1.3.8.1.	Дифференциальное уравнение	138
1.3.8.2.	Соотношение ортогональности	139
1.3.8.3.	Рекуррентные соотношения	143
1.3.9.	Полиномы Эрмита.	143
1.3.9.1.	Явный вид.	143
1.3.9.2.	Производящая функция	143
1.3.9.3.	Рекуррентные соотношения	144
1.3.9.4.	Дифференциальное уравнение	145
1.3.9.5.	Соотношение ортогональности	145

1.3.10.	Ортогональные полиномы дискретной переменной	146
1.3.11.	Ортогональные полиномы в задачах физики	147
1.3.11.1.	Полиномы Лежандра и потенциал поля точечного заряда	147
1.3.11.2.	Полиномы Лежандра и уравнение Лапласа	148
1.3.11.3.	Присоединенные функции Лежандра и уравнение Лапласа	150
1.3.11.4.	Полиномы Чебышёва 1-го рода	151
1.3.11.5.	Полиномы Лагерра и атом с одним электроном	152
1.3.11.6.	Полиномы Эрмита и квантовый гармонический осциллятор	154
1.3.12.	Коллекция формул	155
1.3.12.1.	Общие соотношения	155
1.3.12.2.	Полиномы Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$	156
1.3.12.3.	Ультрасферические полиномы (полиномы Гегенбауэра) $C_n^{(\lambda)}(x)$	157
1.3.12.4.	Полиномы Лежандра $P_n(x)$	158
1.3.12.5.	Полиномы Чебышёва 1-го рода $T_n(x)$	160
1.3.12.6.	Полиномы Чебышёва 2-го рода $U_n(x)$	161
1.3.12.7.	Полиномы Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$	162
1.3.12.8.	Полиномы Эрмита $H_n(x)$	163
1.3.12.9.	Присоединенные функции Лежандра первого рода $P_n^m(x)$	164
1.4.	Основы операционного исчисления.	166
1.4.1.	Преобразование Лапласа	166
1.4.1.1.	Оригиналы. Свойства оригиналов	166
1.4.1.2.	Изображения. Свойства изображений	168
1.4.2.	Теоремы об оригиналах и изображениях	172
1.4.2.1.	Линейность	172
1.4.2.2.	Теорема подобия	172
1.4.2.3.	Теорема смещения	173
1.4.2.4.	Теорема запаздывания	173
1.4.2.5.	Теорема об интегрировании оригинала.	173
1.4.2.6.	Теорема об интегрировании изображения	174
1.4.2.7.	Теорема о дифференцировании оригинала	174
1.4.2.8.	Теорема о дифференцировании изображения	177
1.4.2.9.	Теорема о свертке (теорема умножения).	177
1.4.2.10.	Интеграл (формула) Дюамеля	178
1.4.2.11.	Теорема, двойственная теореме умножения	179
1.4.2.12.	Изображение периодических функций	180

1.4.2.13.	Изображение импульсных функций	180
1.4.2.14.	Изображение составных функций	183
1.4.3.	Нахождение оригиналов по изображениям	184
1.4.3.1.	Первая теорема разложения.	185
1.4.3.2.	Вторая теорема разложения.	186
1.4.4.	Решение дифференциальных уравнений	188
1.4.4.1.	Уравнения с постоянными коэффициентами	188
1.4.4.2.	Решение уравнений с помощью интеграла Дюамеля	189
1.4.4.3.	Уравнения с переменными коэффициентами	190
1.4.4.4.	Уравнения с запаздыванием.	191
1.4.5.	Решение интегральных уравнений Вольтерра	191
1.4.6.	Вычисление несобственных интегралов	192
1.4.7.	Коллекция формул	193
1.4.7.1.	Лемма Жордана	193
1.4.7.2.	Свойства преобразования Лапласа	193
1.4.7.3.	Вычисление оригиналов при помощи вычетов	195
1.4.7.4.	Таблица простейших преобразований Лапласа	195
1.5.	Метрические пространства	197
1.5.1.	Основы теории множеств	197
1.5.1.1.	Определения. Операции над множествами	197
1.5.1.2.	Отображения множеств	199
1.5.2.	Метрические пространства	201
1.5.2.1.	Основные определения и аксиомы	201
1.5.2.2.	Примеры метрических пространств	202
1.5.2.3.	Непрерывные отображения метрических пространств	205
1.5.3.	Сходимость и полнота.	206
1.5.3.1.	Основные определения	206
1.5.3.2.	Сходимость последовательностей	207
1.5.3.3.	Полнота метрических пространств	208
1.5.4.	Принцип сжимающих отображений	209
1.5.4.1.	Основные положения	209
1.5.4.2.	Решение уравнения $x = f(x)$	210
1.5.4.3.	Интегральные уравнения Фредгольма	212
1.5.4.4.	Интегральное уравнение Вольтерра	213
1.5.4.5.	Алгебраические системы	215
1.5.4.6.	Задача Коши для дифференциального уравнения	216
1.6.	Мера и интеграл Лебега	219
1.6.1.	Счетные и континуальные множества.	219
1.6.1.1.	Определения и примеры	219
1.6.1.2.	Свойства счетных множеств.	220
1.6.1.3.	Эквивалентные множества	221

1.6.1.4.	Открытые и замкнутые множества	222
1.6.1.5.	Мощность множества	223
1.6.2.	Мера. Измеримые множества и измеримые функции	224
1.6.2.1.	Определения и примеры	224
1.6.2.2.	Элементарные множества	225
1.6.2.3.	Лебегова мера	227
1.6.2.4.	Измеримые функции	228
1.6.3.	Интеграл Лебега	228
1.6.3.1.	Введение	228
1.6.3.2.	Интеграл Лебега для простых функций	228
1.6.3.3.	Свойства интеграла Лебега от простых функций	229
1.6.3.4.	Общее определение интеграла Лебега на множестве конечной меры	230
1.6.3.5.	Общие свойства интеграла Лебега	231
1.6.3.6.	Интеграл Лебега на множестве бесконечной меры	233
1.6.3.7.	Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана	234
1.7.	Линейные нормированные полные пространства.	237
1.7.1.	Линейные пространства	237
1.7.1.1.	Определения и примеры	237
1.7.1.2.	Линейная зависимость	238
1.7.1.3.	Подпространства	239
1.7.2.	Линейные функционалы	239
1.7.2.1.	Определения и примеры	239
1.7.2.2.	Выпуклые множества и выпуклые функционалы	240
1.7.3.	Нормированные пространства	243
1.7.3.1.	Определения и примеры	243
1.7.3.2.	Топологические пространства	246
1.7.3.3.	Евклидовы пространства	246
1.7.3.4.	Гильбертово пространство	249
1.7.3.5.	Линейные функционалы на нормированных пространствах	252
1.7.4.	Операторы в банаховых пространствах	254
1.7.4.1.	Линейные операторы	254
1.7.4.2.	Норма оператора	257
1.7.4.3.	Сумма и произведение операторов	258
1.7.4.4.	Обратные операторы	260
1.7.4.5.	Эрмитовы операторы	261
1.7.5.	Метод ортогонализации Грама – Шмидта	264
1.8.	Интегральные уравнения с симметричными ядрами	266
1.8.1.	Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра	266
1.8.1.1.	Основные определения	266

1.8.1.2.	Сведение задачи Коши к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода	267
1.8.1.3.	Сведение краевой задачи к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода	269
1.8.2.	Собственные значения и собственные функции однородных уравнений с симметричным ядром	271
1.8.2.1.	Теоремы об ортогональности собственных функций и расположении собственных значений	271
1.8.2.2.	Определение собственных значений и собственных функций	276
1.8.2.3.	Вырожденные ядра.	277
1.8.2.4.	Разложение в ряды по собственным функциям	282
1.8.3.	Повторные (итерированные) ядра.	282
1.8.3.1.	Определения и теоремы	282
1.8.3.2.	Разложение повторного ядра по собственным функциям.	285
1.8.4.	Неоднородное уравнение Фредгольма с симметричным ядром. Резольвента	287
1.8.5.	Неоднородное уравнение Фредгольма с непрерывным ядром	291
1.8.6.	Коллекция формул	294
2.	ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ	296
2.1.	Ряды и преобразования Фурье. Задачи	297
2.1.1.	Ряды Фурье. Периодические и непериодические функции . .	297
2.1.2.	Ряды Фурье. Разные задачи	305
2.1.3.	Ряды Фурье. Комплексная форма, равенство Парсеваля. . .	310
2.1.4.	Интеграл Фурье. Преобразование Фурье	318
2.1.5.	Преобразование Фурье. Решение интегральных и дифференциальных уравнений	325
2.2.	Цилиндрические функции. Задачи	334
2.2.1.	Рекуррентные соотношения	334
2.2.2.	Производящая функция	339
2.2.3.	Интегральные представления	344
2.2.4.	Сферические и модифицированные функции	352
2.3.	Ортогональные полиномы и присоединенные функции Лежандра. Задачи	357
2.3.1.	Полиномы Лежандра	357
2.3.2.	Полиномы Эрмита.	363
2.3.3.	Разные полиномы	371
2.4.	Основы операционного исчисления. Задачи	379
2.4.1.	Нахождение изображений	379
2.4.2.	Нахождение оригиналов	385

2.4.3.	Решение уравнений	390
2.4.4.	Разные задачи	397
2.5.	Метрические пространства. Задачи	405
2.5.1.	Метрика	405
2.5.2.	Принцип сжимающих отображений	413
2.5.3.	Принцип сжимающих отображений (приложения)	417
2.6.	Мера и интеграл Лебега. Задачи	423
2.6.1.	Счетные и континуальные, открытые и замкнутые множества	423
2.6.2.	Мера Лебега	427
2.6.3.	Интеграл Лебега	433
2.6.4.	Интеграл Лебега	438
2.6.5.	Суммирование некоторых рядов	447
2.6.5.1.	Ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} q^{2k-1}$	447
2.6.5.2.	Ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1})$	447
2.6.5.3.	Ряды обратных квадратов	447
2.7.	Линейные нормированные полные пространства. Задачи	448
2.7.1.	Линейные пространства. Норма	448
2.7.2.	Гильбертово пространство	454
2.8.	Интегральные уравнения с симметричными ядрами. Задачи	464
2.8.1.	Однородные интегральные уравнения с вырожденным ядром	464
2.8.2.	Неоднородные интегральные уравнения с вырожденным ядром	470
2.8.3.	Интегральные уравнения Фредгольма с непрерывным ядром	474
3.	РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ	481
3.1.	Контрольные работы	482
3.1.1.	Пробная контрольная работа № 1	482
3.1.2.	Пробная контрольная работа № 2	487
3.1.3.	Теоретическая контрольная работа	489
3.1.4.	Пробная контрольная работа № 3	494
3.2.	Порядок проведения экзамена	496
4.	ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ	501
4.1.	Рекомендуемая литература	502
	Основная литература	502
	Дополнительная литература	503

4.2. Электронные ресурсы	506
4.3. Именной указатель	507
4.4. Предметный указатель.	511

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Электронный учебно-методический комплекс (далее ЭУМК) по учебной дисциплине «Функциональный анализ и теория функций» предназначен для студентов физического факультета БГУ, а также преподавателей высших учебных заведений при подготовке и проведении практических занятий по указанной дисциплине. Комплекс содержит основные теоретические сведения, типовые примеры и задачи для самостоятельного решения.

ЭУМК составлен в соответствии с действующей программой дисциплины, которая изучается в третьем семестре по специальностям: 7-07-0533-01 Фундаментальная физика (профилизации специальности: Теоретическая физика и астрофизика, Экспериментальная физика) и 7-07-0533-02 Ядерная физика и технологии (профилизации специальности: Физика ядерных реакторов и установок, Ядерная физика и электроника). На лекции отводится 56 часов, на практические занятия — 54 часа, управляемая самостоятельная работа составляет 10 часов.

ЭУМК состоит из пояснительной записки, теоретического раздела, практического раздела, раздела контроля знаний, списка литературы, именного и предметного указателей.

Теоретический раздел содержит основные определения и формулировки, выводы необходимых соотношений и т. п. Там, где это возможно, наиболее важные соотношения дублируются для удобства в отдельном параграфе «Коллекция формул».

Практический раздел включает подробный разбор типовых задач и задач повышенной трудности (эти материалы предполагается использовать на аудиторных практических занятиях), а также задания для самостоятельной работы.

В разделе контроля знаний приводятся пробные контрольные работы по соответствующим темам и материалы по подготовке к экзамену (вопросы и пробные задачи).

Список литературы, насчитывающий 44 наименования, содержит все источники, использованные при подготовке ЭУМК. Завершают комплекс именной и предметный указатели.

Все ссылки на разделы, подразделы и пункты, на источники и формулы активны и осуществляют переход на соответствующую страницу.

1.. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1.1. Ряды и преобразования Фурье

1.1.1. Основные определения

Информация, размещенная в этом разделе, знакома вам по курсу «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», но удобнее будет разместить ее и здесь.

1.1.1.1. Евклидово пространство. Норма

Определение 1.1. Линейное пространство R называется *евклидовым*, если в нем выполняются следующие требования:

1. Известно правило, посредством которого любым двум элементам f и g пространства R ставится в соответствие число, называемое *скалярным произведением* этих элементов и обозначаемое символом (f, g) .

2. Это правило удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $(f, g) = (g, f)$ (переместительное свойство);
2. $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$ (распределительное свойство);
3. $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)$ для любого вещественного числа λ ;
4. $(f, f) > 0$, если $f \neq \mathbf{0}$, $(f, f) = 0$, если $f = \mathbf{0}$ (здесь $\mathbf{0}$ — нулевой элемент линейного пространства).

Определение 1.2. Будем называть *кусочно-непрерывной* на сегменте $[a, b]$ функцией $f(x)$ такую функцию, которая непрерывна всюду на сегменте $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек x_k ($k=1, 2, \dots, n$), где она имеет разрыв первого рода, причем в каждой точке разрыва x_k эта функция удовлетворяет условию

$$f(x_k) = \frac{f(x_k - 0) + f(x_k + 0)}{2}. \quad (1.1.1)$$

Подобные функции образуют евклидово пространство. Определим для них скалярное произведение как

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx. \quad (1.1.2)$$

Существование интеграла и справедливость аксиом 1–3 очевидны. Рассмотрим аксиому 4.

То, что $(f, f) = \int_a^b f^2(x) dx \geq 0$, очевидно. Покажем, что из равенства $(f, f) = 0$ вытекает, что $f(x) \equiv 0$.

Действительно, функция $f(x)$ кусочно-непрерывна. Разобьем сегмент $[a, b]$ на конечное число сегментов $[x_{k-1}, x_k]$, на каждом из которых функция непрерывна. Тогда из равенства

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0$$

следует, что

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f^2(x) dx = 0$$

для всех k , значит, $f(x) \equiv 0$ на $[x_{k-1}, x_k]$, и, следовательно, $f(x) \equiv 0$ на всем отрезке $[a, b]$. $\square$

Теорема 1.1 (неравенство Коши – Буняковского). *Во всяком евклидовом пространстве для любых двух элементов f и g справедливо следующее неравенство:*

$$(f, g)^2 \leq (f, f) \cdot (g, g). \quad (1.1.3)$$

Для любого вещественного числа λ

$$(\lambda f + g, \lambda f + g) \geq 0.$$

В силу аксиом 1–4 это неравенство можно переписать в виде

$$\lambda^2(f, f) + 2\lambda(f, g) + (g, g) \geq 0. \quad (1.1.4)$$

Необходимым и достаточным условием неотрицательности квадратного трехчлена относительно λ (1.1.4) является неположительность его дискриминанта, т. е.

$$(f, g)^2 - (f, f) \cdot (g, g) \leq 0. \quad \square$$

Определение 1.3. Линейное пространство R называется **нормированным**¹, если выполнены следующие два требования:

1. задано правило, посредством которого каждому элементу f пространства R ставится в соответствие вещественное число, называемое нормой указанного элемента и обозначаемое символом $\|f\|$;

¹Подробный разговор о линейных нормированных пространствах предстоит в главе 1.7.

2. указанное правило удовлетворяет следующим аксиомам:

2.1. $\|f\| > 0$, если $f \neq 0$, $\|f\| = 0$, если $f = 0$.

2.2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ для любого элемента f и любого вещественного числа λ .

2.3. Для любых двух элементов f и g справедливо *неравенство треугольника*:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|. \quad (1.1.5)$$

Теорема 1.2. *Всякое евклидово пространство является нормированным, если в нем норму любого элемента f определить равенством*

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}. \quad (1.1.6)$$

Выполнение аксиом 22.1. и 22.2. очевидно. Проверим, выполняется ли неравенство треугольника 22.3..

Перепишем неравенство Коши – Буняковского (1.1.3) в виде

$$|(f, g)| \leq \sqrt{(f, f)} \cdot \sqrt{(g, g)},$$

тогда

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sqrt{(f + g, f + g)} = \sqrt{(f, f) + 2(f, g) + (g, g)} \leq \\ &\leq \sqrt{(f, f) + 2\sqrt{(f, f)} \cdot \sqrt{(g, g)} + (g, g)} = \\ &= \sqrt{[\sqrt{(f, f)} + \sqrt{(g, g)}]^2} = \sqrt{(f, f)} + \sqrt{(g, g)} = \|f\| + \|g\|. \quad \square \end{aligned}$$

1.1.1.2. Ортогональность

Определение 1.4. Два элемента евклидова пространства f и g называются *ортогональными*, если скалярное произведение (f, g) этих элементов равно нулю.

Определение 1.5. Пусть в произвольном бесконечномерном евклидовом пространстве R задана некоторая последовательность элементов $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n, \dots$

Эта последовательность называется *ортогональной системой*, если входящие в эту последовательность элементы попарно ортогональны. Если при этом элементы имеют норму, равную единице, то система называется *ортонормированной*.

Пример 1.1. В пространстве кусочно-непрерывных функций соотношение ортогональности имеет вид

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x) dx = h_n \delta_m^n, \quad (1.1.7)$$

где δ — символ Кронекера

$$\delta_m^n = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Замечание 1.1. Для некоторых ортогональных систем кусочно-непрерывных функций соотношение ортогональности записывается в форме

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x) \rho(x) dx = h_n \delta_m^n, \quad (1.1.8)$$

где $\rho(x) \geq 0$, $\rho(x) \not\equiv 0$ — весовая функция. Несколько таких систем мы рассмотрим в главах 3–4.

1.1.2. Тригонометрические ряды Фурье

1.1.2.1. Тригонометрическая ортогональная система, коэффициенты Фурье

Легко показать, что система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots, \quad (1.1.9)$$

заданных на сегменте $-\pi \leq x \leq \pi$ является ортонормированной (заметим, что единицу можно трактовать как $\cos(0 \cdot x)$).

Замечание 2.1. На сегменте $0 \leq x \leq \pi$ ортонормированными являются частичные системы, состоящие только из косинусов

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2x, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx, \dots, \quad (1.1.10)$$

или только из синусов

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \dots \quad (1.1.11)$$

Рассмотрим кусочно-непрерывную функцию $f(x)$, заданную на сегменте $-\pi \leq x \leq \pi$, и представим ее в виде *ряда Фурье* по функциям системы (1.1.9):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1.1.12)$$

Будем предполагать, что ряд (1.1.12) равномерно сходится (этот факт мы докажем позже), тогда его можно почленно интегрировать:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx = \\ &= \pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right] = \pi a_0, \end{aligned}$$

так как для всех $n = 1, 2, \dots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0,$$

Повторим ту же операцию, домножив предварительно обе части равенства (1.1.9) на $\cos mx$, $m=1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right] = \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \pi \delta_m^n + 0 \right] = \pi a_m. \end{aligned}$$

Так же показывается, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \pi b_m.$$

Таким образом, получены *формулы Эйлера – Фурье* для коэффициентов ряда Фурье (1.1.12)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

где $n = 1, 2, \dots$

Замечание 2.2. Для функции $F(u)$, кусочно-непрерывной в любом конечном промежутке и имеющей период 2π , величина интеграла

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(u) du$$

по любому промежутку длины 2π не зависит от α .

Действительно,

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(u) du = \int_{\alpha}^0 F(u) du + \int_0^{2\pi} F(u) du + \int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} F(u) du.$$

Сделаем замену переменной $u = 2\pi + v$, тогда в силу периодичности функции $F(u)$

$$\int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} F(u) du = \int_0^{\alpha} F(v) dv = \int_0^{\alpha} F(u) du$$

и, следовательно,

$$\int_{\alpha}^0 F(u) du + \int_0^{2\pi} F(u) du + \int_0^{\alpha} F(u) du = \int_0^{2\pi} F(u) du. \quad \boxtimes$$

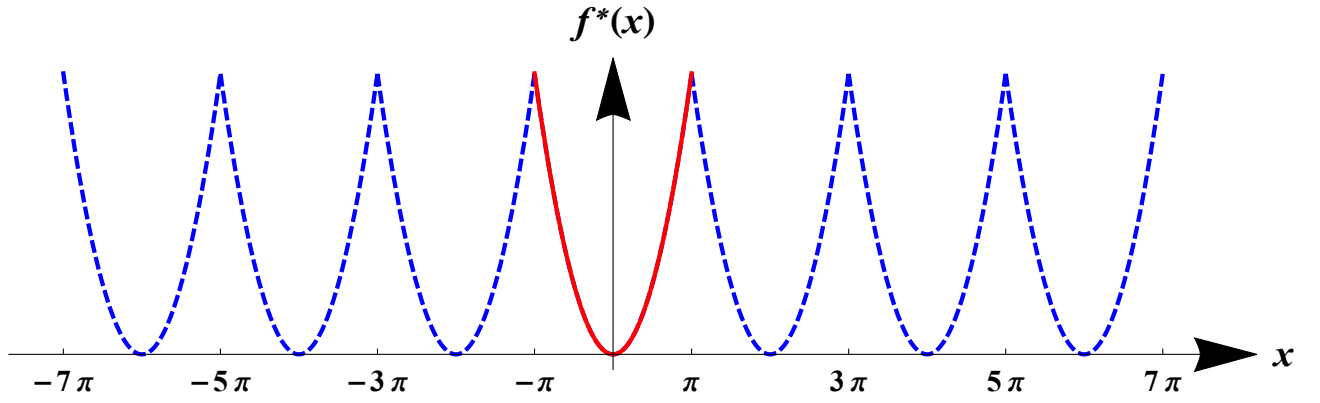


Рис. 1.1.1. Случай непериодической функции

Поэтому в формулах (1.1.13), определяющих коэффициенты Фурье, интегралы могут быть взяты по любому промежутку длины 2π , например:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (1.1.14)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

1.1.2.2. Случай непериодической функции

Будем теперь предполагать, что функция $f(x)$ непериодическая и задана только в промежутке $[-\pi, \pi]$.

Введем вспомогательную функцию

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & -\pi < x < \pi, \\ f(\pi), & x = \pm\pi. \end{cases} \quad (1.1.15)$$

На остальные вещественные значения x функцию $f^*(x)$ распространим как периодическую (рисунок 1.1.1).

Если $-\pi < x < \pi$, то все доказанное ранее автоматически переносится на $f(x)$, минуя вспомогательную функцию $f^*(x)$.

Рассмотрим ситуацию на концах промежутка. Пусть $x = \pi$, тогда слева от этой точки $f^*(x) = f(x)$, а справа значение $f^*(x)$ равно значению $f(x)$

справа от $-\pi$. Тогда сумма ряда Фурье при $x = \pi$

$$\begin{aligned} S &= \frac{f^*(\pi - 0) + f^*(\pi + 0)}{2} = \frac{f^*(\pi - 0) + f^*(-\pi + 0)}{2} = \\ &= \frac{f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна при $x = \pm\pi$, но непериодична, т. е. $f(\pi) \neq f(-\pi)$, то сумма ряда при $x = \pm\pi$ определяется формулой

$$\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2},$$

а разложение вида (1.1.12)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

определено только в открытом промежутке $x \in (-\pi, \pi)$. Вне этого промежутка сумма ряда и значение функции $f(x)$ не совпадают.

1.1.2.3. Случай произвольного промежутка

Пусть функция $f(x)$ задана на сегменте $[-L, L]$ и кусочно-дифференцируема. Введя новую переменную

$$y = \frac{\pi x}{L}, \quad (-\pi \leq y \leq \pi),$$

получим функцию $f(y)$, к которой применимы все предыдущие рассуждения. Коэффициенты Фурье для $f\left(\frac{yL}{\pi}\right)$ имеют вид

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{yL}{\pi}\right) \cos ny \, dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{yL}{\pi}\right) \sin ny \, dy, \quad n = 1, 2, \dots$$

Вернемся теперь к старой переменной x :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (1.1.16)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.1.17)$$

Замечание 2.1. Промежуток $[-L, L]$ может быть заменен любым другим промежутком длины $2L$, в частности промежутком $[0, 2L]$. При этом формулы (1.1.16–1.1.17) остаются в силе при соответствующей замене промежутка интегрирования.

1.1.2.4. Разложение только по косинусам или только по синусам

Пусть кусочно-непрерывная функция $f(x)$ является четной, тогда функция $f(x) \sin nx$ нечетна и, следовательно,

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

Тогда ее разложение на $[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье содержит только косинусы:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.18)$$

Соответственно для нечетной функции $f(x)$ выполняется

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0.$$

и, следовательно,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.1.19)$$

Замечание 2.1. Любую функцию, не обладающую четностью, т. е. такую, что

$$f(-x) \neq f(x), \quad f(-x) \neq -f(x),$$

можно представить в виде суммы четной и нечетной функций:

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

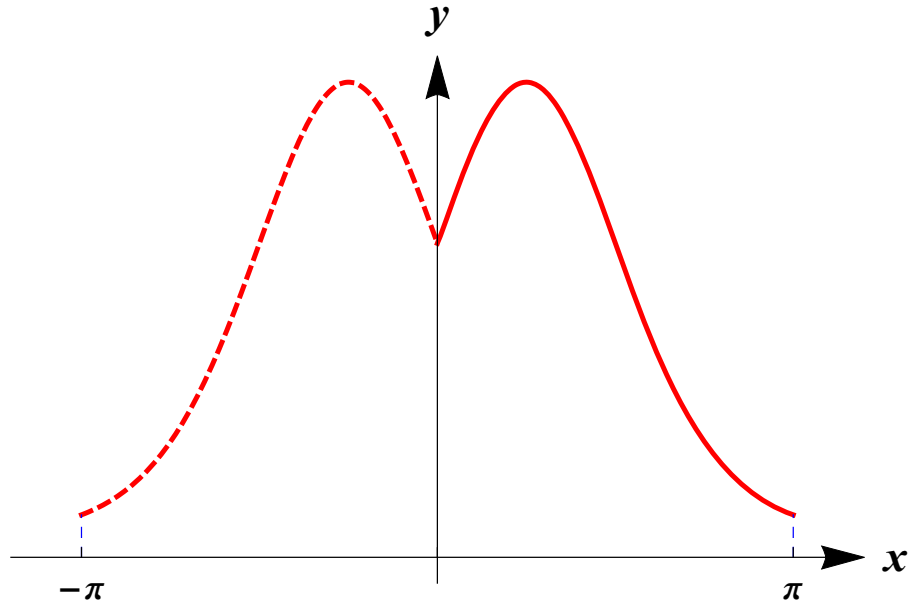


Рис. 1.1.2. Продолжение функции четным образом

где

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad (\text{четная}), \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad (\text{нечетная}).$$

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ можно представить как сумму разложения по косинусам функции $g(x)$ и разложения по синусам функции $h(x)$.

Рассмотрим теперь функцию, заданную на промежутке $[0, \pi]$. Дополним функцию произвольным образом (но с сохранением кусочной непрерывности) на промежутке $[-\pi, 0]$ так, чтобы получить разложение *только по косинусам*, т. е. будем полагать на $[0, \pi]$ $f(-x) = f(x)$ (рисунок 1.1.2). Полученную *четную* функцию, заданную на $[-\pi, \pi]$ можно теперь разложить в ряд Фурье по косинусам, причем коэффициенты a_n определяются по формуле (1.1.18).

Для разложения *только по синусам* с коэффициентами вида (1.1.19) дополним функцию так, чтобы $f(-x) = -f(x)$ (рисунок 1.1.3).

Точки $x = 0$ и $x = \pi$ следует рассмотреть особо.

Предположим для простоты, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = 0$ и $x = \pi$, и рассмотрим сначала разложение по косинусам. Условие $f(-x) = f(x)$ прежде всего сохраняет непрерывность при $x = 0$, так что ряд при $x = 0$ будет сходиться к $f(0)$. Так как, далее, $f(-\pi + 0) = f(\pi - 0) = f(\pi)$, то и при $x = \pi$ проблем не возникает.

В случае разложения по синусам в точках $x = 0$ и $x = \pi$ сумма ряда равна нулю, поэтому она может дать нам значения $f(0)$ и $f(\pi)$ лишь в том случае, если и эти значения равны нулю.

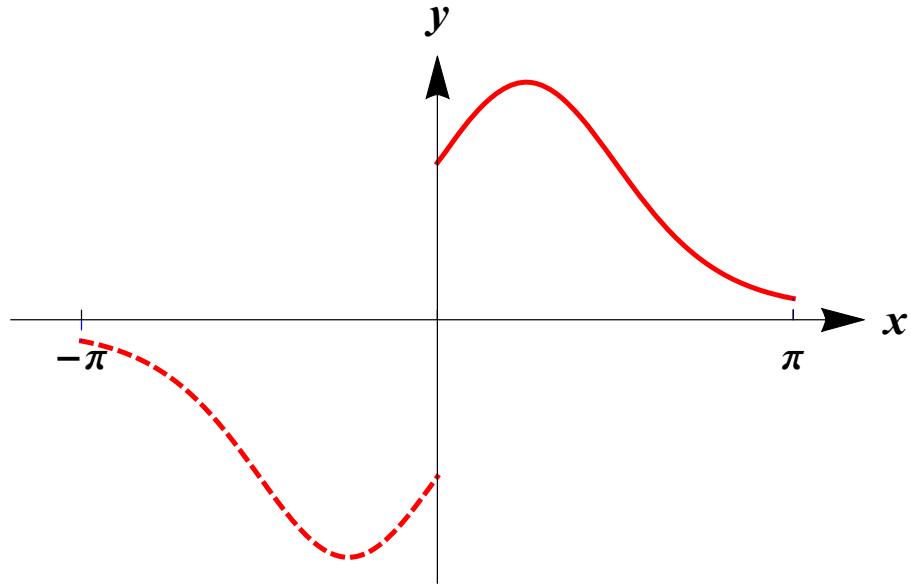


Рис. 1.1.3. Продолжение функции нечетным образом

Замечание 2.2. Те же рассуждения применимы с очевидными изменениями и к функциям, заданным на промежутке $[0, L]$. Коэффициенты Фурье в этом случае рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx; \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

1.1.3. Другие свойства ряда Фурье

1.1.3.1. Интеграл Дирихле. Сходимость ряда Фурье

Пусть $f(x)$ — функция с периодом 2π , абсолютно интегрируемая в промежутке $[-\pi, \pi]$. Ее коэффициенты Фурье имеют вид (1.1.13), а ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1.1.21)$$

Вместо знака равенства мы используем здесь символ $\sim$, потому что равномерная сходимость ряда, из которой следуют выражения для коэффициентов Фурье, еще не доказана.

Пусть $S_n(x_0)$ — частичная сумма ряда Фурье (1.1.21) в точке x_0 :

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx_0 + b_m \sin mx_0), \quad (1.1.22)$$

тогда

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + \sum_{m=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \times \\ &\quad \times \left[\cos mu \cos mx_0 + \sin mu \sin mx_0 \right] du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(u - x_0) \right] du. \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

Для дальнейших рассуждений предварительно докажем тождество

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos ma = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) a}{2 \sin \frac{1}{2} a}. \quad (1.1.24)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos ma &= \frac{1}{2 \sin \frac{a}{2}} \left[\sin \frac{a}{2} + \sum_{m=1}^n 2 \sin \frac{a}{2} \cdot \cos ma \right] = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{a}{2}} \left[\sin \frac{a}{2} + \sum_{m=1}^n 2 \cdot \frac{1}{2} \left[\sin \left(m + \frac{1}{2}\right) a - \sin \left(m - \frac{1}{2}\right) a \right] \right] = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{a}{2}} \left[\sin \frac{a}{2} - \sin \frac{a}{2} + \sin \frac{3}{2} a - \sin \frac{3}{2} a + \dots - \right. \\ &\quad \left. - \sin \left(n - \frac{1}{2}\right) a + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) a \right] = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) a}{2 \sin \frac{1}{2} a}. \quad \boxtimes \end{aligned}$$

Подставив (1.1.24) в (1.1.23), получаем

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin(2n+1) \frac{u-x_0}{2}}{2 \sin \frac{u-x_0}{2}} du \quad (1.1.25)$$

Изменив в (1.1.25) промежуток интегрирования на $[x_0 - \pi, x_0 + \pi]$ и сделав замену переменной $t = u - x_0$, получаем

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt.$$

Разбив полученный интеграл на два: $\int_{-\pi}^{\pi} = \int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^0$ и заменив во втором интеграле t на $-t$, получаем окончательно выражение для **интеграла Дирихле**:

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[f(x_0 + t) + f(x_0 - t) \right] \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt. \quad (1.1.26)$$

Лемма 3.1 (Риман). *Если функция $g(t)$ кусочно-непрерывна в некотором конечном промежутке $[a, b]$, то*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \sin p t dt = 0; \quad (1.1.27)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \cos p t dt = 0. \quad (1.1.28)$$

Докажем только первое соотношение (второе доказывается аналогично). Очевидно, что для любых вещественных α, β

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \sin p t dt \right| = \left| \frac{\cos p \beta - \cos p \alpha}{p} \right| \leq \frac{2}{p}.$$

Разобьем $[a, b]$ на n отрезков: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$. Пусть наименьшее значение функции на каждом отрезке $m_k = \min_{t \in [t_k, t_{k+1}]} g(t)$, тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t) \sin p t dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g(t) \sin p t dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [g(t) - m_k] \sin p t dt + \sum_{k=0}^{n-1} m_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin p t dt. \end{aligned}$$

Пусть теперь $|g(t) - m_k| \leq \omega_k$, $k = \overline{1, n}$, где ω_k — колебание функции $g(t)$. Тогда

$$\left| \int_a^b g(t) \sin p t dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta t_k + \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{n-1} |m_k|.$$

Выберем дробление на отрезки так, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ выполнялось $\omega_k < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Для достаточно больших p таких, что $p > \frac{4}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{n-1} |m_k|$ имеем

$$\left| \int_a^b g(t) \sin p t dt \right| < \varepsilon. \quad \boxtimes$$

Замечание 3.1. Если промежуток интегрирования полубесконечный, то для выполнения леммы достаточно, чтобы функция $g(t)$ была на нем абсолютно интегрируема.

Следствие 3.1. Положим $p = n$. Тогда из леммы Римана следует, что коэффициенты Фурье кусочно-непрерывной функции стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Из леммы следует также принцип локализации:

Теорема 3.1 (Римана). Поведение ряда Фурье функции $f(x)$ в некоторой точке x_0 зависит исключительно от значений, принимаемых функцией в непосредственной близости от рассматриваемой точки, т. е. в сколь угодно малой ее окрестности.

Пусть $0 < \delta < \pi$. Преобразуем интеграл в (1.1.26): $\int_0^\pi = \int_0^\delta + \int_\delta^\pi$. Второй из этих интегралов имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt.$$

Множитель при синусе является абсолютно интегрируемой функцией от t в промежутке $[\delta, \pi]$, потому что знаменатель дроби в этом промежутке в нуль не обращается. Тогда по лемме этот интеграл стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, существование предела для частичной суммы ряда Фурье $S_n(x_0)$ и величина этого предела целиком определяются поведением одного лишь интеграла

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \left[f(x_0 + t) + f(x_0 - t) \right] \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt. \quad (1.1.29)$$

В этот интеграл входят только значения функции $f(x)$, отвечающие изменению аргумента в промежутке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. $\boxtimes$

Таким образом, если значения двух функций совпадают в малой окрестности точки x_0 , то соответствующие им ряды Фурье ведут себя одинаково: либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Теорема 3.2 (признак сходимости). *Если функция $f(x)$ с периодом 2π кусочно-дифференцируема или кусочно-монотонна в промежутке $[-\pi, \pi]$, то ее ряд Фурье в любой точке $x = x_0$ сходится и имеет сумму*

$$S_0 = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

Формула (1.1.26) для интеграла Дирихле выполняется для любой функции, удовлетворяющей условиям теоремы, в том числе и для $f(x) \equiv 1$, для которой частичная сумма ряда Фурье, очевидно, также равна 1. Тогда

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) \right] \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt.$$

Умножим это соотношение слева и справа на S_0 и вычтем полученное равенство почленно из (1.1.26):

$$S_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) \right] \times \quad (1.1.30)$$

$$\times \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(t) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt, \quad (1.1.31)$$

где

$$g(t) = \left[\frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} - \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{-t} \right] \frac{\frac{1}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t}.$$

Покажем, что функция $g(t)$ кусочно-непрерывна на $[0, \pi]$. Очевидно, что для всех $t \in (0, \pi]$ это требование выполняется.

Рассмотрим случай $t \rightarrow +0$ и докажем, что существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow +0} g(t) = K$, $|K| < \infty$. Очевидно, что второй множитель при $t \rightarrow 0$ стремится к единице, рассмотрим только выражение в квадратных скобках.

Пусть сперва точка x_0 лежит внутри промежутка, где функция $f(x)$ дифференцируема. Тогда $f(x_0 \pm 0) = f(x_0)$ и каждое из отношений

$$\frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}, \quad \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{-t}$$

стремится к $f'(x_0)$, а их разность — к нулю.

Если же x_0 есть точка разрыва производной, то она может оказаться как точкой непрерывности, так и точкой разрыва. В первом случае получаем в пределе производные справа и слева, разность которых ненулевая, но конечная, а во втором имеем различные значения $f(x_0 \pm 0)$, что также дает конечный разрыв.

Итак, функция $g(t)$ является кусочно-непрерывной и по лемме Римана интеграл (1.1.31) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = S_0$. $\square$

1.1.3.2. Равномерное приближение тригонометрическими полиномами

Определение 3.1. *Тригонометрическим полиномом (многочленом)* называется выражение вида

$$T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^m (A_k \cos kx + B_k \sin kx). \quad (1.1.32)$$

Замечание 3.1. Произведение двух тригонометрических полиномов типа (1.1.32) тоже может быть представлено в виде тригонометрического полинома.

Теорема 3.3 (теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[-\pi, \pi]$ и имеет период 2π , то существует последовательность тригонометрических полиномов, которая в этом промежутке равномерно сходится к $f(x)$.*

Иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический полином $T(x)$, что для любого $x \in [-\pi, \pi]$ выполняется

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon. \quad (1.1.33)$$

Периодически распространим функцию $f(x)$ на промежуток $(-\infty, +\infty)$. Рассмотрим сперва четную функцию $f(x)$.

В математическом анализе доказана теорема Вейерштрасса [23, с. 52], в которой утверждается, что, если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует последовательность алгебраических полиномов $\{P_n(x)\}$, которая в этом промежутке равномерно сходится к $f(x)$. Построим такой алгебраический полином $P(t)$, чтобы для всех значений t в промежутке $[-1, 1]$ выполнялось

$$|f(\arccos t) - P(t)| < \varepsilon.$$

Положим теперь $t = \cos x$, где $0 \leq x \leq \pi$ (т. е. x лежит в области главного значения арккосинуса), тогда

$$|f(x) - P(\cos x)| < \varepsilon.$$

Поскольку $f(x)$ и $\cos x$ суть четные функции, это неравенство сохранится и при замене x на $-x$, т. е. будет выполняться для всех значений x в промежутке $[-\pi, \pi]$, а в силу периодичности — и во всем промежутке $(-\infty, +\infty)$. Так как $\cos^k x$ выражается через $\cos jx$, $j = \overline{0, k}$, $P(\cos x)$ является тригонометрическим полиномом. Таким образом, для четных функций теорема доказана.

Рассмотрим теперь произвольную непрерывную функцию $f(x)$ с периодом 2π . Для четных функций

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \cdot \sin x$$

по доказанному существуют такие тригонометрические полиномы $T_1(x)$ и $T_2(x)$ что

$$|g(x) - T_1(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |h(x) - T_2(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Тогда

$$|g(x) \sin^2 x - T_1(x) \sin^2 x| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |h(x) \sin x - T_2(x) \sin x| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Сложим эти неравенства:

$$|f(x) \sin^2 x - T_3(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.1.34}$$

где $T_3(x)$ — тригонометрический полином:

$$T_3 = T_1 \sin^2 x + T_2 \sin x.$$

Таким же образом для функции $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ найдем тригонометрический полином $T_4(x)$ такой, что

$$\left|f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin^2 x - T_4(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заменим x на $x - \frac{\pi}{2}$ и обозначим через $T_5(x)$ тригонометрический полином, который при этой замене получится из $T_4(x)$, тогда

$$|f(x) \cos^2 x - T_5(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.1.35}$$

Складывая (1.1.34) и (1.1.35) и полагая $T = T_3 + T_5$, получаем (1.1.33). $\square$

Замечание 3.2. Формулировка теоремы на языке рядов:

Непрерывная функция $f(x)$ с периодом 2π может быть разложена в равномерно сходящийся к ней ряд, состоящий из тригонометрических полиномов.

1.1.3.3. Комплексная форма записи ряда Фурье

Для дальнейшего развития теории рядов Фурье наиболее удобной является экспоненциальная форма. Перейти к ней от привычного разложения функции, заданной на сегменте $[-L, L]$ по синусам и косинусам

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (1.1.36)$$

несложно. Поскольку

$$\cos \frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2} \left(e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L} \right), \quad \sin \frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2i} \left(e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L} \right),$$

из (1.1.36), очевидно, следует

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n e^{in\pi x/L} + \beta_n e^{-in\pi x/L} \right),$$

где

$$\alpha_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad \beta_n = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Удобнее, однако, переписать эту формулу так:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/L}, \quad (1.1.37)$$

где

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_{-n} = \beta_n = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad c_n = \alpha_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad (1.1.38)$$

или

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{in\pi t/L} dt. \quad (1.1.39)$$

Замечание 3.1. Разумеется, возможна иная форма соотношения (1.1.37):

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\pi x/L}, \quad (1.1.40)$$

где

$$d_0 = \frac{a_0}{2}, \quad d_{-n} = \alpha_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad d_n = \beta_n = \frac{a_n + ib_n}{2}. \quad (1.1.41)$$

1.1.4. Ряды Фурье по общим ортогональным системам

1.1.4.1. Приближение функций в среднем

Пусть на сегменте $[a, b]$ заданы кусочно-непрерывная функция $f(x)$ и некоторое ее приближение $g(x)$.

Определение 4.1.

$r(x) = f(x) - g(x)$ — *отклонение*.

$$\bar{\delta} = \frac{1}{b-a} \int_a^b |r(x)| dx \text{ — среднее отклонение.} \quad (1.1.42)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b r^2(x) dx} \text{ — среднеквадратичное отклонение.}$$

Введем также обозначение

$$\Delta = \int_a^b r^2(x) dx = (b-a)\delta^2.$$

Рассмотрим теперь систему функций $\{\varphi_m(x)\}$, ортогональных на $[a, b]$ с весом $\rho(x)$ и квадратичной нормой λ_m , для которых соотношение ортогональности имеет вид

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) \rho(x) dx = \lambda_m \delta_n^m, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.43)$$

Назовем

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_a^b f(x) \varphi_m(x) \rho(x) dx \quad (1.1.44)$$

обобщенными коэффициентами Фурье.

Из всех линейных комбинаций

$$\sigma_n(x) = C_0 \varphi_0(x) + C_1 \varphi_1(x) + \dots + C_n \varphi_n(x) \quad (1.1.45)$$

с произвольным набором коэффициентов C_k найдем ту, которая обеспечивает наилучшее в смысле среднеквадратичного отклонения приближение к

функции $f(x)$, т. е.

$$\min \Delta_n = \int_a^b [f(x) - \sigma_n(x)]^2 \rho(x) dx. \quad (1.1.46)$$

Подставим (1.1.45) в (1.1.46):

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \int_a^b \left[f(x) - \sum_{m=0}^n C_m \varphi_m(x) \right]^2 \rho(x) dx = \\ &= \int_a^b f^2(x) \rho(x) dx - 2 \sum_{m=0}^n C_m \int_a^b f(x) \varphi_m(x) \rho(x) dx + \\ &+ \int_a^b \left[\sum_{m=0}^n C_m \varphi_m(x) \right]^2 \rho(x) dx. \end{aligned} \quad (1.1.47)$$

Интеграл во втором слагаемом задает обобщенные коэффициенты Фурье (1.1.44).

Рассмотрим третье слагаемое:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[\sum_{m=0}^n C_m \varphi_m(x) \right]^2 \rho(x) dx &= \sum_{m=0}^n C_m^2 \underbrace{\int_a^b \varphi_m^2(x) \rho(x) dx}_{\lambda_m} + \\ &+ 2 \sum_{k < m}^n C_k C_m \underbrace{\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_m(x) \rho(x) dx}_{\text{равняется 0 (почему?)}}. \end{aligned}$$

Теперь

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \int_a^b f^2(x) \rho(x) dx - 2 \sum_{m=0}^n \lambda_m C_m c_m + \sum_{m=0}^n \lambda_m C_m^2 = \\ &= \int_a^b f^2(x) \rho(x) dx - \sum_{m=0}^n \lambda_m c_m^2 + \sum_{m=0}^n \lambda_m (C_m^2 - 2C_m c_m + c_m^2). \end{aligned}$$

Первое и второе слагаемые в правой части этого равенства заданы, следовательно, минимум достигается, когда последнее слагаемое равно нулю, т. е. $C_m = c_m$ для всех $m = \overline{0, n}$.

Итак, *наименьшее среднеквадратичное отклонение задается частичной суммой ряда Фурье.*

Определение 4.2. Равенство

$$\delta_n = \min \Delta_n = \int_a^b f^2(x) \rho(x) dx - \sum_{m=0}^n \lambda_m c_m^2 \quad (1.1.48)$$

называется *тождеством Бесселя*.

Из тождества Бесселя следует очевидное неравенство

$$\sum_{m=0}^n \lambda_m c_m^2 \leq \int_a^b f^2(x) \rho(x) dx,$$

откуда, устремив $n \rightarrow \infty$, получаем *неравенство Бесселя*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m c_m^2 \leq \int_a^b f^2(x) \rho(x) dx. \quad (1.1.49)$$

Следствие 4.1. *Поскольку функция $f(x)$ кусочно-непрерывна, ряд в левой части неравенства (1.1.49) всегда сходится.*

Замечание 4.1. Разумеется, все утверждения этого раздела применимы не только к пространству кусочно-непрерывных функций но и к любому нормированному евклидовому пространству. Тождество Бесселя для произвольного элемента f данного евклидова пространства, любой ортонормированной системы $\{\varphi_k\}$ и любого номера n имеет вид

$$\delta_n = \left\| \sum_{k=1}^n f_k \varphi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2, \quad (1.1.50)$$

а неравенство Бесселя — вид

$$\sum_{k=1}^n f_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (1.1.51)$$

1.1.4.2. Замкнутость и полнота ортогональных систем

Вернемся к тождеству Бесселя (1.1.48)

$$\delta_n = \min \Delta_n = \int_a^b f^2(x) \rho(x) dx - \sum_{m=0}^n \lambda_m c_m^2.$$

Очевидно, что при возрастании n величина δ_n убывает, поскольку в ее выражении добавляются новые отрицательные слагаемые.

Можно ли за счет увеличения n добиться сколь угодно малого среднеквадратичного отклонения, т. е. стремится ли δ_n к 0 при $n \rightarrow \infty$? Если это выполняется, то говорят, что сумма $S_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ «в среднем».

Замечание 4.1. Это не означает поточечной сходимости $S_n(x)$ к $f(x)$.

Определение 4.3 (замкнутость ортонормированной системы). Ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ называется **замкнутой**, если для любого элемента f данного евклидова пространства R и для любого положительного числа ε найдется такая линейная комбинация (1.1.45)

$$\sigma_n(x) = C_0\varphi_0(x) + C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x)$$

конечного числа элементов $\{\varphi_k\}$, отклонение которой от f (по норме пространства R) меньше ε .

Теорема 4.1. Если ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ является замкнутой, то для любого элемента f рассматриваемого евклидова пространства неравенство Бесселя (1.1.49) переходит в точное равенство Парсеваля

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m^2 = \|f\|^2 \quad (1.1.52)$$

(из ортонормированности системы следует, что $\lambda_m \equiv 1$) или, для кусочно-непрерывных функций,

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m^2 = \int_a^b f^2(x) \rho(x) dx. \quad (1.1.53)$$

Фиксируем произвольный элемент f рассматриваемого евклидова пространства и произвольное положительное число ε . Поскольку, как доказано ранее, наименьшее среднеквадратичное отклонение задается частичной суммой ряда Фурье, из тождества Бесселя для произвольных коэффициентов разложения вида $f(x) = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(x)$ следует, что

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k - f \right\|^2.$$

Система $\{\varphi_k\}$ является замкнутой, поэтому найдется такой номер n и такие числа $C_1, C_2, \dots, C_n$, что квадрат нормы, стоящий в правой части этого неравенства, будет меньше ε . Это означает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер n , для которого

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 < \varepsilon.$$

Очевидно, что это неравенство будет тем более справедливо для всех номеров, превосходящих n . С учетом неравенства Бесселя (1.1.51)

$$\sum_{k=1}^n f_k^2 \leq \|f\|^2$$

это означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ сходится к сумме $\|f\|^2$. $\square$

Замечание 4.2. Равенство Парсеваля — это аналог теоремы Пифагора в векторных пространствах со скалярным произведением.

Определение 4.4 (полнота ортонормированной системы). Ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ называется **полной**, если, кроме нулевого элемента, не существует никакого другого элемента f данного евклидова пространства, который был бы ортогонален ко всем элементам φ_k системы $\{\varphi_k\}$.

Иными словами, система $\{\varphi_k\}$ называется полной, если всякий элемент f , ортогональный ко всем элементам φ_k системы $\{\varphi_k\}$, является нулевым элементом.

Теорема 4.2. *Всякая замкнутая ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ является полной.*

Пусть система $\{\varphi_k\}$ является замкнутой, и пусть f — любой элемент данного евклидова пространства, ортогональный ко всем элементам φ_k системы $\{\varphi_k\}$. Тогда все коэффициенты Фурье f_k элемента f по системе $\{\varphi_k\}$ равны нулю, и, стало быть, в силу равенства Парсеваля (1.1.52) и $\|f\| = 0$. Последнее равенство (в силу аксиомы 1 для нормы) означает, что $f \equiv 0$. $\square$

Замечание 4.3. Итак, в произвольном евклидовом пространстве из замкнутости ортонормированной системы вытекает ее полнота. Обратное утверждение в общем случае неверно: в произвольном евклидовом пространстве из полноты ортонормированной системы, вообще говоря, не следует замкнутость этой системы. Более подробно мы обсудим этот вопрос в главе 1.7 «Линейные нормированные полные пространства».

1.1.4.3. Замкнутость и полнота тригонометрической ортогональной системы

Вернемся к тригонометрической ортонормированной системе функций (1.1.9)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots,$$

заданных на сегменте $-\pi \leq x \leq \pi$.

Линейная комбинация вида (1.1.45)

$$\sigma_n(x) = C_0 \varphi_0(x) + C_1 \varphi_1(x) + \dots + C_n \varphi_n(x)$$

сводится теперь к тригонометрическому полиному (1.1.32)

$$T_n(x) = A_0 + \sum_{k=1}^n (A_k \cos kx + B_k \sin kx).$$

Приближение к функции $f(x)$ «в среднем» характеризуется величиной

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx.$$

По доказанному выше для данного n наименьшее значение этой величины достигается при использовании отрезка ряда Фурье

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

а это наименьшее значение задается тождеством Бесселя (1.1.48), которое в данном случае имеет вид

$$\delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \right]. \quad (1.1.54)$$

Неравенство Бесселя записываем теперь в форме

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (1.1.55)$$

Теорема 4.3. Тригонометрическая система функций замкнута в классе кусочно-непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций, т.е. выполнено равенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (1.1.56)$$

Равенство (1.1.56) равносильно тому, что при любом $\varepsilon > 0$ при достаточно большом n выполняется неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \right] < \varepsilon,$$

которое с учетом (1.1.47) можно записать в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right]^2 dx < \varepsilon. \quad (1.1.57)$$

Будем предполагать, что $f(x)$ имеет одну точку разрыва $x_0 \in (-\pi, \pi)$ (это не нарушает общности, потому что мы всегда можем изменить интервал интегрирования). Введем непрерывную функцию $g(x)$ на $x \in [-\pi, \pi]$ такую, что

$$g(x) = f(x), \quad x \in [-\pi + \delta, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, \pi],$$

$g(-\pi) = f(\pi)$. На отрезках $[-\pi, -\pi + \delta]$ и $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ будем считать эту функцию линейной (рисунок 1.1.4).

При достаточно малом δ функции $f(x)$ и $g(x)$ будут мало отклоняться друг от друга в смысле среднеквадратичного отклонения, точнее, будет выполнено неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (1.1.58)$$

В силу теоремы Вейерштрасса 3.3 существует тригонометрический полином порядка не выше n

$$T_n(x) = T_n(x, g) = c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k \cos kx + d_k \sin kx)$$

такой, что

$$|g(x) - T_n(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi}}, \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (1.1.59)$$

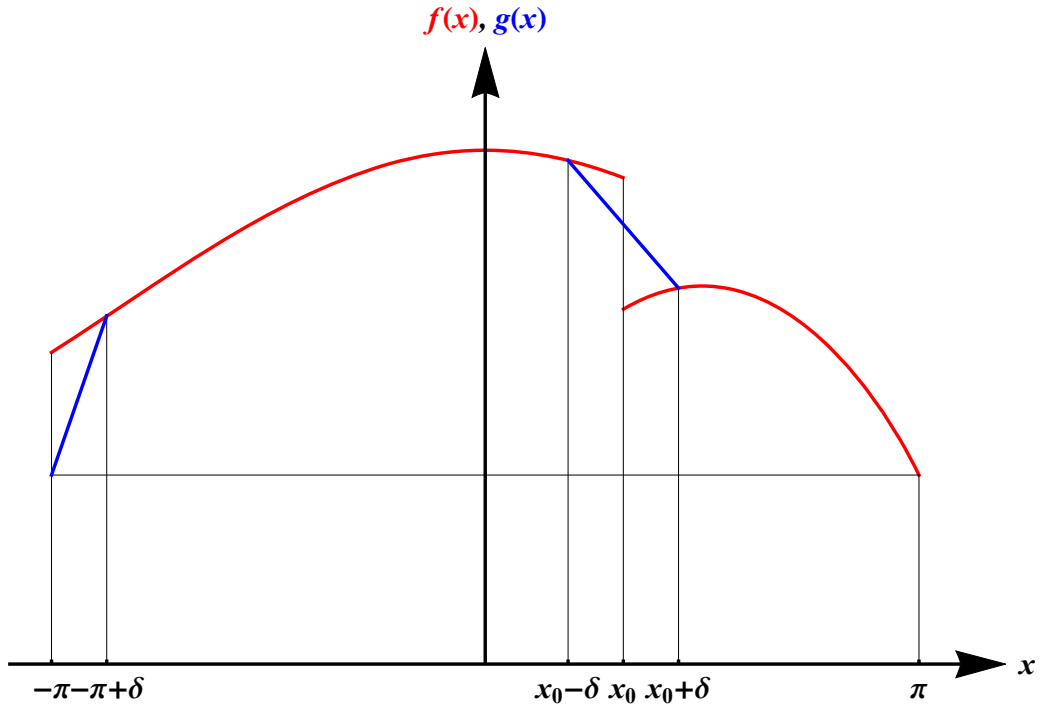


Рис. 1.1.4. К доказательству теоремы 4.3

Легко видеть, что

$$(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2.$$

Положим $a = f(x) - g(x)$, $b = g(x) - T_n(x)$, тогда

$$(f(x) - T_n(x))^2 \leq 2(f(x) - g(x))^2 + 2(g(x) - T_n(x))^2.$$

Проинтегрируем это неравенство от $-\pi$ до π :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 dx &\leq 2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 dx}_{< \varepsilon/4} + 2 \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{(g(x) - T_n(x))^2}_{< \varepsilon/8\pi} dx < \\ &< 2 \frac{\varepsilon}{4} + 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon}{8\pi} dx = \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.1.60)$$

Мы уже доказали, что наименьшее среднеквадратичное отклонение задается частичной суммой ряда Фурье. Заменив в (1.1.60) полином $T_n(x)$ на

частичную сумму ряда Фурье, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right]^2 dx &\leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 dx < \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда следует равенство (1.1.56). $\square$

Полнота тригонометрической системы вытекает из ее замкнутости.

Замечание 4.1. В общем случае мы имеем право выбирать в качестве интервала ортогональности любой промежуток $[-L, L]$. Все рассуждения при этом остаются в силе, но интегрирование ведется в пределах от $-L$ до L , а аргументы косинусов и синусов вместо kx принимают вид $\frac{k\pi x}{L}$.

1.1.5. Интеграл Фурье

Если функция $f(x)$ задана на всей бесконечной прямой и не является периодической ни с каким конечным периодом, то раскладывать эту функцию следует не в тригонометрический ряд, а в так называемый *интеграл Фурье*.

Рассмотрим сперва функцию, заданную на конечном промежутке $[-L, L]$. Ее можно представить в этом промежутке тригонометрическим рядом (1.1.36)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

где

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(u) \cos \frac{n\pi u}{L} du \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(u) \sin \frac{n\pi u}{L} du \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Подставляя вместо коэффициентов a_n и b_n их выражения, можно переписать ряд в виде

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(u) du + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(u) \cos \frac{n\pi}{L}(u-x) du. \quad (1.1.61)$$

Пусть теперь функция $f(x)$ определена для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ и абсолютно интегрируема на этом интервале, т. е. существует такое положительное число M , что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq M. \quad (1.1.62)$$

Тогда, каким бы ни было значение x , соответствующее значение $f(x)$ выразится разложением (1.1.61) при любом $L > |x|$.

Перейдем к пределу при $L \rightarrow \infty$. Из сходимости (и, следовательно, ограниченности) интеграла (1.1.62) следует, что первый член правой части равенства (1.1.61) стремится к нулю.

Рассмотрим теперь ряд. Множители $\frac{n\pi}{L}$ можно интерпретировать как дискретные значения

$$z_1 = \frac{\pi}{L}, \quad z_2 = \frac{2\pi}{L}, \quad \dots, \quad z_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \dots$$

некоторой переменной z , непрерывно меняющейся от 0 до $+\infty$. Приращение

$$\Delta z_n = z_n - z_{n-1} = \frac{\pi}{L}$$

стремится к нулю при $L \rightarrow \infty$.

Теперь

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(u) \cos \frac{n\pi}{L}(u-x) du &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta z_{n-1} \underbrace{\int_{-L}^L f(u) \cos z_n(u-x) du}_{=} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta z_{n-1} \mathcal{F}(z_n, x). \end{aligned}$$

Это интегральная сумма для функции $\mathcal{F}(z, x)$, $z \in [0, \infty)$. Переходя к пределу при $L \rightarrow \infty$, получаем вместо ряда интеграл и приходим к **интегральной формуле (интегралу) Фурье**:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos z(u-x) du. \quad (1.1.63)$$

Воспользовавшись формулой для косинуса разности, формулу (1.1.63) можно переписать в виде

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(z) \cos zx + b(z) \sin zx] dz, \quad (1.1.64)$$

где

$$a(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos zu \, du, \quad b(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin zu \, du. \quad (1.1.65)$$

Здесь очевидна аналогия с тригонометрическим разложением. И, так же, как и в предыдущем случае, получив формулу, следует доказать условия ее справедливости.

Теорема 5.1. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей действительной прямой, кусочно-непрерывна на каждом конечном отрезке $[-\ell, \ell]$ и в точке x существуют производная справа $f'_+(x)$ и производная слева $f'_-(x)$ (последнее условие можно сформулировать иначе: функция является кусочно-гладкой в окрестности точки x). Тогда для указанной точки x справедлива формула

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos z(u-x) \, du. \quad (1.1.66)$$

Докажем, что

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L dz \int_{-L}^L f(u) \cos z(u-x) \, du \quad (1.1.67)$$

Интеграл по переменной u сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как

$$|f(u) \cos z(u-x)| \leq |f(u)|,$$

а интеграл (1.1.62) сходится. Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L dz \int_{-L}^L f(u) \cos z(x-u) \, du &= \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \, du \int_0^L \cos z(u-x) \, dz = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{\sin L(u-x)}{u-x} \, du = [u-x=v] = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+v) \frac{\sin Lv}{v} \, dv. \end{aligned}$$

Замечание 5.1. Интеграл

$$\frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{\sin L(u-x)}{u-x} du = \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+v) \frac{\sin Lv}{v} dv$$

является аналогом ранее рассмотренного в случае ряда Фурье интеграла Дирихле (1.1.25)

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2 \sin \frac{u-x_0}{2}} du$$

Докажем сначала равенство

$$\frac{1}{2}f(x+0) = \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(x+v) \frac{\sin Lv}{v} dv. \quad (1.1.68)$$

Известно, что для любого положительного L

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin Lv}{v} dv = \frac{\pi}{2},$$

поэтому

$$\frac{1}{2}f(x+0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} f(x+0) = \frac{1}{\pi} f(x+0) \int_0^{\infty} \frac{\sin Lv}{v} dv.$$

Теперь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x+v) \frac{\sin Lv}{v} dv - \frac{1}{2}f(x+0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[f(x+v) - f(x+0) \right] \frac{\sin Lv}{v} dv = \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^A + \int_A^{\infty} \right\} \left[f(x+v) - f(x+0) \right] \frac{\sin Lv}{v} dv = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3. \end{aligned}$$

Выберем такое δ , чтобы на $v \in (0, \delta)$ функция $f(x+v)$ была дифференцируема. Тогда

$$|\mathcal{I}_1| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{|f(x+v) - f(x+0)|}{v} \cdot |\sin Lv| dv \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} |f'(\xi)| dv \leq \frac{M_1 \delta}{\pi} < \frac{\varepsilon}{3},$$

где $M_1 = \max_{x \leq \xi \leq x+\delta} |f'(\xi)|$. Это следует из теоремы:

Теорема 5.2 (Лагранжа). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) , то существует такое $\xi \in (a, b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi),$$

Для оценки интеграла $\mathcal{I}_3$ рассмотрим сперва функцию $\frac{f(x+v)}{v}$, кусочно-непрерывную при $v \geq A$. Так как при $A \geq 1$

$$\left| \frac{f(x+v)}{v} \right| \leq |f(x+v)|,$$

то

$$\int_A^\infty \left| \frac{f(x+v)}{v} \right| dv \leq \int_A^\infty |f(x+v)| dv = \int_{x+A}^\infty |f(v)| dv \leq M$$

и, таким образом, функция $\frac{f(x+v)}{v}$ абсолютно интегрируема на этой полуоси.

Далее,

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_3| &\leq \frac{1}{\pi} \int_A^\infty |f(x+v) - f(x+0)| \cdot \left| \frac{\sin Lv}{v} \right| dv \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_A^\infty |f(x+v)| \cdot \left| \frac{\sin Lv}{v} \right| dv + \frac{1}{\pi} \int_A^\infty |f(x+0)| \cdot \left| \frac{\sin Lv}{v} \right| dv \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_A^\infty \frac{|f(x+v)| + |f(x+0)|}{v} \sin Lv dv. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь леммой Римана (с. 26). Функция $\frac{f(x+v)}{v}$ удовлетворяет условиям леммы, следовательно $|\mathcal{I}_3| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Рассмотрим теперь интеграл $\mathcal{I}_2$. Функция

$$\varphi(v) = \frac{f(x+v) - f(x+0)}{v}$$

кусочно-непрерывна на $[\delta, A]$, где $v \neq 0$. Тогда по той же лемме

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{I}_2 = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_\delta^A \varphi(v) \sin Lv dv = 0$$

и, следовательно, $|\mathcal{I}_2| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Итак,

$$|\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3| \leq |\mathcal{I}_1| + |\mathcal{I}_2| + |\mathcal{I}_3| < \varepsilon$$

и равенство (1.1.68)

$$\frac{1}{2}f(x+0) = \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(x+v) \frac{\sin Lv}{v} dv.$$

доказано.

Аналогично доказывается и равенство

$$\frac{1}{2}f(x-0) = \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 f(x-v) \frac{\sin Lv}{v} dv,$$

а с ним доказана и теорема. $\square$

1.1.6. Преобразование Фурье

1.1.6.1. Общие положения

Поскольку подынтегральная функция в выражении

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos z(u-x) du$$

четна по z , равенство (1.1.66) может быть записано в форме

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos z(u-x) du. \quad (1.1.69)$$

Вместе с тем, ввиду нечетности синуса имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin z(u-x) du = 0. \quad (1.1.70)$$

Домножим (1.1.70) на $-i$ и почленно сложим с (1.1.69):

$$\begin{aligned} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left[\cos z(u-x) - i \sin z(u-x) \right] du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iz(u-x)} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-izu} du \right]}_{F(z)} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} \underbrace{F(z)}_{F(z)} dz. \end{aligned}$$

Определение 6.1. Прямое преобразование Фурье:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} f(x) dx. \quad (1.1.71)$$

Обратное преобразование Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} F(z) dz. \quad (1.1.72)$$

Замечание 6.1. Часто для прямого преобразования Фурье вместо $F(z)$ используется операторное обозначение $\mathcal{F}[f]$, где $\mathcal{F}$ — **оператор Фурье**, аргументом которого является не переменная, а функция (обратите внимание на расстановку квадратных и круглых скобок).

1.1.6.2. Косинус- и синус-преобразования

Вернемся к интегралу Фурье (1.1.63) и раскроем косинус разности:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos z(u-x) du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos zx dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos zu du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin zx dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin zu du. \end{aligned}$$

Очевидно, что для четной функции $f(x)$ отлично от нуля только первое слагаемое правой части этого равенства:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos zx dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos zu du, \quad (1.1.73)$$

а для нечетной — только второе:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin zx \, dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin zu \, du. \quad (1.1.74)$$

Предположим теперь, что $f(x)$ задана на $[0, +\infty)$. Подобно тому, как мы делали это с рядами Фурье, продолжим ее на полуось $(-\infty, 0]$ четным или нечетным образом, что позволит получить преобразование только по косинусам или только по синусам соответственно.

Замечание 6.1. Разложение по косинусам применимо, если $f(x)$ непрерывна при $x = 0$. Разложение по синусам — только если $f(0) = 0$.

Теперь прямое и обратное преобразования (1.1.71–1.1.72) могут быть дополнены прямым и обратным преобразованиями по косинусам:

$$F_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \cos zu \, du; \quad (1.1.75)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(x) \cos zx \, dz \quad (1.1.76)$$

и прямым и обратным преобразованиями по синусам:

$$F_s(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \sin zu \, du; \quad (1.1.77)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(x) \sin zx \, dz. \quad (1.1.78)$$

Замечание 6.2. Любая функция может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций:

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

где

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ (четная),} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \text{ (нечетная).}$$

Тогда и преобразование Фурье (1.1.71) может быть представлено как линейная комбинация косинус- и синус-преобразования:

$$F(z) = G_c(z) + iH_s(z). \quad (1.1.79)$$

1.1.6.3. Свойства преобразования Фурье

В этом разделе будем по умолчанию считать функцию $f(x)$ действительной.

1.1.6.3.1. Линейность

Из свойств интеграла очевидно, что для любых постоянных α, β и абсолютно интегрируемых на всей действительной оси функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняется

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g]. \quad (1.1.80)$$

1.1.6.3.2. Ограниченность

Теорема 6.1. *Если функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси, то ее преобразование Фурье $F(z)$ ограничено на всей оси, причем*

$$|F(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx. \quad (1.1.81)$$

Неравенство (1.1.81) следует из формулы (1.1.71):

$$|F(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|e^{-izx}|}_{=1} \cdot |f(u)| du.$$

Следствие 6.1. *Если последовательность абсолютно интегрируемых функций $f_n(x)$ и абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ таковы, что*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)| dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то последовательность $\{F_n(z)\}$ равномерно на всей числовой оси сходится к функции $F(z)$.

Следствие вытекает из неравенства (1.1.81) и линейности преобразования Фурье.

1.1.6.3.3. Непрерывность и поведение на бесконечности

Теорема 6.2. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, то ее преобразование Фурье $F(z)$ непрерывно и*

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} F(z) = 0. \quad (1.1.82)$$

Непрерывность — без доказательства. Докажем равенство (1.1.82).

Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, то

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \cos zx f(x) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin zx f(x) dx \right]$$

Снова воспользуемся леммой Римана, из которой и следует утверждение теоремы. $\square$

1.1.6.3.4. Теорема запаздывания

Теорема 6.3. Если функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси, то для любого вещественного числа α имеет место равенство

$$\mathcal{F}[f(x - \alpha)](z) = e^{-i\alpha z} \mathcal{F}[f]. \quad (1.1.83)$$

Сделаем в преобразовании Фурье замену переменной $x - \alpha = t$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x - \alpha)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} f(x - \alpha) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz(t+\alpha)} f(t) dt = e^{-i\alpha z} \mathcal{F}[f]. \quad \square \end{aligned}$$

1.1.6.3.5. Теорема смещения

Теорема 6.4. Если функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси, то для любого вещественного числа β имеет место равенство

$$\mathcal{F}[f(x)e^{i\beta x}](z) = F(z - \beta). \quad (1.1.84)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x)e^{i\beta x}](z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} f(x)e^{i\beta x} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(z-\beta)x} f(x) dx = F(z - \beta). \quad \square \end{aligned}$$

1.1.6.3.6. Теорема подобия

Теорема 6.5. Для любого действительного числа $\lambda \neq 0$ выполняется

$$\mathcal{F}\left[f(\lambda x)\right] = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{z}{\lambda}\right). \quad (1.1.85)$$

В данном случае замена переменных имеет вид $\lambda x = t$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(\lambda x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} f(\lambda x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-iz\frac{t}{\lambda}\right) f(t) d\frac{t}{\lambda} = \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-i\frac{z}{\lambda}t\right) f(t) dt = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{z}{\lambda}\right). \quad \square\end{aligned}$$

1.1.6.3.7. Преобразование Фурье для производных

Теорема 6.6. Пусть абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция f имеет n абсолютно интегрируемых и непрерывных на всей оси производных. Тогда

$$\mathcal{F}[f^{(k)}] = (iz)^k \mathcal{F}[f], \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (1.1.86)$$

и существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|\mathcal{F}[f]| \leq \frac{M}{|z^n|}. \quad (1.1.87)$$

Если для $f(x)$ и ее производной $f'(x)$ выполняются условия теоремы, то

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt.$$

Поскольку интеграл по $\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) dt$ сходится, в силу определения сходимости интеграла существуют пределы $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_0^x f'(t) dt$ и, следовательно, пределы $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. При этом из сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ следует, что указанные пределы равны нулю: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Применим к формуле преобразования Фурье интегрирование по частям:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} f'(x) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-izx} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{iz}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} f(x) dx = iz \mathcal{F}[f].\end{aligned}$$

Формула (1.1.86) доказана для $n = 1$, для произвольного n она получается по индукции.

Из свойства 1.1.6.3.2 следует, что функция $\mathcal{F}[f^{(n)}]$ ограничена, следовательно, верхняя грань

$$M = \sup_{-\infty < z < +\infty} \mathcal{F}[f^{(n)}]$$

конечна, поэтому оценка (1.1.87) следует из формулы (1.1.86) при $k = n$. $\square$

Следствие 6.2. *Чем больше абсолютно интегрируемых производных имеет функция f , тем быстрее стремится к нулю на бесконечности ее преобразование Фурье.*

Замечание 6.1. Теорема вместе с ее доказательством остается справедливой и в случае, когда производная n -го порядка рассматриваемой функции является не непрерывной, а имеет конечное число разрывов первого рода при сохранении остальных предположений. Действительно, в этом случае указанная производная на любом конечном отрезке является кусочно-непрерывной функцией и потому проводимое в доказательстве интегрирование по частям законно.

1.1.6.3.8. Преобразование Фурье для интегралов

Теорема 6.7. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x) = \int_0^x f(u) du$ абсолютно интегрируемы на всей числовой оси. Тогда*

$$\mathcal{F}\left[\int_0^x f(u) du\right] = \frac{\mathcal{F}[f]}{iz}. \quad (1.1.88)$$

$f(x) = dg/dx$ и по предыдущему свойству $\mathcal{F}[f] = iz\mathcal{F}[g]$, откуда и следует утверждение теоремы. $\square$

1.1.6.3.9. Производная преобразования Фурье функции

Теорема 6.8. *Если функция $f(x)$ непрерывна, а функции $f(x)$, $xf(x)$, ..., $x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на всей числовой оси, то преобразование Фурье функции f является n раз дифференцируемой на всей числовой прямой функцией и*

$$i^k \mathcal{F}^{(k)}[f] = \mathcal{F}[x^k f], \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.1.89)$$

Продифференцируем по параметру z интеграл, определяющий прямое преобразование Фурье:

$$\frac{d}{dz} F(z) = \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} f(x) dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-izx} f(x) dx.$$

Поскольку $|(-ix)e^{-izx}f(x)| = |xf(x)|$, интеграл

$$-i \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-izx} f(x) dx, \quad -\infty < z < +\infty$$

абсолютно и равномерно сходится и, следовательно, преобразование Фурье $F(z) \equiv \mathcal{F}[f]$ функции f является дифференцируемой функцией:

$$i\mathcal{F}'[f] = \mathcal{F}[xf].$$

Формула (1.1.89) доказывается по индукции.

Следствие 6.3. *Если предположения теоремы выполнены, то все производные*

$$\mathcal{F}^{(k)}[f], \quad k = 0, 1, \dots, n$$

непрерывны и стремятся к нулю при стремлении их аргумента к бесконечности.

1.1.6.3.10. Свертка и преобразование Фурье

Пусть функции φ и ψ определены на всей действительной оси, принимают только действительные значения, ограничены и абсолютно интегрируемы.

Определение 6.2. *Свертка* функций φ и ψ , которая обозначается $\varphi * \psi$, или, если x — аргумент свертки, $(\varphi * \psi)(x)$ определяется равенством

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\psi(x-t) dt. \quad (1.1.90)$$

Интеграл (1.1.90) существует и равномерно сходится на всей действительной оси в силу ограниченности и абсолютной интегрируемости функций.

Докажем абсолютную интегрируемость свертки. Пусть $f = \varphi * \psi$, тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\psi(x-t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)| dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(s)| ds. \end{aligned}$$

Таким образом, при сделанных предположениях к функции $f = \varphi * \psi$ можно в свою очередь применять операцию свертки с некоторой непрерывной ограниченной и абсолютно интегрируемой функцией или преобразование Фурье.

Лемма 6.1. *Операция свертки функций коммутативна и ассоциативна в рассматриваемом классе функций.*

Действительно, сделаем в интеграле (1.1.90) замену переменной $x-t = s$, тогда

$$\varphi * \psi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \psi(x-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-s) \psi(s) ds = \psi * \varphi. \quad \square$$

Докажем теперь ассоциативность.

$$\begin{aligned} (\varphi * \psi) * \chi &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(y-x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \psi(x-t) dt = \left[t = y - \xi \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(y-x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y-\xi) \psi(x-y+\xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y-\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-y+\xi) \chi(y-x) dx = \\ &= \left[x - y + \xi = \eta \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y-\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\eta) \chi(\xi-\eta) d\eta = \\ &= (\psi * \chi) * \varphi = \varphi * (\psi * \chi). \quad \square \end{aligned}$$

Для удобства изменим определение свертки, добавив дополнительный множитель $1/\sqrt{2\pi}$:

$$(\varphi * \psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \psi(x-t) dt. \quad (1.1.91)$$

Теорема 6.9. *Пусть функции φ и ψ ограничены, непрерывны и абсолютно интегрируемы на числовой оси. Тогда преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению преобразований Фурье этих функций:*

$$\mathcal{F}[\varphi * \psi] = \mathcal{F}[\varphi] \cdot \mathcal{F}[\psi]. \quad (1.1.92)$$

Как показано выше свертка двух функций с указанными свойствами абсолютно интегрируема, следовательно, к ней можно применить преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}[\varphi * \psi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\psi(x-t) dt \right) dx.$$

Меняя здесь порядок интегрирования и заменив переменную $x = t + s$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\varphi * \psi] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-t) e^{-izx} dx = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-izt} dt \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) e^{-izs} ds \right) = \mathcal{F}[\varphi] \cdot \mathcal{F}[\psi]. \quad \boxtimes \end{aligned}$$

1.1.6.4. Замечания

Замечание 6.1. Перестановка порядка интегрирования, дифференцирование по параметру и другие операции в приведенных выше доказательствах возможны в силу равномерной сходимости интегралов, которая в свою очередь следует из свойств рассматриваемых функций, которые являются абсолютно интегрируемыми и кусочно-непрерывными на всей числовой прямой.

Замечание 6.2. Можно показать, что рассмотренные свойства преобразования Фурье распространяются также на функции действительной переменной, принимающие комплексные значения. Для этого следует представить функцию в виде $u(x) + iv(x)$ и воспользоваться линейностью преобразования Фурье.

Замечание 6.3. Формула, задающая обратное преобразование Фурье, отличается от формулы, задающей прямое преобразование Фурье лишь тем, что в показателе степени числа e под интегралом $-i$ заменено на i , поэтому для обратного преобразования Фурье справедливы свойства, аналогичные доказанным нами для прямого преобразования Фурье.

Замечание 6.4. В некоторых источниках знаки показателей экспоненты прямого и обратного преобразований Фурье меняются местами: вместо

использованного здесь

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} f(x) dx \quad (\text{прямое преобразование Фурье});$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} F(z) dz \quad (\text{обратное преобразование Фурье})$$

там значатся соответственно:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} f(x) dx \quad (\text{прямое преобразование Фурье});$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} F(z) dz \quad (\text{обратное преобразование Фурье}).$$

Будьте внимательны!

1.1.7. Дискретное преобразование Фурье

Пусть $\varphi(t)$ — действительный сигнал длительностью T . Ряд Фурье его T -периодического продолжения в общем случае может содержать бесконечное число членов:

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i \frac{n\pi t}{T}}.$$

Можно использовать и функцию координаты, а не времени:

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/L}.$$

Дискретизируем функцию так, что на интервале T берется N отсчетов с шагом $\Delta t = T/N$ (или $\Delta x = L/N$ на отрезке L).

Находим коэффициенты дискретного преобразования Фурье для последовательности $\{\varphi(k\Delta t)\}$ (или $\{u(k\Delta x)\}$) и переходим к дискретному времени $t = k\Delta t$ (дискретной координате $x = k\Delta x$).

Аналоговый сигнал преобразуется в цифровой.

1.1.7.1. Функция дискретной переменной

Пусть задана функция $u(x)$ с непрерывно меняющимся аргументом x .

Определение 7.1. Сетка — дискретное множество точек x_j , где $j = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \dots, \frac{N}{2}-1$. Точки x_j называются *узлами сетки*, интервал между узлами — *шагом*.

Если шаг $\Delta x = x_{j+1} - x_j$ постоянен во всей области, то сетка называется *равномерной*. В этом случае $\Delta x \cdot N = L$, где L — область определения аргумента x .

Последовательность чисел $u_j = u(x_j)$ является *функцией дискретного аргумента*

$$u(x) \rightarrow u_j, \quad j = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad (1.1.93)$$

к которой осуществлен переход от исходной функции $u(x)$ с непрерывно меняющейся переменной x (рисунок 1.1.5).

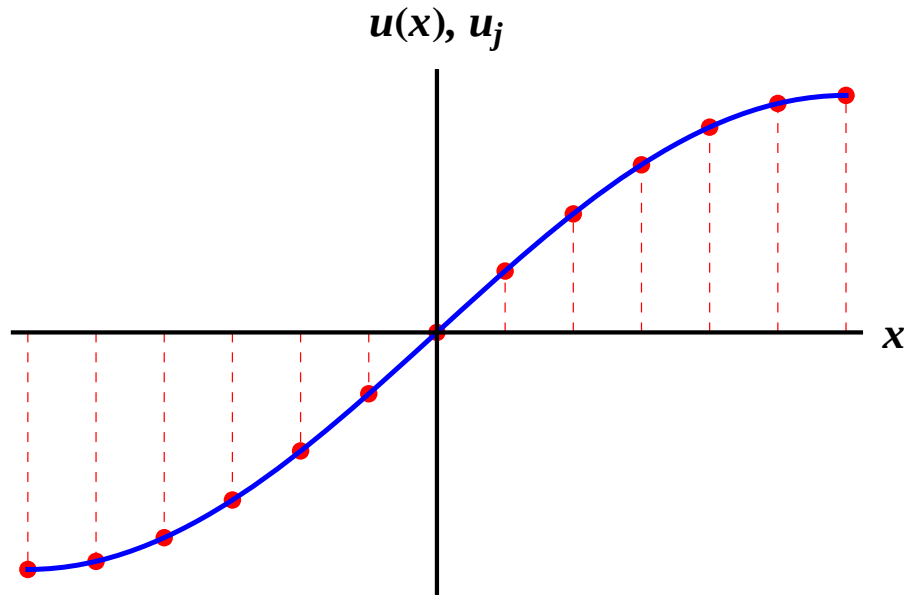


Рис. 1.1.5. Дискретное представление непрерывной функции

Область определения сеточной функции u_j является дискретной и имеет конечную размерность.

Определение 7.2. *Гребнем (гребневой функцией) Дирака* называется функция

$$\text{Ш}_L(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kL), \quad (1.1.94)$$

где x — действительная переменная, L — период, а членами ряда являются дельта-функции Дирака.

Замечание 7.1. И в русскоязычных математических текстах величины нечасто обозначаются буквами кириллицы (одно из редких исключений — обозначение вычета в книге [38]). Но обозначение $\text{Ш}_L(x)$ оказалось удобным даже в англоязычной литературе, потому что форма буквы Ш напоминает график функции (1.1.94) (рисунок 1.1.6).

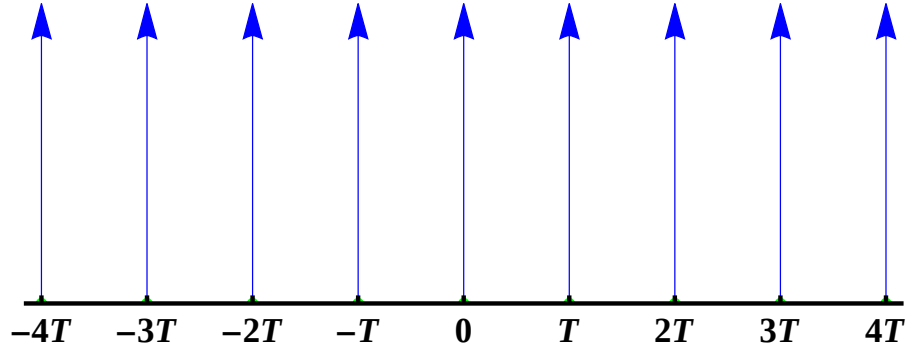


Рис. 1.1.6. Гребень Дирака

Гребень Дирака с единичным периодом обозначается через $\text{Ш}(x)$.

Функция $\text{Ш}_L(x)$ периодична с периодом L и ее можно представить в виде комплексного ряда Фурье:

$$\text{Ш}_L(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kx/L},$$

где

$$c_k = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} \text{Ш}_L(x) e^{-i2\pi kx/L} dx = \frac{1}{L}$$

(докажите это самостоятельно) и, таким образом,

$$\text{Ш}_L(x) = \frac{1}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi kx/L}. \quad (1.1.95)$$

Теперь переход от функции непрерывной переменной $u(x)$ к сеточной функции дискретного аргумента u_j можно записать в виде

$$u_j = u(x) \cdot \text{Ш}(x) \cdot \Delta x = u(x) \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - j\Delta x) \cdot \Delta x. \quad (1.1.96)$$

Можно показать (доказательство см., например, в книге [24, §2.3]), что обратный переход от функции дискретной переменной к функции непрерывной переменной задается *формулой Котельникова – Шеннона*

$$u(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u(j\Delta x) \cdot \text{sinc} \left(\frac{\pi(x - j\Delta x)}{\Delta x} \right), \quad (1.1.97)$$

где функция $\text{sinc } x$ — *кардинальный синус* (2.1.10).

1.1.7.2. Дискретное преобразование Фурье

Пусть задана функция $u(x)$, период которой равен L , т. е. $u(x \pm nL) = u(x)$, $n = 1, 2, \dots$

Введем на периоде L функции равномерную сетку $x_j = j\Delta x$ с шагом $\Delta x = L/N$, где N — число узлов сетки, которое совпадает с числом отрезков разбиения. Номер узла сетки j пробегает значения $-N/2 < j < N/2 - 1$ и сеточная функция $u(j) \equiv u(x_j)$ периодична с периодом N , т. е. $u(j \pm nN) = u(j)$. При этом в силу периодичности функции $u(j)$ справедливо равенство $u(N/2) = u(-N/2)$.

Спектр периодической функции представляет собой ряд Фурье

$$U(k) \equiv U(f_k) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} u(x) \exp\left(-\frac{2\pi i k x}{L}\right) dx, \quad (1.1.98)$$

где k — номер фурье-гармоники, $f_k = k/L$ — частота этой гармоники.

Замечание 7.1. Если функция $u(x)$ зависит от времени, то частота f_k имеет размерность с^{-1} , если она зависит от пространственной координаты, то f_k измеряется в м^{-1} .

Определение 7.3. Величина

$$f_N = \frac{1}{2\Delta x}$$

называется **частотой Найквиста**. Она является верхней границей полосы частот, которую воспроизводит сетка с шагом Δx .

Будем считать, что спектр ограничен и $f_{\max} \leq f_N$, тогда по формуле Котельникова–Шеннона (1.1.97) имеем

$$u(x) = \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} u(j) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta x}(x - x_j)\right). \quad (1.1.99)$$

Подставив (1.1.99) в (1.1.98) и воспользовавшись представлением (1.1.96) $u(j)$ через гребневую функцию Дирака, получаем

$$U(k) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \Delta x \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} \delta(x - x_j) u(x) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta x}(x - x_j)\right) \exp\left(-\frac{2\pi i k x}{L}\right) dx$$

Воспользовавшись теперь определением дельта-функции Дирака

$$\int_a^b \Phi(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} \Phi(x_0), & x_0 \in [a; b]; \\ 0, & x_0 \notin [a; b], \end{cases}$$

имеем

$$U(k) = \frac{\Delta x}{L} \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} u(j) \exp\left(-\frac{2\pi i k j \Delta x}{L}\right).$$

Наконец, учитывая, что $\frac{\Delta x}{L} = \frac{1}{N}$ и вводя обозначение

$$W_N = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right), \quad (1.1.100)$$

приходим к выражению

$$U(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} u(j) W_N^{-kj}, \quad k = -N/2, \dots, N/2 - 1. \quad (1.1.101)$$

Выражение (1.1.101) называется *формулой прямого дискретного преобразования Фурье*. Оно определяет k -ю фурье-гармонику дискретного спектра $U(k)$ по функции дискретного аргумента $u(j)$. Выражение (1.1.101) является дискретным аналогом формулы (1.1.39), в которой L заменено на $L/2$, для вычисления коэффициентов разложения c_n в ряд Фурье периодической функции.

Рассмотрим свойства дискретных гармонических функций W_N^{kj} , определенных на множестве номеров гармоник $k = -N/2, \dots, N/2 - 1$ в пространстве частот и множестве узлов $j = -N/2, \dots, N/2 - 1$ в пространстве отсчетов.

Гармоники разных номеров k и l ортогональны на периоде отсчетов $j = -N/2, \dots, N/2 - 1$:

$$\sum_{j=-N/2}^{N/2-1} W_N^{kj} W_N^{-lj} = \begin{cases} N, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases} \quad (1.1.102)$$

Гармоники одного и того же номера k , взятые в разных точках сетки j и m , ортогональны на периоде спектра $k = -N/2, \dots, N/2 - 1$:

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} W_N^{kj} W_N^{-km} = \begin{cases} N, & j = m, \\ 0, & j \neq m. \end{cases} \quad (1.1.103)$$

Используя (1.1.102–1.1.103), найдем формулу дискретного синтеза Фурье для вычисления функции дискретного аргумента $u(j)$ по гармоникам $U(k)$ дискретного спектра. Перепишем (1.1.101) в виде

$$U(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} u(m) W_N^{-km}, \quad (1.1.104)$$

умножим левую и правую части этого равенства на W_N^{kj} и просуммируем по всем k слева и справа:

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} U(k) W_N^{kj} = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} u(m) W_N^{-km} W_N^{kj}.$$

В правой части равенства изменим порядок суммирования:

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} U(k) W_N^{kj} = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} u(m) \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} W_N^{-km} W_N^{kj}.$$

В силу ортогональности гармоник (1.1.103) вторая сумма в правой части равна $N\delta_m^j$. Отсюда следует *формула обратного дискретного преобразования Фурье*

$$u(j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} U(k) W_N^{kj}, \quad (1.1.105)$$

с помощью которой вычисляется функция дискретного аргумента $u(j)$ по ее спектру $U(k)$. Эта формула является дискретным аналогом разложения периодической функции в ряд Фурье.

1.1.8. Коллекция формул

Ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Формулы Эйлера – Фурье для коэффициентов ряда Фурье

Функция задана на $[-\pi, \pi]$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Функция задана на $[-L, L]$:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Разложение только по косинусам или только по синусам

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Интеграл Дирихле

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[f(x_0 + t) + f(x_0 - t) \right] \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt,$$

где $S_n(x_0)$ — частичная сумма ряда Фурье (1.1.22) в точке x_0 .

Комплексная форма записи ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/L},$$

где

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_{-n} = \beta_n = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad c_n = \alpha_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

или

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{in\pi t/L} dt.$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\pi x/L},$$

где

$$d_0 = \frac{a_0}{2}, \quad d_{-n} = \alpha_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad d_n = \beta_n = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Тождество Бесселя

$$\delta_n = \min \Delta_n = \int_a^b f^2(x) \rho(x) dx - \sum_{m=0}^n \lambda_m c_m^2$$

Здесь c_m — обобщенные коэффициенты Фурье (1.1.44) для ортогональной системы, подчиняющейся соотношению (1.1.43).

Равенство Парсеваля

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m^2 = \|f\|^2 /$$

Интеграл Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos z(u-x) du.$$

Прямое и обратное преобразования Фурье:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} f(x) dx.$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} F(z) dz.$$

Прямое и обратное преобразования Фурье

по косинусам:

$$F_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \cos zu du;$$
$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(x) \cos zx dz$$

по синусам:

$$F_s(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \sin zu du;$$
$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(x) \sin zx dz.$$

Свойства преобразования Фурье

1. Линейность	$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g].$
2. Ограниченность	$ F(z) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$
3. Поведение на бесконечности	$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} F(z) = 0.$
4. Теорема запаздывания	$\mathcal{F}[f(x - \alpha)](z) = e^{-i\alpha z} \mathcal{F}[f].$
5. Теорема смещения	$\mathcal{F}[f(x)e^{i\beta x}](z) = F(z - \beta).$
6. Теорема подобия	$\mathcal{F}[f(\lambda x)] = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{z}{\lambda}\right).$
7. Преобразование Фурье для производных	$\mathcal{F}[f^{(k)}] = (iz)^k \mathcal{F}[f], \quad k = 0, 1, \dots, n$

8. Преобразование Фурье для интегралов $\mathcal{F} \left[\int_0^x f(u) du \right] = \frac{\mathcal{F}[f]}{iz}.$
9. Производная преобразования Фурье $i^k \mathcal{F}^{(k)}[f] = \mathcal{F}[x^k f], \quad k = 0, 1, \dots, n.$
10. Свертка и преобразование Фурье $(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \psi(x-t) dt.$
- $$\mathcal{F}[\varphi * \psi] = \mathcal{F}[\varphi] \cdot \mathcal{F}[\psi].$$

Дискретное преобразования Фурье:

$$\text{Прямое: } U(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} u(j) W_N^{-kj}.$$

$$\text{Обратное: } u(j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} U(k) W_N^{kj}.$$

Свойства дискретного преобразования Фурье²

1. Периодичность	$u(j \pm nN) = u(j), \quad U(k \pm nN) = U(k).$
2. Линейность	$\alpha u_1(j) + \beta u_2(j) \leftrightarrow \alpha U_1(k) + \beta U_2(k).$
3. Изменение знака	$u(-j) \leftrightarrow U(-k).$
4. Комплексное сопряжение	$\bar{u}(j) \leftrightarrow \bar{U}(k).$
5. Запаздывание	$u(j-m) \leftrightarrow U(k) W_N^{-km}.$
6. Смещение	$U(k-l) \leftrightarrow u(j) W_N^{jl}.$
7. Свертка	$u_1(j) \oplus u_2(j) \leftrightarrow U_1(k) \cdot U_2(k),$
	где $u_1(j) \oplus u_2(j) = \frac{1}{N} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} u_1(m) u_2(j-m).$
8. Дельта-функция Дирака	$\delta(j) \leftrightarrow 1.$
9. Запаздывающая функция Дирака	$\delta(j-j_0) \leftrightarrow W_N^{kj_0}.$

²Справедливость этих свойств докажете самостоятельно.

1.2. Цилиндрические функции

1.2.1. Уравнение Бесселя и его решения

1.2.1.1. Функция Бесселя первого рода

Рассмотрим линейное обыкновенное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (1.2.1)$$

Это уравнение имеет два линейно независимых решения.

Получим одно из решений, представив его в виде обобщенного степенного ряда.

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (1.2.2)$$

Найдем производные:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+m) x^{k+m-1}; \quad (1.2.3)$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+m)(k+m-1) x^{k+m-2}. \quad (1.2.4)$$

Замечание 1.1. Разумеется, дифференцировать почленно можно только равномерно сходящийся ряд. Так же, как мы поступали при рассмотрении рядов Фурье, будем полагать, что ряд сходится равномерно, найдем его коэффициенты и затем докажем равномерную сходимость.

Подставим (1.2.2–1.2.4) в (1.2.1):

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+m)(k+m-1) x^{k+m-2} + x \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+m) x^{k+m-1} + \\ + (x^2 - n^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m} = 0, \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ [a_k(k+m)(k+m-1) + a_k(k+m) - n^2 a_k] x^{k+m} + a_k x^{k+m+2} \right\} = 0. \quad (1.2.6)$$

Равенство (1.2.6) выполняется для произвольных значений x тогда и только тогда, когда коэффициент при каждой степени x по отдельности равен нулю¹. Выпишем значения коэффициентов для нескольких степеней:

$$\begin{aligned} x^m : a_0 m(m-1) + a_0 m - a_0 n^2 &= 0 \\ a_0(m^2 - n^2) &= 0 \\ x^{m+1} : a_1(m+1)m + a_1(m+1) - a_1 n^2 &= 0 \\ a_1[(m+1)^2 - n^2] &= 0 \\ x^{m+2} : a_2(m+2)(m+1) + a_2(m+2) - a_2 n^2 + a_0 &= 0 \\ a_2[(m+2)^2 - n^2] + a_0 &= 0 \\ x^{m+3} : a_3(m+3)(m+2) + a_3(m+3) - a_3 n^2 + a_1 &= 0 \\ a_3[(m+3)^2 - n^2] + a_1 &= 0 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$a_0(m^2 - n^2) = 0; \quad (1.2.7)$$

$$a_1[(m+1)^2 - n^2] = 0; \quad (1.2.8)$$

$$a_k[(m+k)^2 - n^2] + a_{k-2} = 0, \quad k \geq 2. \quad (1.2.9)$$

(докажите равенство (1.2.9) по индукции).

Пусть $a_0 \neq 0$, тогда из (1.2.7) следует, что $m = \pm n$. Рассмотрим оба случая.

Если $m = n \geq 0$, то равенство (1.2.8) дает $(m+1)^2 - n^2 \neq 0$ и, следовательно, $a_1 \equiv 0$. Далее,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-a_0}{(n+2)^2 - n^2} = \frac{-a_0}{2^2(n+1)}; \\ a_3 &= \frac{-a_1}{(n+3)^2 - n^2} = 0; \\ a_4 &= \frac{-a_2}{(n+4)^2 - n^2} = \frac{-a_2}{2^2 \cdot 2(n+2)} = \frac{(-1)^2 a_0}{2^4 \cdot 1(n+2)(n+1)}; \\ a_5 &= \frac{-a_3}{(n+5)^2 - n^2} = 0 \end{aligned}$$

¹Объясните, почему это так.

и так далее. Таким образом,

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= 0; \\ a_{2k} &= \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (n+k)(n+k-1) \dots (n+1)}. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Итак,

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{2^{2k} k! (n+1)(n+2) \dots (n+k)}.$$

Здесь множитель a_0 — произвольная постоянная. Запишем ее в виде

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)},$$

тогда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k! \Gamma(n+k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} J_n(x). \quad (1.2.11)$$

Аналогичными рассуждениями для $m = -n$ получаем

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= 0; \\ a_{2k} &= \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (-n+k)(-n+k-1) \dots (-n+1)}. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

и, выбирая

$$a_0 = \frac{1}{2^{-n} \Gamma(-n+1)},$$

приходим к

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k! \Gamma(-n+k+1)} \stackrel{\text{def}}{=} J_{-n}(x). \quad (1.2.13)$$

Докажем, что функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ линейно зависимы:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Действительно, в выражении (1.2.13) все слагаемые, для которых $k < n$, равны нулю, так как в знаменателе у них стоит гамма-функция с целым неположительным аргументом. Поэтому суммирование можно начать с n ,

тогда

$$\begin{aligned}
J_{-n}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k! \Gamma(-n+k+1)} = [k = i+n] = \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i+2n-n}}{(i+n)! \Gamma(-n+i+n+1)} = \\
&= (-1)^n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{x}{2}\right)^{2i+n}}{(i+n)! i!} = (-1)^n J_n(x). \quad \boxtimes
\end{aligned}$$

Из формулы (1.2.11), в частности, следует, что $J_n(0) = \delta_0^n$, т. е. $J_0(0) = 1$, $J_n(0) = 0$, $n = 1, 2, \dots$

Изменим теперь уравнение (1.2.1), заменив в нем целочисленный параметр n на произвольное вещественное нецелое число ν , а вещественную переменную x на комплексную z :

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)y = 0. \quad (1.2.14)$$

Рассмотрим функцию

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)}, \quad (1.2.15)$$

заданную на комплексной плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$. Это ограничение необходимо для однозначности функции z^ν и может быть отброшено, если ν — целое число.

Определение 1.1. Функция $J_\nu(z)$ называется *функцией Бесселя* (или *цилиндрической функцией*) *первого рода порядка ν* .

Замечание 1.2. Параметр, который мы будем называть здесь *порядком*, в некоторых источниках именуется *индексом* и даже (например, в книгах [30] и [34]) *значком*.

Покажем, что ряд в (1.2.15) равномерно сходится при любых z и ν , причем в области $|z| < R$, $|\nu| < N$, где R, N — произвольно большие фиксированные числа, сходимость равномерна по отношению к каждой из переменных. Для этого исследуем ряд на абсолютную сходимость. Пусть

$$b_k = \left| \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \right| = \frac{\left|\frac{z}{2}\right|^{2k+\nu}}{k! |\Gamma(k + \nu + 1)|}$$

Начиная с достаточного большого k , отношение модулей последующего члена ряда к предыдущему не будет превосходить некоторой правильной положительной дроби q , не зависящей от z и ν :

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{|z|^2}{4(k+1)|k+\nu+1|} \leq \frac{R^2}{4(k+1)(k+1-N)} \leq q < 1 \quad (1.2.16)$$

Это означает, что рассматриваемый ряд сходится равномерно в указанной области, а ряд для функции Бесселя сходится абсолютно и, следовательно, равномерно. Такой ряд, в частности, можно почленно дифференцировать и интегрировать.

Подставив функцию (1.2.15) в уравнение Бесселя (1.2.14), приходим к тождеству (докажите это самостоятельно).

Таким образом, функции $J_{\pm\nu}(z)$ являются решениями уравнения. Исследуем их на линейную независимость, для чего перепишем уравнение (1.2.14) в виде

$$\frac{d}{dz} \left(zy' \right) + \left(z - \frac{\nu^2}{z} \right) y = 0$$

и запишем полученное уравнение по отдельности для $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(zJ'_\nu(z) \right) + \left(z - \frac{\nu^2}{z} \right) J_\nu(z) &= 0; \\ \frac{d}{dz} \left(zJ'_{-\nu}(z) \right) + \left(z - \frac{\nu^2}{z} \right) J_{-\nu}(z) &= 0. \end{aligned}$$

Домножим первое уравнение на $-J_{-\nu}(z)$, второе на $+J_\nu(z)$ и сложим эти равенства почленно:

$$\begin{aligned} -J_{-\nu}(z) \frac{d}{dz} \left(zJ'_\nu(z) \right) - \left(z - \frac{\nu^2}{z} \right) J_{-\nu}(z)J_\nu(z) + J_\nu(z) \frac{d}{dz} \left(zJ'_{-\nu}(z) \right) + \\ + \left(z - \frac{\nu^2}{z} \right) J_{-\nu}(z)J_\nu(z) = 0; \\ -J_{-\nu}(z) \frac{d}{dz} \left(zJ'_\nu(z) \right) + J_\nu(z) \frac{d}{dz} \left(zJ'_{-\nu}(z) \right) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [J_\nu(z) (zJ'_{-\nu}(z)) - J_{-\nu}(z) (zJ'_\nu(z))] &= 0; \\ \frac{d}{dz} z [(J_\nu(z)zJ'_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z)J'_\nu(z))] &= 0. \end{aligned}$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получаем равенство для определителя Вронского (вронскиана):

$$zW[J_{\nu}, J_{-\nu}] = z \begin{vmatrix} J_{\nu}(z) & J_{-\nu}(z) \\ J'_{\nu}(z) & J'_{-\nu}(z) \end{vmatrix} = C. \quad (1.2.17)$$

Значение константы можно найти, устремив в (1.2.17) z к нулю:

$$\begin{aligned} C &= \lim_{z \rightarrow 0} z \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)} & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-\nu}}{m! \Gamma(m-\nu+1)} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{2k! \Gamma(k+\nu+1)} & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m-\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-\nu-1}}{2m! \Gamma(m-\nu+1)} \end{vmatrix} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2m} (2m-\nu)}{k! m! \Gamma(k+\nu+1) \Gamma(m-\nu+1)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2m} (2k+\nu)}{k! m! \Gamma(k+\nu+1) \Gamma(m-\nu+1)} \right] = \\ &= \left[k=m=0 \right] = \frac{-2\nu}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(1-\nu)} = -\frac{2}{\Gamma(\nu) \Gamma(1-\nu)} = \\ &= [\text{формула (1.2.127)}] = -\frac{2}{\pi / \sin \pi \nu} \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$zW[J_{\nu}, J_{-\nu}] = -\frac{2 \sin \pi \nu}{\pi}. \quad (1.2.18)$$

Необходимым условием линейной зависимости решений линейного однородного дифференциального уравнения является равенство нулю определителя Вронского этих функций. Таким образом, функции $J_{\nu}(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ линейно зависимы при целочисленных значениях порядка, т. е. при $\nu=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Если же $\nu \notin \mathbb{Z}$, то общее решение уравнения (1.2.14) можно записать в виде

$$y = C_1 J_{\nu}(z) + C_2 J_{-\nu}(z). \quad (1.2.19)$$

1.2.1.2. Функция Бесселя второго рода (функция Неймана)

Формула (1.2.19) неудобна, так как применима только в случае $\nu \notin \mathbb{Z}$. Чтобы записать общее решение уравнения Бесселя для произвольных значений порядка, введем *функцию Бесселя второго рода* или *функцию Неймана* $Y_{\nu}(z)$

$$Y_{\nu}(z) = \frac{J_{\nu}(z) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi \nu}. \quad (1.2.20)$$

Замечание 1.1. Для этой функции иногда используется другое обозначение: $N_\nu(z)$.

Функция (1.2.20) регулярна в плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$ и удовлетворяет уравнению Бесселя (1.2.14) (почему?). Вместе с тем при любых (целых или нецелых) значениях порядка ν она линейно независима по отношению к функции Бесселя первого рода (докажите это самостоятельно, вычислив соответствующий вронскиан).

Чтобы представить функцию Неймана целого порядка в виде степенного ряда, изменим уравнение (1.2.14), добавив параметр ε :

$$z^2 y'' + zy' + [z^2 - (n - \varepsilon)^2] y = 0, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.2.21)$$

При $\varepsilon \neq 0$ функции $J_{n-\varepsilon}(z)$ и $J_{-(n-\varepsilon)}(z)$ линейно независимы. Положим

$$Y_{n-\varepsilon}(z) = \frac{(-1)^n J_{-(n-\varepsilon)}(z) - J_{n-\varepsilon}(z)}{\pi \varepsilon}.$$

Воспользуемся теперь формулой (1.2.15), перенеся для удобства постоянный множитель π в левую часть:

$$\begin{aligned} \pi Y_{n-\varepsilon}(z) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k}}{\varepsilon k! \Gamma(k - n + \varepsilon + 1)} + \\ + (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k}}{\varepsilon k! \Gamma(k - n + \varepsilon + 1)} - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n-\varepsilon+2k}}{\varepsilon k! \Gamma(k + n - \varepsilon + 1)}. \end{aligned}$$

Во втором слагаемом можно заменить k на $k + n$ (почему?), начав суммирование с нуля:

$$\begin{aligned} \pi Y_{n-\varepsilon}(z) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k}}{\varepsilon k! \Gamma(k - n + \varepsilon + 1)} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2n} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+\varepsilon+2k}}{\varepsilon (k+n)! \Gamma(k + \varepsilon + 1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n-\varepsilon+2k}}{\varepsilon k! \Gamma(k + n - \varepsilon + 1)} = \\ = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2k}}{\varepsilon k! \Gamma(k - n + \varepsilon + 1)} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \left[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\varepsilon}}{\varepsilon(k+n)! \Gamma(k+\varepsilon+1)} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\varepsilon}}{\varepsilon k! \Gamma(k+n-\varepsilon+1)} \right]. \quad (1.2.22)$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В числителе первого слагаемого множитель $(z/2)^{-n+\varepsilon+2k}$ стремится к $(z/2)^{-n+2k}$. В знаменателе имеет место неопределенность вида $0 \times \infty$ (почему?). Воспользуемся формулой симметрии (1.2.127) $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \pi/\sin \pi\alpha$ и затем правилом Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \Gamma(k-n+\varepsilon+1)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \Gamma[1-(n-\varepsilon+k)]} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(n-\varepsilon-k) \sin \pi(n-\varepsilon-k)}{\varepsilon \pi} = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} [-\Gamma'_{\varepsilon}(n-\varepsilon-k) \sin \pi(n-\varepsilon-k) - \Gamma(n-\varepsilon-k) \pi \cos \pi(n-\varepsilon-k)] &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} [-\Gamma(n-\varepsilon-k) \psi(n-\varepsilon-k) \sin \pi(n-\varepsilon-k) - \\ &\quad - \Gamma(n-\varepsilon-k) \pi \cos \pi(n-\varepsilon-k)] = \\ &= \frac{\overbrace{-\Gamma(n+k) \psi(n-k) \sin \pi(n-k)}^{\rightarrow 0} - \Gamma(n-k) \pi \cos \pi(n-k)}{\pi} \end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались формулой (1.2.140) $\Gamma'(z) = \Gamma(z)\psi(z)$), связывающей гамма- и дигамма-функции. Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \Gamma(k-n+\varepsilon+1)} = (-1)^{n-k+1} \Gamma(n-k).$$

Рассмотрим теперь выражение в квадратных скобках, снова применив формулу для логарифмической производной и правило Лопиталя с учетом того, что $\frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{z}{2}\right)^{\varepsilon} = \left(\frac{z}{2}\right)^{\varepsilon} \ln \frac{z}{2}$:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\varepsilon}}{\varepsilon(k+n)! \Gamma(k+\varepsilon+1)} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\varepsilon}}{\varepsilon k! \Gamma(k+n-\varepsilon+1)} \right] &= \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\varepsilon} \Gamma(k+\varepsilon+1)}{\varepsilon \Gamma(k+n+1) \Gamma^2(k+\varepsilon+1)} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\varepsilon} \Gamma(k+n-\varepsilon+1)}{\varepsilon \Gamma(k+1) \Gamma^2(k+n-\varepsilon+1)} \right] &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \times \\
&\quad \times \left[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\varepsilon \ln\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma(k+\varepsilon+1) - \left(\frac{z}{2}\right)^\varepsilon \Gamma'(k+\varepsilon+1)}{\Gamma(k+\varepsilon+1)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\varepsilon} \ln\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma(k+n-\varepsilon+1) - \left(\frac{z}{2}\right)^{-\varepsilon} \Gamma'(k+n-\varepsilon+1)}{\Gamma(k+n-\varepsilon+1)} \right] = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \left[2 \ln \frac{z}{2} - \frac{\Gamma'(k+\varepsilon+1)}{\Gamma(k+\varepsilon+1)} + \frac{\Gamma'(k+n-\varepsilon+1)}{\Gamma(k+n-\varepsilon+1)} \right] = \\
&= \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \left[2 \ln \frac{z}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+n+1) \right].
\end{aligned}$$

После перехода к пределу формула (1.2.22) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\pi Y_n(z) &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (-1)^{n-k+1} \frac{\Gamma(n-k)}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k} + \\
&+ \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \left[2 \ln \frac{z}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+n+1) \right]}_{=} = \\
&= 2J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} - \\
&- \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)].
\end{aligned}$$

Таким образом, разложение функции Неймана в степенной ряд имеет вид

$$\begin{aligned}
Y_n(z) &= \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \\
&- \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} - \\
&- \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)].
\end{aligned} \tag{1.2.23}$$

Замечание 1.2. При $n = 0$ второе слагаемое следует считать равным 0.

Замечание 1.3. Другой способ получения разложения (1.2.23) будет приведен на с. 95.

Из формулы (1.2.23), в частности, следует, что при $z \rightarrow 0$ выполняется

$$Y_0(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{2}, \quad Y_n(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

т. е. $Y_n(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \infty$.

Асимптотическое разложение при больших значениях аргумента имеет вид

$$Y_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin \left(z - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad \nu \text{ фиксировано и } |z| \rightarrow \infty \quad (1.2.24)$$

(рисунок 1.2.1). Его, так же, как и в случае функции Бесселя первого ро-

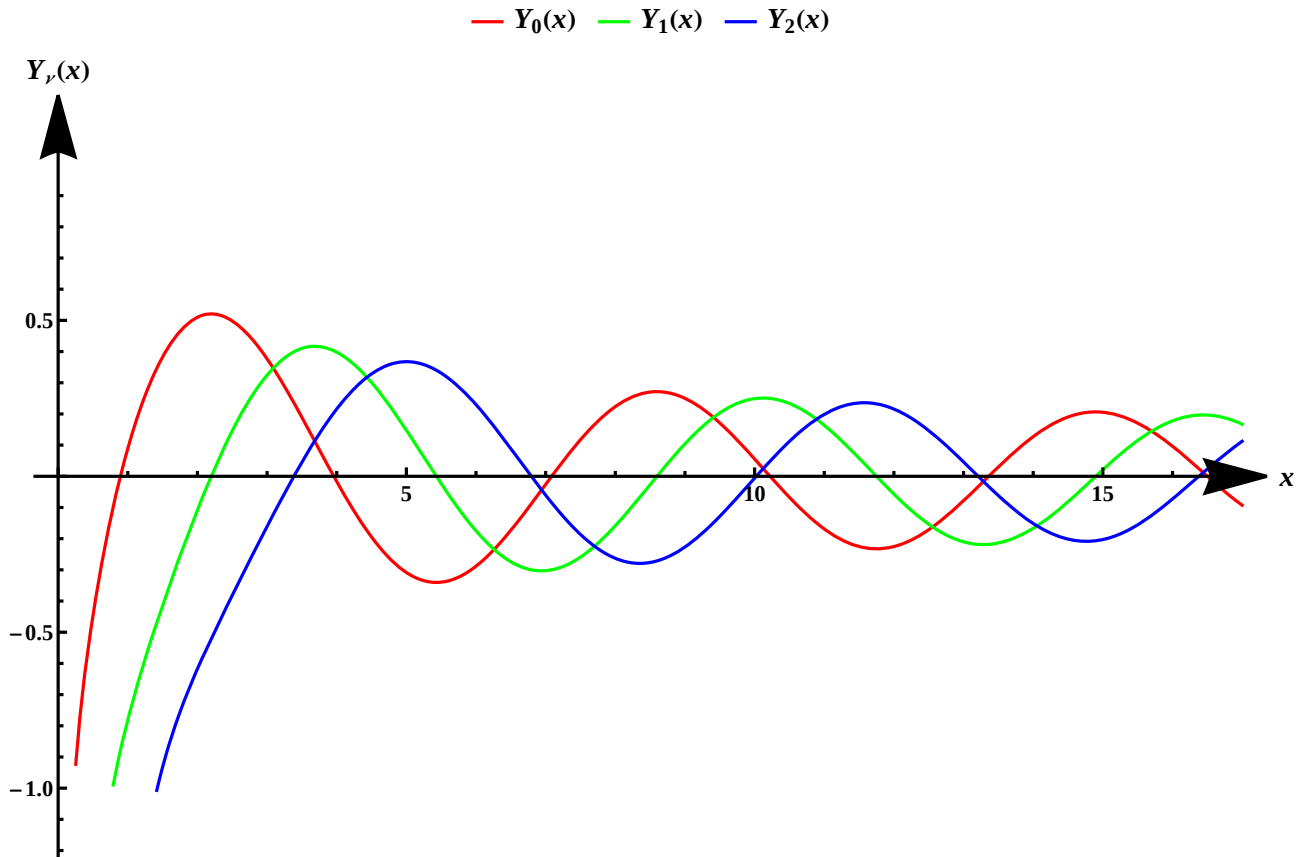


Рис. 1.2.1. Графики функции Неймана порядков 0–2

да, можно получить методом перевала, но проще воспользоваться формулой (1.2.88), подставив это выражение в (1.2.20).

Действительно,

$$\frac{J_\nu(z) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi \nu} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{\cos \left(z - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cos \pi \nu - \cos \left(z + \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \pi \nu}. \quad (1.2.25)$$

Преобразуем выражение в числителе дроби:

$$\begin{aligned}
& \cos \left(z - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cos \pi \nu - \cos \left(z + \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cos \left(z + \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \cos \left(z - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \nu \pi \right) - \cos \left(z + \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cos \left(z - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \nu \pi \right) - \frac{1}{2} \cos \left(z + \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \\
&= \left[\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right] = \sin \left(z - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sin \pi \nu,
\end{aligned}$$

что при подстановке в (1.2.25) приводит к формуле (1.2.24).

1.2.1.3. Функции Бесселя третьего рода (функции Ханкеля)

Для произвольного ν и z , принадлежащего плоскости с разрезом вдоль полуоси $(-\infty, 0)$ функции Ханкеля² имеют вид

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = J_{\nu}(z) + iY_{\nu}(z); \quad (1.2.26)$$

$$H_{\nu}^{(2)}(z) = J_{\nu}(z) - iY_{\nu}(z). \quad (1.2.27)$$

Эти функции линейно независимы между собой, а также по отношению к $J_{\nu}(z)$ и $Y_{\nu}(z)$ (докажите это самостоятельно). Они также удовлетворяют уравнению Бесселя и, таким образом, общее решение этого уравнения может быть записано в одной из следующих форм:

$$\begin{aligned}
y(z) &= A_1 J_{\nu}(z) + A_2 Y_{\nu}(z) = B_1 J_{\nu}(z) + B_2 H_{\nu}^{(1)}(z) = C_1 J_{\nu}(z) + C_2 H_{\nu}^{(2)}(z) = \\
&= D_1 Y_{\nu}(z) + D_2 H_{\nu}^{(1)}(z) = E_1 Y_{\nu}(z) + E_2 H_{\nu}^{(2)}(z) = F_1 H_{\nu}^{(1)}(z) + F_2 H_{\nu}^{(2)}(z),
\end{aligned}$$

где $A_1, \dots, F_2$ — произвольные постоянные.

Из формул (1.2.26–1.2.27) можно найти выражения для функций первого и второго рода:

$$J_{\nu}(z) = \frac{H_{\nu}^{(1)}(z) + H_{\nu}^{(2)}(z)}{2}; \quad Y_{\nu}(z) = \frac{H_{\nu}^{(1)}(z) - H_{\nu}^{(2)}(z)}{2i}, \quad (1.2.28)$$

которые должны что-то напомнить читателю...

Действительно, подставив в формулы (1.2.26–1.2.27) выражения для асимптотических разложений при больших значениях аргумента для функ-

²В некоторых публикациях они называются функциями Ганкеля.

ций $J_{\mathfrak{v}}(z)$ и $Y_{\mathfrak{v}}(z)$, получаем при фиксированном $\mathfrak{v}$ и $|z| \rightarrow \infty$

$$H_{\mathfrak{v}}^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos \left(z - \mathfrak{v} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(z - \mathfrak{v} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \quad (1.2.29)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[i \left(z - \mathfrak{v} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (1.2.30)$$

$$H_{\mathfrak{v}}^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos \left(z - \mathfrak{v} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(z - \mathfrak{v} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \quad (1.2.31)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[-i \left(z - \mathfrak{v} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (1.2.32)$$

1.2.2. Модифицированное уравнение Бесселя

1.2.2.1. Модифицированная функция Бесселя первого рода (функция Инфельда)

Изменим (модифицируем) уравнение Бесселя (1.2.14), введя в него параметр λ :

$$z^2 y'' + zy' + (\lambda^2 z^2 - \mathfrak{v}^2) y = 0. \quad (1.2.33)$$

Нетрудно видеть, что его решениями будут описанные выше функции Бесселя первого, второго и третьего рода, но от аргумента λz (докажите это самостоятельно).

Пусть теперь $\lambda = i$. В этом случае уравнение имеет вид

$$z^2 y'' + zy' - (z^2 + \mathfrak{v}^2) y = 0, \quad (1.2.34)$$

а его общим решением будет

$$y = C_1 J_{\mathfrak{v}}(iz) + C_2 Y_{\mathfrak{v}}(iz). \quad (1.2.35)$$

Поскольку

$$J_{\mathfrak{v}}(iz) = i^{\mathfrak{v}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\mathfrak{v}}}{k! \Gamma(k + \mathfrak{v} + 1)},$$

удобно ввести новую функцию — *модифицированную функцию Бесселя пер-*

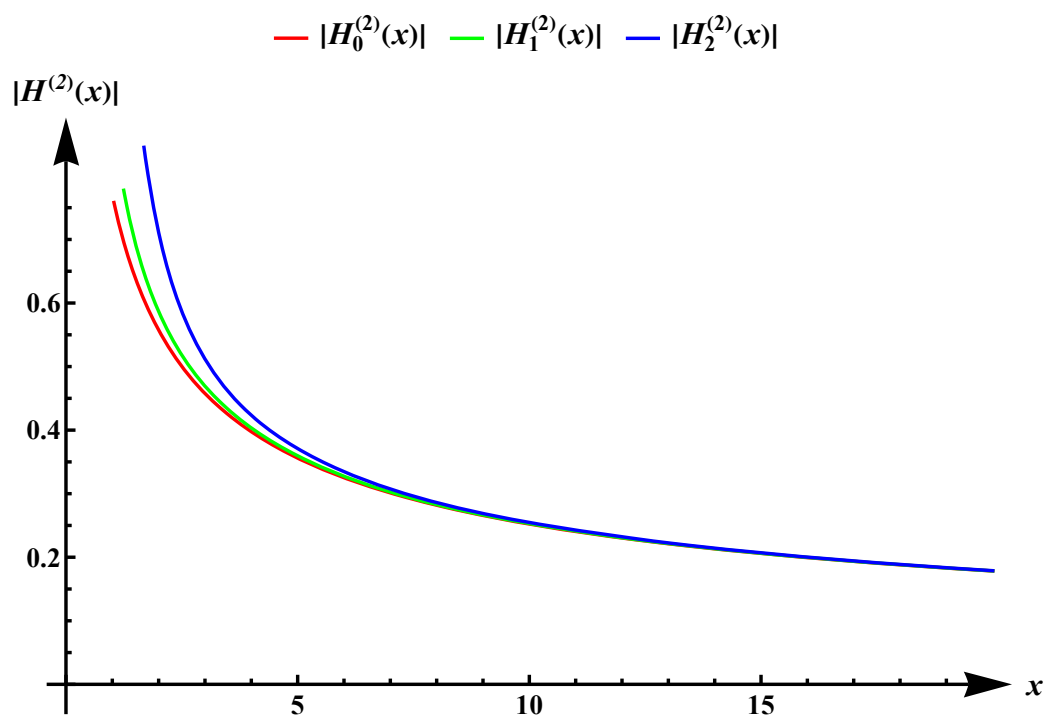
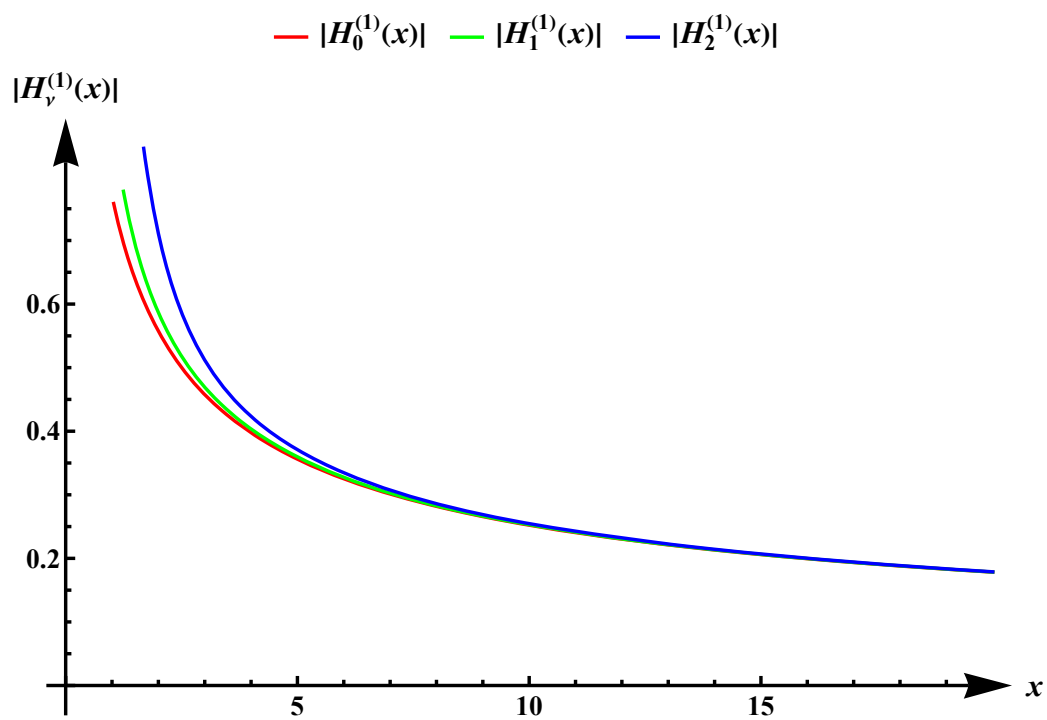


Рис. 1.2.2. Графики функций Ханкеля $|H_v^{(1)}(x)|$ и $|H_v^{(2)}(x)|$ порядков 0–2

вого рода или функцию Инфельда — следующим образом:

$$I_{\nu}(z) = i^{-\nu} J_{\nu}(iz) = e^{-i\nu\pi/2} J_{\nu}(iz) = \quad (1.2.36)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad -\pi < \arg z \leq \frac{\pi}{2}, \quad (1.2.37)$$

$$I_{\nu}(z) = i^{-\nu} J_{\nu}(iz) = e^{3i\nu\pi/2} J_{\nu}(iz) = \quad (1.2.38)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi. \quad (1.2.39)$$

Замечание 2.1. Функция $I_{-\nu}(z)$ также удовлетворяет уравнению (1.2.34).

При малых значениях аргумента ($z \rightarrow 0$, $\nu \neq -1, -2, \dots$ и фиксировано) выполняется

$$I_{\nu}(z) \sim \frac{(z/2)^{\nu}}{\Gamma(\nu + 1)}. \quad (1.2.40)$$

Асимптотическое разложение функции Инфельда при больших значениях аргумента (ν фиксировано, $|z| \rightarrow \infty$, $\mu = 4\nu^2$) имеет вид

$$I_{\nu}(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 - \frac{\mu - 1}{8z} + \frac{(\mu - 1)(\mu - 9)}{2!(8z)^2} - \frac{(\mu - 1)(\mu - 9)(\mu - 25)}{3!(8z)^3} + \dots \right]. \quad (1.2.41)$$

(рисунок 1.2.3).

1.2.2.2. Модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда)

Вторым линейно независимым по отношению к функции $I_{\nu}(z)$ решением уравнения (1.2.34) является функция Макдональда

$$K_{\nu}(z) = \frac{i\pi}{2} e^{i\nu\pi/2} H_{\nu}^{(1)}(iz), \quad -\pi < \arg z \leq \frac{\pi}{2}, \quad (1.2.42)$$

$$K_{\nu}(z) = -\frac{i\pi}{2} e^{-i\nu\pi/2} H_{\nu}^{(2)}(iz), \quad \frac{\pi}{2} < \arg z \leq \pi. \quad (1.2.43)$$

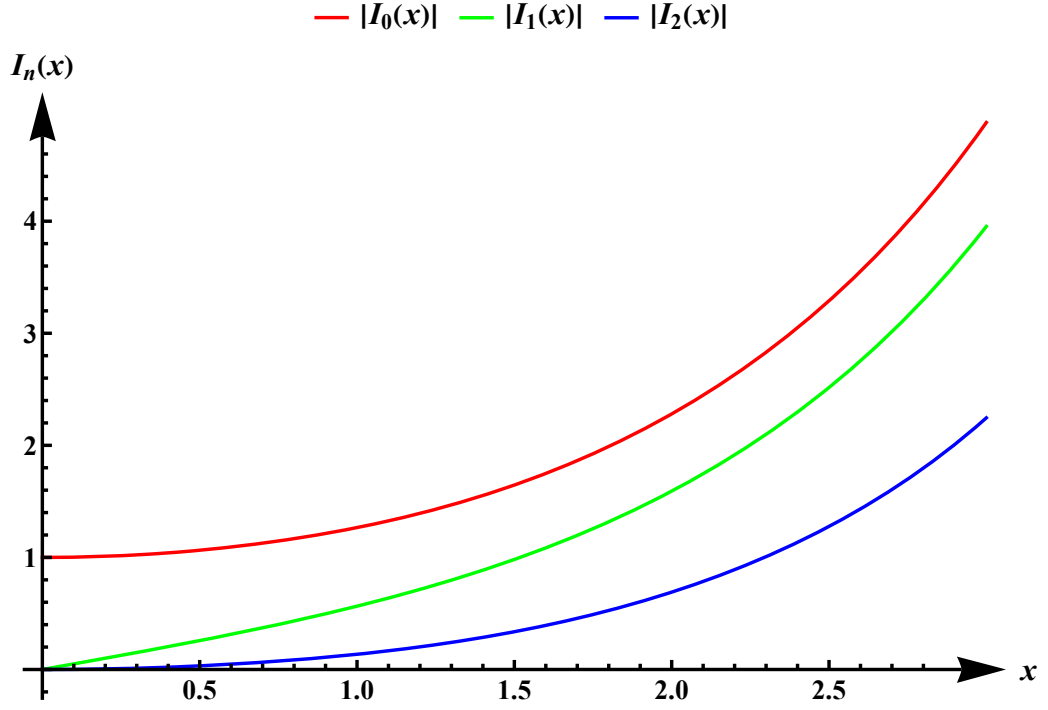


Рис. 1.2.3. Графики функции Инфельда порядков 0–2

Выразим функцию Макдональда через функцию Инфельда.

$$\begin{aligned}
 K_{\nu}(z) &= \frac{i\pi}{2} e^{i\nu\pi/2} H_{\nu}^{(1)}(iz) = \frac{i\pi}{2} e^{i\nu\pi/2} [J_{\nu}(iz) + iY_{\nu}(iz)] = \\
 &= \frac{i\pi}{2} e^{i\nu\pi/2} \left[e^{i\nu\pi/2} I_{\nu}(z) + i \frac{\cos \pi\nu J_{\nu}(iz) - J_{-\nu}(iz)}{\sin \pi\nu} \right] = \\
 &= \frac{\frac{i\pi}{2} e^{i\nu\pi/2}}{\sin \pi\nu} \left[e^{i\nu\pi/2} I_{\nu}(z) \sin \pi\nu + i \cos \pi\nu J_{\nu}(iz) - i J_{-\nu}(iz) \right] = \\
 &= \frac{\frac{i\pi}{2} e^{i\nu\pi/2}}{\sin \pi\nu} \left[e^{i\nu\pi/2} \underbrace{i(\cos \pi\nu - i \sin \pi\nu)}_{\exp(-i\pi\nu)} I_{\nu}(z) - i e^{-i\nu\pi/2} I_{-\nu}(z) \right] = \\
 &= \frac{i^2 \pi}{2 \sin \pi\nu} \left[I_{\nu}(z) - I_{-\nu}(z) \right]
 \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$K_{\nu}(z) = \frac{\pi}{2 \sin \pi\nu} \left[I_{-\nu}(z) - I_{\nu}(z) \right]. \quad (1.2.44)$$

При малых значениях аргумента ($z \rightarrow 0$, $\nu \neq -1, -2, \dots$ и фиксировано) выполняется

$$K_0(z) \sim -\ln z; \quad K_{\nu}(z) \sim \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{z}{2} \right)^{-\nu}, \quad \operatorname{Re} \nu > 0. \quad (1.2.45)$$

Асимптотическое разложение функции Макдональда при больших значениях аргумента (ν фиксировано, $|z| \rightarrow \infty$, $\mu = 4\nu^2$) имеет вид

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[1 - \frac{\mu - 1}{8z} + \frac{(\mu - 1)(\mu - 9)}{2!(8z)^2} - \frac{(\mu - 1)(\mu - 9)(\mu - 25)}{3!(8z)^3} + \dots \right] \quad (1.2.46)$$

(рисунок 1.2.4).

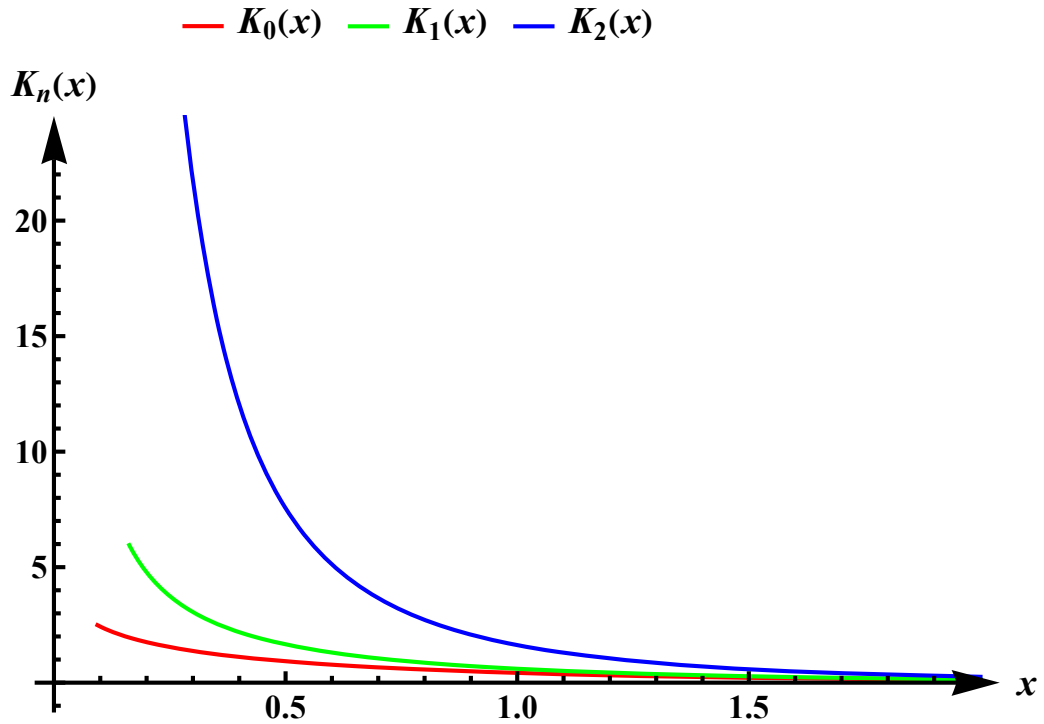


Рис. 1.2.4. Графики функции Макдональда порядков 0–2

Функция Макдональда целого порядка также представима в виде степенного ряда. Опуская доказательство (аналогичное проделанному ранее для функции Неймана), приведем только окончательный результат:

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \ln \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(n+k)!} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)]. \quad (1.2.47)$$

1.2.3. Рекуррентные соотношения

Следующие соотношения доказаны в задачах 2.2, 2.7:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\nu-1}(z) - \mathcal{Z}_{\nu+1}(z) &= 2\mathcal{Z}'_{\nu}(z); \\ \frac{\nu}{z}\mathcal{Z}_{\nu}(z) - \mathcal{Z}_{\nu+1}(z) &= \mathcal{Z}'_{\nu}(z); \\ \mathcal{Z}_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z}\mathcal{Z}_{\nu}(z) &= \mathcal{Z}'_{\nu}(z); \\ \mathcal{Z}_{\nu-1}(z) + \mathcal{Z}_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z}\mathcal{Z}_{\nu}(z).\end{aligned}$$

Здесь и далее $\mathcal{Z}$ означает $J, Y, H^{(1)}, H^{(2)}$ или любую линейную комбинацию этих функций, коэффициенты которой не зависят от z и ν .

1.2.4. Производные

Соотношения доказаны в задачах 2.3, 2.8:

$$\frac{d}{dz} [z^{-\nu} \mathcal{Z}_{\nu}(z)] = -z^{-\nu} \mathcal{Z}_{\nu+1}(z); \quad (1.2.48)$$

$$\frac{d}{dz} [z^{\nu} \mathcal{Z}_{\nu}(z)] = z^{\nu} \mathcal{Z}_{\nu-1}(z). \quad (1.2.49)$$

Следствие 4.1.

$$\mathcal{Z}'_0(z) = -\mathcal{Z}_1(z). \quad (1.2.50)$$

Следующую формулу приведем без вывода:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\nu}^{(k)}(z) &= \frac{1}{2^k} [\mathcal{Z}_{\nu-k}(z) - \left(\frac{k}{1}\right) \mathcal{Z}_{\nu-k+2}(z) + \left(\frac{k}{2}\right) \mathcal{Z}_{\nu-k+4}(z) - \dots + \\ &(-1)^{k-1} \left(\frac{k}{k-1}\right) \mathcal{Z}_{\nu+k-2}(z) + (-1)^k \mathcal{Z}_{\nu+k}(z)], \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

1.2.5. Производящая функция

Запишем разложения в степенные ряды двух экспонент:

$$\exp\left(\frac{zt}{2}\right) = 1 + \frac{zt}{1!2} + \frac{(zt)^2}{2!2^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k t^k}{k! 2^k}, \quad (1.2.51)$$

$$\exp\left(-\frac{zt^{-1}}{2}\right) = 1 - \frac{zt^{-1}}{1!2} + \frac{(zt^{-1})^2}{2!2^2} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^m t^{-m}}{m! 2^m}. \quad (1.2.52)$$

Ряд (1.2.51) сходится для всех t , ряд (1.2.52) — для $t \neq 0$ (докажите это самостоятельно).

Перемножим эти ряды почленно:

$$\exp \left[\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{k+m} t^{k-m}}{k! m! 2^{k+m}}. \quad (1.2.53)$$

Введем обозначение

$$k - m = \begin{cases} n, & k > m, \\ -n, & k < m \end{cases}$$

и соберем коэффициенты при одинаковых степенях t .

1. $k > m$, тогда $k = m + n$. Коэффициенты при t^n :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{n+2m}}{m!(m+n)! 2^{n+2m}} = J_n(z);$$

2. $k < m$, тогда $k = m - n$. Коэффициенты при t^{-n} :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{-n+2m}}{m!(m-n)! 2^{-n+2m}} = J_{-n}(z);$$

3. $k = m$, тогда $n = 0$. Коэффициенты при t^0 :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{m! m! 2^{2m}} = J_0(z).$$

Таким образом,

$$\exp \left[\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n. \quad (1.2.54)$$

Определение 5.1. Функция $\Phi(z, t) = \exp \left[\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right]$ называется **производящей функцией для функций Бесселя целого порядка**. Формула (1.2.53) определяет разложение производящей функции в ряд Лорана.

Различные приложения производящей функции рассмотрены в задачах (2.14–2.17).

1.2.6. Ортогональность и нули цилиндрических функций

1.2.6.1. Соотношение ортогональности

Рассмотрим дифференциальное уравнение Бесселя для вещественной переменной

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) y = 0$$

или

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0, \quad (1.2.55)$$

одним из решений которого является функция Бесселя первого рода $J_\nu(\lambda x)$.

Запишем уравнение (1.2.55) дважды: пусть для $\lambda_1 = \text{const}$ решением будет $y_1(x) = J_\nu(\lambda_1 x)$, для $\lambda_2 = \text{const}$ — $y_2(x) = J_\nu(\lambda_2 x)$ (в дальнейшем аргументы функций y_1 и y_2 будем для компактности опускать):

$$\begin{aligned} y_1'' + \frac{1}{x} y_1' + \left(\lambda_1^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y_1 &= 0, \\ y_2'' + \frac{1}{x} y_2' + \left(\lambda_2^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Домножим первое уравнение на y_2 , второе на y_1 и вычтем второе уравнение из первого:

$$y_1'' y_2 + \frac{1}{x} y_1' y_2 + \left(\lambda_1^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y_1 y_2 - \left[y_2'' y_1 + \frac{1}{x} y_2' y_1 + \left(\lambda_2^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y_2 y_1 \right] = 0,$$

откуда

$$y_1'' y_2 - y_2'' y_1 + \frac{1}{x} (y_1' y_2 - y_1 y_2') + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) y_1 y_2 = 0. \quad (1.2.56)$$

Введем вспомогательную функцию $u = y_1' y_2 - y_1 y_2'$, производная которой $u' = y_1'' y_2 - y_1 y_2''$. Подставив эти соотношения в уравнение (1.2.56), получаем

$$u' + \frac{1}{x} u = (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) y_1 y_2$$

или

$$\begin{aligned} x u' + u &= (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) y_1 y_2 x; \\ \frac{d}{dx}(u x) &= (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) y_1 y_2 x. \end{aligned}$$

Проинтегрируем полученное равенство от нуля до некоторого $\ell > 0$:

$$\int_0^{\ell} \frac{d}{dx}(ux) dx = \int_0^{\ell} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) y_1 y_2 x dx,$$

откуда

$$ux \Big|_{x=0}^{x=\ell} = (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \int_0^{\ell} y_1 y_2 x dx.$$

Можно показать, что интеграл в правой части сходится для всех $\nu > -1$. Вернемся от временных обозначений u, y_1, y_2 к функциям Бесселя:

$$\begin{aligned} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \int_0^{\ell} J_{\nu}(\lambda_1 x) J_{\nu}(\lambda_2 x) x dx = \\ = \ell \left[\lambda_1 J'_{\nu}(\lambda_1 \ell) J_{\nu}(\lambda_2 \ell) - \lambda_2 J_{\nu}(\lambda_1 \ell) J'_{\nu}(\lambda_2 \ell) \right]. \end{aligned} \quad (1.2.57)$$

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и эти числа суть *различные корни уравнений* $J_{\nu}(x\ell) = 0$ или $J'_{\nu}(x\ell) = 0$. Тогда

$$\int_0^{\ell} J_{\nu}(\lambda_1 x) J_{\nu}(\lambda_2 x) x dx = 0.$$

Если же $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} J_{\nu}^2(\lambda x) x dx &= \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda} \frac{\ell}{\lambda_2^2 - \lambda^2} \left[\lambda J'_{\nu}(\lambda \ell) J_{\nu}(\lambda_2 \ell) - \lambda_2 \underbrace{J_{\nu}(\lambda \ell) J'_{\nu}(\lambda_2 \ell)}_{=0} \right] = \\ &= \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda} \ell \frac{\lambda J'_{\nu}(\lambda \ell) \cdot J_{\nu}(\lambda_2 \ell)}{\lambda_2^2 - \lambda^2} = [\text{правило Лопиталя}] = \\ &= \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda} \ell \frac{\lambda J'_{\nu}(\lambda \ell) \cdot \ell J'_{\nu}(\lambda_2 \ell)}{2\lambda_2} = \frac{\ell^2}{2} J_{\nu}^2(\lambda \ell). \end{aligned}$$

Используем формулу рекуррентного соотношения (доказана в задаче 2.3):

$$J'_{\nu}(x) = \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x) - J_{\nu+1}(x).$$

Сделаем подстановку $x = \lambda\ell$, получаем $J'_\nu(\lambda\ell) = -J_{\nu+1}(\lambda\ell)$, что дает **соотношение ортогональности для функций Бесселя первого рода**:

$$\int_0^\ell J_\nu\left(j_{\nu,m}\frac{x}{\ell}\right) J_\nu\left(j_{\nu,n}\frac{x}{\ell}\right) x dx = \frac{\ell^2}{2} J_{\nu+1}^2(j_{\nu,n}) \delta_n^m, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.2.58)$$

где $j_{\nu,n}$ — положительные корни уравнения $J_\nu(x) = 0$, расположенные в порядке возрастания (иначе говоря, нули функции Бесселя порядка ν).

Замечание 6.1. На отрезке $[0, 1]$ равенство (1.2.58) имеет вид

$$\int_0^1 J_\nu(j_{\nu,m}x) J_\nu(j_{\nu,n}x) x dx = \frac{1}{2} J_{\nu+1}^2(j_{\nu,n}) \delta_n^m. \quad (1.2.59)$$

1.2.6.2. Нули функции Бесселя

Рассмотрим формулу (1.2.15) для функции Бесселя первого рода от комплексного аргумента:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)}.$$

При $\nu > -1$ все коэффициенты при степенях z вещественны.

Пусть $z = \rho e^{i\varphi}$, тогда

$$(\bar{z})^{2k+\nu} = \rho^{2k+\nu} e^{-i(2k+\nu)\varphi}.$$

Отсюда следует, что

$$J_\nu(\bar{z}) = \overline{J_\nu(z)}. \quad (1.2.60)$$

Таким образом, если z_0 корень уравнения $J_\nu(z\ell) = 0$, то и $\bar{z}_0$ будет корнем того же уравнения.

Обратимся теперь к формуле (1.2.57), положив в ней $\lambda_1 = z_0$, $\lambda_2 = \bar{z}_0$:

$$(z_0^2 - \bar{z}_0^2) \int_0^\ell J_\nu(z_0 x) J_\nu(\bar{z}_0 x) x dx = \ell \left[z_0 J'_\nu(z_0 \ell) J_\nu(\bar{z}_0 \ell) - \bar{z}_0 J_\nu(z_0 \ell) J'_\nu(\bar{z}_0 \ell) \right] = 0.$$

С учетом (1.2.60) $J_\nu(\bar{z}) = \overline{J_\nu(z)}$ приходим к равенству

$$(z_0^2 - \bar{z}_0^2) \int_0^\ell |J_\nu(z_0 x)|^2 x dx = 0.$$

Поскольку интеграл очевидно не равен нулю, получаем $z_0^2 = \overline{z_0}^2$, т. е. $z_0 = \overline{z_0}$ или $z_0 = -\overline{z_0}$. Таким образом, нули функции Бесселя первого рода порядка $\nu > -1$ могут быть или действительными, или чисто мнимыми.

Из полученной методом перевала асимптотической формулы (1.2.89)

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad \nu \text{ фиксировано и } |x| \rightarrow \infty$$

следует, что функция Бесселя имеет бесконечное число положительных нулей, которые для больших значений аргумента задаются формулой

$$j_{\nu,k} \sim \nu\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{3\pi}{4} + \nu\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.2.61)$$

При этом

$$J_\nu(-z) = e^{i\pi\nu} J_\nu(z)$$

и, таким образом, действительные нули расположены симметрично относительно начала координат.

Отметим без доказательства, что нули цилиндрических функций перемежаются согласно неравенствам

$$j_{\nu,1} < j_{\nu+1,1} < j_{\nu,2} < j_{\nu+1,2} < j_{\nu,3} < \dots$$

(рисунок 1.2.5)

Положительные нули двух линейно независимых действительных цилиндрических функций одного порядка также перемежаются (рисунок 1.2.6).

Рассмотрим теперь распределение чисто мнимых нулей. Пусть $z = ix$ и $\nu \in \mathbb{R}$, тогда

$$\frac{J_\nu(ix)}{(ix)^\nu} = \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (1.2.62)$$

Порядок ν фиксирован, поэтому начиная с некоторого значения k_0 выполняется неравенство $\nu + k + 1 > 0$. Следовательно, все коэффициенты ряда, кроме конечного их числа (для которых $k < k_0$) положительны. Кроме того, для больших $|x|$ знак правой части формулы (1.2.62) определяется слагаемыми с большими значениями k , поэтому $J_\nu(ix)/(ix)^\nu > 0$, т. е. $J_\nu(ix) \neq 0$.

В разделе «Теорема единственности и аналитическое продолжение» курса ТФКП было доказано, что аналитическая функция может иметь бесконечное число нулей лишь в открытой или неограниченной области. Применяв это утверждение, можно сделать вывод, что на конечном отрезке мнимой оси целая функция имеет лишь конечное число нулей и, следовательно, для любого действительного ν функция $J_\nu(ix)$ может иметь лишь конечное число чисто мнимых нулей. Если же $\nu > -1$, то все коэффициенты ряда (1.2.62) положительны и мнимых нулей нет.

Сформулируем полученные результаты в форме теорем.

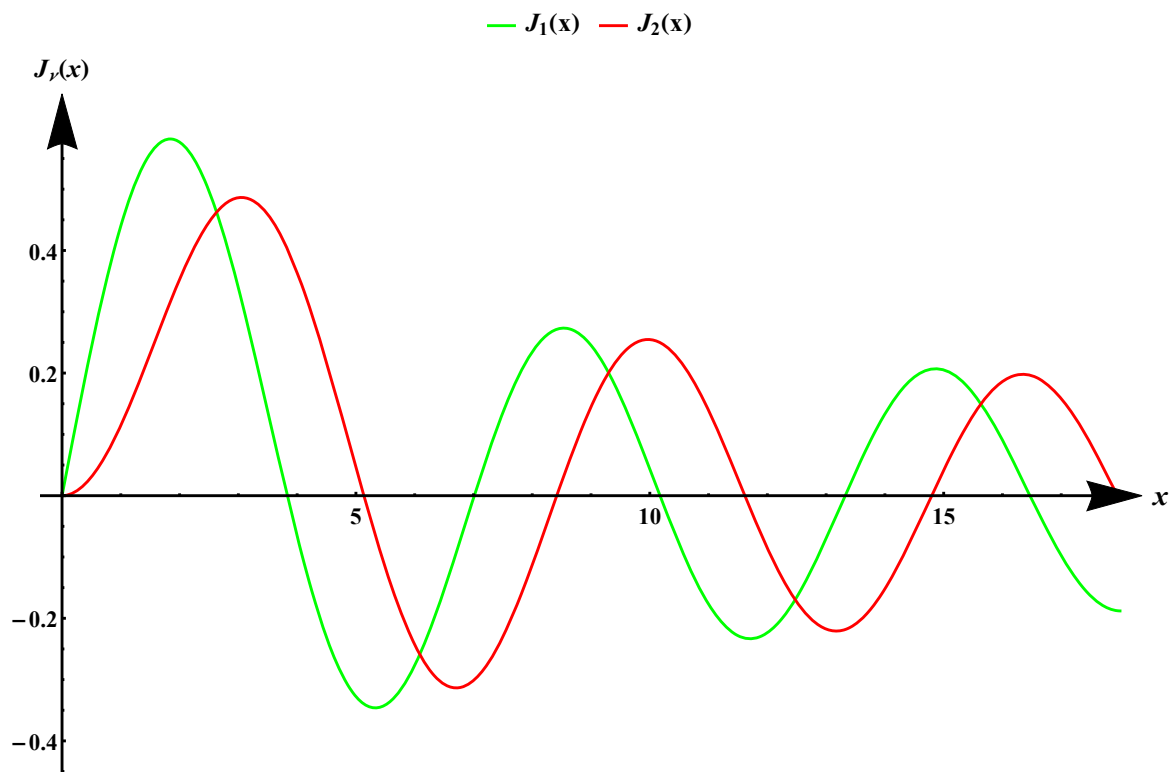


Рис. 1.2.5. Нули функций Бесселя порядков 1 и 2

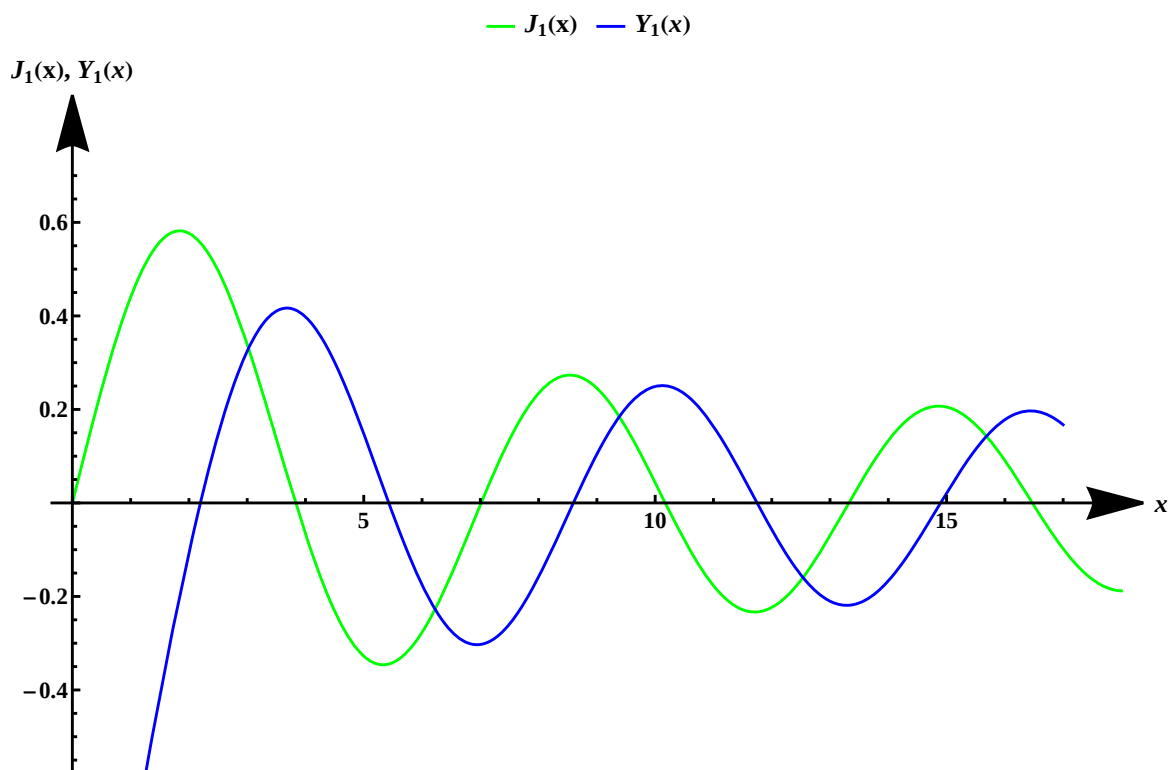


Рис. 1.2.6. Нули функций $J_1(x)$ и $Y_1(x)$

Теорема 6.1. Функция $J_n(z)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) не имеет комплексных нулей и имеет бесконечное множество вещественных нулей, расположенных симметрично относительно точки $z = 0$, которая в случае $n = 1, 2, \dots$ принадлежит к их числу. Все нули функции — простые, за исключением точки $z = 0$, которая при $n = 1, 2, \dots$ является нулем кратности n .

Теорема 6.2. Функция $J_\nu(z)$, $|\arg z| < \pi$, $\nu \in \mathbb{R}$ имеет бесконечное множество вещественных положительных нулей и конечное число $2M(\nu)$ комплексных сопряженных нулей, где, в зависимости от значения параметра ν ,

$$\begin{aligned} M(\nu) &= 0, \text{ если } \nu > -1 \text{ или } \nu = -1, -2, -3, \dots \\ M(\nu) &= m \text{ при } -(m+1) < \nu < -m, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Если $-2m < \nu < -(2m-1)$, среди комплексных нулей имеется пара чисто мнимых.

Все нули функции простые, исключая, может быть, точку $z = 0$.

Замечание 6.1. Точные аналитические выражения для нулей функции Бесселя существуют только в немногих частных случаях.

Замечание 6.2. Все приведенные утверждения о свойствах нулей относятся и к функции Неймана $Y_\nu(z)$.

1.2.7. Ряды Фурье – Бесселя

Определение 7.1. *Рядом Фурье – Бесселя* для некоторой функции вещественной переменной $f(x)$ называется ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\nu \left(j_{\nu,n} \frac{x}{\ell} \right), \quad (1.2.63)$$

$$0 \leq x \leq \ell, \quad 0 < j_{\nu,1} < j_{\nu,2} < \dots < j_{\nu,n} < \dots, \quad \nu > -1.$$

Будем предполагать, что ряд (1.2.63) существует и равномерно сходится на $[0, \ell]$. Домножим обе части равенства на $x J_\nu \left(j_{\nu,m} \frac{x}{\ell} \right)$ и проинтегрируем результат умножения в пределах от 0 до ℓ , причем в правой части интегрирование можно произвести почленно в силу предположенной равномерной сходимости ряда (1.2.63):

$$\begin{aligned} \int_0^\ell x f(x) J_\nu \left(j_{\nu,m} \frac{x}{\ell} \right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^\ell x J_\nu \left(j_{\nu,m} \frac{x}{\ell} \right) J_\nu \left(j_{\nu,n} \frac{x}{\ell} \right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\ell^2}{2} J_{\nu+1}^2(j_{\nu,m}) \delta_n^m = c_m \frac{\ell^2}{2} J_{\nu+1}^2(j_{\nu,m}). \end{aligned} \quad (1.2.64)$$

Таким образом, коэффициенты ряда (1.2.63) определяются равенством

$$c_n = \frac{2}{\ell^2 J_{\nu+1}^2(j_{\nu,n})} \int_0^\ell x f(x) J_\nu \left(j_{\nu,n} \frac{x}{\ell} \right) dx. \quad (1.2.65)$$

Подставив $j_{\nu,n}$ вместо z в равенство (2.2.2), получаем

$$\frac{\nu}{j_{\nu,n}} J_\nu(j_{\nu,n}) - J_{\nu+1}(j_{\nu,n}) = J'_\nu(j_{\nu,n}),$$

откуда следует, что $J_{\nu+1}^2(j_{\nu,n}) = J_\nu'^2(j_{\nu,n})$. Это дает нам альтернативное представление для коэффициентов ряда Фурье – Бесселя:

$$c_n = \frac{2}{\ell^2 J_\nu'^2(j_{\nu,n})} \int_0^\ell x f(x) J_\nu \left(j_{\nu,n} \frac{x}{\ell} \right) dx. \quad (1.2.66)$$

Условия, которым должна удовлетворять функция $f(x)$ для того, чтобы ее можно было разложить в ряд Фурье – Бесселя, определяются следующей теоремой.

Теорема 7.1 (без доказательства). *Если для функции $f(x)$ существует интеграл*

$$\int_0^\ell t^{\frac{1}{2}} |f(t)| dt \quad (1.2.67)$$

и если функция $f(x)$ обладает ограниченным изменением в любом интервале (a, b) , удовлетворяющем условию $0 < a < b < \ell$, то при $\nu > -\frac{1}{2}$ для всех значений x в интервале (a, b) имеет место разложение в бесконечный ряд:

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\nu \left(j_{\nu,n} \frac{x}{\ell} \right), \quad (1.2.68)$$

где $0 < j_{\nu,1} < j_{\nu,2} < \dots$ суть положительные корни (нули) функции $J_\nu(x)$, перенумерованные в порядке их возрастания, а коэффициенты c_n определяются формулами (1.2.65) или (1.2.66).

Определение 7.2. Функция $f(x)$ называется **функцией с ограниченным изменением** в интервале (a, b) , если при любом делении этого интервала точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

сумма

$$\sum_{m=1}^n \left| f(x_m) - f(x_{m-1}) \right|$$

имеет точную верхнюю границу M , не зависящую от n при любом выборе x_m ($0 < m < n$).

1.2.8. Интегралы, связанные с цилиндрическими функциями

1.2.8.1. Интеграл Бесселя

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \varphi - n\varphi) d\varphi.$$

Вычисляется в задаче [2.18](#).

1.2.8.2. Интеграл Неймана

$$J_n^2(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_{2n}(2z \sin \varphi) d\varphi.$$

Вычисляется в задаче [2.21](#).

1.2.8.3. Интеграл Вебера

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx = \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1. \quad (1.2.69)$$

Вычисляется в задаче [2.22](#).

1.2.8.4. Формула Пуассона

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \cos zt dt = \\ &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^\pi \cos(z \cos \varphi) \sin^{2\nu} \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Вычисляется в задаче [2.23](#).

1.2.9. Цилиндрические функции различных порядков

1.2.9.1. Общие положения

Поведение цилиндрических функций целого порядка ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) уже рассмотрено выше, интересному случаю $\nu = \pm 1/2, \pm 1 + 1/2, \pm 2 + 1/2, \dots$ посвящен раздел 1.2.9.2. Если же ν принимает произвольные вещественные значения, поведение функций меняется с параметром непрерывно.

Отметим некоторые закономерности для частного случая функций от действительного положительного аргумента ($z = x > 0$).

1. При $\nu \geq 0$ функция Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ представляет собой вещественную ограниченную функцию переменной x , имеющую колебательный характер. Функция Бесселя второго рода $Y_\nu(x)$ в этом случае вещественная ограниченная на бесконечности колеблющаяся функция с расходимостью в нуле.
2. При $\nu < 0$ у функции первого рода также возникает расходимость при $x = 0$.

1.2.9.2. Цилиндрические функции полуцелого порядка. Сферические функции Бесселя

Следующие соотношения доказаны в задаче 2.4:

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad (1.2.70)$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z. \quad (1.2.71)$$

Воспользовавшись формулами (1.2.48–1.2.49), легко показать, что

$$J_{\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right),$$
$$J_{-\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(-\frac{\cos z}{z} - \sin z \right)$$

и так далее.

Применим эти результаты к функции Неймана. С учетом формулы (1.2.20) имеем:

$$Y_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{J_{\frac{1}{2}}(z) \cos \pi \frac{1}{2} - J_{-\frac{1}{2}}(z)}{\sin \pi \frac{1}{2}} = -J_{-\frac{1}{2}}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z.$$

и вообще

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^{n+1} J_{-n-\frac{1}{2}}(z), \quad (1.2.72)$$

$$Y_{-n-\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n J_{n+\frac{1}{2}}(z). \quad (1.2.73)$$

Удобнее, однако, свести цилиндрические функции полуцелого порядка к так называемым *сферическим функциям Бесселя* первого, второго и третьего рода соответственно:

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z), \quad (1.2.74)$$

$$y_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{n+\frac{1}{2}}(z), \quad (1.2.75)$$

$$h_n^{(1,2)}(z) = j_n(z) \pm iy_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1,2)}(z). \quad (1.2.76)$$

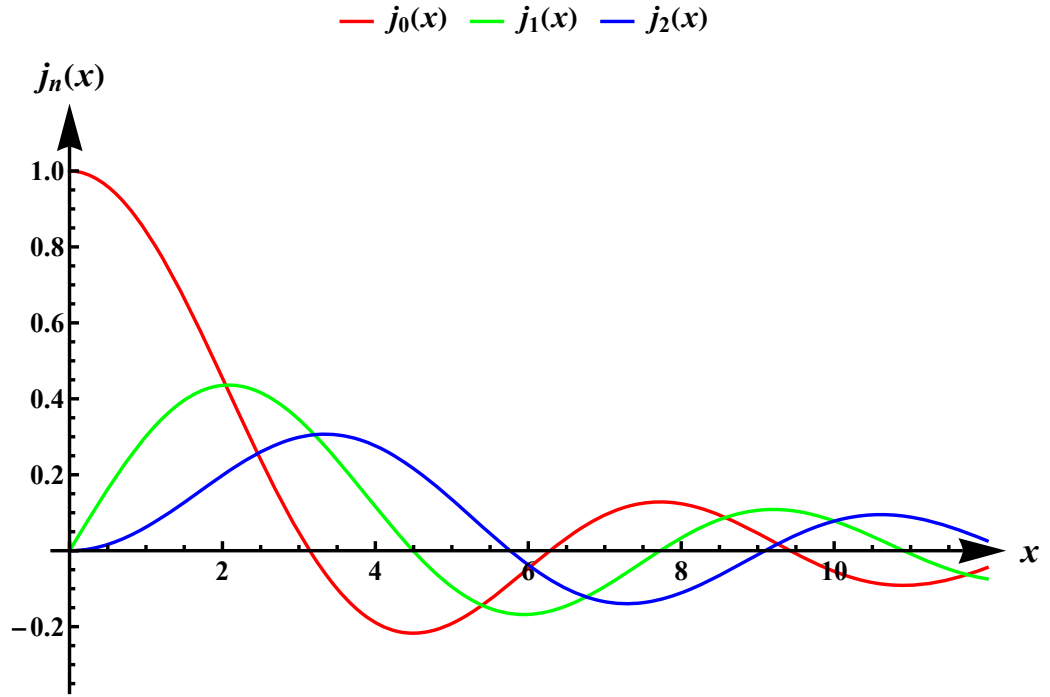


Рис. 1.2.7. Графики сферических функций Бесселя 1-го рода порядков 0–2

Можно показать, что любая из этих функций удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z^2 w'' + 2zw' + [z^2 - n(n+1)] w = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2.77)$$

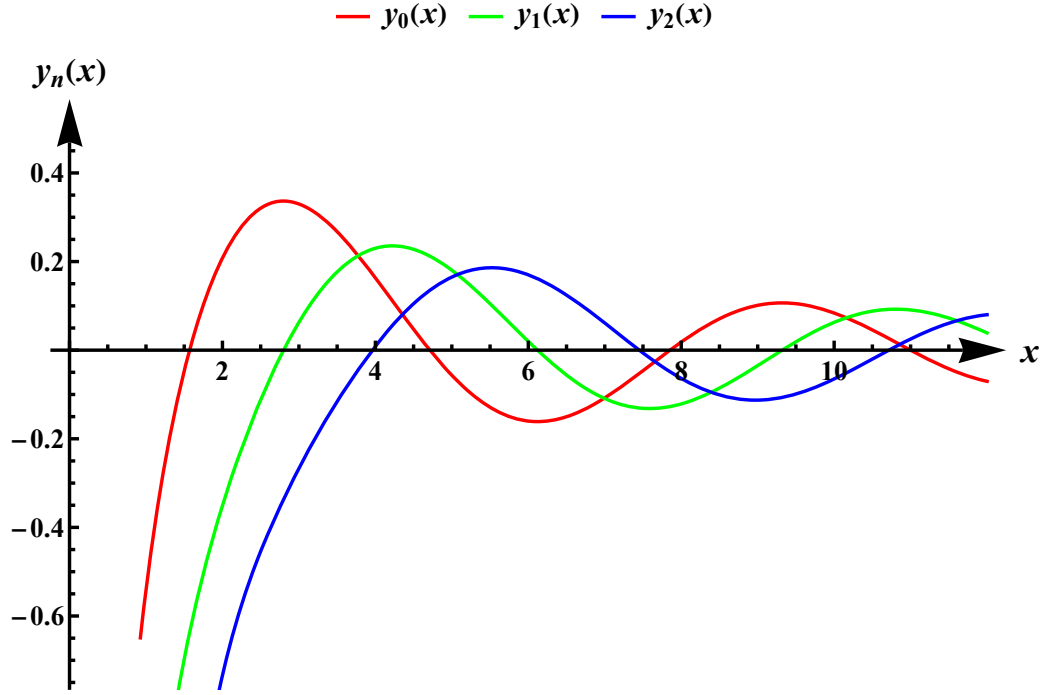


Рис. 1.2.8. Графики сферических функций Бесселя 2-го рода порядков 0–2

Проверим это утверждение на сферической функции Бесселя первого рода. Пусть

$$w(z) = j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z),$$

тогда согласно формуле (2.2.2)

$$w'(z) = \frac{1}{z} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \left[n J_{n+\frac{1}{2}}(z) - z J_{n+\frac{3}{2}}(z) \right],$$

$$w''(z) = \frac{1}{z^2} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \left[(n(n-1) - z^2) J_{n+\frac{1}{2}}(z) + 2z J_{n+\frac{3}{2}}(z) \right].$$

Подставив эти выражения в левую часть уравнения (1.2.77), получаем

$$\begin{aligned} & z^2 \frac{1}{z^2} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \left[(n(n-1) - z^2) J_{n+\frac{1}{2}}(z) + 2z J_{n+\frac{3}{2}}(z) \right] + \\ & + 2z \frac{1}{z} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \left[n J_{n+\frac{1}{2}}(z) - z J_{n+\frac{3}{2}}(z) \right] + [z^2 - n(n+1)] \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \\ & = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \left\{ (n(n-1) - z^2) J_{n+\frac{1}{2}}(z) + \cancel{2z J_{n+\frac{3}{2}}(z)} + \right. \end{aligned}$$

$$+2nJ_{n+\frac{1}{2}}(z) - \cancel{2zJ_{n+\frac{3}{2}}(z)} + \left[z^2 - n(n+1) \right] J_{n+\frac{1}{2}}(z) \Big\} = \\ \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \left\{ n(n-1) + 2n - n(n+1) \right\} J_{n+\frac{1}{2}}(z) = 0. \quad \boxtimes$$

Все функции (1.2.74-1.2.76) линейно независимы. Приведем формулы для вронскианов, доказанные в задаче 2.33:

$$W[j_n(z), y_n(z)] = z^{-2}, \quad (1.2.78)$$

$$W[h_n^{(1)}(z), h_n^{(2)}(z)] = -2iz^{-2}. \quad (1.2.79)$$

Таким образом, линейная комбинация любой пары функций задает полное решение уравнения (1.2.77) для любого n .

Каждая функция (1.2.74-1.2.76) при фиксированном n выражается через конечную сумму элементарных функций (синусы, косинусы и целые отрицательные степени z), но эти выражения громоздки и неудобны для использования:

$$\begin{aligned} j_0(z) &= \frac{\sin z}{z}; \\ j_1(z) &= \frac{\sin z - z \cos z}{z^2}; \\ j_2(z) &= -\frac{(z^2 - 3) \sin z + 3z \cos z}{z^3}; \\ j_3(z) &= \frac{3(5 - 2z^2) \sin z + z(z^2 - 15) \cos z}{z^4}; \\ j_4(z) &= \frac{5z(2z^2 - 21) \cos z + (z^4 - 45z^2 + 105) \sin z}{z^5}; \\ j_5(z) &= \frac{15(z^4 - 28z^2 + 63) \sin z - z(z^4 - 105z^2 + 945) \cos z}{z^6}; \\ y_0(z) &= -\frac{\cos z}{z}; \\ y_1(z) &= -\frac{z \sin z + \cos z}{z^2}; \\ y_2(z) &= \frac{(z^2 - 3) \cos z - 3z \sin z}{z^3}; \\ y_3(z) &= \frac{z(z^2 - 15) \sin z + 3(2z^2 - 5) \cos z}{z^4}; \\ y_4(z) &= \frac{5z(2z^2 - 21) \sin z - (z^4 - 45z^2 + 105) \cos z}{z^5}; \\ y_5(z) &= -\frac{z(z^4 - 105z^2 + 945) \sin z + 15(z^4 - 28z^2 + 63) \cos z}{z^6}. \end{aligned}$$

Компактную запись задают *формулы Рэлея*:

$$j_n(z) = z^n \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\sin z}{z}, \quad (1.2.80)$$

$$y_n(z) = -z^n \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\cos z}{z}. \quad (1.2.81)$$

Пусть $\mathcal{S}$ означает $j, y, h^{(1)}, h^{(2)}$ или любую линейную комбинацию этих функций, коэффициенты которой не зависят от z и n . Тогда рекуррентное соотношение для любой сферической функции Бесселя можно записать в одной из следующих форм:

$$\mathcal{S}_{n-1}(z) + \mathcal{S}_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{z} \mathcal{S}_n(z), \quad (1.2.82)$$

$$n\mathcal{S}_{n-1}(z) - (n+1)\mathcal{S}_{n+1}(z) = (2n+1)\mathcal{S}'_n(z), \quad (1.2.83)$$

$$\frac{n+1}{z} \mathcal{S}_n(z) + \mathcal{S}'_n(z) = \mathcal{S}_{n-1}(z), \quad (1.2.84)$$

$$\frac{n}{z} \mathcal{S}_n(z) - \mathcal{S}'_n(z) = \mathcal{S}_{n+1}(z). \quad (1.2.85)$$

Эти соотношения доказаны также в задаче [2.34](#).

1.2.9.3. Дифференцирование по порядку

Будем рассматривать функцию Бесселя первого рода как функцию порядка, считая при этом $\nu \in \mathbb{R}$. Продифференцируем почленно ряд [\(1.2.15\)](#) по «переменной» ν :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} &= \frac{\partial}{\partial \nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k+\nu} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k+\nu} \left[\ln \left(\frac{z}{2} \right) - \psi(k + \nu + 1) \right] = \\ &= J_\nu(z) \left[\ln \left(\frac{z}{2} \right) - \psi(k + \nu + 1) \right] \end{aligned} \quad (1.2.86)$$

(мы снова воспользовались формулой [\(1.2.140\)](#) для вычисления производной гамма-функции). Сравним полученное выражение с разложением в ряд [\(1.2.23\)](#) функции Неймана целого порядка

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2} \right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)]. \end{aligned}$$

Покажем, что некоторое сходство формул не случайно. Вернемся к формуле (1.2.20)

$$Y_{\mathbf{v}}(z) = \frac{J_{\mathbf{v}}(z) \cos \pi \mathbf{v} - J_{-\mathbf{v}}(z)}{\sin \pi \mathbf{v}}$$

и получим выражение для функции Неймана целого порядка.

Положим $\mathbf{v} = n + \varepsilon$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, воспользовавшись правилом Лопиталья:

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J_{n+\varepsilon}(z) \cos \pi(n + \varepsilon) - J_{-(n+\varepsilon)}(z)}{\sin \pi(n + \varepsilon)} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \cos \pi(n + \varepsilon)} \left[\frac{\partial J_{n+\varepsilon}(z)}{\partial \varepsilon} \cos \pi(n + \varepsilon) - \right. \\ &\quad \left. - \pi \sin \pi(n + \varepsilon) J_{n+\varepsilon}(z) - \frac{\partial J_{-(n+\varepsilon)}(z)}{\partial \varepsilon} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\partial J_{n+\varepsilon}(z)}{\partial \varepsilon} - (-1)^n \frac{\partial J_{-(n+\varepsilon)}(z)}{\partial \varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

Заменим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial J_{\pm(n+\varepsilon)}}{\partial \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial J_{\pm(n+\varepsilon)}}{\partial(n + \varepsilon)}$$

на выражения из формулы (1.2.86) при $\mathbf{v} = n$. Тогда

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \frac{1}{\pi} \left[J_n(z) \ln \left(\frac{z}{2} \right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + n + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k+n} \psi(k + n + 1) + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n J_{-n}(z) \ln \left(\frac{z}{2} \right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{k! \Gamma(k - n + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n} \psi(k - n + 1) \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[2J_n(z) \ln \left(\frac{z}{2} \right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + n + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k+n} \psi(k + n + 1) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{k! \Gamma(k - n + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n} \psi(k - n + 1) \right]. \end{aligned}$$

Последний ряд разделим на две части:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{k! \Gamma(k - n + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n} \psi(k - n + 1) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+n}}{k! \Gamma(k - n + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n} \psi(k - n + 1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{k! \Gamma(k-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \psi(k-n+1) = \\
& = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+n}}{k! \Gamma(k-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \psi(k-n+1) + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2n}}{(k+n)! \Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \psi(k+1).
\end{aligned}$$

В слагаемом

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+n}}{k! \Gamma(k-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \psi(k-n+1)$$

воспользуемся формулой (1.2.143)

$$\lim_{z \rightarrow -n} \frac{\psi(z)}{\Gamma(z)} = (-1)^{n+1} n!,$$

где заменим n на $n-k$. Тогда

$$\frac{\psi(k-n+1)}{\Gamma(k-n+1)} = (-1)^{n-k} (n-k-1)!$$

Теперь

$$\begin{aligned}
Y_n(z) = \frac{1}{\pi} & \left[2J_n(z) \ln \left(\frac{z}{2}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \right. \\
& - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \psi(k+n+1) - \\
& \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \psi(k+1) \right],
\end{aligned}$$

что совпадает с разложением (1.2.23). Итак,

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_{\nu}(z)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right] \bigg|_{\nu=n}. \quad (1.2.87)$$

1.2.9.4. Асимптотические разложения

Воспользовавшись методом перевала, можно получить [33, с. 485–486] асимптотическое разложение функции Бесселя при больших значениях аргумента:

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad n \text{ фиксировано и } |x| \rightarrow \infty. \quad (1.2.88)$$

(рисунок 1.2.9). Можно показать, что эта формула справедлива и для нецелых значений порядка, т. е. при замене $n \in \mathbb{Z}$ на $\nu \in \mathbb{R}$ при условии, что $|x| \geq 0$:

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad \nu \text{ фиксировано, } |x| \rightarrow \infty. \quad (1.2.89)$$

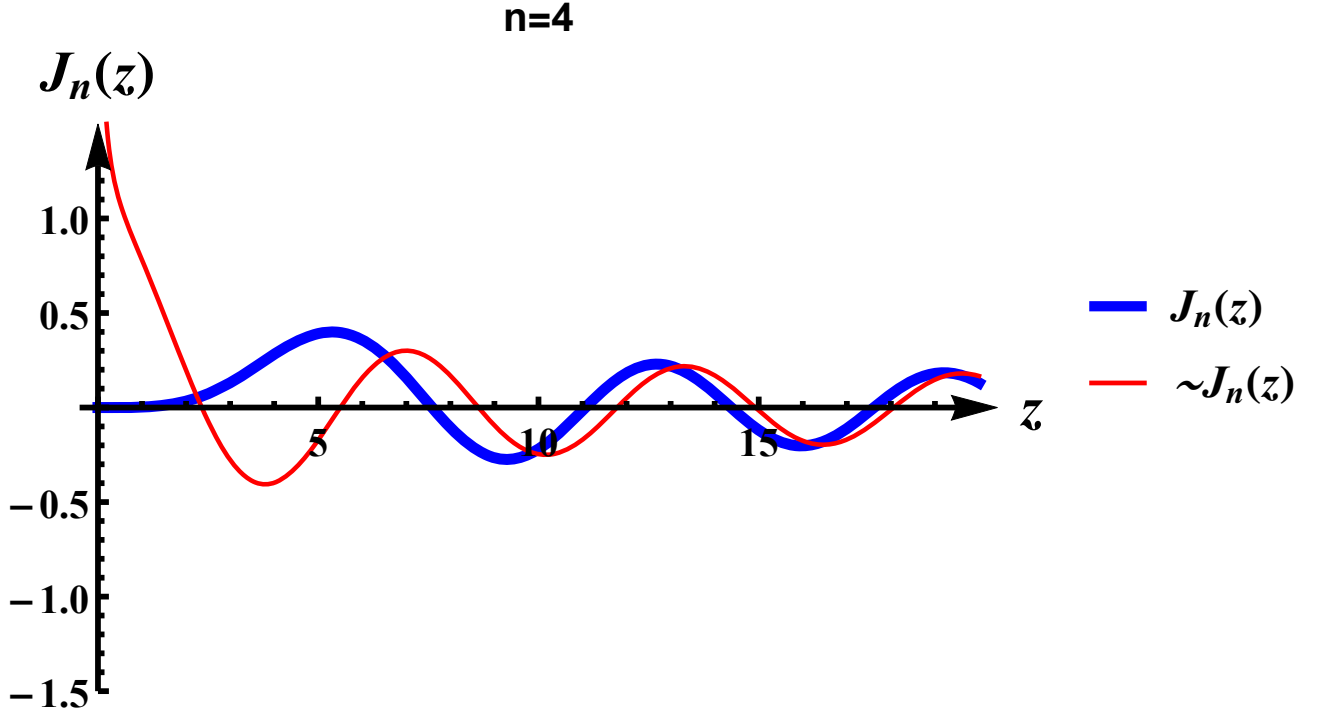


Рис. 1.2.9. Графики функции Бесселя и ее аппроксимации формулой (1.2.88)

Рассмотрим теперь поведение функций Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ при больших значениях порядка, т. е. при $\nu \gg |x|$ (рисунок 1.2.10).

Известно, что для гамма-функции при больших значениях аргумента выполняется формула Стирлинга (1.2.125)

$$\Gamma(t+1) \sim e^{-t} t^{t+1/2} (2\pi)^{1/2}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Поскольку как следует из (1.2.16), при $|x| \ll \nu$ слагаемые в разложении (1.2.15)

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}$$

быстро убывают по абсолютной величине, ограничимся членом ряда при $k=0$ и сделаем замену

$$\Gamma(\nu+1) \rightarrow e^{-\nu} \nu^{\nu+1/2} \sqrt{2\pi}, \quad \nu > 0, \quad \nu \rightarrow \infty.$$

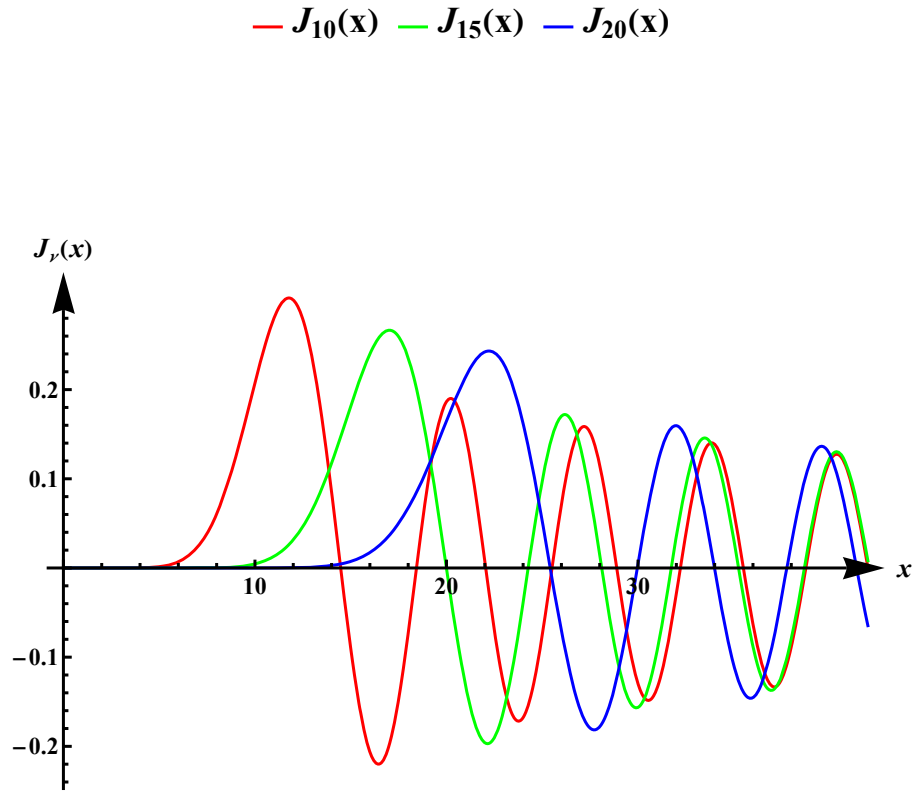


Рис. 1.2.10. Функции Бесселя первого рода большого порядка

Тогда

$$J_\nu(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{ex}{2\nu} \right)^\nu. \quad (1.2.90)$$

Аналогичное разложение для функции Бесселя второго рода имеет вид

$$Y_\nu(x) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \left(\frac{ex}{2\nu} \right)^{-\nu}. \quad (1.2.91)$$

1.2.10. Цилиндрические функции в задачах физики

В этом разделе приведены только краткие описания физических проблем в той части, где возникают цилиндрические функции. Детальное описание задач смотрите в источниках по приведенным ссылкам.

1.2.10.1. Задача о колебаниях нити

Следуя [20, с. 9], рассмотрим задачу о малых колебаниях однородной тяжелой гибкой нити (каната), закрепленной в верхнем конце, свободной на нижнем и выведенной в вертикальной плоскости из положения ее устойчивого равновесия.

Будем предполагать, что каждый элемент нити колеблется по горизонтальной прямой. Если m есть масса нити на единицу длины (погонная плотность), ℓ — длина нити, y — горизонтальное смещение в момент t элемента

нити, расстояние которого от точки подвеса есть x , и если $T, T + dt$ — силы натяжения на концах элемента, то уравнение движения по горизонтали имеет вид

$$m dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial y}{\partial x} \right) dx.$$

Приближенно полагая $T = mg(\ell - x)$, получаем

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - g \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Положим $\ell - x = z$. Рассмотрим те колебания, для которых $y = ue^{nti}$, где $u = u(z)$, тогда

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + \frac{n^2}{g} u = 0.$$

Пусть теперь $x^2 = n^2/g$. Будем искать решение в виде ряда

$$u = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + a_2 z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Собрав коэффициенты при одинаковых степенях z , получаем

$$u = a_0 \left(1 - x^2 z + \frac{x^4 z^2}{2^2} - \frac{x^6 z^3}{2^2 3^2} + \frac{x^8 z^4}{2^2 3^2 4^2} - \dots \right) = a_0 F_0(x^2 z),$$

причем этот ряд абсолютно сходится для всех значений x и z (докажите это!).

Граничное условие $F_0(x^2 \ell) = 0$ означает, что верхний конец нити закреплен. Если ℓ задано, то это трансцендентное уравнение может служить для определения x или, что то же самое, для определения n . Другими словами, уравнение $F_0(x^2 \ell) = 0$ выражает влияние физических данных на периоды нормальных колебаний рассматриваемого вида.

Эту задачу в 1732 году решил Даниил Бернулли, а в 1781 году Леонард Эйлер показал, что функция

$$y = F_0(x) = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2^2 3^2} + \dots$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0,$$

более общая форма которого

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (n+1) \frac{dy}{dx} + y = 0$$

заменой

$$y(x) = x^{-n/2} J_n(2\sqrt{x})$$

приводится к уравнению Бесселя.

1.2.10.2. Колебания круглой мембраны

Уравнение колебаний круглой мембраны [42, с. 222–232]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad 0 \leq r < R, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 < t < \infty, \quad (1.2.92)$$

$$u(R, \theta, t) = 0 \quad (\text{граничное условие}), \quad (1.2.93)$$

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \quad (\text{начальное смещение}), \quad (1.2.94)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = g(r, \theta) \quad (\text{начальная скорость}) \quad (1.2.95)$$

удобно записывать в цилиндрических координатах, где оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Используя метод Фурье (метод разделения переменных), будем искать решение уравнения (1.2.92) в виде

$$u(r, \theta, t) = U(r, \theta)T(t). \quad (1.2.96)$$

Подставив (1.2.96) в (1.2.92) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{\Delta U}{U} = -\lambda^2,$$

откуда следуют два уравнения: уравнение гармонических колебаний для функции $T(t)$

$$T'' + \lambda^2 c^2 T = 0$$

и уравнение Гельмгольца для функции $U(r, \theta)$

$$\Delta U + \lambda^2 U = 0, \quad U(R, \theta) = 0. \quad (1.2.97)$$

Здесь λ — константа разделения.

Очевидно, что решение уравнения

$$T'' + \lambda^2 c^2 T = 0$$

имеет вид

$$T(t) = a \cos(\lambda c t) + b \sin(\lambda c t).$$

Решение уравнения Гельмгольца (1.2.97) снова ищем методом Фурье:

$$U(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta),$$

тогда после разделения переменных получаем

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = \frac{r^2 R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R}{-R} = k. \quad (1.2.98)$$

По физическому смыслу задачи искомая функция должна быть периодична по θ с периодом 2π . Очевидно, что это возможно только если в уравнениях (1.2.98) константа разделения $k = -n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда для функции $R(r)$ получаем уравнение Бесселя

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - n^2)R = 0, \quad (1.2.99)$$

решения которого суть

$$\begin{aligned} R_1(r) &= AJ_n(\lambda r), \\ R_2(r) &= BY_n(\lambda r). \end{aligned}$$

и, таким образом, общее решение уравнения имеет вид

$$R_n(r) = AJ_n(\lambda r) + BY_n(\lambda r).$$

Функция $u(r, \theta, t)$ по физическим соображениям должна быть ограниченной, поэтому коэффициент B при функции Неймана, которая в центре мембраны стремится к $-\infty$, следует приравнять к нулю. Далее, из граничного условия (1.2.93) следует, что

$$J_n(\lambda R) = 0$$

и, следовательно,

$$\lambda_{n,m} = \frac{j_{n,m}}{R}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1.2.100)$$

где $j_{n,m}$ — нули функции Бесселя первого рода, расположенные в порядке возрастания.

Таким образом, общее решение уравнения (1.2.92), описывающего стоячие волны в круглой мембране, имеет вид

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n \left(\frac{j_{n,m}}{R} r \right) \cos(n\theta) \times \quad (1.2.101)$$

$$\times \left[A_{nm} \cos \left(\frac{j_{n,m}}{R} ct \right) + B_{nm} \sin \left(\frac{j_{n,m}}{R} ct \right) \right]. \quad (1.2.102)$$

Коэффициенты A_{nm} и B_{nm} определяются из начальных условий (1.2.94–1.2.95) путем разложения функций $f(r, \theta)$ и $g(r, \theta)$ в ряд Фурье – Бесселя.

Замечание 10.1. Общее решение уравнения $\Theta'' + n^2\Theta = 0$, вообще говоря, имеет вид

$$\Theta(\theta) = C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta),$$

но всегда можно выбрать начало отсчета угла θ так, чтобы осталась только одна функция, например, косинус.

Замечание 10.2. Если рассматривать *внешнюю* задачу о колебаниях круглой мембраны (на круговой обрuch натянута тонкая упругая пленка, простирающаяся в бесконечность, внутри обрucha пленки нет), для которой пределы изменения переменной r составляют $R < r < \infty$, то решение может содержать и функцию Неймана.

1.2.10.3. Уравнение Гельмгольца в сферических координатах

Следуя [28, с. 392–395], запишем уравнение (1.2.97) в сферических координатах:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 u = 0. \quad (1.2.103)$$

Будем искать решение уравнения методом разделения переменных:

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \quad (1.2.104)$$

Подставив (1.2.104) в (1.2.103), получаем:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (\lambda^2 r^2 - k) R = 0; \quad (1.2.105)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(k - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0; \quad (1.2.106)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0, \quad (1.2.107)$$

где k и m^2 — постоянные разделения.

Найдя соответствующие решения этих уравнений, можно построить собственные функции для областей, имеющих форму шара, полого шара, а также шара или полого шара с вырезом либо в виде кругового конуса с вершиной в центре шара, либо в виде части его, заключенной между двумя полуплоскостями, выходящими из одного диаметра (рисунок 1.2.11).

Если изучаемая область охватывает полный диапазон изменения угла φ , то функция $\Phi(\varphi)$ должна иметь период 2π . Общее решение уравнения (1.2.107), удовлетворяющее этому требованию, имеет вид

$$\Phi(\varphi) = \cos(m\varphi + \varphi_0), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad \varphi_0 \in \mathbb{R}. \quad (1.2.108)$$

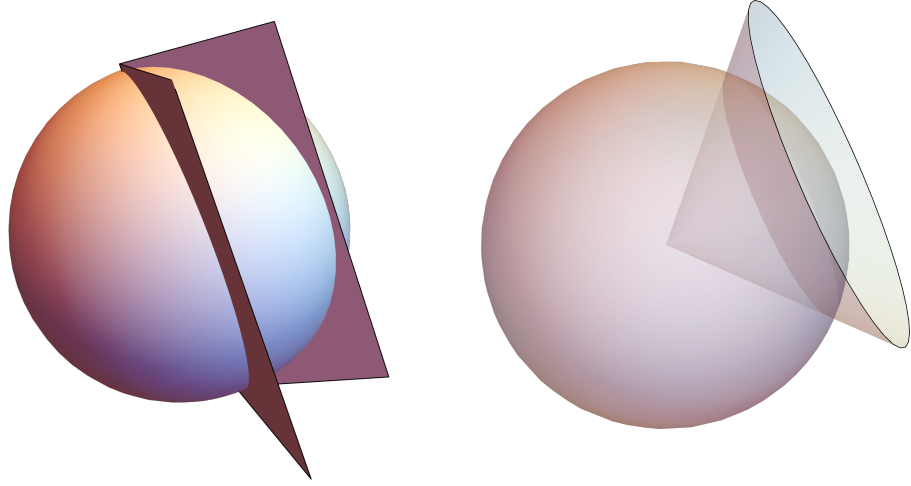


Рис. 1.2.11. Задачи, решаемые посредством уравнения Гельмгольца в сферических координатах

Можно показать (мы сделаем это, рассматривая *присоединенные функции Лежандра*), что, если изучаемая область охватывает полный диапазон изменения угла θ , то в уравнении (1.2.106) надо положить $k = n(n+1)$. Тогда уравнение (1.2.105) принимает вид

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + \left[\lambda^2 r^2 - n(n+1) \right] R = 0,$$

т. е. сводится к дифференциальному уравнению для *сферических функций Бесселя*.

Решение для радиальной составляющей имеет вид

$$R(r) = C_1 j_n(\lambda r) + C_2 y_n(\lambda r). \quad (1.2.109)$$

Коэффициенты C_1 и C_2 , как и ранее, определяются через разложения функций, задающих начальные условия, в ряд Фурье – Бесселя.

1.2.10.4. Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии

Дифракционную картину Фраунгофера от круглого отверстия в преграде [11, с. 364] можно наблюдать на экране в фокальной плоскости линзы, направив нормально на отверстие плоскую световую волну. Эта картина имеет вид центрального светлого пятна, окруженного чередующимися темными и светлыми кольцами (рисунок 1.2.12).

Вместо декартовых координат (ξ, η) используем полярные координаты (ρ, θ) . Тогда координаты произвольной точки отверстия

$$\xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta.$$

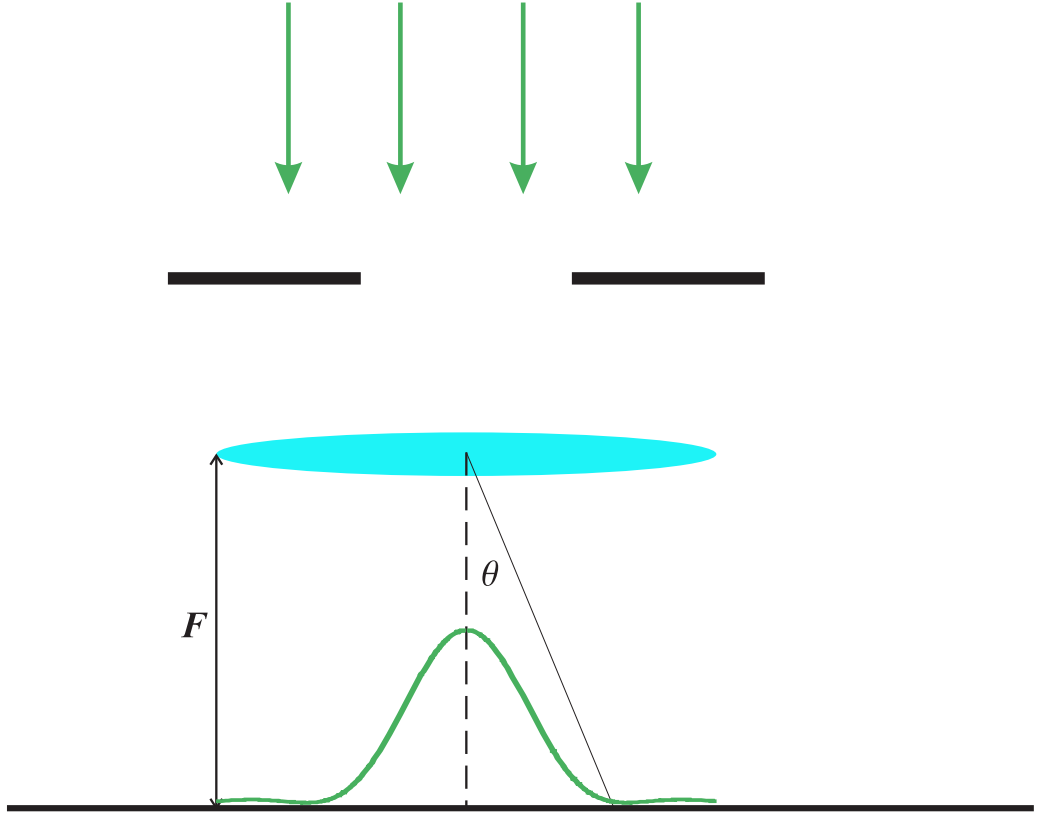


Рис. 1.2.12. Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии

Пусть (w, ψ) — координаты точки P в дифракционной картине, относящейся к геометрическому изображению источника, т. е.

$$p = w \cos \psi, \quad q = w \sin \psi.$$

Тогда интеграл для комплексной амплитуды интенсивности принимает вид

$$U(P) = C \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp[-ik\rho w \cos(\theta - \psi)] \rho d\rho d\theta, \quad (1.2.110)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, а C — некоторая константа.

Воспользуемся теперь интегральным представлением (2.2.16) (задача 2.23)

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \cos \varphi) d\varphi,$$

которое в силу четности косинуса можно переписать как

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(z \cos \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(iz \cos \varphi) d\varphi.$$

Тогда уравнение (1.2.110) сводится к

$$U(P) = 2\pi C \int_0^R J_0(k\rho w) \rho d\rho.$$

Перепишем рекуррентное соотношение (1.2.49)

$$\frac{d}{dz} [z^\nu \mathcal{Z}_\nu(z)] = z^\nu \mathcal{Z}_{\nu-1}(z),$$

положив $\mathcal{Z} = J$, $z = x$, $\nu = 1$ и проинтегрировав его:

$$xJ_1(x) = \int_0^x x' J_0(x') dx'. \quad (1.2.111)$$

Сравнив (1.2.110) и (1.2.111), получаем

$$U(P) = C\pi R^2 \frac{2J_1(kRw)}{kRw},$$

откуда следует выражение для интенсивности

$$I(P) = |U(P)|^2 = I_0 \left[\frac{2J_1(kRw)}{kRw} \right]^2, \quad (1.2.112)$$

где I_0 — интенсивность в центре.

1.2.10.5. Гидродинамическая неустойчивость Рэлея–Плато

Покажем, что даже в невесомости столб жидкости разрушается, если его длина превышает радиус кривизны поверхности жидкости. Рассмотрим струю воды, текущую из водопроводного крана.

Пусть цилиндрический столб радиуса R_0 и высоты L состоит из жидкости плотностью ρ , коэффициент поверхностного натяжения которой σ .

Будем искать малое возмущение радиуса столба вдоль его высоты в виде

$$R_1 = R_0 + \varepsilon \exp(\omega t + ikz), \quad \varepsilon \ll R_0. \quad (1.2.113)$$

Пренебрегая действием силы тяжести, запишем в цилиндрических координатах уравнения для возмущений радиальной и вертикальной проекций скоростей u_r и u_z .

Опуская детали, приходим к уравнению

$$r^2 \frac{d^2 U_r}{dr^2} + r \frac{dU_r}{dr} - (1 + k^2 r^2) U_r = 0,$$



Рис. 1.2.13. Струя воды из крана, диаметр крана 3 мм

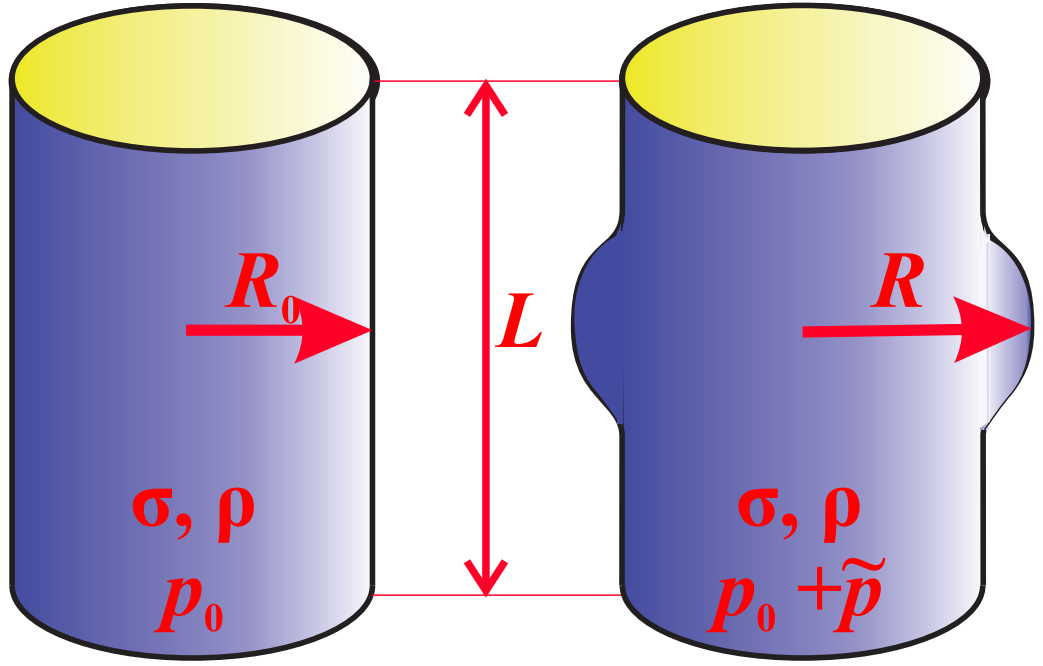


Рис. 1.2.14. Невозмущенный и возмущенный столбы жидкости.

R_0 — радиус цилиндра; σ — коэффициент поверхностного натяжения; ρ — плотность несжимаемой жидкости; $p_0 = \sigma/R_0$ — лапласово давление.

решением которого является модифицированная функция Бесселя первого порядка:

$$U_r(r) = CI_1(kr).$$

Поскольку

$$I_1(x) = \frac{dI_0(x)}{dx},$$

получаем

$$P(r) = -\frac{C\rho\omega}{k}I_0(kr),$$

где $P(r)$ характеризует малое возмущение давления.

Находим закон дисперсии:

$$\omega^2(k) = \frac{\sigma k}{\rho R_0^2} \frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR_0)} (1 - k^2 R_0^2) = \frac{\sigma}{\rho R_0^3} k R_0 \frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR_0)} (1 - k^2 R_0^2).$$

Как следует из (1.2.113), неустойчивость возникает, когда $\omega \in \mathbb{R}$, т.е. при $kR_0 < 1$ или $\frac{2\pi}{L}R_0 < 1$ и $2\pi R_0 < L$. При этом

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R_0^3}} \sqrt{k R_0 \frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR_0)} (1 - k^2 R_0^2)} \quad (1.2.114)$$

Характерное время развала струи

$$t \sim \frac{1}{\omega_{\max}} = 2.91258 \sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\sigma}}.$$

1.2.10.6. Течение жидкости в трубе с круговым сечением

Рассмотрим нестационарное течение вязкой однородной жидкости. Направим ось Z вдоль оси трубы, радиус которой a и длина L . Будем считать, что в начальный момент жидкость покоится, при $t > 0$ на торцах трубы создается разность давлений δp . Течение считаем ламинарным и однонаправленным: $v_x = v_y = 0$, тогда $v = v_z$. Пренебрежем действием силы тяжести, тогда $p = p(z)$.

Из уравнений Навье–Стокса, связывающих скорость потока жидкости $\vec{v}$, массовые силы (например, силу тяжести) $\vec{F}$ и вязкость, характеризуемую коэффициентом ν ,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v}, \quad (1.2.115)$$

следует

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v. \quad (1.2.116)$$

Поскольку $v_x = v_y = 0$, из уравнения непрерывности для несжимаемой жидкости $\text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ следует $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$. Тогда (1.2.116) может выполняться только при условии независимости от координаты z величины $\frac{\partial p}{\partial z}$, т. е. $\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}$. Из условия задачи следует, что $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\delta p}{L}$.

Положим $\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma$ и перейдем в (1.2.116) к полярным координатам:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\gamma}{\rho} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (1.2.117)$$

$$0 \leq r < a, \quad 0 \leq t < \infty, \quad v(r, 0) = 0, \quad v(a, t) = 0.$$

Решение уравнения (1.2.117) ищем в виде суммы стационарного и нестационарного слагаемых:

$$v(r, t) = w(r) + u(r, t). \quad (1.2.118)$$

Для стационарной части $w(r)$ получаем

$$\nu \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{\gamma}{\rho} = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad w(a) = 0,$$

откуда

$$w(r) = \frac{(a^2 - r^2) \gamma + 4C\nu\rho (\ln r - \ln a)}{4\nu\rho}.$$

Логарифмическое слагаемое расходится при $r \rightarrow 0$, поэтому $C = 0$ и стационарное слагаемое имеет вид *профиля Пуазейля*

$$w(r) = \frac{\gamma}{4\nu\rho} (a^2 - r^2). \quad (1.2.119)$$

Напомним, что здесь ν — кинематический коэффициент вязкости, ρ — плотность, $\gamma = -\frac{\partial p}{\partial z}$ — градиент давления. Эта функция задает скорость стационарного течения вязкой однородной жидкости в трубе с круговым сечением (рисунок 1.2.15).

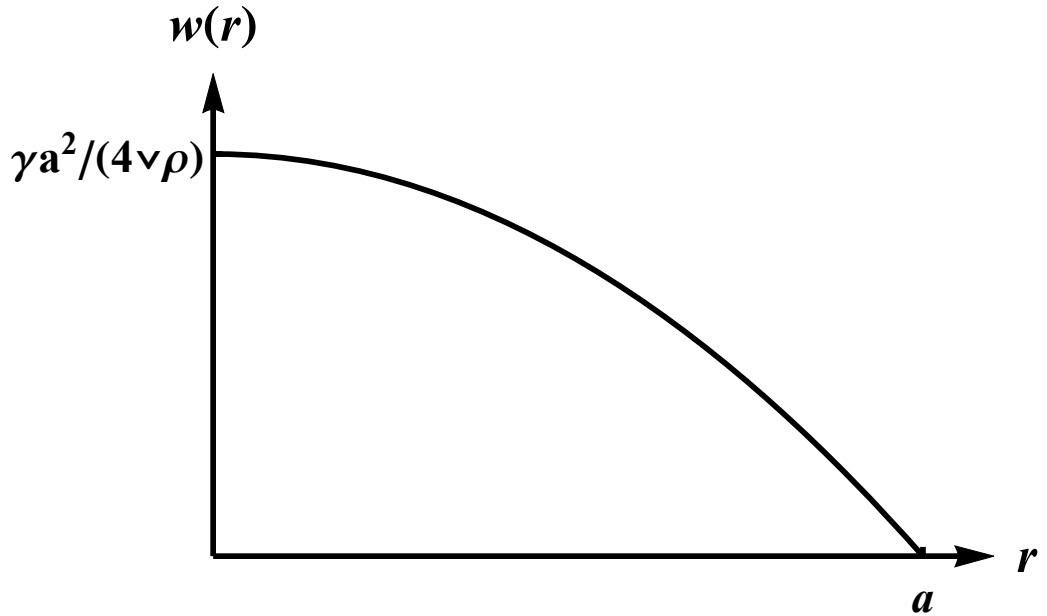


Рис. 1.2.15. Профиль Пуазейля

Найдем теперь нестационарное слагаемое в (1.2.118).

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq t < \infty \\ u(r, 0) &= -w(0) = -\frac{\gamma}{4\nu\rho} (a^2 - r^2), \quad u(a, t) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение решается методом разделения переменных:

$$\begin{aligned} u(r, t) &= T(t)R(r); \\ \frac{T'}{T} &= \nu \frac{r^2 R'' + r R'}{r^2 R} = -\lambda^2. \end{aligned}$$

Для $R(r)$ мы пришли к уравнению Бесселя

$$r^2 R'' + r R' + \frac{\lambda^2}{\nu} r^2 R = 0,$$

решение которого

$$R(r) = C J_0 \left(\frac{r\lambda}{\sqrt{\nu}} \right).$$

(уравнение имеет еще одно решение, выражающееся через функцию Неймана, но оно расходится при $r \rightarrow 0$). Таким образом,

$$u(r, t) = e^{-\lambda^2 t} J_0 \left(\frac{\lambda r}{\sqrt{\nu}} \right)$$

Окончательное решение задачи, таким образом, имеет вид

$$v(r, t) = \frac{\gamma}{4\nu\rho} (a^2 - r^2) + e^{-\lambda^2 t} J_0 \left(\frac{\lambda r}{\sqrt{\nu}} \right). \quad (1.2.120)$$

1.2.10.7. Дифракция плоской электромагнитной волны на цилиндре

Если в задаче об интегрировании волнового уравнения (колебания мембраны) функция Бесселя действительного аргумента является образом стоячей волны, то функции Ханкеля позволяют [34, с. 199–201] описать образ распространяющейся волны.

Рассмотрим задачу о дифракции плоской электромагнитной волны, падающей на бесконечно длинный проводящий цилиндр радиуса a .

Пусть (r, z, φ) будет система цилиндрических координат, ось z которой совпадает с осью цилиндра, и отсчет угла φ ведется от направления, вдоль которого распространяется волна.

Зависимость от времени характеризуется множителем $e^{i\omega t}$, где ω — частота колебаний, вектор электрического поля в падающей и отраженной волне параллелен оси цилиндра. Рассматриваемая задача приводится к определению *комплексной* амплитуды вторичного поля E , удовлетворяющей уравнению Гельмгольца

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + k^2 E = 0,$$

здесь $k = \omega/c$ — волновое число. Решение уравнения ищется в виде

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi.$$

С учетом граничного условия

$$E|_{r=a} + E_0 = 0$$

имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n H_n^{(2)}(ka) \cos n\varphi + E_0 e^{-ika \cos \varphi} = 0.$$

Воспользуемся теперь формулой (1.2.54)

$$\exp \left[\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n,$$

положив $z = ka$, $t = -ie^{i\varphi}$, тогда

$$e^{-ika \cos \varphi} = J_0(ka) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(ka) \cos n\varphi.$$

Окончательное выражение для амплитуды поля имеет вид

$$E = -E_0 \left[\frac{J_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)} H_0^{(2)}(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi \right].$$

1.2.11. Коллекция формул

1.2.11.1. Гамма-функция Эйлера

В этом и следующем пунктах приводится информация, уже известная читателю из курса математического анализа, но очень важная для работы с цилиндрическими функциями.

Определение 11.1. *Факториалом неотрицательного целого числа n* (всюду в этом разделе будем по умолчанию полагать, что $n = 0, 1, 2, \dots$) называется выражение

$$n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n, & n = 1, 2, \dots; \\ 1, & n = 0. \end{cases} \quad (1.2.121)$$

Обобщением факториала на случай любого комплексного числа z является *гамма-функция Эйлера*, которая может быть задана интегральным представлением

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (1.2.122)$$

Очевидно, что $\Gamma(1) = 1$. Покажем, что

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (1.2.123)$$

Действительно,

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = - \int_0^\infty t^z de^{-t} = -t^z e^{-t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} z t^{z-1} dt = z\Gamma(z). \quad \square$$

Отсюда следует, что $\Gamma(n+1) = n!$.

Найдем значение гамма-функции от полуцелого аргумента.

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \int_0^\infty e^{-t} d\sqrt{t} = \\ &= [\sqrt{t} = \tau] = 2 \int_0^\infty e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}; \\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}; \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \sqrt{\pi}; \\ &\vdots \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} \end{aligned} \quad (1.2.124)$$

Равенство (1.2.124) докажете самостоятельно.

Если аргумент гамма-функции не равен целому или полуцелому числу, записать для него аналитическое выражение (формулу) нельзя. Можно, однако, показать, что уже начиная с $x = 1$ неплохим асимптотическим приближением функции служит формула Стирлинга

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x \quad (1.2.125)$$

(рисунок 1.2.16).

Замечание 11.1. Если $x = n$, $n \in \mathbb{N}$, то формула Стирлинга имеет вид $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Правая полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ является областью аналитичности гамма-функции. Покажем, что в левой полуплоскости (и, следовательно, на

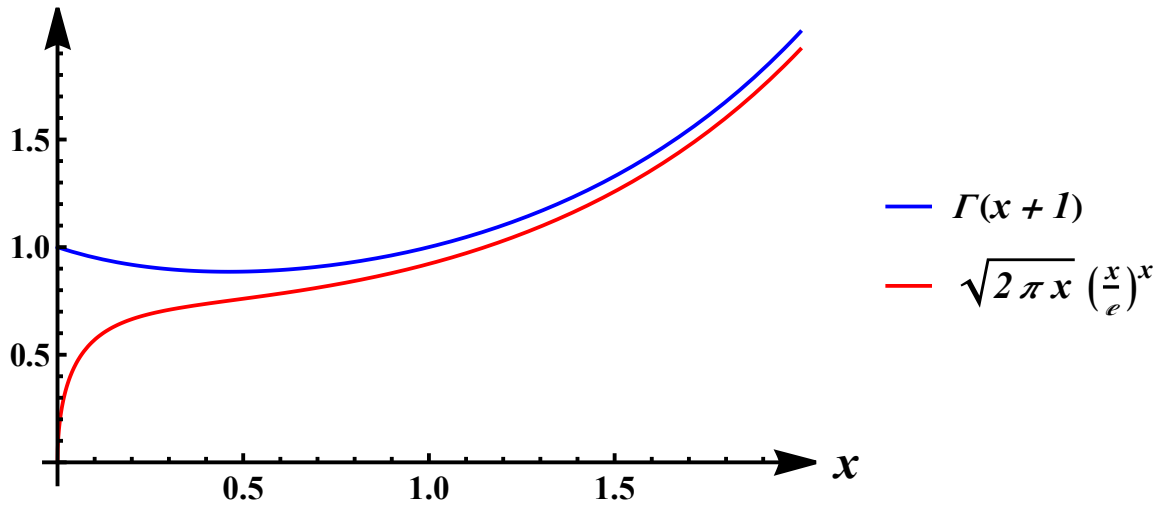


Рис. 1.2.16. Асимптотическое приближение гамма-функции формулой Стирлинга

всей комплексной плоскости в целом) гамма-функция мероморфна, т. е. ее особыми точками являются только полюсы. Из равенства

$$\Gamma(z + n + 1) = (z + n)\Gamma(z + n) = \cdots = (z + n)(z + n - 1) \cdots (z + 1)z\Gamma(z)$$

следует

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + n + 1)}{(z + n)(z + n - 1) \cdots (z + 1)z}$$

и, следовательно, полюсами являются точки $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (рисунок 1.2.17). При этом

$$\lim_{z \rightarrow -n} \Gamma(z)(z + n) = \frac{\Gamma(1)}{(-1)(-2) \cdots (-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad (1.2.126)$$

т. е. все полюсы простые и вычет в каждом полюсе определяется формулой (1.2.126).

Функция $1/\Gamma(z)$ аналитична всюду на комплексной плоскости.

Приведем без доказательства несколько полезных формул:

Формулы симметрии:

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad (1.2.127)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{1 + t} dt, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1. \quad (1.2.128)$$

$$(1.2.129)$$

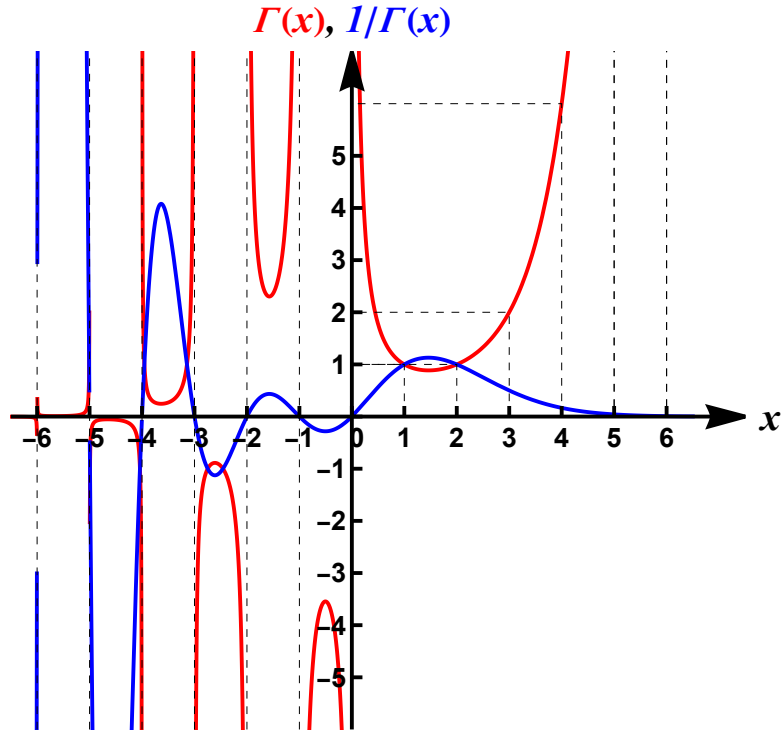


Рис. 1.2.17. Гамма-функция вещественного аргумента

Формула удвоения:

$$\Gamma(2z) = (2\pi)^{-1/2} 2^{2z-1/2} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right). \quad (1.2.130)$$

$$(1.2.131)$$

Формула умножения Гаусса:

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{(1-n)/2} n^{nz-1/2} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right). \quad (1.2.132)$$

$$(1.2.133)$$

Обобщенный биномиальный коэффициент:

$$\binom{z}{w} \equiv C_z^w = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(w+1)\Gamma(z-w+1)}. \quad (1.2.134)$$

$$(1.2.135)$$

Символ Похгаммера:

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} = z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1); \quad (z)_0 = 1; \quad (1)_n = n!. \quad (1.2.136)$$

Бета-функция

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (1.2.137)$$

$$B(x, y) = \int_0^1 \tau^{x-1}(1-\tau)^{y-1} d\tau = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du, \quad (1.2.138)$$

$$\operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Re} y > 0.$$

1.2.11.2. Дигамма-функция

Логарифмическая производная гамма-функции выражается через дигамма-функцию³:

$$\frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \psi(z), \quad (1.2.139)$$

откуда следует

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz} = \Gamma(z)\psi(z). \quad (1.2.140)$$

Прологарифмируем обе части соотношения (1.2.123), а затем продифференцируем полученное равенство:

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(z+1) &= \ln z + \ln \Gamma(z); \\ \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} &= \frac{1}{z} + \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что рекуррентное соотношение для дигамма-функции имеет вид

$$\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z). \quad (1.2.141)$$

В частности, для $z = n = 0, 1, 2, \dots$ получаем

$$\psi(n+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, \quad (1.2.142)$$

где $\gamma \equiv -\psi(1) = 0,5772156649\dots$ — постоянная Эйлера–Маскерони⁴.

Замечание 11.1. Переписав формулу (1.2.142) в виде

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \psi(n+1) + \gamma,$$

легко заметить, что дигамма-функция задает с точностью до константы значение частичной суммы гармонического ряда.

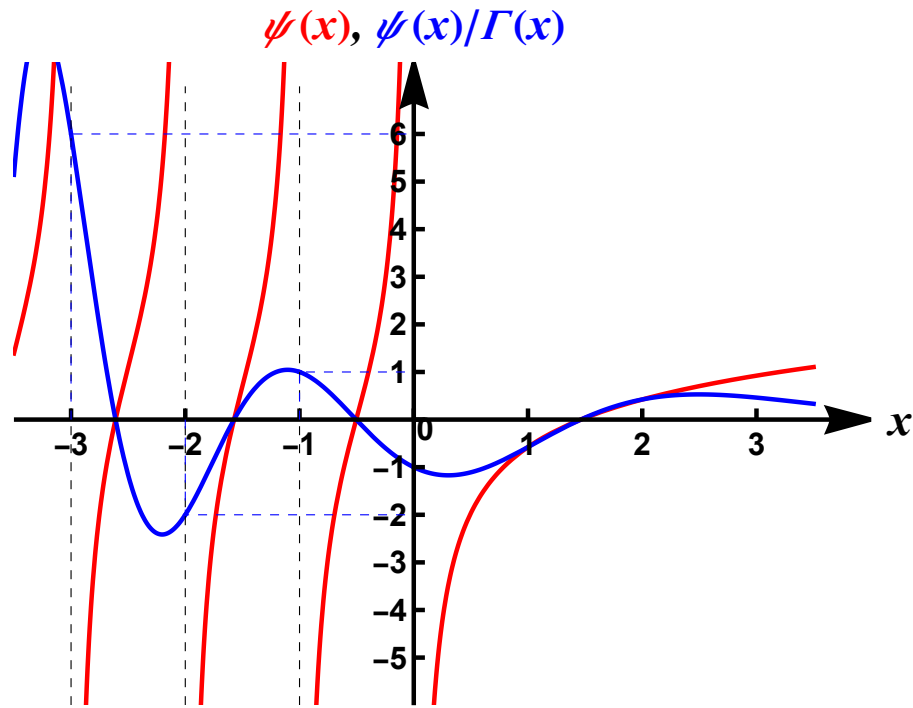


Рис. 1.2.18. Дигамма-функция вещественного аргумента. Синяя линия иллюстрирует формулу (1.2.143)

Как и гамма-функция, дигамма-функция мероморфна. Поскольку $\Gamma(z)$ не имеет нулей, из формулы (1.2.139) следует, что $\Psi(z)$ не может иметь других особых точек, кроме полюсов гамма-функции $z = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Можно показать (см., например, формулы (1.1.5) и (1.3.2) книги [34]), что

$$\lim_{z \rightarrow -n} \frac{\psi(z)}{\Gamma(z)} = (-1)^{n+1} n! \quad (1.2.143)$$

(рисунок 1.2.18).

Дигамма-функция играет важную роль в исследовании функции Бесселя 2-го рода (функции Неймана).

³Нередко употребляется также термин «пси-функция».

⁴Во многих источниках эта постоянная обозначается буквой C .

1.2.11.3. Разложения в ряд

$$\begin{aligned}
J_{\nu}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)}; \\
Y_{\nu}(z) &= \frac{J_{\nu}(z) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi \nu}. =; \\
Y_n(z) &= \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)].
\end{aligned}$$

1.2.11.4. Производные и рекуррентные соотношения

Здесь $\mathcal{Z}$ означает $J, Y, H^{(1)}, H^{(2)}$ или любую линейную комбинацию этих функций, коэффициенты которой не зависят от z и ν .

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{\nu+1}(z) + \mathcal{Z}_{\nu-1}(z) &= \frac{2\nu}{z} \mathcal{Z}_{\nu}(z); \\
\frac{\nu}{z} \mathcal{Z}_{\nu}(z) - \mathcal{Z}_{\nu+1}(z) &= \mathcal{Z}'_{\nu}(z); \\
\mathcal{Z}_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} \mathcal{Z}_{\nu}(z) &= \mathcal{Z}'_{\nu}(z) \\
\mathcal{Z}_{\nu-1}(z) - \mathcal{Z}_{\nu+1}(z) &= 2\mathcal{Z}'_{\nu}(z); \\
\frac{d}{dz} [z^{-\nu} \mathcal{Z}_{\nu}(z)] &= -z^{-\nu} \mathcal{Z}_{\nu+1}(z); \\
\frac{d}{dz} [z^{\nu} \mathcal{Z}_{\nu}(z)] &= z^{\nu} \mathcal{Z}_{\nu-1}(z).
\end{aligned}$$

1.2.11.5. Производящая функция и следующие из нее разложения

$$\begin{aligned}
\Phi(z, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \exp \left[\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \\
&\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n, \quad t \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\cos(z \sin \varphi) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \cos(2n\varphi).$$

$$\sin(z \sin \varphi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z) \sin[(2n-1)\varphi].$$

$$\cos(z \cos \varphi) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(z) \cos(2n\varphi).$$

$$\sin(z \cos \varphi) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(z) \cos[(2n+1)\varphi].$$

$$1 = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z).$$

$$\cos z = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(z).$$

$$\sin z = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} J_{2n-1}(z).$$

$$z \sin z = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n)^2 J_{2n}(z).$$

$$z \cos z = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n-1)^2 J_{2n-1}(z).$$

Теорема сложения:

$$J_n(z_1 + z_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-m}(z_1) J_m(z_2).$$

1.2.11.6. Соотношение ортогональности

$$\int_0^{\ell} J_{\mathfrak{v}} \left(j_{\mathfrak{v},m} \frac{x}{\ell} \right) J_{\mathfrak{v}} \left(j_{\mathfrak{v},n} \frac{x}{\ell} \right) x dx = \frac{\ell^2}{2} J_{\mathfrak{v}+1}^2(j_{\mathfrak{v},n}) \delta_n^m, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $j_{\mathfrak{v},n}$ — нуль функции Бесселя порядка $\mathfrak{v}$ с номером n .

1.2.11.7. Интегралы, связанные с цилиндрическими функциями

Интеграл Бесселя

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \varphi - n\varphi) d\varphi.$$

Интеграл Вебера

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx = \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}.$$

Интеграл Неймана

$$J_n^2(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_{2n}(2z \sin \varphi) d\varphi.$$

Формула Пуассона

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \cos zt dt = \\ &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^\pi \cos(z \cos \varphi) \sin^{2\nu} \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

1.2.11.8. Асимптотические разложения

Разложения при больших значениях аргумента

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad \nu \text{ фиксировано, } |x| \rightarrow \infty; \\ Y_\nu(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad \nu \text{ фиксировано и } |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Разложения при больших значениях порядка

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{ex}{2\nu}\right)^\nu, \quad x \text{ фиксировано, } \nu \rightarrow \infty; \\ Y_\nu(x) &\sim -\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \left(\frac{ex}{2\nu}\right)^{-\nu}, \quad x \text{ фиксировано, } \nu \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

1.3. Ортогональные полиномы и присоединенные функции Лежандра

1.3.1. Уравнение гипергеометрического типа

Определение 1.1. Уравнение гипергеометрического типа имеет вид

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0, \quad (1.3.1)$$

где $\sigma(x)$ — полином степени не выше второй, $\tau(x)$ — полином степени не выше первой, $\lambda = \text{const}$.

Определение 1.2. Функции, удовлетворяющие уравнению (1.3.1), называются *функциями гипергеометрического типа*.

Теорема 1.1. Производная любого порядка от функции гипергеометрического типа также является функцией гипергеометрического типа.

Пусть функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению (1.3.1), а $v_1(x) = y'(x)$ — ее первая производная. Продифференцируем почленно (1.3.1):

$$\sigma'(x)y'' + \sigma(x)y''' + \tau'(x)y' + \tau(x)y'' + \lambda y' = 0$$

или

$$\sigma(x)v_1'' + \tau_1(x)v_1' + \lambda_1 v_1 = 0, \quad (1.3.2)$$

где

$$\tau_1(x) = \sigma'(x) + \tau(x), \quad \lambda_1 = \tau'(x) + \lambda. \quad \boxtimes$$

Следствие 1.1. Любое решение уравнения (1.3.2) является производной некоторого решения уравнения (1.3.1).

Действительно, если $v_1(x) = y'(x)$ удовлетворяет (1.3.2), то из уравнения (1.3.1) следует

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda} [\sigma(x)y'' + \tau(x)y'] = -\frac{1}{\lambda} [\sigma(x)v_1' + \tau(x)v_1].$$

Тогда

$$\lambda y' = -\sigma(x)v_1'' - \tau_1(x)v_1' - \tau'(x)v_1 = -\sigma(x)v_1'' - \tau_1(x)v_1' - (\lambda_1 - \lambda)v_1,$$

откуда $y' = v_1$. $\boxtimes$

Продифференцировав уравнение (1.3.1) n раз, получаем

$$\sigma(x)v_n'' + \tau_n(x)v_n' + \lambda_n v_n = 0, \quad (1.3.3)$$

где

$$v_n = \frac{d^n y}{dx^n}, \quad (1.3.4)$$

$$\tau_n(x) = \tau(x) + n\sigma'(x), \quad (1.3.5)$$

$$\lambda_n = \lambda + n\tau'(x) + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(x) \quad (1.3.6)$$

(равенства для $\tau_n(x)$ и λ_n докажете самостоятельно по индукции).

1.3.2. Полиномы гипергеометрического типа. Формула Родрига

Предположим теперь, что на некотором шаге с номером n коэффициент λ_n становится равным нулю. Тогда уравнение (1.3.3) сводится к

$$\sigma(x)v_n'' + \tau_n(x)v_n' = 0,$$

одно из решений которого $v_n(x) = \text{const}$. Интегрируя это равенство n раз, получим *полином гипергеометрического типа* степени n .

Проведем следующие преобразования. Уравнение (1.3.1)

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0$$

домножим на $\rho(x)$, уравнение (1.3.3)

$$\sigma(x)v_n'' + \tau_n(x)v_n' + \lambda_n v_n = 0$$

домножим на $\rho_n(x)$, где функции $\rho(x)$ и $\rho_n(x)$ выберем так, чтобы выполнялись соотношения

$$[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x), \quad (1.3.7)$$

$$[\sigma(x)\rho_n(x)]' = \tau_n(x)\rho_n(x). \quad (1.3.8)$$

В дальнейшем будем называть $\rho(x)$ *весовой функцией* для данного ортогонального полинома.

Теперь уравнения (1.3.1) и (1.3.3) можно записать в виде¹

$$(\sigma\rho y')' + \lambda\rho y = 0, \quad (1.3.9)$$

$$(\sigma\rho_n v_n')' + \lambda_n\rho_n v_n = 0. \quad (1.3.10)$$

¹Для краткости далее будем в промежуточных выкладках указывать функции без аргумента

Из свойств (1.3.7–1.3.8) функций ρ и ρ_n и формул (1.3.4–1.3.6) следует, что

$$\frac{(\sigma\rho_n)'}{\rho_n} = \tau_n = \tau + n\sigma' = \frac{(\sigma\rho)'}{\rho} + n\sigma',$$

откуда

$$\begin{aligned}\sigma\frac{\rho_n'}{\rho_n} + \cancel{\rho_n\frac{\sigma'}{\rho_n}} &= \sigma\frac{\rho'}{\rho} + \cancel{\rho\frac{\sigma'}{\rho}} + n\sigma', \\ \frac{\rho_n'}{\rho_n} &= \frac{\rho'}{\rho} + n\frac{\sigma'}{\sigma}, \\ \frac{d}{dx}\ln(\rho_n) &= \frac{d}{dx}\ln(\rho) + \frac{d}{dx}\ln\sigma^n\end{aligned}$$

и окончательно

$$\rho_n(x) = \sigma^n(x)\rho(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.11)$$

Очевидно, что $\rho_{m+1} = \sigma\rho_m$, $v_{m+1} = v_m'$. Тогда из уравнения (1.3.10) следует

$$(\rho_{m+1}v_{m+1})' + \lambda_m\rho_mv_m = 0$$

или

$$\rho_mv_m = -\frac{1}{\lambda_m}(\rho_{m+1}v_{m+1})'.$$

Тогда

$$\rho y \equiv \rho_0 v_0 = -\frac{1}{\lambda_0}(\rho_1 v_1)' = \left(-\frac{1}{\lambda_0}\right)\left(-\frac{1}{\lambda_1}\right)(\rho_2 v_2)'' = \dots = \frac{1}{A_n}(\rho_n v_n)^{(n)},$$

где

$$A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k, \quad A_0 = 1,$$

а λ_k определяется формулой (1.3.6).

Если $y(x) = p_n(x)$ есть полином степени n , то $v_n(x) = p_n^{(n)}(x) = \text{const}$. Для полинома гипергеометрического типа имеет место *формула Родрига*

$$p_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \left[\sigma^n(x) \rho(x) \right]^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.3.12)$$

где $B_n = A_n^{-1} p_n^{(n)}(x)$ — нормировочный множитель².

²Напомним, что в отсутствие дополнительных условий решение линейного однородного уравнения определено с точностью до произвольного множителя.

1.3.3. Свойство ортогональности

1.3.3.1. Соотношение ортогональности

Пусть $y_n(x)$ — полином гипергеометрического типа степени n . Тогда $\lambda_n = 0$, т. е.

$$\lambda_n = \lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = 0,$$

откуда

$$\lambda \equiv \lambda^{(n)} = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''.$$

Дважды запишем уравнение (1.3.9), полагая искомую функцию полиномом гипергеометрического типа степени n и m соответственно:

$$\begin{aligned} \left[\sigma(x)\rho(x)p_n'(x) \right]' + \lambda^{(n)}\rho(x)p_n(x) &= 0, \\ \left[\sigma(x)\rho(x)p_m'(x) \right]' + \lambda^{(m)}\rho(x)p_m(x) &= 0. \end{aligned}$$

Домножив первое уравнение на $p_m(x)$, второе на $p_n(x)$, и вычтя второе равенство из первого, получим

$$\begin{aligned} p_m(x) \left[\sigma(x)\rho(x)p_n'(x) \right]' - p_n(x) \left[\sigma(x)\rho(x)p_m'(x) \right]' + \\ + \rho(x) \left(\lambda^{(n)} - \lambda^{(m)} \right) p_n(x)p_m(x) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\frac{d}{dx} \left[\sigma(x)\rho(x)W[p_m, p_n] \right] + \left(\lambda^{(n)} - \lambda^{(m)} \right) \rho(x)p_n(x)p_m(x) = 0,$$

где вронскиан

$$W[p_m, p_n] = \begin{vmatrix} p_m(x) & p_n(x) \\ p_m'(x) & p_n'(x) \end{vmatrix} = p_m(x)p_n'(x) - p_n(x)p_m'(x).$$

Проинтегрируем полученное равенство на некотором интервале от a до b :

$$\left(\lambda^{(m)} - \lambda^{(n)} \right) \int_a^b \rho(x)p_n(x)p_m(x) dx = \sigma(x)\rho(x)W[p_m, p_n] \Big|_a^b. \quad (1.3.13)$$

Пусть при некоторых значениях a и b выполняется условие

$$\sigma(x)\rho(x)x^k \Big|_{x=a,b} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.14)$$

Поскольку вронскиан $W[p_m, p_n]$ представляет собой полином, правая часть равенства (1.3.13) при выполнении условия (1.3.14) обращается в нуль.

Предположим, что $\lambda^{(m)} \neq \lambda^{(n)}$, тогда

$$\int_a^b \rho(x) p_n(x) p_m(x) dx = 0. \quad (1.3.15)$$

Замечание 3.1. Из равенства (1.3.6) следует, что, если $\lambda^{(m)} \neq \lambda^{(n)}$, то

$$n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' \neq m\tau' + \frac{m(m-1)}{2}\sigma''$$

или

$$(n-m)\tau' + (n-m)\frac{n+m-1}{2}\sigma'' \neq 0$$

и, таким образом, если $\tau' + \frac{n+m-1}{2}\sigma'' \neq 0$, то $n \neq m$.

Если $m = n$, то интеграл в левой части (1.3.15) уже не будет равен нулю.

Определение 3.1. *Соотношением ортогональности* для ортогональных полиномов $p_n(x)$ называется равенство:

$$\int_a^b \rho(x) p_n(x) p_m(x) dx = d_n^2 \delta_m^n. \quad (1.3.16)$$

Здесь $\rho(x)$ называется *весовой функцией (весом)*, а d_n — квадратичной нормой.

Замечание 3.2. Для того, чтобы условие (1.3.14) выполнялось при конечных a и b , достаточно, чтобы

$$\sigma(x)\rho(x) \Big|_{x=a} = 0, \quad \sigma(x)\rho(x) \Big|_{x=b} = 0.$$

Для бесконечного предела имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x)\rho(x)x^k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Определение 3.2. Полиномы гипергеометрического типа, для которых функция $\rho(x)$ удовлетворяет условию (1.3.14), называются *классическими ортогональными полиномами*.

Замечание 3.3. Можно показать [36, с. 14–15], что производные k -го порядка классических ортогональных полиномов также ортогональны, но с весом $\rho_k(x) = \sigma^k(x)\rho(x)$.

1.3.3.2. Разложение произвольных полиномов по ортогональным полиномам

Теорема 3.1. Пусть $p_k(x)$ — полином степени k , подчиняющийся соотношению ортогональности (1.3.16), а $q_n(x)$ — любой полином степени n . Тогда $q_n(x)$ можно единственным образом представить в виде

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k^{(n)} p_k(x). \quad (1.3.17)$$

Домножим равенство (1.3.17) слева и справа на $\rho(x)p_m(x)$, проинтегрируем от a до b и поменяем местами суммирование и интегрирование:

$$\int_a^b \rho(x)p_m(x)q_n(x) dx = \sum_{k=0}^n c_k^{(n)} \int_a^b \rho(x)p_m(x)p_k(x) dx = \sum_{k=0}^n c_k^{(n)} d_m^2 \delta_m^k = c_m^{(n)} d_m^2.$$

Таким образом, коэффициенты разложения (1.3.17) однозначно определяются как

$$c_m^{(n)} = \frac{1}{d_m^2} \int_a^b \rho(x)p_m(x)q_n(x) dx. \quad \boxtimes \quad (1.3.18)$$

1.3.4. Рекуррентное соотношение

Теорема 4.1. Для произвольных ортогональных полиномов имеет место рекуррентная формула вида

$$\alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x) = x p_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.19)$$

Замечание 4.1. В теории ортогональных полиномов принято условно считать, что

$$p_{-1}(x) \equiv 0.$$

Для доказательства теоремы разложим полином $x p_n(x)$ (который не является ортогональным!) по полиномам $p_k(x)$:

$$x p_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k^{(n+1)} p_k(x), \quad (1.3.20)$$

где

$$c_k^{(n+1)} = \frac{1}{d_k^2} \int_a^b \rho(x)p_n(x)x p_k(x) dx. \quad (1.3.21)$$

Функция $x p_k(x)$ является полиномом степени $k + 1$, поэтому в силу свойства ортогональности полинома $p_n(x)$ коэффициенты $c_k^{(n+1)} = 0$ при $k + 1 < n$. Поэтому разложение (1.3.20) можно записать в виде (1.3.19), где

$$\alpha_n = c_{n+1}^{(n+1)}, \quad \beta_n = c_n^{(n+1)}, \quad \gamma_n = c_{n-1}^{(n+1)}. \quad \boxtimes \quad (1.3.22)$$

Запишем полином $p_n(x)$ в явной форме:

$$p_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots \quad (1.3.23)$$

и покажем, что имеют место следующие соотношения:

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}; \quad \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}; \quad \gamma_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}. \quad (1.3.24)$$

Из формулы (1.3.21) следует, что

$$d_k^2 c_k^{(n+1)} = d_n^2 c_{n+1}^{(k)}.$$

Положим $k = n - 1$, тогда

$$d_{n-1}^2 c_{n-1}^{(n+1)} = d_n^2 c_{n+1}^{(n-1)}$$

и

$$\gamma_n = c_{n-1}^{(n+1)} = \alpha_{n-1} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}.$$

Сравнив коэффициенты при старших степенях в левой и правой частях равенства (1.3.20):

$$\begin{aligned} x^{n+1} : \quad & a_n = c_{n+1}^{(n+1)} a_{n+1} = \alpha_n a_{n+1}; \\ x^n : \quad & b_n = c_{n+1}^{(n+1)} b_{n+1} + c_n^{(n+1)} a_n. \end{aligned}$$

приходим к соотношениям (1.3.24).

Определение 4.1. *Ортонормированными* называются ортогональные полиномы, квадратичная норма которых равна 1.

Из соотношения ортогональности (1.3.16) очевидно, что ортонормированные полиномы могут быть заданы соотношением

$$\tilde{p}_n(x) = \frac{p_n(x)}{d_n}. \quad (1.3.25)$$

Перепишем рекуррентное соотношение (1.3.19), выразив полиномы $p_n(x)$ через их ортонормированные аналоги:

$$\alpha_n \tilde{p}_{n+1}(x) d_{n+1} + \beta_n \tilde{p}_n(x) d_n + \gamma_n \tilde{p}_{n-1}(x) d_{n-1} = x \tilde{p}_n(x) d_n,$$

откуда

$$\alpha_n \tilde{p}_{n+1}(x) \frac{d_{n+1}}{d_n} + \beta_n \tilde{p}_n(x) + \gamma_n \tilde{p}_{n-1}(x) \frac{d_{n-1}}{d_n} = x \tilde{p}_n(x).$$

Воспользуемся теперь формулой (1.3.24):

$$\begin{aligned} \alpha_n \frac{d_{n+1}}{d_n} &= \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{d_{n+1}}{d_n} = f_{n+1}; \\ \gamma_n \frac{d_{n-1}}{d_n} &= \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2} \cdot \frac{d_{n-1}}{d_n} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d_n}{d_{n-1}} = f_n \end{aligned}$$

и, таким образом, рекуррентное соотношение для ортонормированных полиномов $\tilde{p}_n(x)$ может быть записано в виде

$$f_{n+1} \tilde{p}_{n+1}(x) + f_n \tilde{p}_{n-1}(x) = (x - \beta_n) \tilde{p}_n(x). \quad (1.3.26)$$

Замечание 4.2. Выполнение рекуррентного соотношения и соотношения ортогональности являются непрерывными свойствами ортогонального полинома. Можно показать, что из формулы (1.3.16) следует формула (1.3.19) и наоборот.

1.3.5. Другие свойства ортогональных полиномов

1.3.5.1. Нули

Теорема 5.1. *Все нули ортогональных полиномов, подчиняющихся соотношению ортогональности (1.3.16), простые и лежат на (a, b) .*

Предположим, что полином $p_n(x)$ на интервале (a, b) меняет знак при переходе через k точек. Очевидно, что $0 \leq k \leq n$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $k = n$.

Пусть

$$q_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ \prod_{j=1}^k (x - x_j) & \text{при } 0 < k \leq n. \end{cases}$$

Здесь x_j — нули полинома, т. е. точки на интервале (a, b) , где полином меняет знак.

Полином $p_n(x)q_k(x)$ не меняет знака при $x \in (a, b)$ (почему?). Тогда

$$\int_a^b p_n(x)q_k(x)\rho(x) dx \neq 0$$

и в силу свойства ортогональности $k = n$. $\square$

Графики некоторых полиномов приведены в разделе «Коллекция формул» (с. 155).

1.3.5.2. Замкнутость

Система классических ортогональных полиномов $\{p_n(x)\}$ является замкнутой на интервале (a, b) для непрерывных функций $f(x)$, удовлетворяющих требованию квадратичной интегрируемости $\int_a^b f^2(x)\rho(x) dx < \infty$. Это означает, что из равенств

$$\int_a^b f(x)p_n(x)\rho(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

следует, что $f(x) = 0$ при $x \in (a, b)$.

1.3.6. Классические ортогональные полиномы (общие свойства)

1.3.6.1. Вид весовой функции

Вернемся к формуле (1.3.7)

$$[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x)$$

и проведем элементарные преобразования:

$$\begin{aligned} \sigma'(x)\rho(x) + \sigma(x)\rho'(x) &= \tau(x)\rho(x); \\ \sigma(x)\frac{d\rho(x)}{dx} &= (\tau(x) - \sigma'(x))\rho(x); \\ \frac{1}{\rho(x)}\frac{d\rho(x)}{dx} &= \frac{\tau(x) - \sigma'(x)}{\sigma(x)}; \\ \ln \rho(x) &= \int \frac{\tau(x) - \sigma'(x)}{\sigma(x)} dx + \ln C. \end{aligned} \tag{1.3.27}$$

Здесь $\sigma(x)$ — полином степени не выше второй, $\tau(x)$ — полином степени не выше первой, $x \in (a, b)$.

Положим

$$\tau(x) = Ax + B \tag{1.3.28}$$

и рассмотрим три случая.

1. $\sigma(x) = (x - a)(b - x)$ — полином второй степени. Тогда

$$\ln \rho(x) = \int \frac{Ax + B + 2x - ab}{(x - a)(b - x)} dx = \alpha \int \frac{dx}{x - a} - \beta \int \frac{dx}{b - x}$$

и, таким образом,

$$\rho(x) = (x - a)^\alpha \cdot (b - x)^\beta. \quad (1.3.29)$$

2. $\sigma(x) = x - a$ — полином первой степени:

$$\ln \rho(x) = \int \frac{Ax + B - 1}{x - a} dx = \alpha \int \frac{dx}{x - a} + \beta \int dx,$$

откуда

$$\rho(x) = (x - a)^\alpha e^{\beta x}, \quad (1.3.30)$$

причем из условия (1.3.14)

$$\sigma(x)\rho(x)x^k \Big|_{x=a,b} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

следует, что $x \in (a, \infty)$.

3. $\sigma(x) = 1$ — полином нулевой степени, т. е. константа:

$$\ln \rho(x) = \int \frac{Ax + b}{1} dx = \alpha x^2 + \beta x$$

и

$$\rho(x) = e^{\alpha x^2 + \beta x}, \quad (1.3.31)$$

причем $x \in (-\infty, \infty)$.

Линейной заменой переменной можно упростить формулы (1.3.29–1.3.31). Весовая функция для классических ортогональных полиномов может иметь одну из следующих форм:

$$\rho(x) = \begin{cases} (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta, & \alpha > -1, \beta > -1 & \text{(семейство полиномов Якоби),} \\ x^\alpha e^{-x}, & \alpha > -1 & \text{(полиномы Лагерра),} \\ e^{-x^2} & & \text{(полиномы Эрмита).} \end{cases} \quad (1.3.32)$$

1.3.6.2. Семейства ортогональных полиномов

На рисунке 1.3.1 представлена классификация классических и некоторых неклассических ортогональных полиномов, различающихся весовой функцией, а внутри одного семейства — и значениями параметров.

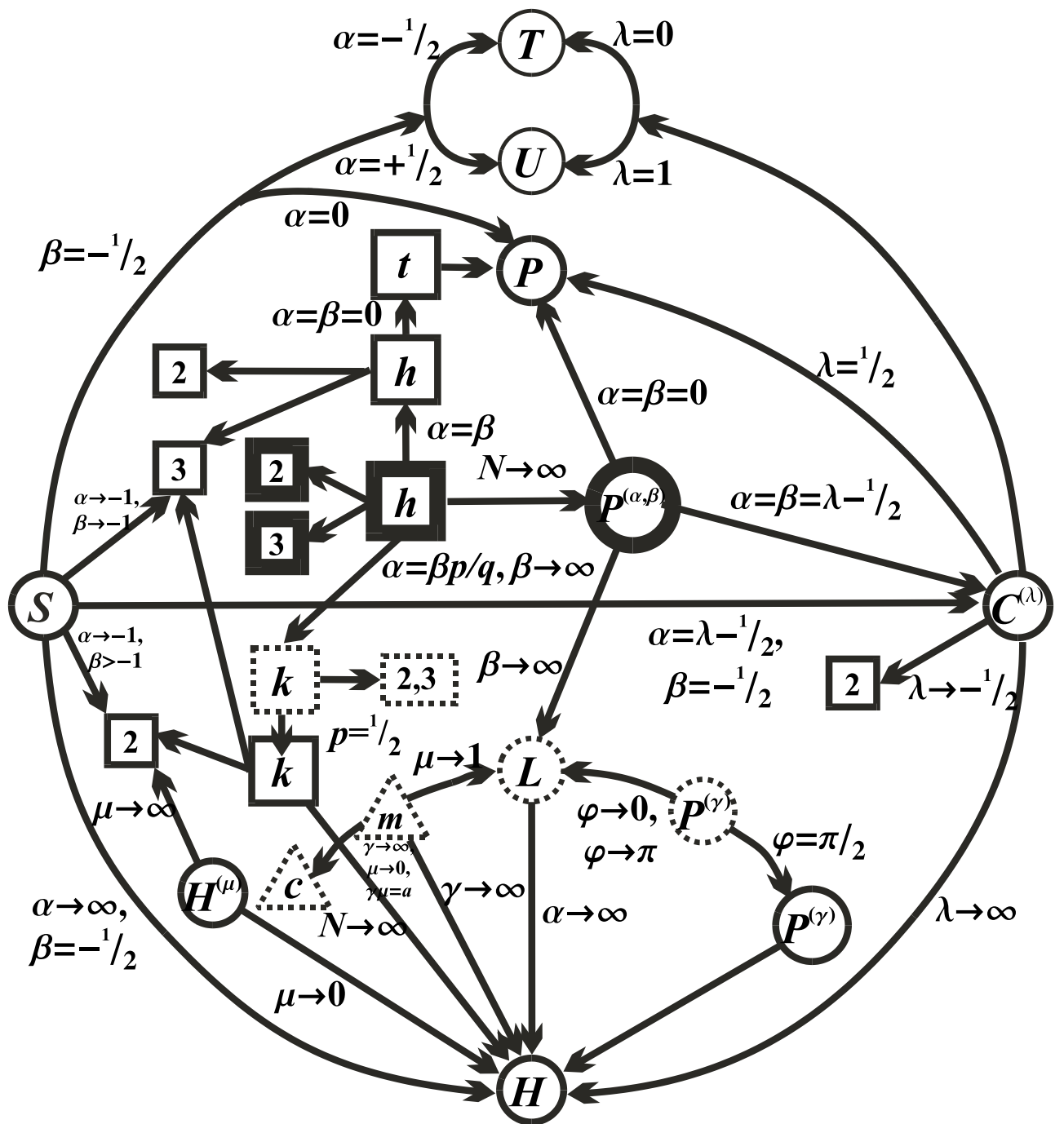


Рис. 1.3.1. Семейства ортогональных полиномов

Стрелки указывают направления соответствующих предельных переходов либо частные случаи.

Квадрат, окаймляющий символ полинома, указывает на полиномы дискретной переменной³, заданные на конечной сетке (Хана h , Кравчука k , Чебышёва дискретной переменной t), *треугольник* — на полиномы дискретной переменной, заданные на бесконечной сетке (Шарлье s , Мейкснера m), *окружность* — на полиномы непрерывной переменной (Эрмита H , обобщенные Эрмита $H^{(\mu)}$, Поллачека $P^{(\nu)}$, Лагерра L , Лежандра P , Гегенбауэра $C^{(\lambda)}$, Сеге-Якоби S , Якоби $P^{(\alpha, \beta)}$, Чебышёва 1-го T и 2-го U рода).

Пусть $f_{n+1}p_{n+1}(x) + f_n p_{n-1}(x) = (rx + s_n)p_n(x)$, тогда *обычная кайма* соответствует $s_n = \text{const}$, *штриховая кайма* — $s_n = n\varepsilon$, *жирная кайма* — нелинейная зависимость s_n от n .

Основную информацию, относящуюся к классическим ортогональным полиномам непрерывной переменной, ищите в разделе «Коллекция формул» (с. 155). Некоторые полиномы далее рассмотрим отдельно.

1.3.7. Полиномы Лежандра

1.3.7.1. Явный вид

Подставим в формулу Родрига (1.3.12)

$$p_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \left[\sigma^n(x) \rho(x) \right]^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

значения $\sigma(x) = 1 - x^2$, $\rho(x) \equiv 1$ и для нормировочного множителя выберем значение $B_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$. Тогда ортогональные полиномы Лежандра задаются формулой

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1 - x^2)^n \right], \quad (1.3.33)$$

откуда легко получить явный вид этих функций:

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x), \dots \quad (1.3.34)$$

1.3.7.2. Производящая функция

Введем теперь *производящую функцию* для полиномов Лежандра:

$$\Phi(x, t) = (1 - 2tx + t^2)^{-1/2}, \quad \Phi(x, 0) = +1. \quad (1.3.35)$$

Эта функция (если рассматривать зависимость от t) регулярна в круге $|t| < r$, радиус r которого равен меньшему из модулей корней квадратного

³О таких полиномах см. с. 146

уравнения $1 - 2tx + t^2 = 0$, поэтому существует разложение вида

$$\Phi(x, t) = (1 - 2tx + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) t^n, \quad |t| < r.$$

Коэффициенты c_n могут быть найдены по известной формуле для коэффициентов ряда Тейлора

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi,$$

где $\xi = t$, $f(\xi) = \Phi(x, t)$, $z_0 = 0$.

Сделаем подстановку $(1 - 2tx + t^2)^{1/2} = 1 - tu$, тогда:

$$\begin{aligned} 1 - 2tx + t^2 &= 1 - 2tu + t^2 u^2, \\ t &= 2 \frac{u - x}{u^2 - 1}, \quad dt = -2 \frac{u^2 - 2ux + 1}{(u^2 - 1)^2}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{1}{1 - tu} \left(2 \frac{u - x}{u^2 - 1} \right)^{-n-1} 2 \frac{-(u^2 - 2ux + 1)}{(u^2 - 1)^2} du = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{\cancel{u^2 - 1}}{\cancel{-(u^2 - 2ux + 1)}} \frac{(u^2 - 1)^{n+1}}{2^{n+1} (u - x)^{n+1}} 2 \frac{\cancel{-(u^2 - 2ux + 1)}}{\cancel{(u^2 - 1)}^{2 \cdot u^2 - 1}} du \end{aligned}$$

Таким образом, получен интеграл от рациональных функций

$$c_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{(u^2 - 1)^n}{2^n (u - x)^{n+1}} du \quad (1.3.36)$$

по замкнутому контуру C' , окружающему точку $u = x$. Применяя формулу для нахождения вычета в полюсе порядка m

$$\text{res}[g(u), u_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{d^{m-1}}{du^{m-1}} [(u - u_0)^m g(u)],$$

где

$$m = n + 1, \quad u_0 = x, \quad g(u) = \frac{(u^2 - 1)^n}{2^n (u - x)^{n+1}},$$

имеем

$$c_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left[\frac{d^n (u^2 - 1)^n}{du^n} \right]_{u=x} \equiv P_n(x).$$

Таким образом,

$$\Phi(x, t) = (1 - 2tx + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n. \quad (1.3.37)$$

1.3.7.3. Рекуррентные соотношения

В задачах 3.3 и 3.7 с помощью производящей функции получены рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра:

$$(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.3.38)$$

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.3.39)$$

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.3.40)$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x). \quad (1.3.41)$$

1.3.7.4. Дифференциальное уравнение

Для вывода дифференциального уравнения заменим в формуле (1.3.39) n на $n-1$

$$P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) = nP_{n-1}(x),$$

домножим (1.3.40) на x

$$x^2P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) = nxP_n(x)$$

и вычтем второе уравнение из первого:

$$(1 - x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x). \quad (1.3.42)$$

Продифференцируем (1.3.42) по x и снова воспользуемся уравнением (1.3.40), чтобы исключить $P'_{n-1}(x)$:

$$[(1 - x^2)P'_n(x)]' = nP'_{n-1}(x) - nP_n(x) - nxP'_n(x);$$

$$P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x).$$

Искомое дифференциальное уравнение, таким образом, имеет вид

$$[(1 - x^2)P'_n(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (1.3.43)$$

или

$$(1 - x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0. \quad (1.3.44)$$

Замечание 7.1. Уравнение (1.3.44), разумеется, имеет два линейно независимых решения, причем первое из них — полиномы Лежандра $P_n(x)$.

Можно показать что второе решение (оно называется *функцией Лежандра второго рода*) имеет вид

$$Q_n(x) = P_n(x) \int_{\infty}^x \frac{d\xi}{(1-\xi^2)P_n^2(\xi)} = \quad (1.3.45)$$

$$= \frac{1}{2}P_n(x) \ln \frac{x+1}{x-1} - \sum_{k=1}^N \frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)} P_{n-2k+1}(x), \quad (1.3.46)$$

где

$$N = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{при четном } n, \\ \frac{n+1}{2} & \text{при нечетном } n \end{cases}$$

(см. например, [30, с. 222–227] и [33, с. 631]). Эта функция имеет две особые точки $x = -1$ и $x = +1$ и в случае комплексного аргумента регулярна на всей комплексной плоскости (z) с разрезом по вещественной оси от точки $z = -1$ до точки $z = +1$. Ни при каких n функция $Q_n(x)$ не является многочленом.

Замечание 7.2. Уравнение (1.3.44) можно обобщить, заменив целочисленный параметр $n \in \mathbb{Z}$ на вещественный $\nu \in \mathbb{R}$:

$$(1-z^2)y'' - 2zy' + \nu(\nu+1)y = 0. \quad (1.3.47)$$

Решениями такого уравнения являются функции Лежандра первого и второго рода $P_\nu(z)$ и $Q_\nu(z)$, причем при нецелых ν функция $P_\nu(z)$ также не является многочленом. Можно показать, что эти функции выражаются через гипергеометрическую функцию Гаусса:

$$P_\nu(z) = {}_2F_1 \left(-\nu, \nu+1; 1; \frac{1-z}{2} \right), \quad |z-1| < 2, \quad (1.3.48)$$

$$Q_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})} {}_2F_1 \left(\frac{\nu}{2}+1, \frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2} \right), \quad (1.3.49)$$

$$|z| > 1, \quad |\arg z| < \pi, \quad \nu \neq -1, -2, \dots \quad (1.3.50)$$

Здесь

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \cdot \frac{z^k}{k!}, \quad (1.3.51)$$

где символ Похгаммера имеет вид

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}.$$

1.3.7.5. Соотношение ортогональности

Получим теперь соотношение ортогональности. Для этого запишем уравнение (1.3.43) для полиномов степеней m и n

$$\begin{aligned} [(1-x^2)P'_m(x)]' + m(m+1)P_m(x) &= 0, \\ [(1-x^2)P'_n(x)]' + n(n+1)P_n(x) &= 0, \end{aligned}$$

умножим первое уравнение на $P_n(x)$, второе на $P_m(x)$ и вычтем одно из другого:

$$\begin{aligned} [(1-x^2)P'_m(x)]' P_n(x) - [(1-x^2)P'_n(x)]' P_m(x) + \\ + [m(m+1) - n(n+1)]P_m(x)P_n(x) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \{ (1-x^2) [P'_m(x)P_n(x) - P'_n(x)P_m(x)]' \}' + \\ + (m-n)(m+n+1)P_m(x)P_n(x) = 0. \end{aligned}$$

Проинтегрируем полученное равенство по промежутку $(-1, 1)$, при этом интеграл от первого слагаемого за счет множителя $(1-x^2)$ равен нулю. Тогда

$$(m-n)(m+n+1) \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0,$$

откуда

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (1.3.52)$$

Найдем теперь значение интеграла (1.3.52) при $m = n$. Для этого заменим в рекуррентном соотношении (1.3.38)

$$(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x)$$

n на $n-1$, умножим полученное уравнение на $(2n+1)P_n(x)$, а уравнение (1.3.38) на $(2n-1)P_{n-1}(x)$ и вычтем из первого второе:

$$\begin{aligned} nP_n(x)(2n+1)P_n(x) + (n-1)P_{n-2}(x)(2n+1)P_n(x) = \\ = (2n-1)xP_{n-1}(x)(2n+1)P_n(x) \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} (n+1)P_{n+1}(x)(2n-1)P_{n-1}(x) + nP_{n-1}(x)(2n-1)P_{n-1}(x) = \\ = (2n+1)xP_n(x)(2n-1)P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Тогда

$$n(2n+1)P_n^2(x) + (n-1)(2n+1)P_{n-2}(x)P_n(x) - \\ - (n+1)(2n-1)P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) - n(2n-1)P_{n-1}^2(x) = 0.$$

Проинтегрируем полученное равенство по промежутку $(-1, 1)$ с учетом (1.3.44):

$$n(2n+1) \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = n(2n-1) \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x) dx.$$

Последовательно применяя эту рекуррентную формулу, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x) dx = \\ &= \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \int_{-1}^1 P_{n-2}^2(x) dx = \dots = \\ &= \frac{3}{2n+1} \int_{-1}^1 P_1^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получаем для соотношения ортогональности

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_n^m. \quad (1.3.53)$$

1.3.7.6. Ряд Фурье – Лежандра

Пусть $f(x)$ — любая вещественная кусочно-гладкая функция, заданная на $(-1, 1)$ и удовлетворяющая условию квадратичной интегрируемости:

$$\int_{-1}^1 f^2(x) dx < \infty.$$

Тогда соотношение ортогональности (1.3.53) позволяет разложить эту функцию в ряд Фурье – Лежандра:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) \quad (1.3.54)$$

где

$$C_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.55)$$

Формулу (1.3.55) докажите самостоятельно.

1.3.8. Присоединенные функции Лежандра

1.3.8.1. Дифференциальное уравнение

Вернемся к уравнению (1.3.47) с произвольным вещественным значением параметра ν

$$(1 - z^2)y'' - 2zy' + \nu(\nu + 1)y = 0.$$

Продифференцировав его m раз, получим, следуя соотношениям (1.3.3–1.3.6)

$$\tau_n(x) = \tau(x) + n\sigma'(x); \quad \lambda_n = \lambda + n\tau'(x) + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(x),$$

где

$$\sigma(z) = 1 - z^2, \quad \tau(z) = -2z, \quad \lambda = \nu(\nu + 1),$$

следующее уравнение:

$$(1 - z^2)v_m'' + (-2z - 2zm)v_m' + \left[\nu(\nu + 1) + m(-2) + \frac{m(m-1)}{2}(-2)\right]v_m = 0,$$

откуда

$$(1 - z^2)v_m'' - 2(m+1)zv_m' + [\nu(\nu + 1) - m(m-1)]v_m = 0. \quad (1.3.56)$$

Пусть

$$u(z) = (1 - z^2)^{m/2}v_m(z),$$

тогда

$$v_m(z) = u(z)(1 - z^2)^{-\frac{m}{2}}.$$

Выразив первую и вторую производные v_m через u и подставив их в уравнение (1.3.56), имеем

$$\begin{aligned} (1 - z^2)^{-\frac{m}{2}}u'' + 2mz(1 - z^2)^{-\frac{m}{2}}u' + \frac{m}{2}\left(\frac{m}{2} + 1\right)z^2(1 - z^2)^{-\frac{m}{2}}u - \\ - 2(m+1)z(1 - z^2)^{-\frac{m}{2}}u' - 2(m+1)z \cdot mz(1 - z^2)^{-\frac{m}{2}-1}u + \\ + [\nu(\nu + 1) - m(m-1)](1 - z^2)^{-\frac{m}{2}}u = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$(1 - z^2)u'' - 2zu' + \left[\mathfrak{v}(\mathfrak{v} + 1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] u = 0 \quad (1.3.57)$$

или

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2)u' \right] + \left[\mathfrak{v}(\mathfrak{v} + 1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] u = 0. \quad (1.3.58)$$

Это уравнение имеет два линейно независимых решения:

$$P_{\mathfrak{v}}^m(z) = (z^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_{\mathfrak{v}}(z), \quad (1.3.59)$$

$$Q_{\mathfrak{v}}^m(z) = (z^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} Q_{\mathfrak{v}}(z), \quad (1.3.60)$$

где $\mathfrak{v} \in \mathbb{R}$, $m = 0, 1, 2, \dots$.

Определение 8.1. Функции $P_{\mathfrak{v}}^m(z)$ и $Q_{\mathfrak{v}}^m(z)$ называются *присоединенными функциями Лежандра первого и второго рода* соответственно, $\mathfrak{v}$ — степень функции, m — порядок. При $m = 0$ они сводятся к функциям Лежандра (1.3.48–1.3.49).

В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь присоединенной функции Лежандра первого рода с целочисленными значениями степени и вещественными значениями аргумента:

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (x^2 - 1)^{m/2} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} [(x^2 - 1)^n]. \quad (1.3.61)$$

Очевидно, что $P_n^m(x) \equiv 0$ при $m > n$.

1.3.8.2. Соотношение ортогональности

Покажем, что

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = (-1)^m \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_k^n, \quad k, m, n \in \mathbb{N}. \quad (1.3.62)$$

Замечание 8.1. Очевидно, что при $m = 0$ равенство (1.3.62) переходит в (1.3.53).

Действуя обычным образом, запишем дифференциальное уравнение (1.3.58)

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2)u' \right] + \left[\mathfrak{v}(\mathfrak{v} + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] u = 0$$

дважды – для функций $P_n^m(x)$ и $P_k^m(x)$:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2)P_n^{m'}(x) \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_n^m(x) = 0, \quad (1.3.63)$$

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2)P_k^{m'}(x) \right] + \left[k(k+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_k^m(x) = 0. \quad (1.3.64)$$

Домножим первое уравнение на $P_k^m(x)$, второе на $P_n^m(x)$ и вычтем второе уравнение из первого:

$$\begin{aligned} P_k^m(x) \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)P_n^{m'}(x) \right] - P_n^m(x) \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)P_k^{m'}(x) \right] + \\ + [n(n+1) - k(k+1)] P_n^m(x) P_k^m(x) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (k-n)(k+n+1)P_n^m(x)P_k^m(x) = \\ = \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \left(P_k^m(x)P_n^{m'}(x) - P_n^m(x)P_k^{m'}(x) \right) \right]. \end{aligned}$$

Проинтегрируем полученное равенство по x от -1 до 1 , тогда правая часть обращается в нуль. Таким образом, если $n \neq k$, то

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = 0.$$

Для нахождения квадратичной нормы воспользуемся выражением присоединенной функции Лежандра первого рода через полиномы Лежандра из формулы (1.3.59):

$$P_n^m(x) = (x^2-1)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x).$$

После дифференцирования имеем

$$P_n^{m'}(x) = \frac{m}{2} 2x(x^2-1)^{(m/2-1)} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) + \underbrace{(x^2-1)^{m/2} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_n(x)}_{=(x^2-1)^{-1/2} P_n^{m+1}(x)}$$

и, таким образом,

$$P_n^{m+1}(x) = (x^2-1)^{1/2} P_n^{m'}(x) - \frac{mx}{(x^2-1)^{1/2}} P_n^m(x). \quad (1.3.65)$$

Возведем обе части равенства (1.3.65) в квадрат и снова проинтегрируем по x от -1 до 1 :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \left[P_n^{m+1}(x) \right]^2 dx &= \underbrace{\int_{-1}^1 (x^2 - 1) \left[P_n^{m'}(x) \right]^2 dx}_{\mathcal{I}_1} - \\
&\quad - \underbrace{2m \int_{-1}^1 x P_n^{m'}(x) P_n^m(x) dx}_{\mathcal{I}_2} + \\
&\quad + \underbrace{m^2 \int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^2 - 1} \left[P_n^m(x) \right]^2 dx}_{\mathcal{I}_3} = \\
&= \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3.
\end{aligned} \tag{1.3.66}$$

Рассмотрим каждый из интегралов отдельно.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \int_{-1}^1 (x^2 - 1) \left[P_n^{m'}(x) \right]^2 dx = \int_{-1}^1 (x^2 - 1) P_n^{m'}(x) dP_n^m(x) = \\
&= - \int_{-1}^1 P_n^m(x) \frac{d}{dx} \left[(x^2 - 1) P_n^{m'}(x) \right] dx =
\end{aligned}$$

[воспользуемся дифференциальным уравнением (1.3.63)]

$$= -n(n+1) \int_{-1}^1 \left[P_n^m(x) \right]^2 dx - m^2 \int_{-1}^1 \frac{\left[P_n^m(x) \right]^2}{x^2 - 1} dx.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2 &= 2m \int_{-1}^1 x P_n^{m'}(x) P_n^m(x) dx = \\
&= 2mx \left[P_n^m(x) \right]^2 \Big|_{-1}^1 - 2m \int_{-1}^1 P_n^m(x) d[x P_n^m(x)] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{2mx [P_n^m(x)]^2 \Big|_{-1}^1}_{(1.3.59) \Rightarrow P_n^m(\pm 1) = 0} - 2m \int_{-1}^1 \left\{ [P_n^m(x)]^2 + x P_n^m(x) P_n^{m'}(x) \right\} dx = \\
&= -2m \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx - \mathcal{I}_2,
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2 &= -m \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx \\
\mathcal{I}_3 &= m^2 \int_{-1}^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{x^2 - 1} [P_n^m(x)]^2 dx = \\
&= m^2 \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx + m^2 \int_{-1}^1 \frac{[P_n^m(x)]^2}{x^2 - 1} dx.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 [P_n^{m+1}(x)]^2 dx = \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = \\
&-n(n+1) \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx - m^2 \int_{-1}^1 \frac{[P_n^m(x)]^2}{x^2 - 1} dx + m \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx + \\
&+ m^2 \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx + m^2 \int_{-1}^1 \frac{[P_n^m(x)]^2}{x^2 - 1} dx = \\
&= [-(n-m)(n+m+1)] \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx.
\end{aligned}$$

Заменяв теперь m на $m-1$, получаем рекуррентное соотношение, которое

и устанавливает квадратичную норму:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = [-(n-m+1)(n+m)] \int_{-1}^1 [P_n^{m-1}(x)]^2 dx = \\
& = [-(n-m+1)(n+m)] [-(n-m+2)(n+m-1)] \int_{-1}^1 [P_n^{m-2}(x)]^2 dx = \\
& \quad \vdots \\
& = (-1)^m (n-m+1)(n-m+2) \dots n \cdot (n+m)(n+m-1) \dots \times \\
& \times (n+1) \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{(n+m)!}{n!} \cdot \frac{2}{2n+1} \cdot \boxtimes
\end{aligned}$$

1.3.8.3. Рекуррентные соотношения

Соотношения доказаны в задаче 3.22.

$$P_{\nu}^{m+2}(z) + \frac{2(m+1)}{(z^2-1)^{1/2}} z P_{\nu}^{m+1}(z) + (\nu-m)(\nu+m+1) P_{\nu}^m(z) = 0. \quad (1.3.67)$$

$$(\nu+1-m) P_{\nu+1}^m(z) - (2\nu+1) z P_{\nu}^m(z) + (\nu+m) P_{\nu-1}^m(z) = 0. \quad (1.3.68)$$

1.3.9. Полиномы Эрмита

1.3.9.1. Явный вид

Ортогональные полиномы Эрмита задаются формулой Родрига

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{e^{-x^2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2} \cdot 1). \quad (1.3.69)$$

В задаче 3.13 показано, что

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}. \quad (1.3.70)$$

Таким образом, полиномы четной степени содержат только четные степени переменной, полиномы нечетной степени — только нечетные.

1.3.9.2. Производящая функция

Пусть

$$\Phi(x, t) = e^{2xt-t^2}. \quad (1.3.71)$$

Эта целая функция может быть представлена рядом Тейлора по переменной t , причем n -й коэффициент ряда имеет вид

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n \Phi}{\partial t^n} \right)_{t=0}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^n \Phi}{\partial t^n} \right)_{t=0} &= e^{x^2} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \right]_{t=0} = [x - t = u] = \\ &= (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{\partial^n e^{-u^2}}{\partial u^n} \right)_{u=x} \equiv H_n(x) \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\Phi(x, t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n. \quad (1.3.72)$$

Замечание 9.1. Функцию $\Phi(x, t)$ точнее назвать производящей для полиномов Эрмита, деленных на $n!$.

Равенство (1.3.72) позволяет получить ряд соотношений, которые доказаны в задачах 3.16, 3.20:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} tx &= e^{t^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} H_{2n}(x), \\ \operatorname{sh} tx &= e^{t^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} H_{2n+1}(x), \\ \cos tx &= e^{-t^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} H_{2n}(x), \\ \sin tx &= e^{-t^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} H_{2n+1}(x). \end{aligned}$$

1.3.9.3. Рекуррентные соотношения

Использование производящей функции позволяет получить рекуррентные соотношения, доказанные в задаче 3.14:

$$H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x) = 2xH_n(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.3.73)$$

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.3.74)$$

1.3.9.4. Дифференциальное уравнение

Исключим из формул (1.3.73–1.3.74) $H_{n-1}(x)$:

$$H_{n+1}(x) + H'_n(x) = 2xH_n(x).$$

Продифференцируем полученное равенство:

$$H''_n(x) - 2H_n(x) - 2xH'_n(x) + H'_{n+1}(x) = 0.$$

Снова воспользуемся соотношением (1.3.74), заменив в нем n на $n + 1$:

$$H''_n(x) - 2H_n(x) - 2xH'_n(x) + 2(n + 1)H_n(x) = 0,$$

откуда окончательно получаем

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0. \quad (1.3.75)$$

1.3.9.5. Соотношение ортогональности

Сделав в (1.3.75) замену $H_n(x) = e^{x^2/2}u(x)$, получаем

$$u'' + (2n + 1 - x^2)u = 0 \quad (1.3.76)$$

(проверьте это самостоятельно).

Далее:

$$u''_n + (2n + 1 - x^2)u_n = 0 \quad | \times u_m$$

—

$$u''_m + (2m + 1 - x^2)u_m = 0 \quad | \times u_n$$

$$\frac{d}{dx}(u_n u_m - u_m u_n) + 2(n - m)u_m u_n = 0.$$

Интегрируем последнее равенство по промежутку $(-\infty, \infty)$:

$$(n - m) \int_{-\infty}^{\infty} u_m(x)u_n(x) dx = (n - m) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x) dx = 0, \quad n \neq m,$$

что и доказывает ортогональность полиномов Эрмита с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$.

В задаче 3.15 найдена квадратичная норма и, таким образом, соотношение ортогональности для полиномов Эрмита имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_n^m, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.77)$$

1.3.10. Ортогональные полиномы дискретной переменной

Основное отличие полиномов дискретной переменной от рассмотренных ранее заключается в том, что они подчиняются не дифференциальному, а *разностному* уравнению гипергеометрического типа. Будем использовать обозначения

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x); \quad \nabla f(x) = f(x) - f(x-1),$$

тогда в простейшем случае равномерной сетки такое уравнение на сетке с шагом $\Delta x = h$ имеет вид (см., например, [36, с. 28])

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(x) \frac{1}{h} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + \\ + \frac{\tilde{\tau}(x)}{2} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + \lambda y(x) = 0 \end{aligned}$$

Линейной заменой переменной можно перейти к $\Delta x = h = 1$ и окончательно получить

$$\sigma(x) \Delta \nabla y(x) + \tau(x) x_{\Delta} y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (1.3.78)$$

где $\sigma(x) = \tilde{\sigma}(x) = 1/2\tilde{\tau}(x)$, $\tilde{\tau}(x) = \tau(x)$.

Опуская дальнейшие рассуждения, запишем формулу Родрига для полиномов дискретной переменной:

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \nabla^n [\rho_n(x)],$$

где функции $\rho(x)$ и $\rho_n(x)$ удовлетворяют разностным уравнениям

$$\Delta(\sigma\rho) = \tau\rho; \quad (1.3.79)$$

$$\rho_n(x) = \sigma(x+1)\rho_{n-1}(x+1) = \rho(x+n) \prod_{k=1}^n \sigma(x+k)$$

(сравните эти формулы с (1.3.12), (1.3.7) и (1.3.11)).

Определение 10.1. *Классическими ортогональными полиномами дискретной переменной* называются полиномы $y_n(x)$, для которых функция $\rho(x)$ удовлетворяет уравнению (1.3.79) и условию

$$\sigma(x)\rho(x)x^k \Big|_{x=a,b} = 0, \quad (1.3.80)$$

а интервал (a, b) находится на вещественной оси,

Соотношение ортогональности для классических полиномов дискретной переменной можно получить, записав уравнение (1.3.78) для полиномов $y_n(x)$ и $y_m(x)$ в форме

$$\Delta [\sigma(x)\rho(x)\nabla y_n(x)] + \lambda_n \rho(x)y_n(x) = 0.$$

Действуя так же, как в пункте 1.3.3.1, приходим к уравнению

$$\sum_{k=1}^N \rho_k p_n(x_k)p_m(x_k) = d_n^2 \delta_m^n, \quad (1.3.81)$$

где верхний предел суммирования может быть и бесконечным.

Замечание 10.1. Среди неклассических ортогональных полиномов существуют и такие, где нижний предел суммирования в (1.3.81) также бесконечен ($-\infty < k < +\infty$).

Подробное изложение теории ортогональных полиномов дискретной переменной см. в книге [36].

1.3.11. Ортогональные полиномы в задачах физики

Как и в предыдущем разделе, здесь приводятся только краткие описания физических проблем в той части, где возникают специальные функции. Детальное описание задач смотрите в источниках по приведенным ссылкам.

1.3.11.1. Полиномы Лежандра и потенциал поля точечного заряда

Покажем связь полиномов Лежандра с важной физической задачей. Известно, что потенциал электростатического поля описывается уравнением Лапласа $\Delta U = 0$, которое в простейшем случае поля точечного заряда записывается в сферических координатах как

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU}{dr} = 0. \quad (1.3.82)$$

Фундаментальным решением этого уравнения является величина $\frac{1}{R}$, где R — расстояние произвольной точки $M(x, y, z)$ от источника заряда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (рисунок 1.3.2).

По теореме косинусов имеем

$$R^2 = r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos \theta$$

или

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos \theta}}. \quad (1.3.83)$$

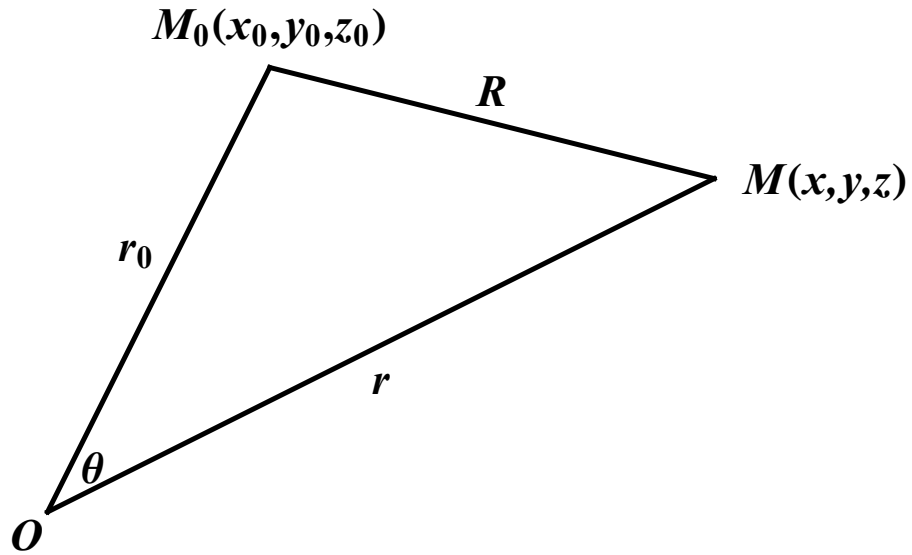


Рис. 1.3.2. Электростатический потенциал и полиномы Лежандра

Введем следующие обозначения:

$$\rho = \begin{cases} \frac{r}{r_0}, & r < r_0, \\ \frac{r_0}{r}, & r_0 < r. \end{cases}, \quad r_m = \begin{cases} r_0, & r < r_0, \\ r, & r_0 < r. \end{cases}, \quad x = \cos \theta$$

(очевидно, что при этом $-1 \leq x \leq 1$).

Тогда (1.3.83) принимает вид

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x}}$$

и, таким образом, фундаментальное решение уравнения Лапласа для потенциала поля точечного заряда выражается через полиномы Лежандра посредством производящей функции (1.3.37):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_m} \cdot \Phi(x, \rho) = \frac{1}{r_m} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \rho^n. \quad (1.3.84)$$

1.3.11.2. Полиномы Лежандра и уравнение Лапласа

Рассмотрим теперь более общий случай. Сделаем в уравнении Лежандра замену переменной $x = \cos \theta$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{dy}{d\theta}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \cdot \frac{dy}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2y}{d\theta^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \cdot \frac{dy}{d\theta} + n(n+1)y = 0. \quad (1.3.85)$$

Уравнение Лапласа в сферических координатах

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \\ u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi), \\ 0 \leq \rho < R, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned} \quad (1.3.86)$$

описывает распределение электростатического потенциала внутри сферы, если задан потенциал на ее поверхности.

Будем предполагать, что граничное условие не зависит от переменной φ , т. е. $u(R, \theta, \varphi) = f(\theta)$. Это означает, что значение потенциала изменяется

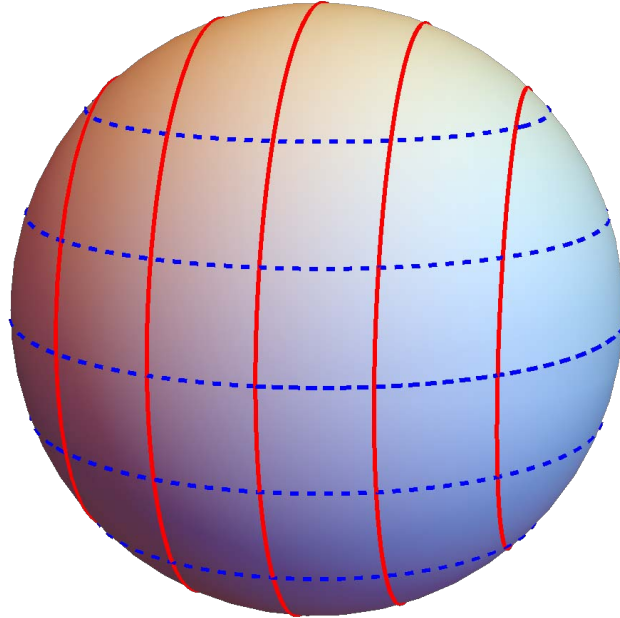


Рис. 1.3.3. Электростатический потенциал на поверхности сферы

вдоль «меридианов» (красные линии на рисунке 1.3.3) и не изменяется вдоль «параллелей» (синие линии на том же рисунке). Тогда уравнение (1.3.86) принимает вид

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + 2\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0. \quad (1.3.87)$$

Применив метод Фурье, будем искать решение (1.3.87) в виде $u(\rho, \theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$, выбрав константу разделения в виде $n(n+1)$ (можно показать, что только в этом случае решение будет ограниченным). Тогда для $R(\rho)$ приходим к уравнению Эйлера

$$\rho^2 R'' + 2\rho R' - n(n+1)R = 0,$$

а для $\Theta(\theta)$ имеем

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \cdot \frac{d\Theta}{d\theta} + n(n+1)\Theta = 0, \quad (1.3.88)$$

что совпадает с уравнением Лежандра (1.3.85), решениями которого являются полиномы Лежандра вида $P_n(\cos \theta)$.

1.3.11.3. Присоединенные функции Лежандра и уравнение Лапласа

Вернемся к уравнению Лапласа в сферических координатах (1.3.86)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} &= 0, \\ u(R, \theta, \varphi) &= f(\theta, \varphi), \\ 0 \leq \rho < R, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \end{aligned}$$

но теперь будем предполагать, что функция $f(\theta, \varphi)$, определяющая граничные условия, зависит от обеих переменных.

Применим метод Фурье. Пусть $u(\rho, \theta, \varphi) = R(\rho)\Omega(\theta, \varphi)$, тогда для определения $R(\rho)$ снова получаем уравнение Эйлера

$$\rho^2 R'' + 2\rho R' - \lambda R = 0$$

(здесь λ — константа разделения), а для функции $\Omega(\theta, \varphi)$ имеем

$$\Delta_{\theta, \varphi} \Omega + \lambda \Omega = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2} + \lambda \Omega = 0. \quad (1.3.89)$$

Функция $\Omega(\theta, \varphi)$ по понятным причинам должна удовлетворять следующим условиям:

$$\Omega(\theta, \varphi + 2\pi) = \Omega(\theta, \varphi); \quad |\Omega(0, \varphi)| < \infty; \quad |\Omega(\pi, \varphi)| < \infty.$$

Определение 11.1. Ограниченные решения уравнения (1.3.89), обладающие непрерывными до второго порядка производными, называются *сферическими функциями*.

Снова применяем метод Фурье: $\Omega(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. Тогда

$$\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial (\Theta \Phi)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 (\Theta \Phi)}{\partial \varphi^2} + \lambda \Theta \Phi = 0;$$

$$\Phi \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right] + \frac{\Theta}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \lambda \Theta \Phi = 0;$$

$$\sin^2 \theta \left\{ \frac{1}{\Theta \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right] + \lambda \right\} = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \mu.$$

Для $\Phi(\varphi)$ получаем уравнение

$$\Phi'' + \mu \Phi = 0.$$

С учетом условия периодичности $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ константу разделения μ следует выбрать в виде $\mu = m^2$, $m = 0, 1, 2, \dots$, тогда решениями задачи для $\Phi(\varphi)$ являются $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$.

В уравнении для $\Theta(\theta)$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0$$

сделаем замену переменной $\tau = \cos \theta$ и введем обозначение $y(\tau)|_{\tau=\cos \theta} = y(\cos \theta) = \Theta(\theta)$:

$$\frac{d}{d\tau} \left[(1 - \tau^2) \frac{dy}{d\tau} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - \tau^2} \right) y = 0, \quad -1 < \tau < 1. \quad (1.3.90)$$

Уравнение (1.3.90) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (1.3.63) для присоединенных функций Лежандра первого рода, если принять $\lambda = n(n+1)$ (напомним, что это условие ограниченности решения). Тогда

$$\Theta(\theta) = P_n^m(\cos \theta), \quad m \leq n. \quad (1.3.91)$$

Детальный анализ этой задачи будет дан в курсе методов математической физики.

1.3.11.4. Полиномы Чебышёва 1-го рода

Если на нелинейный элемент, статическая характеристика которого представляет собой полином Чебышёва некоторой степени n , подать гармонический сигнал, например, косинусоидальный (синусоидальный), единичной

амплитуды, то на выходе такого нелинейного элемента также будет гармонический сигнал единичной амплитуды, но с n -кратной частотой.

Полиномы Чебышёва растут за пределами интервала $[-1, 1]$ наиболее быстро из всех полиномов такой же степени, поэтому их используют для синтеза линейных фильтров. Такие фильтры при заданной неравномерности в полосе пропускания обладают наиболее крутой частотной характеристикой в полосе запираания по сравнению с другими фильтрами того же порядка.

1.3.11.5. Полиномы Лагерра и атом с одним электроном

Покажем, что при исследовании состояния электрона, находящегося в кулоновском поле (атом с одним электроном) в формуле

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

радиальная функция $R(r)$ выражается через полиномы Лагерра.

Следуя [2, с. 163–169] и [1, с. 175–180], рассмотрим движение электрона в кулоновском поле. Пусть e заряд электрона, а Ze , $Z \in \mathbb{N}$ — заряд ядра, тогда потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{r}.$$

Радиальное уравнение Шрёдингера в сферических координатах имеет вид

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \left[\frac{2m_0}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (1.3.92)$$

Чтобы избавиться от первой производной, сделаем замену $R(r) = \frac{1}{r}\chi(r)$, тогда

$$\chi'' + \left[\frac{2m_0}{\hbar^2} E + \frac{2m_0}{\hbar^2} \cdot \frac{Ze^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi = 0.$$

Наконец, перейдем к *атомной системе единиц*, в которой мировые константы — постоянная Планка, масса и заряд электрона — приняты за единицу: $\hbar = m_0 = e = 1$. Тогда в простейшем случае атома водорода ($Z = 1$) имеем

$$\chi'' + \left[2E + \frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi = 0. \quad (1.3.93)$$

Будем решать это уравнение, чтобы найти радиальные волновые функции и энергии состояний. Нас интересуют отрицательные значения энергии $E < 0$, которые определяют связанные состояния (дискретный спектр) электрона в кулоновском поле. Введем в (1.3.93) новую переменную ρ и константу n :

$$\rho = \frac{2r}{n}; \quad n = \frac{1}{\sqrt{-2E}}. \quad (1.3.94)$$

Перейдя к производным от функции $\chi(r)$ по новой переменной, получаем

$$\chi''(\rho) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{n}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right) \chi(\rho) = 0. \quad (1.3.95)$$

Общее решение уравнения (1.3.95) ищем в виде $\chi(\rho) = \rho^{l+1}e^{-\rho/2}w(\rho)$. Вычислим производные:

$$\begin{aligned} \chi'(\rho) &= e^{-\rho/2} \rho^{l+1} w' - \frac{1}{2} e^{-\rho/2} \rho^{l+1} w(\rho) + (l+1) e^{-\rho/2} \rho^l w; \\ \chi''(\rho) &= e^{-\rho/2} \rho^{l-1} \left[\rho^2 w'' + w' \left(-\rho^2 + 3(l+1)\rho \right) + \right. \\ &\quad \left. + w \left(l(l+1) - (l+1)\rho + \frac{1}{4}\rho^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Подставив полученные выражения в (1.3.95), после упрощения получим уравнение для определения $w(\rho)$:

$$\rho w'' + (2l+2-\rho)w' + (n-l-1)w = 0. \quad (1.3.96)$$

Это уравнение гипергеометрического типа вида (1.3.1). Можно показать (доказательство этого утверждения опустим), что его общее решение ограничено на бесконечности, если $n \geq l+1$, где $l = 0, 1, 2, \dots$, где n — *главное квантовое число*, l — *орбитальное квантовое число*. Тогда из (1.3.94) следует, что спектр энергии электрона в кулоновском поле дискретен: в атомной системе единиц имеем

$$E_n = -\frac{1}{2n^2},$$

а в обычной системе единиц

$$E_n = -\frac{m_0 Z^2 e^4}{2\hbar^2 n^2}. \quad (1.3.97)$$

Вернемся к уравнению (1.3.96). Сравнив его с (1.3.108), видим, что решением являются полиномы Лагерра $L_{n+l}^{(2l+1)}(\rho)$, где $\rho = 2r/n$, и, таким образом,

$$\chi_{nl}(\rho) = C \rho^{l+1} e^{-\rho/2} L_{n+l}^{(2l+1)}(\rho),$$

а решение исходного радиального уравнения Шрёдингера (1.3.92) имеет вид

$$R_{nl}(\rho) = C \rho^l e^{-\rho/2} L_{n+l}^{(2l+1)}(\rho).$$

Для нахождения константы C следует провести нормировку волновой функции, читайте об этом в указанных выше источниках.

1.3.11.6. Полиномы Эрмита и квантовый гармонический осциллятор

Опишем одно из приложений полиномов Эрмита. Рассмотрим задачу о нахождении собственных значений энергии E и собственных функций для линейного гармонического осциллятора, т. е. для частицы, движущейся в поле с потенциальной энергией $U = m\omega^2 x^2/2$ (m — масса частицы, x — смещение от положения равновесия, ω — циклическая частота). Эта задача играет важную роль в квантовой механике, квантовой электродинамике, при рассмотрении колебаний в кристаллах и молекулах.

Уравнение Шрёдингера для волновой функции $\psi(x)$ гармонического осциллятора имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \psi = E\psi, \quad -\infty < x < \infty. \quad (1.3.98)$$

Функция $\psi(x)$ должна быть ограниченной и удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x) dx = 1. \quad (1.3.99)$$

Перейдя к безразмерным переменным

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \xi = \alpha \xi, \quad E = \hbar\omega \epsilon, \quad (1.3.100)$$

получаем уравнение

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (2\epsilon - \xi^2)\psi = 0. \quad (1.3.101)$$

Приведем уравнение (1.3.101) к уравнению гипергеометрического типа. Пусть $\psi(\xi) = e^{-\xi^2/2} y(\xi)$ (здесь мы опускаем пояснения, почему выбирается именно такая замена; детали смотрите в книге [37, с. 72–73]). Уравнение приобретает вид

$$e^{-\xi^2/2} y'' - 2e^{-\xi^2/2} \xi y'(\xi) + \left(e^{-\xi^2/2} \xi^2 - e^{-\xi^2/2} \right) y + (2\epsilon - \xi^2) e^{-\xi^2/2} y = 0$$

или, после упрощения,

$$y'' - 2\xi y' + (2\epsilon - 1)y = 0. \quad (1.3.102)$$

Будем искать решение задачи в полиномиальной форме. Это объясняется тем, что классические ортогональные полиномы являются единственно

возможными нетривиальными решениями уравнения гипергеометрического типа (1.3.1)

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0,$$

удовлетворяющими требованиям ограниченности и квадратичной интегрируемости функции $y(x)$ на интервале ортогональности (a, b) (доказательство этого утверждения мы опускаем).

Для того, чтобы решение уравнения гипергеометрического типа было полиномом степени n , необходимо выполнение условия, следующего из равенства (1.3.6)

$$\lambda_n = \lambda^{(n)} + n\tau'(x) + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(x) = 0.$$

В нашем случае $\sigma(\xi) = 1$, $\tau(\xi) = -2\xi$, $\lambda = (2\varepsilon - 1)$ и, таким образом, $2\varepsilon - 1 + n(-2) = 0$, откуда $\varepsilon = n + \frac{1}{2}$. Уравнение (1.3.102) сводится к уравнению (1.3.75) для полиномов Эрмита

$$\frac{d^2 H_n(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH_n(\xi)}{d\xi} + 2nH_n(\xi) = 0$$

и, следовательно,

$$\psi_n(\xi) = C_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad x = \alpha\xi, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}. \quad (1.3.103)$$

Постоянные C_n определяются из условия нормировки (1.3.99).

Энергия осциллятора, как видно из формулы (1.3.100), принимает только дискретный набор значений

$$E = E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

1.3.12. Коллекция формул

В соотношениях ортогональности подчеркиванием выделена весовая функция.

1.3.12.1. Общие соотношения

1.3.12.1.1. Уравнение гипергеометрического типа

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0,$$

где $\sigma(x)$ — полином степени не выше второй, $\tau(x)$ — полином степени не выше первой, $\lambda = \text{const}$.

1.3.12.1.2. Формула Родрига

$$p_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \left[\sigma^n(x) \rho(x) \right]^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где B_n — нормировочный множитель

1.3.12.1.3. Соотношение ортогональности

$$\int_a^b \rho(x) p_n(x) p_m(x) dx = d_n^2 \delta_m^n,$$

где $\rho(x)$ — весовая функция, d_n — квадратичная норма.

1.3.12.1.4. Рекуррентное соотношение

$$\alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x) = x p_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

1.3.12.1.5. Вид весовой функции

Для классических ортогональных полиномов возможна одна из следующих форм:

$$\rho(x) = \begin{cases} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, & \alpha > -1, \beta > -1 & \text{(семейство полиномов Якоби),} \\ x^\alpha e^{-x}, & \alpha > -1 & \text{(полиномы Лагерра),} \\ e^{-x^2} & & \text{(полиномы Эрмита).} \end{cases}$$

1.3.12.2. Полиномы Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$

Параметры: $\alpha > -1, \beta > -1$.

Стандартизация (нормировка):

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n + \alpha}{n}.$$

Дифференциальное уравнение:

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{dx^2} + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] \frac{d P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{dx} + n(n + \alpha + \beta + 1) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 0.$$

Соотношение ортогональности:

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) \frac{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}{dx} dx =$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \delta_n^m$$

Производящая функция:

$$\Phi(x, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \left(1-t+\sqrt{1-2xt+t^2}\right)^{-\alpha} \times$$

$$\times \left(1+t+\sqrt{1-2xt+t^2}\right)^{-\beta} = 2^{-\alpha-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) t^n, \quad |t| < 1.$$

Рекуррентное соотношение:

$$2(n+1)\Omega_{n+1}\Omega_{2n}P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) + 2(n+\alpha)(n+\beta)\Omega_{2n+2}P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) =$$

$$= [\Omega_{2n+1}(\alpha^2 - \beta^2) + x\Omega_{2n}\Omega_{2n+1}\Omega_{2n+2}] P_n^{(\alpha, \beta)}(x),$$

где

$$\Omega_k = k + \alpha + \beta, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1, \quad \alpha + \beta \neq -1, \quad n=0, 1, \dots$$

Формула Родрига:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n! \rho(x)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [\rho(x) (1-x^2)^n], \quad \rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta.$$

1.3.12.3. Ультрасферические полиномы

(полиномы Гегенбауэра) $C_n^{(\lambda)}(x)$

Параметры: $\lambda > -\frac{1}{2}$.

Стандартизация (нормировка):

$$C_n^{(\lambda)}(1) = \begin{cases} \binom{n+2\lambda+1}{n}, & \lambda \neq 0; \\ \frac{2}{n}, & \lambda = 0, n \neq 0; \\ 1, & \lambda = 0, n = 0. \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение:

$$(1-x^2) \frac{d^2 C_n^{(\lambda)}(x)}{dx^2} - (2\lambda+1)x \frac{d C_n^{(\lambda)}(x)}{dx} + n(n+2\lambda) C_n^{(\lambda)}(x) = 0.$$

Соотношение ортогональности:

$$\int_{-1}^1 C_n^{(\lambda)}(x) C_m^{(\lambda)}(x) \frac{(1-x^2)^{\lambda-1/2}}{dx} dx = \begin{cases} \frac{\pi 2^{1-2\lambda} \Gamma(n+2\lambda)}{n!(n+\lambda)\Gamma^2(\lambda)} \delta_n^m, & \lambda \neq 0; \\ \frac{2\pi}{n^2} \delta_n^m, & \lambda = 0, n \neq 0; \\ \pi \delta_n^m, & \lambda = 0, n = 0. \end{cases}$$

Производящая функция:

$$\Phi(x, t) \equiv \frac{1}{(1-2xt+t^2)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\lambda)}(x) t^n, \quad \lambda \neq 0, \quad |t| < 1;$$

$$\Phi(x, t) \equiv -\ln(1-2xt+t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(0)}(x) t^n, \quad |t| < 1.$$

Рекуррентное соотношение:

$$C_{n+1}^{(\lambda)}(x) + \frac{n+2\lambda-1}{n+1} C_{n-1}^{(\lambda)}(x) = 2 \frac{n+\lambda}{n+1} x C_n^{(\lambda)}(x).$$

Формула Родрига:

$$C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \cdot \frac{\Gamma(\lambda+1/2)\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+1/2)\rho(x)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [\rho(x) (1-x^2)^n],$$

$$\rho(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}.$$

1.3.12.4. Полиномы Лежандра $P_n(x)$

Стандартизация (нормировка):

$$P_n(1) = 1.$$

Дифференциальное уравнение:

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0. \quad (1.3.104)$$

Соотношение ортогональности:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) \cdot \underline{1} dx = \frac{2}{2n+1} \delta_n^m.$$

Производящая функция:

$$\Phi(x, t) \equiv (1-2tx+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \quad |t| < 1.$$

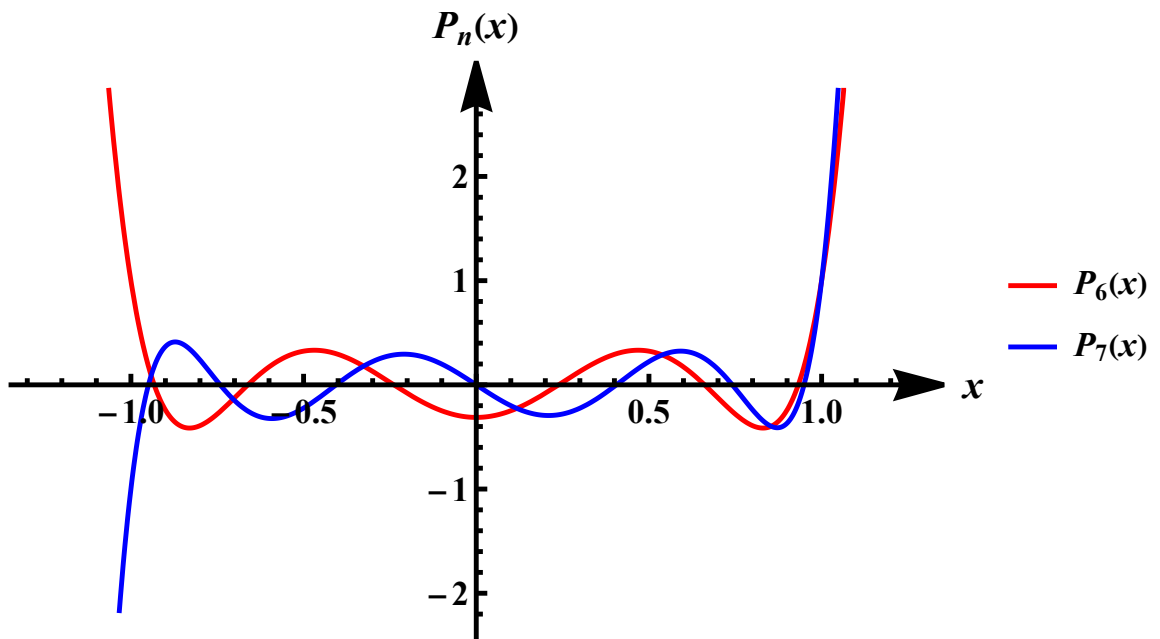


Рис. 1.3.4. Графики полиномов Лежандра

Рекуррентное соотношение:

$$(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x).$$

Формула Родрига:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n.$$

Интеграл Лапласа (доказательство равенства см. в задаче 3.5):

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi \right)^n d\varphi,$$

откуда

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi)^n d\varphi.$$

Можно показать, что

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{4^n} \sum_{m=0}^n C_n^{2m} C_{n-m}^{2n-2m} \cos(n-2m)\theta.$$

Применение: решение уравнения Лапласа в сферических координатах

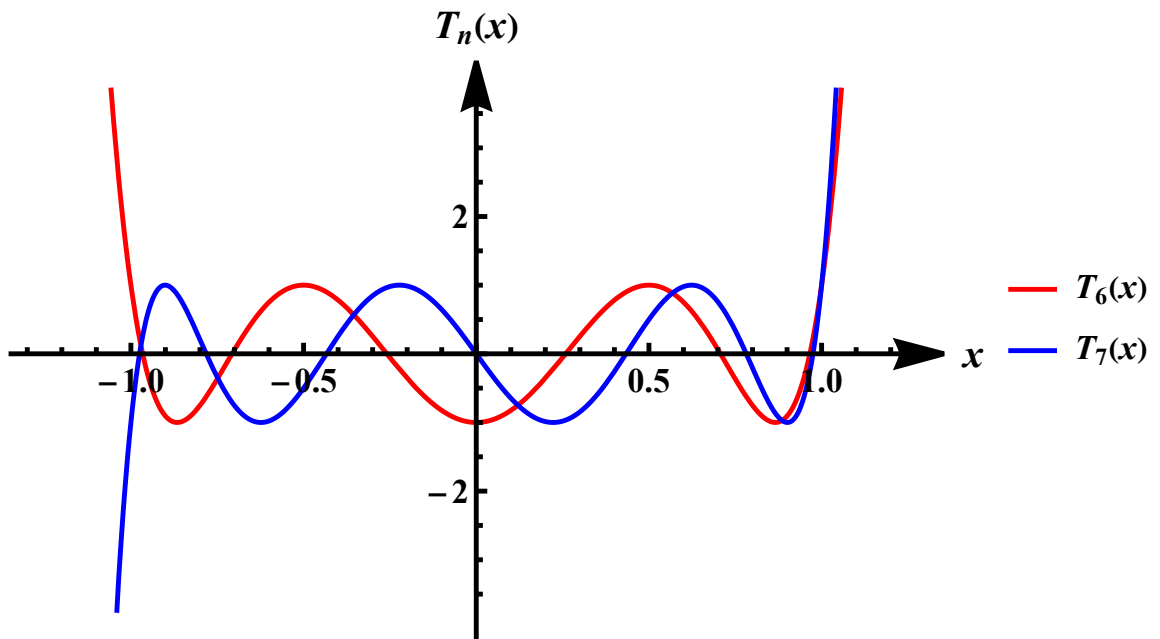


Рис. 1.3.5. Графики полиномов Чебышёва первого рода

1.3.12.5. Полиномы Чебышёва 1-го рода $T_n(x)$

Стандартизация (нормировка):

$$T_n(1) = 1.$$

Дифференциальное уравнение:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 T_n(x)}{dx^2} - x \frac{dT_n(x)}{dx} + n^2 T_n(x) = 0. \quad (1.3.105)$$

Соотношение ортогональности:

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \underline{(1 - x^2)^{-1/2}} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \delta_n^m, & n \neq 0; \\ \pi \delta_n^m, & n = 0. \end{cases}$$

Производящая функция:

$$\Phi(x, t) \equiv \frac{1 - t^2}{1 - 2xt + t^2} + 1 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n, \quad -1 < x < 1, \quad |t| < 1.$$

Рекуррентное соотношение:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x).$$

Формула Родрига:

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}}{2^n \Gamma(n + 1/2)} \cdot \frac{1}{(1 - x^2)^{-1/2}} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left[(1 - x^2)^{-1/2} (1 - x^2)^n \right].$$

Различные соотношения:

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

Сумма коэффициентов многочлена Чебышёва первого рода любой степени равна 1.

1.3.12.6. Полиномы Чебышёва 2-го рода $U_n(x)$

Стандартизация (нормировка):

$$U_n(1) = n + 1. \quad (1.3.106)$$

Дифференциальное уравнение:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 U_n(x)}{dx^2} - 3x \frac{dU_n(x)}{dx} + n(n + 2)U_n(x) = 0. \quad (1.3.107)$$

Соотношение ортогональности:

$$\int$$

Производящая функция:

$$\Phi(x, t) \equiv \frac{1}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n, \quad -1 < x < 1, \quad |t| < 1.$$

Рекуррентное соотношение:

$$U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) = 2xU_n(x).$$

Формула Родрига:

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n (n + 1) \sqrt{\pi}}{2^{n+1} \Gamma(n + 3/2)} \cdot \frac{1}{(1 - x^2)^{1/2}} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left[(1 - x^2)^{1/2} (1 - x^2)^n \right].$$

Различные соотношения:

$$U_n(x) = \frac{1}{n + 1} \frac{dT_{n+1}(x)}{dx},$$

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n + 1)\theta}{\sin \theta}.$$

Сумма коэффициентов многочлена Чебышёва второго рода степени n равна $n + 1$.

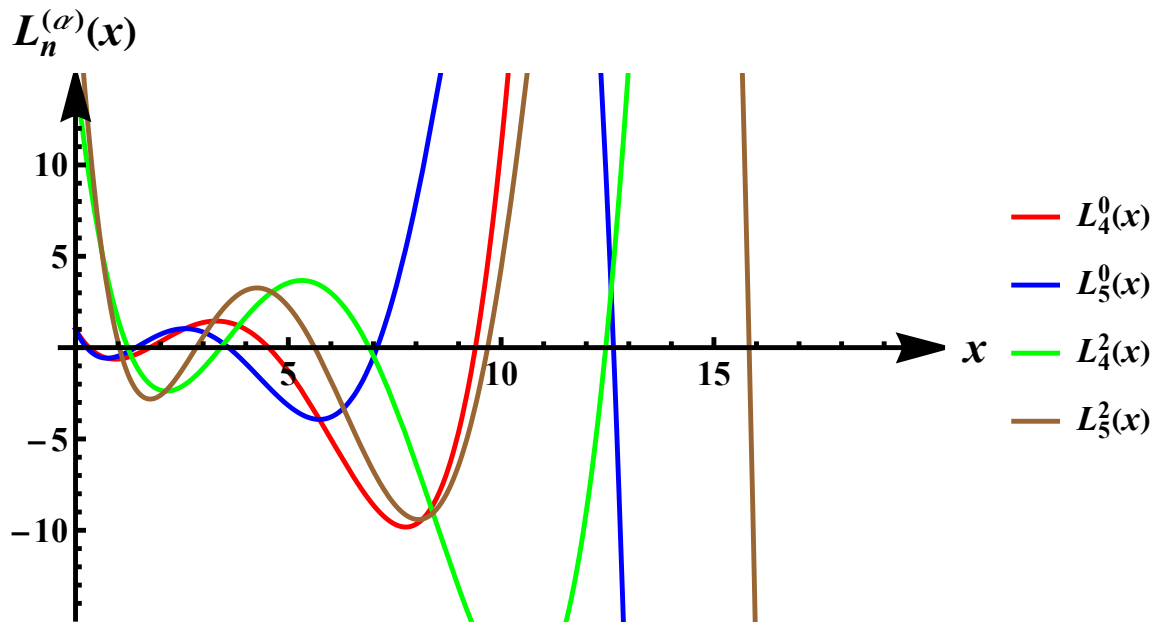


Рис. 1.3.6. Графики полиномов Лагерра

1.3.12.7. Полиномы Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$

Параметры: $\alpha > -1$.

Стандартизация (нормировка):

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}, \text{ где } a_n \text{ — коэффициент при } x^n, \alpha > -1.$$

Дифференциальное уравнение:

$$x \frac{d^2 L_n^{(\alpha)}(x)}{dx^2} + (\alpha + 1 - x) \frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx} + n L_n^{(\alpha)}(x) = 0. \quad (1.3.108)$$

Соотношение ортогональности:

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) \underline{x^\alpha e^{-x}} dx = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} \delta_n^m.$$

Производящая функция:

$$\Phi(x, t) \equiv (1 - t)^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n. \quad (1.3.109)$$

Рекуррентное соотношение:

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = (2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x). \quad (1.3.110)$$

Формула Родрига:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n! x^\alpha e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n} (x^\alpha e^{-x} \cdot x^n). \quad (1.3.111)$$

Различные соотношения:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha/2}}{n!} \int_0^\infty t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{xt}) e^{-t} dt.$$

1.3.12.8. Полиномы Эрмита $H_n(x)$

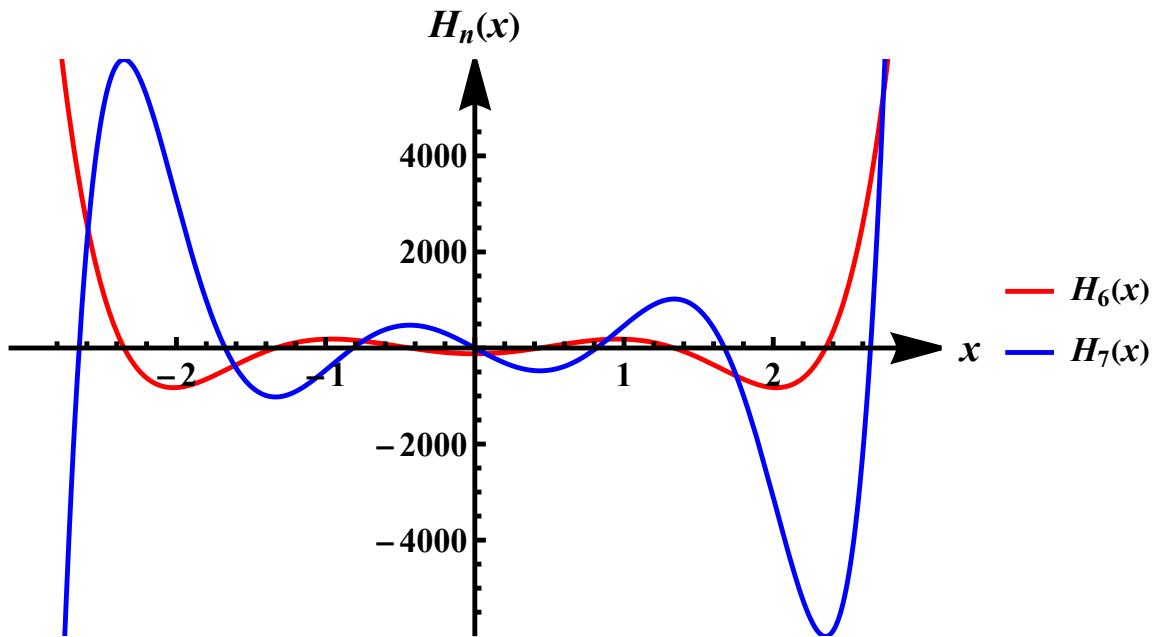


Рис. 1.3.7. Графики полиномов Эрмита

Стандартизация (нормировка):

$e_n = (-1)^n$ — множитель перед производной в формуле Родрига.

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_n(x)}{dx} + 2n H_n(x) = 0.$$

Соотношение ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) \underline{e^{-x^2}} dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_n^m.$$

Производящая функция:

$$\Phi(x, t) \equiv e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

(строго говоря, это производящая функция для полиномов Эрмита, деленных на $n!$).

Рекуррентное соотношение:

$$H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x) = 2xH_n(x).$$

Формула Родрига:

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{e^{-x^2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2} \cdot 1).$$

Применение: решение уравнения Шрёдингера для гармонического осциллятора

$$\frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2} + (\lambda_n - x^2) \psi_n(x) = 0.$$

При $\lambda_n = 2n + 1$

$$\psi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x).$$

1.3.12.9. Присоединенные функции Лежандра первого рода $P_n^m(x)$

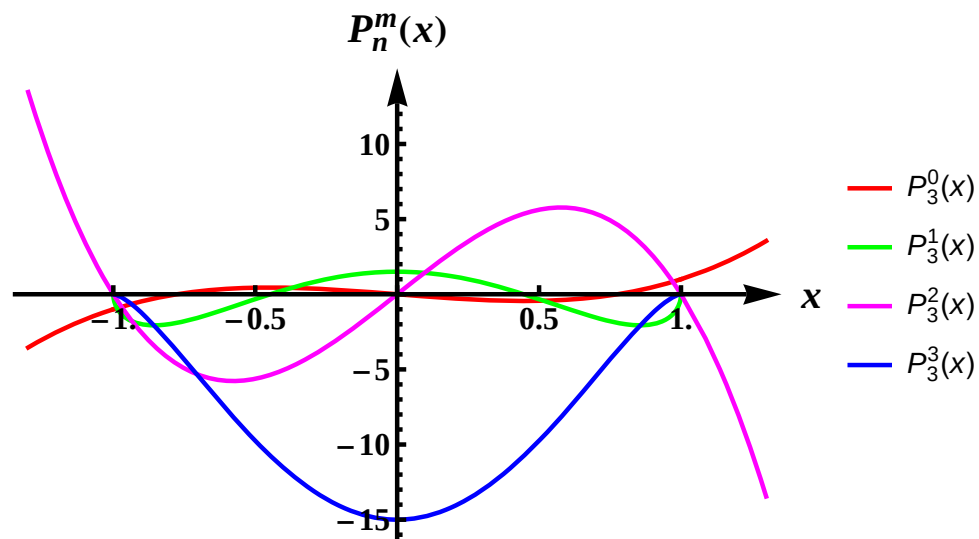


Рис. 1.3.8. Графики присоединенных функций Лежандра

Дифференциальное уравнение:

$$(1 - z^2)u'' - 2zu' + \left[\nu(\nu + 1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] u = 0 \quad (1.3.57)$$

Соотношение ортогональности:

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = (-1)^m \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_k^n, \quad k, m, n \in \mathbb{N}. \quad (1.3.62)$$

Рекуррентное соотношение:

$$P_{\mathfrak{v}}^{m+2}(z) + \frac{2(m+1)}{(z^2-1)^{1/2}} z P_{\mathfrak{v}}^{m+1}(z) + (\mathfrak{v}-m)(\mathfrak{v}+m+1) P_{\mathfrak{v}}^m(z) = 0; \quad (1.3.67)$$

$$(\mathfrak{v}+1-m) P_{\mathfrak{v}+1}^m(z) - (2\mathfrak{v}+1) z P_{\mathfrak{v}}^m(z) + (\mathfrak{v}+m) P_{\mathfrak{v}-1}^m(z) = 0. \quad (1.3.68)$$

1.4. Основы операционного исчисления

1.4.1. Преобразование Лапласа

Подобно преобразованию Фурье, преобразование Лапласа, которое мы рассмотрим в этой главе, позволяет уменьшать количество независимых переменных, сводя тем самым обыкновенное дифференциальное уравнение к алгебраическому, уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными — к обыкновенному и т. д.

Кроме того, использование приемов операционного исчисления позволяет решать неоднородные дифференциальные уравнения, в правой части которых стоит ступенчатая или периодическая функция, уравнения с запаздыванием и другие задачи, в которых применение обычных методов было бы затруднительно.

1.4.1.1. Оригиналы. Свойства оригиналов

Определение 1.1. *Оригиналом* называется функция $f(t)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

Замечание 1.1. В дальнейшем при записи функции-оригинала мы по умолчанию будем предполагать, что это свойство выполняется. Иными словами, записывая $f(t) = \cos \omega t$, будем подразумевать $f(t) = \cos \omega t \cdot \theta(t)$, где

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.4.1)$$

называется *функцией Хевисайда*.

Замечание 1.2. Возможно также *двустороннее преобразование Лапласа*, в котором допускаются и отрицательные значения t . Обсуждение этого вопроса выходит за рамки нашей программы, желающим знать больше порекомендуем книгу [12].

2. $f(t)$ кусочно-непрерывна и кусочно-монотонна на действительной полуоси;

3. $f(t)$ является *функцией ограниченного роста*. Это означает, что существуют такие положительные числа M и σ , что при всех $t > 0$

$$|f(t)| \leq M e^{\sigma t}. \quad (1.4.2)$$

Рассмотрим подробнее условие 3.

Определение 1.2. *Показателем роста* называется число $\sigma_0 = \inf \sigma$, являющееся точной нижней гранью всех чисел σ , входящих в неравенство (1.4.2).

Прологарифмируем это неравенство:

$$\begin{aligned} \ln |f(t)| &\leq \ln M + \sigma t; \\ \frac{\ln |f(t)|}{t} &\leq \frac{\ln M}{t} + \sigma \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\sigma_0 = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(t)|}{t}. \quad (1.4.3)$$

Если $\sigma_0 < +\infty$, то условие 3 выполняется.

Пример 1.1. Пусть $f(t) = t^n$, тогда

$$\sigma_0 = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t^n}{t} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{n \ln t}{t} = 0.$$

Степенная функция удовлетворяет условию при любых n с нулевым показателем роста и в силу непрерывности является оригиналом.

Пример 1.2. $f(t) = \operatorname{sh}^n t$ (заметим, что при $t > 0$ выполняется $f(t) > 0$). В этом случае

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \operatorname{sh}^n t}{t} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \cdot \ln \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{kt} e^{(n-k)(-t)} \frac{1}{2^n} \right] = \\ &= \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \cdot \ln \left[e^{nt} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{(2k-2n)t} \frac{1}{2^n} \right] = \\ &= \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left[\ln e^{nt} + \ln \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{(2k-2n)t} - \ln 2^n \right] = n, \end{aligned}$$

так как все экспоненты под знаком суммы имеют отрицательные либо нулевой показатели. Кроме того, функция $\operatorname{sh}^n t$ непрерывна и является оригиналом с показателем роста n .

Пример 1.3. $f(t) = e^{t^2}$. Здесь

$$\sigma_0 = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln e^{t^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} t = \infty.$$

Данная функция не является оригиналом в силу невыполнения условия 3.

Пример 1.4. Функция $f(t) = \operatorname{ctg} t$ не является оригиналом, так как для нее не выполняется условие 2: имеются разрывы 2-го рода. Поэтому условие 3 можно не проверять.

1.4.1.2. Изображения. Свойства изображений

Определение 1.3. *Изображением* оригинала $f(t)$ называется функция

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (1.4.4)$$

Определение 1.4. Формула (1.4.4) называется **преобразованием Лапласа**. Другие обозначения:

$$f(t) \doteq F(p)$$

(читается «функция $f(t)$ имеет своим изображением $F(p)$ ») и

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p),$$

где $\mathcal{L}$ — оператор Лапласа, аргументом которого является не переменная, а функция (обратите внимание на расстановку квадратных и круглых скобок).

Теорема 1.1. *Если функция $f(t)$ оригинал с показателем роста σ_0 , то интеграл (1.4.4) сходится абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$. При этом сходимость равномерна в любой области $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$. Функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.*

Пусть $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma$. В силу условия 3 для оригиналов существует такое $M > 0$, что при $t > 0$ имеет место неравенство $|f(t)| \leq Me^{\sigma_1 t}$, т. е. функция $f(t)e^{-\sigma_1 t}$ ограничена на действительной оси. Для любого $p = \xi + i\eta$ такого, что $\xi \geq \sigma$ выполняется

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-pt}| dt = \int_0^{\infty} |f(t)|e^{-\xi t} dt \leq \int_0^{\infty} Me^{-(\sigma-\sigma_1)t} dt. \quad (1.4.5)$$

Таким образом, подынтегральная функция имеет мажоранту, следовательно, интеграл в левой части (1.4.5) сходится, а интеграл (1.4.4) сходится абсолютно и равномерно в области $\operatorname{Re} p \geq \sigma$.

Продифференцируем равномерно сходящийся интеграл по параметру p :

$$\frac{d}{dp} \int_0^{\infty} |f(t)e^{-pt}| dt = \int_0^{\infty} |f(t)t e^{-pt}| dt \leq \int_0^{\infty} Mte^{-(\sigma-\sigma_1)t} dt.$$

Легко видеть, что интеграл в правой части сходится, следовательно, функция $F(p)$ в любой точке области $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ обладает производной и потому аналитична. $\square$

Теорема 1.2. Если функция $F(p)$ является изображением, то

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0. \quad (1.4.6)$$

Действительно, если $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$, то

$$|F(p)| \leq \int_0^{\infty} |f(t)e^{-pt}| dt \leq \int_0^{\infty} M e^{-(\operatorname{Re} p - \sigma)t} dt = \frac{M}{\operatorname{Re} p - \sigma} \xrightarrow{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

Теорема 1.3 (формула обращения). Если функция $f(t)$ является оригиналом и $f(t) \doteq F(p)$, то имеет место обратное преобразование Лапласа, которое задается **формулой Римана – Меллина**:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (1.4.7)$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения, т. е.

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\sigma-ib}^{\sigma+ib} F(p) e^{pt} dp,$$

$\sigma > \sigma_0$ — произвольное число. Равенство (1.4.7) выполняется в каждой точке, в которой функция $f(t)$ непрерывна.

Для доказательства (не вполне строгого) теоремы обратимся к рассмотренным в теме 1.1.6 прямому

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} f(x) dx$$

и обратному

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} F(z) dz$$

преобразованиям Фурье, переписав эти формулы в виде

$$F(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\eta\tau} d\tau; \quad (1.4.8)$$

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta) e^{i\eta\tau} d\eta. \quad (1.4.9)$$

Функция $f(t)e^{-\xi t}$ при $\xi > \sigma_0$ — оригинал экспоненциального преобразования Фурье. Тогда

$$f(t)e^{-\eta t} = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta t} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\xi\tau} e^{-i\eta\tau} d\tau,$$

откуда

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\xi+i\eta)t} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-(\xi+i\eta)\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi + i\eta) e^{(\xi+i\eta)t} d\eta. \end{aligned}$$

Полагая $p = \xi + i\eta$, с учетом условия $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ получаем искомый результат. $\square$

Замечание 1.1. Обратное преобразование Лапласа обозначается

$$F(p) \doteq f(t)$$

(читается «функция $F(p)$ имеет своим оригиналом $f(t)$ »)

Доказанные выше свойства аналитичности и существования предела $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0$ являются *необходимыми*, но не достаточными для того, чтобы функция $F(p)$ являлась изображением по Лапласу. Определим теперь *достаточные* условия.

Теорема 1.4. Пусть функция комплексной переменной $F(p)$ удовлетворяет условиям:

1. $F(p)$ определена и аналитична в области $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.
2. В любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$ существует предел

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0.$$

3. Функция $F(p)$ абсолютно интегрируема вдоль всякой прямой вида $\operatorname{Re} p = \sigma$, $\sigma > \sigma_0$, т. е. $F(\xi + i\eta)$ абсолютно интегрируема по переменной η . Тогда $F(p)$ является изображением некоторой функции-оригинала $f(t)$, имеющей показатель роста не более σ_0 .

Таким образом, нужно доказать, что

- а) формула обращения (1.4.7) корректно определяет функцию $f(t)$;
- б) функция $f(t)$ является оригиналом;
- в) изображением $f(t)$ является данная функция $F(p)$.

Докажем утверждение а. Пусть

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(\sigma + i\eta) e^{(\sigma+i\eta)t} d\eta. \quad (1.4.10)$$

Интеграл (1.4.10) сходится, так как $|F(\sigma + i\eta) e^{(\sigma+i\eta)t}| = |F(\sigma + i\eta)| e^{\sigma t}$, а интеграл для F сходится. Тогда функция $f(t)$ определена корректно.

Кроме того, интеграл (1.4.10) сходится равномерно по t на любом отрезке $[t_1, t_2]$ действительной оси, поэтому $f(t)$ непрерывна. Далее,

$$|f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + i\eta)| e^{\sigma t} d\eta = C e^{\sigma t}$$

и, следовательно, $f(t)$ имеет ограниченный рост, причем $\sigma > \sigma_0$.

Для доказательства того, что $f(t)$ оригинал, осталось проверить, что $f(t) = 0|_{t < 0}$.

Рассмотрим контур Γ_R , состоящий из отрезка $[\sigma - i\omega_R, \sigma + i\omega_R]$ и дуги C_R (рисунок 1.4.1).

Пусть $\operatorname{Re} p \geq \sigma$. В области, ограниченной контуром, функция $F(p)$ аналитична. При $t < 0$ внутри контура нет особых точек и $\oint_{\Gamma_R} F(p) e^{pt} dp = 0$.

Устремим $R \rightarrow \infty$. Согласно лемме Жордана (см. с. 193) $\int_{C_R} F(p) e^{pt} dp \rightarrow 0$, так как $F(p) \xrightarrow{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} 0$. Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma-i\omega_R}^{\sigma+i\omega_R} F(p) e^{pt} dp = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp = 0$$

в силу условия $t < 0$.

Итак, функция $f(t)$, определенная по формуле обращения, является оригиналом. $\square$

Третье утверждение (изображением $f(t)$ является данная функция $F(p)$) мы оставим без доказательства.

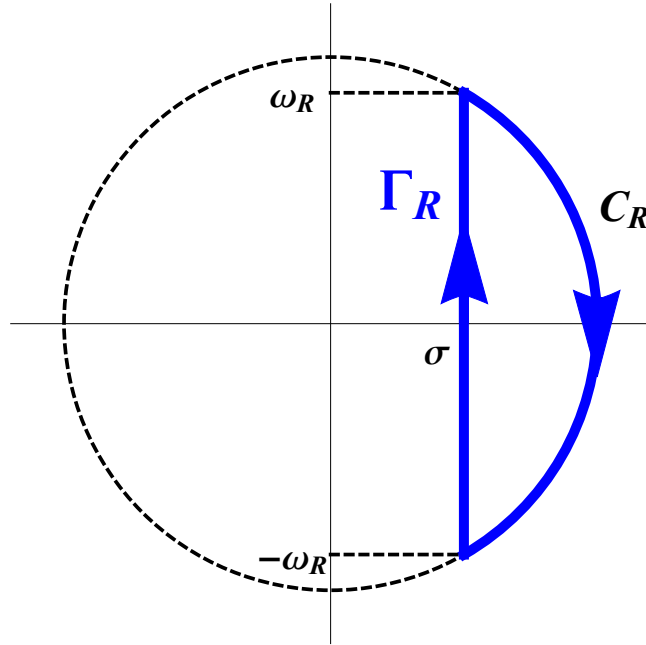


Рис. 1.4.1. К доказательству достаточных условий для изображения

1.4.2. Теоремы об оригиналах и изображениях

В этом параграфе через $f(t)$ и $g(t)$ обозначены функции-оригиналы, через $F(p)$ и $G(p)$ – их изображения.

Замечание 2.1. Почти каждому свойству оригиналов соответствует аналогичное (*двойственное*) свойство изображений. Так, двойственны рассмотренные ниже свойства 2.3 и 2.4, 2.5 и 2.6, 2.7 и 2.9, 2.10 и 2.11.

1.4.2.1. Линейность

Теорема 2.1. Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta F(p). \quad (1.4.11)$$

Доказательство с очевидностью следует из свойства линейности интеграла.

1.4.2.2. Теорема подобия

Теорема 2.2. Если функция $f(t)$ оригинал, то для любого $\alpha > 0$ функция $f(\alpha t)$ также является оригиналом. Тогда

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad (1.4.12)$$

Докажите теорему самостоятельно.

1.4.2.3. Теорема сдвига

Теорема 2.3. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$

$$e^{\lambda t} f(t) \doteq F(p - \lambda). \quad (1.4.13)$$

Докажите теорему самостоятельно.

1.4.2.4. Теорема запаздывания

Теорема 2.4. Для любого $a > 0$

$$f(t - a) \doteq e^{-ap} F(p). \quad (1.4.14)$$

Функция f является оригиналом, поэтому $f(t - a)|_{t < a} \equiv 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - a)] &= \int_0^\infty f(t - a) e^{-pt} dt = \int_a^\infty f(t - a) e^{-pt} dt = [\tau = t - a] = \\ &= \int_0^\infty f(\tau) e^{-p(\tau+a)} d\tau = e^{-pa} \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau} d\tau = e^{-pa} F(p). \quad \square \end{aligned}$$

Замечание 2.1. Рассмотрим обратное преобразование Лапласа для функции $e^{-pa} F(p)$, $a > 0$. Соотношение $e^{-pa} F(p) \doteq f(t - a)$, формально следующее из (1.4.14), должно быть дополнено множителем $\theta(t - a)$, подчеркивающим, что полученная функция при отрицательном значении аргумента обращается в нуль. Таким образом,

$$e^{-pa} F(p) \doteq f(t - a) \theta(t - a)$$

1.4.2.5. Теорема об интегрировании оригинала

Теорема 2.5. Если функция $f(t)$ оригинал, то и функция

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

также является оригиналом, причем

$$g(t) \doteq \frac{1}{p} F(p). \quad (1.4.15)$$

Условия равенства нулю при $t < 0$ и кусочной непрерывности для функции g , очевидно, выполняются. Докажем ограниченность роста:

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau \leq \int_0^t M e^{\sigma\tau} d\tau = \frac{M}{\sigma} (e^{\sigma t} - 1).$$

Так как $\sigma > 0$,

$$|g(t)| \leq \frac{M_1}{\sigma} e^{\sigma t}. \quad \square$$

Итак, доказано, что функция $g(t)$ оригинал. Найдем ее изображение:

$$G(p) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{p} g(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} g'(t) dt = \frac{1}{p} F(p). \quad \square$$

1.4.2.6. Теорема об интегрировании изображения

Теорема 2.6. Пусть функция $f(t)$ оригинал, причем функция $f(t)/t$ ограничена в окрестности нуля и также является оригиналом. Тогда

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^{\infty} F(p) dp. \quad (1.4.16)$$

Проинтегрируем почленно формулу (1.4.4) по p . Поскольку интеграл в преобразовании Лапласа равномерно сходится, можно менять порядок интегрирования, тогда

$$\int_p^{\infty} F(p) dp = \int_p^{\infty} dp \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) dt \int_p^{\infty} e^{-pt} dp = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt. \quad \square$$

1.4.2.7. Теорема о дифференцировании оригинала

Замечание 2.1. Если функция $f(t)$ является оригиналом, то ее производная $f'(t)$ не обязательно оригинал. Например, $f(t) = \sin e^{t^2}$ удовлетворяет всем требованиям для оригинала, а ее производная $-2te^{t^2} \sin e^{t^2}$ не удовлетворяет условию ограниченного роста.

Теорема 2.7. Пусть функция $f(t)$ непрерывна при $t > 0$ и дифференцируема всюду, кроме, возможно, некоторого дискретного множества точек (т. е. на каждом конечном отрезке содержится конечное число таких точек). Тогда, если функция и ее производная являются оригиналами и $f(t) \doteq F(p)$, то

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(+0), \quad (1.4.17)$$

где $f(+0) \equiv \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$.

Докажем теорему двумя способами.

Первый способ. Для функции $f(t)$ выполняется

$$f(t) = f(+0)\theta(t) + \int_0^{\infty} f'(\tau) d\tau.$$

Применим теорему об интегрировании оригинала:

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = f(+0) \cdot \mathcal{L}[\theta(t)](p) + \frac{\mathcal{L}[f'(t)](p)}{p} = f(+0) \cdot \frac{1}{p} + \frac{\mathcal{L}[f'(t)](p)}{p},$$

откуда следует утверждение теоремы. Здесь мы использовали формулу для изображения функции Хевисайда:

$$\theta(t) \doteq \int_0^{\infty} \theta(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{p}. \quad (1.4.18)$$

Второй способ. Воспользуемся интегрированием по частям:

$$f'(t) \doteq \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Поскольку $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$ и $|f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t}$, имеем $|f(t) e^{-pt}| \leq M e^{-(\sigma - \sigma_0)t}$ и на верхнем пределе в первом слагаемом получаем ноль, а на нижнем $-f(+0)$. Второй член равен $pF(p)$, и это снова дает формулу (1.4.17).

Замечание 2.2. Если $f(+0) = 0$, то изображение производной оригинала равно изображению оригинала, умноженному на p :

$$f'(t) \doteq pF(p).$$

Теорему можно обобщить на случай многократного дифференцирования.

Теорема. Если функция $f(t)$ имеет $(k-1)$ производную, непрерывную при $t > 0$, и существует k -я производная всюду, кроме некоторого дискретного множества точек, причем все производные оригиналы, то

$$f^{(k)}(t) \doteq p^k F(p) - p^{k-1} f(+0) - \dots - f^{(k-1)}(+0). \quad (1.4.19)$$

В самом деле, применим формулу (1.4.17) ко второй производной:

$$f''(t) = [f'(t)]' \doteq p[F(p) - f(+0)] - f'(+0) = p^2 F(p) - p f(+0) - f'(+0).$$

Продолжая этот процесс, приходим к формуле (1.4.19) для любого натурального k .

Из теоремы 2.7 следуют также *предельные* (так называемые *тауберовы*¹) теоремы.

Теорема 2.8. *Если $f(t)$ является оригиналом вместе со своей производной $f'(t)$, то*

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} p F(p) = f(+0). \quad (1.4.20)$$

Если, кроме того, существует $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$, то

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow 0} p F(p) = f(\infty). \quad (1.4.21)$$

Для доказательства первой теоремы воспользуемся свойством (1.4.6) любого изображения обращаться в нуль при $p \rightarrow \infty$. Поскольку $f'(t)$ является оригиналом, из формулы (1.4.17) следует

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} [p F(p) - f(+0)] = 0,$$

откуда следует (1.4.20).

Далее, существование конечного предела $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$ означает, что функция $f(t)$ ограничена и, следовательно, что ее показатель роста равен нулю. Тогда изображение определено во всей правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ и переход к пределу при $p \rightarrow +0$ законен.

Запишем (1.4.17) в форме

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = p F(p) - f(+0)$$

и перейдем к пределу при $p \rightarrow \infty$. Поскольку функция $f'(t)$ по условиям теоремы является оригиналом, то согласно доказанной ранее теореме интеграл в левой части сходится равномерно по параметру p в области $\operatorname{Re} p > 0$, и, следовательно можно переходить к пределу под знаком несобственного интеграла. При этом $e^{-pt} \rightarrow 1$ и

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = f(\infty) - f(+0) = \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow 0} [p F(p) - f(+0)],$$

откуда следует утверждение второй теоремы.

¹По имени австрийского математика Альфреда Таубера.

1.4.2.8. Теорема о дифференцировании изображения

Теорема 2.9. Если $f(t)$ оригинал, то $tf(t)$ также оригинал, при этом

$$-tf(t) \doteq F'(p). \quad (1.4.22)$$

Пусть $tf(t) = \varphi(t)$, причем $\varphi(t) \doteq \Phi(p)$. Тогда по теореме об интегрировании изображения

$$f(t) = \frac{\varphi(t)}{t} \doteq \int_p^\infty \Phi(p) dp = F(p).$$

Отсюда

$$\frac{dF}{dp} = -\Phi(p) \doteq -\varphi(t) = -tf(t). \quad \boxtimes$$

Следствие 2.1. Продолжая это рассуждение, получим для $n = 1, 2, \dots$

$$(-t)^n f(t) \doteq F^{(n)}(p). \quad (1.4.23)$$

1.4.2.9. Теорема о свертке (теорема умножения)

Определение 2.1. *Сверткой*² двух оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ называется функция

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau. \quad (1.4.24)$$

Докажем, что свертка также является оригиналом. Кусочная непрерывность свертки очевидна, при $t < 0$ выполняется $(f * g)(t) = 0$. Рассмотрим третье свойство (ограниченный рост), положив $\sigma_0 = \max(\sigma_{0f}, \sigma_{0g})$.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right| &\leq \int_0^\infty \left| f(\tau)g(t - \tau) \right| d\tau < \\ &< M \int_0^\infty e^{\sigma_0 \tau} e^{\sigma_0(t - \tau)} d\tau = Mte^{\sigma_0 t} < M_1 e^{(\sigma_0 + \varepsilon)t} \end{aligned}$$

(поскольку $t < M'e^{\varepsilon t}$). $\boxtimes$

Теорема 2.10. Изображением свертки является произведение изображений функций $f(t)$ и $g(t)$:

$$(f * g)(t) \doteq F(p)G(p). \quad (1.4.25)$$

²В старых книгах встречается также термин «складка».

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 (f * g)(t) &\doteq \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau = \left[\operatorname{Re} p > \max(\sigma_{0f}, \sigma_{0g}) \right] = \\
 &\int_0^\infty d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f(\tau)g(t-\tau) dt = \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-pt} dt = \\
 &= \left[v = t - \tau \right] = \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_0^\infty g(v)e^{-p(v+\tau)} dv = \\
 &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau} d\tau \int_0^\infty g(v)e^{-pv} dv = F(p)G(p). \quad \boxtimes
 \end{aligned}$$

Замечание 2.1. Свертка коммутативна:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = (g * f)(t). \quad (1.4.26)$$

Докажите это самостоятельно.

1.4.2.10. Интеграл (формула) Дюамеля

Если производная функции $f(t)$ также является оригиналом, то выполняется соотношение, называемое **интегралом Дюамеля**:

$$pF(p)G(p) \doteq \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau) d\tau + f(+0)g(t). \quad (1.4.27)$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 pF(p)G(p) &= \left[pF(p) - f(+0) \right] G(p) + f(+0)G(p) \doteq \\
 &\doteq \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau) d\tau + f(+0)g(t).
 \end{aligned}$$

В частности, если $f(+0) = 0$, то

$$pF(p)G(p) \doteq \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau) d\tau. \quad (1.4.28)$$

Замечание 2.1. В силу свойства коммутативности свертки (1.4.26) функции в (1.4.27) можно поменять местами:

$$pF(p)G(p) \doteq \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau) d\tau + g(+0)f(t). \quad (1.4.29)$$

Об использовании интеграла Дюамеля для решения дифференциальных уравнений см. в пункте 1.4.4.2.

1.4.2.11. Теорема, двойственная теореме умножения

Теорема 2.11. Пусть даны два оригинала $f(t)$ и $g(t)$ с показателями роста σ_1 и σ_2 . Их произведение также является оригиналом, причем

$$f(t)g(t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} F(q)G(p-q) dq, \quad (1.4.30)$$

где $\xi > \sigma_1$ и $\operatorname{Re} p > \sigma_2 + \xi$.

Произведение $f(t)g(t)$ есть оригинал, изображение которого

$$f(t)g(t) \doteq \int_0^\infty f(t)g(t)e^{-pt} dt.$$

С другой стороны, по формуле обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} F(q)e^{qt} dq,$$

тогда

$$\begin{aligned} f(t)g(t) &\doteq \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} F(q)e^{qt} dq \right] g(t)e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} F(q) \underbrace{\int_0^\infty g(t)e^{-(p-q)t} dt}_{G(p-q)} dq. \quad \boxtimes \end{aligned}$$

1.4.2.12. Изображение периодических функций

Определение 2.2. Оригинал $f(t)$ называется *периодической функцией*, если существует такое число $T > 0$, называемое периодом, что для всех $t > 0$ выполняется $f(t + T) = f(t)$.

Теорема 2.12. Изображение периодической функции задается формулой

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (1.4.31)$$

Для доказательства теоремы введем вспомогательную функцию

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Тогда $f(t) = f_0(t) + f(t - T)$. Далее, $f(t) \doteq F(p)$ и по теореме запаздывания $f(t - T) \doteq F(p)e^{-pT}$. Отсюда

$$F(p) = F_0(p) + F(p)e^{-pT}$$

и, следовательно,

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}.$$

Поскольку

$$F_0(p) = \int_0^\infty f_0(t) e^{-pt} dt = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt,$$

теорема доказана. $\square$

1.4.2.13. Изображение импульсных функций

Определение 2.3. *Дельта-функция Дирака* формально задается как

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0. \end{cases} \quad (1.4.32)$$

Обычно она применяется в формулах вида

$$\int_a^b f(t) \delta(t) dt = \begin{cases} 0, & t \notin (a, b), \\ f(0), & t \in (a, b) \end{cases} \quad (1.4.33)$$

ИЛИ

$$\int_a^b f(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} 0, & t_0 \notin (a, b), \\ f(t_0), & t_0 \in (a, b), \end{cases} \quad (1.4.34)$$

откуда следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.4.35)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, t > h \\ 1/h, & 0 < t < h \end{cases} \quad (1.4.36)$$

(рисунок 1.4.2). Эта функция описывает воздействие, которое действует лишь

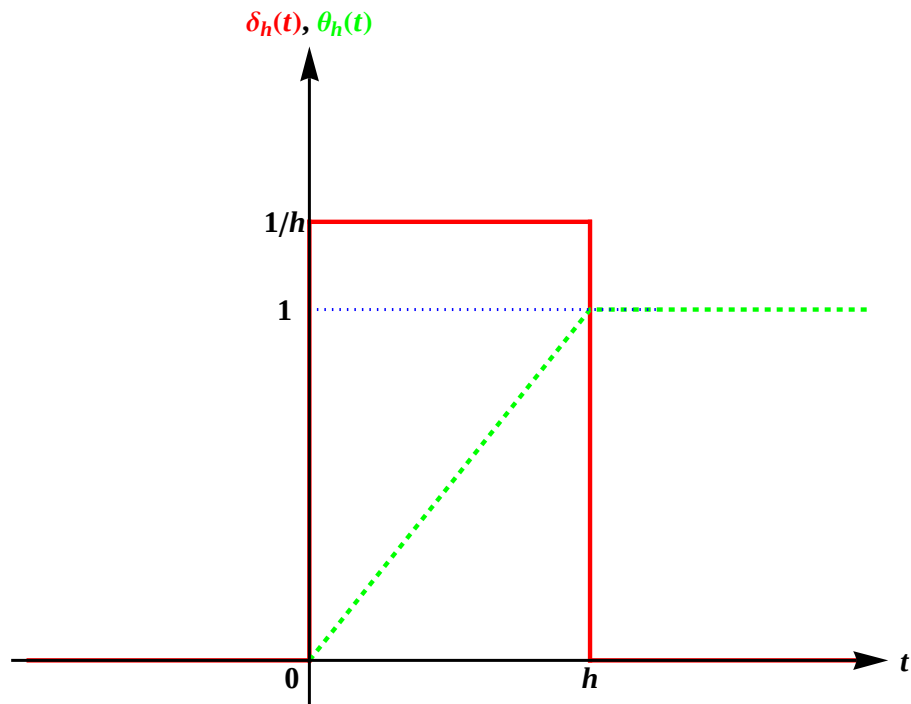


Рис. 1.4.2. Графики функций $\delta_h(t)$ (сплошная линия) и $\theta_h(t)$ (штриховая линия) при $h = 0,8$

на отрезке $(0, h)$, где имеет постоянное значение $1/h$, суммарный эффект ее действия равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t) dt = \int_0^h \frac{dt}{h} = 1. \quad (1.4.37)$$

Переопределим теперь дельта-функцию (1.4.32), рассматривая ее как предельное значение $\delta_h(t)$:

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t). \quad (1.4.38)$$

Поскольку

$$\delta_h(t) = \frac{1}{h} [\theta(t) - \theta(t - h)],$$

по теореме запаздывания 2.4 имеем

$$\delta_h(t) \doteq \frac{1 - e^{-ph}}{ph},$$

откуда, переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, получаем

$$\delta(t) \doteq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-ph}}{ph} = 1. \quad (1.4.39)$$

Рассмотрим также функцию

$$\theta_h(t) = \int_0^t \delta_h(t) dt,$$

график которой также приведен на рисунок 1.4.2. Поскольку $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_h(t) = \theta(t)$, имеем

$$\int_0^t \delta(t) dt = \theta(t)$$

и, следовательно, $\delta(t) = \theta'(t)$. Поскольку $\theta(t) \doteq \frac{1}{p}$, по теореме о дифференцировании оригиналов снова получаем $\delta(t) \doteq p \cdot \frac{1}{p} = 1$.

Разумеется, полученный результат не является «настоящим» изображением: нарушается условие стремления к нулю при $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$. Этого следовало ожидать, учитывая бесконечное значение функции в формуле (1.4.32). Вместе с тем, к дельта-функции применимы основные правила операционного исчисления, например, теорема запаздывания

$$\delta(t - \tau) \doteq e^{-p\tau}, \quad (1.4.40)$$

теорема о дифференцировании оригинала

$$\delta^{(k)}(t) \doteq p^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.41)$$

или теорема о свертке

$$f(t) = \int_0^t f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \doteq 1 \cdot F(p) = F(p). \quad (1.4.42)$$

1.4.2.14. Изображение составных функций

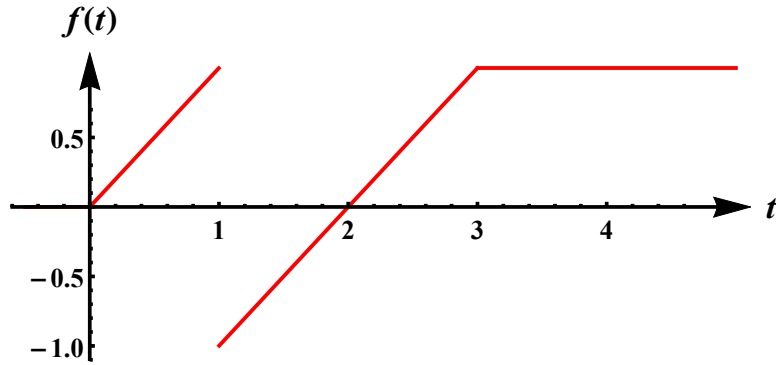


Рис. 1.4.3. График составной функции (1.4.43)

Рассмотрим функцию-оригинал (рисунок 1.4.3)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t, & 0 < t < 1; \\ t - 2, & 1 < t < 3; \\ 1, & t > 3. \end{cases} \quad (1.4.43)$$

На интервале $(0, 1)$ $f(t) = t\theta(t)$. Какую функцию $\psi_1(t)$ нужно прибавить, чтобы при $t \in (1, 3)$ выполнялось равенство $f(t) = t - 2$?

Пусть $\psi_1(t) = -t\theta(t - 1) + (t - 2)\theta(t - 1)$, тогда

$$\begin{aligned} & t\theta(t) - t\theta(t - 1) + (t - 2)\theta(t - 1) = \\ = & \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \text{ т. к. при } t < 1 \theta(t - 1) = 0 \\ t - 2, & 1 < t < 3, \text{ т. к. при } t > 1 \text{ два первых слагаемых уничтожаются.} \end{cases} \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, добавим функцию $\psi_2(t) = -(t - 2)\theta(t - 3) + 1 \cdot \theta(t - 3)$ (рисунок 1.4.4).

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} f(t) &= \psi_1(t) + \psi_{2a}(t) + \psi_{2b}(t) + \psi_{3a}(t) + \psi_{3b}(t) = \\ &= t\theta(t) - t\theta(t - 1) + (t - 2)\theta(t - 1) - (t - 2)\theta(t - 3) + 1 \cdot \theta(t - 3) \end{aligned}$$

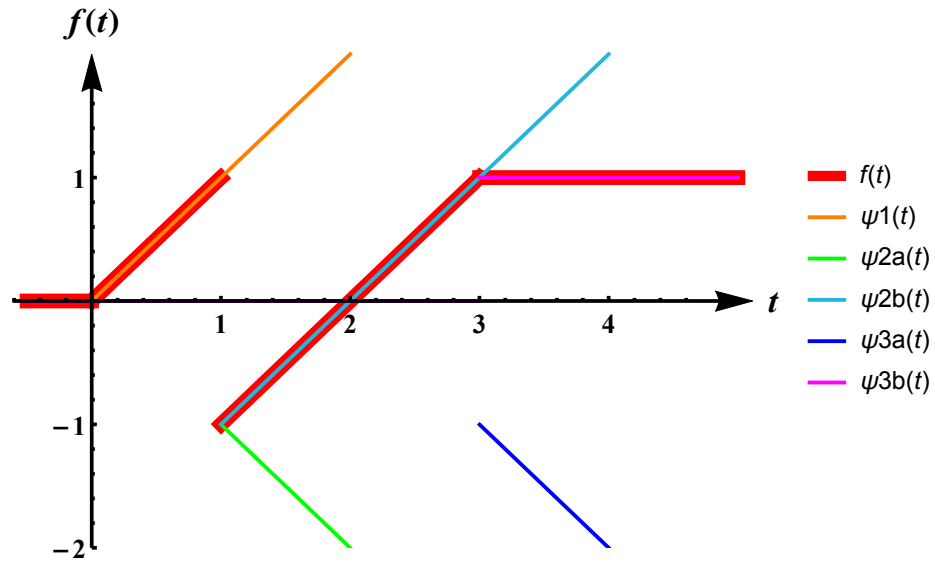


Рис. 1.4.4. Вот как введенные нами функции «компенсируют» друг друга

или, после приведения подобных,

$$f(t) = t\theta(t) - 2\theta(t-1) - (t-3)\theta(t-3). \quad (1.4.44)$$

Пользуясь свойством линейности и теоремой запаздывания (1.4.14), получим изображение каждого слагаемого этой функции:

$$\begin{aligned} t\theta(t) &\doteq \frac{1}{p^2}; \\ -2\theta(t-1) &\doteq -\frac{2e^{-p}}{p}; \\ -(t-3)\theta(t-3) &\doteq -\frac{e^{-3p}}{p^2} \end{aligned}$$

и окончательно

$$f(t) \doteq \frac{1}{p^2} - \frac{2e^{-p}}{p} - \frac{e^{-3p}}{p^2}.$$

1.4.3. Нахождение оригиналов по изображениям

Применение формулы обращения (1.4.7)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt} dp,$$

как правило, затруднительно. Более простые способы нахождения оригинала по заданному изображению описываются *теоремами разложения*.

1.4.3.1. Первая теорема разложения

Пусть функция $F(p)$ такова, что:

Теорема 3.1 (первая теорема разложения). *Если функция $F(p)$ правильна (т. е. однозначна и имеет конечную производную) в бесконечно удаленной точке и имеет в ее окрестности $|p| \geq R$ разложение в ряд Лорана*

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k},$$

то ее оригиналом служит умноженная на $\theta(t)$ функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}. \quad (1.4.45)$$

При этом $f(t)$ является целой функцией, т. е. она регулярна на всей комплексной плоскости.

Положим $p = 1/q$, тогда

$$F\left(\frac{1}{q}\right) = \Phi(q) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q^k. \quad (1.4.46)$$

Функция $\Phi(q)$ аналитична в круге $|q| \leq \frac{1}{R}$.

Из обобщенной интегральной формулы Коши

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

где C — окружность $|z| = 1/R$, следует *неравенство Коши*

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{Mn!}{R^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда с учетом формулы для коэффициентов ряда Тейлора (1.4.45) получаем $|c_k| < MR^k$. Для любого t теперь имеем

$$|f(t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \frac{|t|^{k-1}}{(k-1)!} \leq MR \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(R|t|)^k}{k!} = MRe^{R|t|}.$$

Таким образом, ряд (1.4.45) сходится для всех (в том числе и комплексных) t , т. е. $f(t)$ является целой функцией, при этом $|f(t)| < M_1 e^{R|t|}$ для $t > 0$. Следовательно, функция $f(t)\theta(t)$ является оригиналом.

Далее, ряд (1.4.45) сходится равномерно в любом конечном круге, поэтому его можно умножить на e^{-pt} и при $\operatorname{Re} p > R$ проинтегрировать почленно по t от 0 до ∞ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{k-1} dt = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} \mathcal{L}[t^{k-1}] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} \frac{(k-1)!}{p^k}. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 3.1. Пусть

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{3}{p^2 + 9} = \frac{3}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{9}{p^2}} = \frac{3}{p^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3^{2k}}{p^{2k}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3^{2k+1}}{p^{2k+2}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{3^{2k-1}}{p^{2k}}. \end{aligned}$$

Тогда $c_{2k+1} = 0$, $c_{2k} = (-1)^{k-1} 3^{2k-1}$ и

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{3^{2k-1}}{(2k-1)!} t^{2k-1} = \sin 3t.$$

Замечание 3.1. Верно и обратное теореме утверждение: если оригинал имеет вид $\theta(t)f(t)$, где $f(t)$ целая функция и $|f(t)| < Me^{\sigma_0|t|}$, то его изображение $F(p)$ правильно в бесконечно удаленной точке.

1.4.3.2. Вторая теорема разложения

Теорема 3.2 (вторая теорема разложения). Пусть функция $F(p)$ такова, что:

1. $F(p)$ мероморфна³ и правильна в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.
2. Существует система окружностей $C_n : |p| = R_n$, $R_1 < R_2 < \dots$, $R_n \rightarrow \infty$, на которой $F(p)$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg p$.

3. Для любого $\xi > \sigma_0$ абсолютно сходится интеграл $\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} F(p) dp$.

³Напомним, что мероморфной называется функция, все конечные особые точки которой являются полюсами.

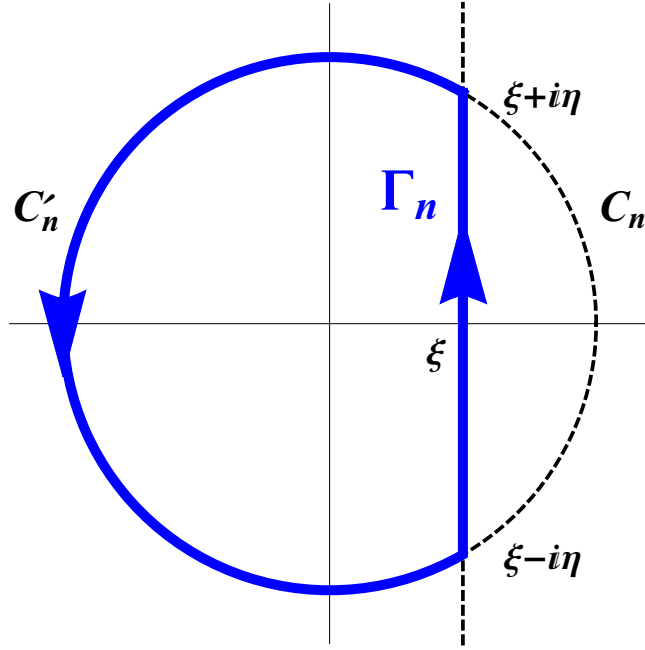


Рис. 1.4.5. К доказательству второй теоремы разложения

Тогда оригиналом $F(p)$ служит умноженная на $\theta(t)$ функция

$$f(t) = \sum_{(p_k)} \text{res} [F(p)e^{pt}, p_k]. \quad (1.4.47)$$

Здесь $\theta(t)$ — функция Хевисайда (1.4.1), обеспечивающая выполнение первого свойства оригиналов, указанного в определении 1.1, p_k — полюсы функции $F(p)$ в порядке убывания их модулей.

Рассмотрим контур $\Gamma_n = [\xi - i\eta, \xi + i\eta] \cup C'_n$, где C'_n — дуга окружности радиуса R_n (рисунок 1.4.5).

При $t < 0$ согласно лемме Жордана (см. Приложение 1.4.7.1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C'_n} e^{pt} F(p) dp = 0.$$

При $t > 0$, применяя формулу обращения (1.4.7) и теорему Коши о вычетах, имеем

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} e^{pt} F(p) dp = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{p_k \\ \Gamma_n}} \text{res} e^{pt} F(p),$$

где сумма берется по всем особым точкам функции $F(p)$, лежащим внутри Γ_n . $\boxtimes$

Следствие 3.1. Если функция $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ дробно-рациональна, причем степень многочлена $P(p)$ в числителе меньше степени многочлена $Q(p)$, то оригиналом ее служит умноженная на $\theta(t)$ функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} [F(p)(p - p_k)^{n_k} e^{pt}], \quad (1.4.48)$$

где p_k — полюсы $F(p)$, n_k — их кратности, а сумма берется по всем полюсам.

Следствие 3.2. Если все полюсы функции $F(p)$ простые, то формула (1.4.48) принимает вид

$$\frac{P(p)}{Q(p)} \doteq \sum_{k=1}^m \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (1.4.49)$$

1.4.4. Решение дифференциальных уравнений

1.4.4.1. Уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим задачу Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) &= f(t), \quad a_0 \neq 0, \\ x(0) = x_0; \quad x'(0) = x_1; \quad \dots \quad x^{(n-1)}(0) &= x_{n-1}, \end{aligned} \quad (1.4.50)$$

где функция $f(t)$ является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$. Обозначим через $X(p)$ изображение искомой функции: $x(t) \doteq X(p)$.

Применим преобразование Лапласа к обеим частям уравнения. По формуле (1.4.19)

$$x^{(k)}(t) \doteq p^k X(p) - p^{k-1} x_0 - p^{k-2} x_1 - \dots - x_{k-1}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (1.4.51)$$

Используя свойство линейности преобразования Лапласа, получаем алгебраическое уравнение

$$A_n(p)X(p) = F(p) - B_{n-1}(p), \quad (1.4.52)$$

где

$$A_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n, \quad (1.4.53)$$

а $B_{n-1}(p)$ — многочлен степени, не превышающей $n - 1$.

Очевидно, что

$$X(p) = \frac{F(p)}{A_n(p)} - \frac{B_{n-1}(p)}{A_n(p)}. \quad (1.4.54)$$

Для нахождения оригинала функции-изображения $X(p)$ воспользуемся свойством линейности обратного преобразования Лапласа.

Дробь $B_{n-1}(p)/A_n(p)$ является простой, ее оригинал вычисляется по формуле (1.4.47). Простой является и дробь $1/A_n(p)$, обозначим соответствующий оригинал через $g(t)$: $1/A_n(p) \doteq g(t)$. Тогда оригиналом произведения $F(p)/A_n(p)$ будет свертка оригиналов сомножителей:

$$\frac{F(p)}{A_n(p)} \doteq (f * g)(t).$$

Аналогично решаются и системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Применяя преобразование Лапласа к каждому уравнению, приходим к линейной алгебраической системе первой степени относительно изображений искомых функций. Разрешая эту систему и применяя обратное преобразование, получаем искомое решение.

1.4.4.2. Решение уравнений с помощью интеграла Дюамеля

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами с нулевыми начальными условиями

$$B[x] = a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = f(t), \quad a_0 \neq 0, \\ x(0) = 0; \quad x'(0) = 0; \quad \dots \quad x^{(n-1)}(0) = 0.$$

Предположим, что известно решение уравнения с нулевыми начальными условиями $B[x_1] = 1$ с той же левой частью и правой частью, равной единице. Применим к уравнению преобразование Лапласа:

$$A_n(p)X(p) = F(p); \\ A_n(p)X_1(p) = \frac{1}{p},$$

где $A_n(p)$ — многочлен вида (1.4.53). Теперь

$$X(p) = \frac{F(p)}{A(p)} = \frac{F(p)}{1/(pX_1(p))} = pF(p)X_1(p).$$

Воспользуемся формулой (1.4.29):

$$X(p) = pF(p)X_1(p) \doteq \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau) d\tau + x_1(+0)f(t)$$

и, поскольку $x_1(+0) = 0$, окончательно имеем

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau) d\tau. \quad (1.4.55)$$

1.4.4.3. Уравнения с переменными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$a_0(t)x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x(t) = f(t), \quad (1.4.56)$$

где $a_0(t), \dots, a_n(t)$ — многочлены по переменной t степени не выше $m \leq n$, а функция $f(t)$ — оригинал.

Применив к уравнению преобразование Лапласа, по теореме 2.9 о дифференцировании изображения

$$\begin{aligned} t^k x^{(s)} &\doteq (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} \left(\mathcal{L} \left[x^{(s)} \right] \right) = \\ &= (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} \left[p^s X(p) - p^{s-1} x_0 - p^{s-2} x'_0 - \dots - x_0^{(s-1)} \right] \end{aligned}$$

получим дифференциальное уравнение порядка m относительно искомого изображения.

Этот метод можно использовать, например, для определения изображений функций, заданных дифференциальным уравнением. Сделаем это для полиномов Эрмита, уравнение для которых

$$H_n''(t) - 2tH_n'(t) + 2nH_n(t) = 0. \quad (1.4.57)$$

Для определения начальных значений воспользуемся соотношениями [39, таблицы 22.4 и 22.8]

$$H_n(0) = \begin{cases} (-1)^m (2m)! / m! , & n = 2m; \\ 0, & n = 2m - 1, \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

и

$$H_n'(t) = 2nH_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(очевидно, что $H_0'(t) \equiv 0$).

Пусть $H_n(t) \doteq \mathcal{H}_n(p)$. Применим к уравнению (1.4.57) преобразование Лапласа:

$$p^2 \mathcal{H}_n(p) - pH_n(0) - H_n'(0) - 2(-1) \frac{d}{dp} [p \mathcal{H}_n(p) - H_n(0)] + 2n \mathcal{H}_n(p) = 0.$$

Тогда

$$2p \frac{d\mathcal{H}_n(p)}{dp} + (p^2 + 2n + 2) \mathcal{H}_n(p) = F_n(p), \quad (1.4.58)$$

где

$$F_n(p) = \begin{cases} p(-1)^m(2m)!/(m)!, & n = 2m; \\ 2(2m+1)(-1)^m(2m)!/(m)!, & n = 2m+1. \end{cases} \quad (1.4.59)$$

Решив дифференциальное уравнение (1.4.58), после громоздких преобразований получаем, что изображение полиномов Эрмита выражается через полиномы Лагерра:

$$H_n(x) \equiv (-1)^{[n/2]} \frac{n!2^n}{p^{n+1}} L_{[n/2]}^{-[n/2]-1} \left(-\frac{p^2}{4} \right).$$

В задаче 4.59 таким образом найдено изображение функций Бесселя $J_n(t)$.

1.4.4.4. Уравнения с запаздыванием

Рассмотрим уравнение с нулевыми начальными условиями

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t - \tau_k) + f(t),$$

где a_k и $\tau_k \geq 0$ — константы.

Применяя преобразование Лапласа и используя теорему запаздывания, имеем

$$p^n X(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k X(p) e^{-p\tau_k} + F(p),$$

откуда

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-p\tau_k}}.$$

Для обратного преобразования удобнее применять вторую теорему разложения. Поскольку из-за множителя $e^{-p\tau_k}$ знаменатель имеет бесконечное число нулей, решение представляется в виде ряда.

1.4.5. Решение интегральных уравнений Вольтерра

Определение 5.1. Уравнение вида

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t K(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (1.4.60)$$

называется *интегральным уравнением Вольтерра типа свертки*.

Будем считать, что функция $K(t - \tau)$, называемая ядром уравнения, является оригиналом: $K(t) \doteq \mathcal{K}(p)$. Интеграл представляет собой свертку функций $K(t)$ и $\varphi(t)$.

Применяем преобразование Лапласа к обеим частям уравнения, получаем

$$\Phi(p) = F(p) + \mathcal{K}(p)\Phi(p),$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \mathcal{K}(p)}$$

Осуществляя обратное преобразование Лапласа в предположении, что $\mathcal{K}(p) \neq 1$, получаем решение уравнения (1.4.60).

1.4.6. Вычисление несобственных интегралов

Пусть нужно вычислить зависящий от параметра t интеграл $f(t) = \int_a^b \varphi(t, x) dx$. Будем предполагать, что функция $f(t)$ является оригиналом, тогда ее изображение

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_a^b \varphi(t, x) dx. \quad (1.4.61)$$

Решение задачи рассмотрим на примере. Пусть

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos xt}{x^2} dx.$$

Формула (1.4.61) дает

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty \frac{1}{x^2} dx \int_0^\infty e^{-pt} (1 - \cos xt) dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + x^2} \right) dx = \int_0^\infty \frac{dx}{p(p^2 + x^2)} = \frac{\pi}{2p^2}. \end{aligned}$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа, получаем

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos xt}{x^2} dx = \frac{\pi t}{2}.$$

1.4.7. Коллекция формул

1.4.7.1. Лемма Жордана

Лемма 7.1 (Мари Энмон Камиль Жордан, 1894 г.). Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости ($0 \leq \arg z \leq \pi$) всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равномерно относительно $\arg z$ [т. е. независимо от значения $\arg z$] стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$. Тогда при $a > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{ia\xi} f(\xi) d\xi = 0, \quad (1.4.62)$$

где C_R — полуокружность $|z| = R$ в верхней полуплоскости.

Оценим интеграл (1.4.62). Из условия равномерного стремления функции к нулю следует, что при $|z| = R$ выполняется $|f(z)| < \varkappa_R$, где $\varkappa_R \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$.

Сделаем замену переменной: $\xi = Re^{i\varphi}$ и учтем, что при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство⁴ $\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{ia\xi} f(\xi) d\xi \right| &\leq \varkappa_R \cdot R \int_0^\pi |e^{ia\xi}| d\varphi = \varkappa_R \cdot R \int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi = \\ &= 2\varkappa_R \cdot R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi < 2\varkappa_R \cdot R \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2aR}{\pi} \varphi\right) d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{a} \varkappa_R (1 - e^{-aR}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Замечание 7.1. Если $a < 0$, а функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$, то формула (1.4.62) имеет место при интегрировании по дуге полуокружности C_R в нижней полуплоскости z . Аналогичные утверждения имеют место и при $a = \pm i\alpha$ ($\alpha > 0$) при интегрировании соответственно в правой ($\operatorname{Re} z > 0$) или левой ($\operatorname{Re} z < 0$) полуплоскости z .

1.4.7.2. Свойства преобразования Лапласа

В этом разделе через $f(t)$ и $g(t)$ обозначены функции-оригиналы, через $F(p)$ и $G(p)$ — их изображения.

⁴Функция $\sin \varphi - 2/\pi \varphi$ равна нулю при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ и принимает на заданном интервале только неотрицательные значения, имея один максимум, определяемый равенством $\cos \varphi = 2/\pi$.

1.4.7.2.1. Линейность

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta F(p), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

1.4.7.2.2. Теорема подобия

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad \alpha > 0.$$

1.4.7.2.3. Теорема смещения

$$e^{\lambda t} f(t) \doteq F(p - \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

1.4.7.2.4. Теорема запаздывания

$$f(t - a) \doteq e^{-ap} F(p), \quad a > 0.$$

1.4.7.2.5. Интегрирование оригинала

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} F(p).$$

1.4.7.2.6. Дифференцирование оригинала

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(+0),$$

где $f(+0) \equiv \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$.

Замечание 7.1. Если функция $f(t)$ является оригиналом, то ее производная $f'(t)$ не обязательно оригинал.

$$f^{(k)}(t) \doteq p^k F(p) - p^{k-1} f(+0) - \dots - f^{(k-1)}(+0).$$

1.4.7.2.7. Интегрирование изображения

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(p) dp.$$

1.4.7.2.8. Дифференцирование изображения

$$-tf(t) \doteq F'(p).$$

1.4.7.2.9. Теорема о свертке (теорема умножения)

Изображением свертки двух функций

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau,$$

является произведение изображений функций $f(t)$ и $g(t)$:

$$(f * g)(t) \doteq F(p)G(p).$$

1.4.7.2.10. Интеграл Дюамеля

$$\begin{aligned} pF(p)G(p) &\doteq \int_0^t f'(\tau)g(t - \tau) d\tau + f(+0)g(t); \\ pF(p)G(p) &\doteq \int_0^t f(\tau)g'(t - \tau) d\tau + g(+0)f(t). \end{aligned}$$

1.4.7.2.11. Изображение периодических функций

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad f(t + T) = f(t) \quad \forall t > 0. \quad (1.4.63)$$

1.4.7.3. Вычисление оригиналов при помощи вычетов

$$f(t)\theta(t) = \sum_{p_k} \operatorname{res} [F(p)e^{pt}, p_k] \theta(t),$$

где p_k — полюсы функции $F(p)$

1.4.7.4. Таблица простейших преобразований Лапласа

По умолчанию в таблице 1 предполагается, что все оригиналы взяты при $t \geq 0$. Иными словами, под $\sin \omega t$ подразумевается $\theta(t) \sin \omega t$, где

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

есть функция Хевисайда.

Таблица 1. Простейшие преобразования Лапласа

$f(t)$	$F(p)$	Примечание
1	$\frac{1}{p}$	
t	$\frac{1}{p^2}$	
t^n	$\frac{p^{n+1}}{n!}$	$n = 1, 2, \dots$
t^α	$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}}$	$\alpha > -1$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$	
$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{p + \lambda}$	$\lambda \in \mathbb{C}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p + a)^2}$	
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p + a)^{n+1}}$	$n = 1, 2, \dots$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	
$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	
$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	
$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$	
$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$	
$e^{\lambda t} \text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$	
$e^{\lambda t} \text{ch } \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$	
$\sin(t - \tau)$	$\frac{e^{-\tau p}}{p^2 + 1}, \tau > 0$	
$\cos(t - \tau)$	$\frac{pe^{-\tau p}}{p^2 + 1}, \tau > 0$	
$t^n \sin \omega t$	$\frac{\text{Im}(p + i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} n!$	$n = 1, 2, \dots$
$t^n \cos \omega t$	$\frac{\text{Re}(p + i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} n!$	$n = 1, 2, \dots$
$J_n(t)$	$\frac{\left(\sqrt{p^2 + 1} - p\right)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}$	$n = 1, 2, \dots$
$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$	$\ln \frac{p - a}{p - b}$	
$\ln t$	$\frac{1}{p} \left(\ln \frac{1}{p} - \gamma \right)$	$\gamma = 0,5772\dots$ См. с. 116

1.5. Метрические пространства

1.5.1. Основы теории множеств

1.5.1.1. Определения. Операции над множествами

Определение 1.1. *Множество* — первичное неопределяемое понятие: набор, совокупность, собрание некоторых элементов. Множества обозначаются заглавными буквами, их элементы — строчными.

1.5.1.1.1. Основные обозначения:

$a \in A$: Элемент a принадлежит множеству A .

$A \ni a$: Множество A содержит элемент a .

$A \subset B$: Множество A является *подмножеством* множества B , т. е. все элементы A являются элементами B . Если $A \subset B$ и при этом $\exists b \notin A$, то A является *строгим (собственным) подмножеством* B .

$A = \emptyset$: Множество A *пустое*, т. е. не содержит ни одного элемента.

U : Универсальное множество (все рассматриваемые множества являются его подмножествами, например, для множеств $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$ и $\{6, 7, 8, 9\}$ универсальным будет $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$).

Определение 1.2. *Окрестностью точки* x_0 называется любое множество, которому эта точка принадлежит. В частности, окрестность на координатной плоскости — любой круг без граничной окружности, содержащей данную точку.

Определение 1.3. *Внутренней точкой множества* называется точка, входящая в это множество с некоторой своей окрестностью.

Определение 1.4. *Изолированная точка множества* — точка, у которой существует окрестность, не содержащая других точек этого множества.

Определение 1.5. *Граничная точка* x_0 для множества A в любой своей окрестности содержит как точки данного множества, отличные от x_0 , так и точки, не принадлежащие A .

Замечание 1.1. Граничная точка может принадлежать или не принадлежать A .

1.5.1.1.2. Операции над множествами:

$C = A \cup B$	Сумма или объединение (множество C содержит все элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств A или B).
$C = A \cap B$	Пересечение (множество C содержит только те элементы множества A , которые принадлежат множеству B).
$C = A \setminus B$	Вычитание (множество C содержит только те элементы множества A , которые не принадлежат множеству B).
$C = A \Delta B$	Симметрическая разность (множество C содержит элементы, которые принадлежат только множеству A или только множеству B).

Замечание 1.2. Разность множеств не коммутативна: $A \setminus B \neq B \setminus A$. А вот симметрическая разность называется так именно вследствие своей коммутативности: $A \Delta B = B \Delta A$.

Дополнение: если $A \subset B$, то $A' = B \setminus A$ — дополнение множества A .

Если $B = U$ (универсальное множество), то $\bar{A} = U \setminus A$ (здесь $\bar{A}$ читается как «не A ») — множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые не содержатся в A .

Наглядно эти операции удобно представлять *диаграммами Венна* (рисунок 1.5.1).

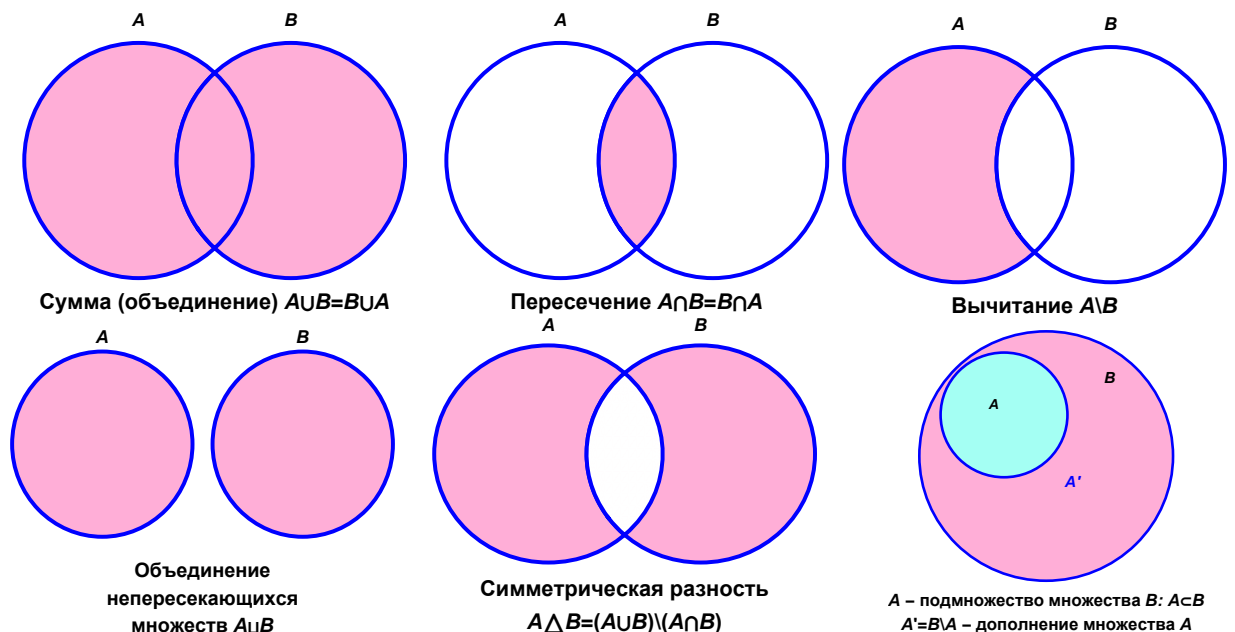


Рис. 1.5.1. Диаграммы Венна для операций над множествами.

Аналогично определяются операции над любым (конечным или бесконечным) числом множеств. Например, если A_α — произвольные множества,

то их пересечение $\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$ есть совокупность элементов, каждый из которых принадлежит всем множествам A_{α} .

Отметим важные свойства этих операций:

Коммутативность:	$A \cup B = B \cup A.$
«—»	$A \cap B = B \cap A.$
Ассоциативность:	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$
«—»	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$
Взаимная дистрибутивность:	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$
«—»	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$
Принцип двойственности:	$S \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (S \setminus A_{\alpha})$ (дополнение суммы равно пересечению дополнений);
«—»	$S \setminus \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (S \setminus A_{\alpha})$ (дополнение пересечения равно сумме дополнений).

Здесь A_{α} — подмножества фиксированного множества S . Смысл принципа двойственности сводится к тому, что из любой теоремы, относящейся к системе подмножеств фиксированного множества S может быть получена другая, двойственная, путем замены всех рассматриваемых множеств их дополнениями, сумм множеств — пересечениями, пересечений — суммами.

1.5.1.2. Отображения множеств

Пусть X и Y — два произвольных множества. Говорят, что на множестве X определена *функция* f , принимающая значения из Y , если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$. При этом множества не обязательно являются числовыми, поэтому вместо термина «функция» обычно используют термин «отображение» и наряду с привычным $y = f(x)$ используют обозначение $f : X \rightarrow Y$. Элемент y будем в данном случае называть *образом* элемента x (при отображении f).

Определение 1.6. *Полным прообразом* элемента y (обозначение $x = f^{-1}(y)$) называется совокупность всех элементов $x \in X$, образом которых является данный элемент $y \in Y$.

Важнейшие типы отображений (см. рисунок 1.5.2):

- Отображение множества X **в** множество Y или *инъекция*: для любых двух различных элементов x_1 и x_2 из X их образы $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ также различны, $f(X) \subset Y$.
- Отображение множества X **на** множество Y или *сюръекция*: каждый элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента множества X , $f(X) = Y$.

- Взаимно однозначное отображение $f : X \rightarrow Y$ или *биекция*: каждому элементу множества X соответствует один и только один элемент множества Y .

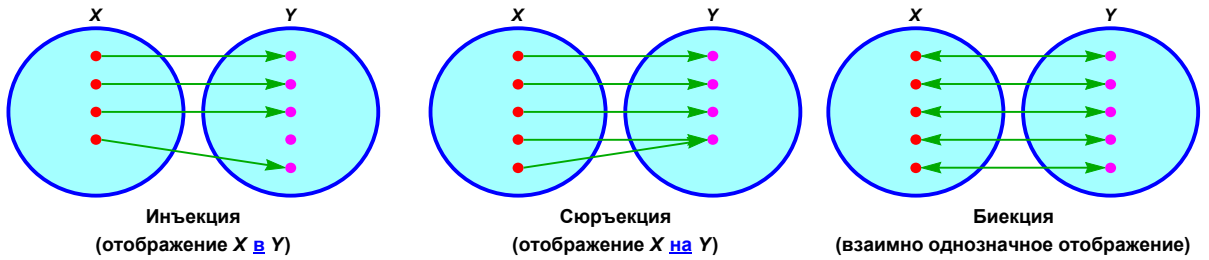


Рис. 1.5.2. Отображения множеств.

1.5.1.2.1. Основные свойства отображений

Теорема 1.1. *Прообраз суммы двух множеств равен сумме их прообразов:*

$$f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y).$$

Доказательство. Пусть $x \in f^{-1}(X \cup Y)$, тогда $f(x) \in X \cup Y$, т.е. $f(x) \in X$ или $f(x) \in Y$. Тогда x принадлежит по крайней мере одному из множеств $f^{-1}(X)$ или $f^{-1}(Y)$ и, следовательно, $x \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

С другой стороны, если $x \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$, то x принадлежит по крайней мере одному из множеств $f^{-1}(X)$ или $f^{-1}(Y)$, тогда $f(x)$ принадлежит по крайней мере одному из множеств X или Y , следовательно, $f(x) \in X \cup Y$, откуда $x \in f^{-1}(X \cup Y)$. $\square$

Теорема 1.2. *Прообраз пересечения двух множеств равен пересечению их прообразов:*

$$f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y).$$

Доказательство. Пусть $x \in f^{-1}(X \cap Y)$, тогда $f(x) \in X \cap Y$, т.е. $f(x) \in X$ или $f(x) \in Y$. Тогда x принадлежит $f^{-1}(X)$ и $f^{-1}(Y)$ и, следовательно, $x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

С другой стороны, если $x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$, т.е. $x \in f^{-1}(X)$ и $x \in f^{-1}(Y)$, то $f(x) \in X$ и $f(x) \in Y$, следовательно, $f(x) \in X \cap Y$, откуда $x \in f^{-1}(X \cap Y)$ ¹. $\square$

Теорема 1.3. *Образ суммы двух множеств равен сумме их образов:*

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y).$$

¹Легко видеть, что рассуждения аналогичны тем, что были сделаны при доказательстве предыдущей теоремы с заменой $\cup$ на $\cap$. Обратите, однако, внимание на то, как и почему «или» заменено на «и».

Доказательство. Если $y \in f(X \cup Y)$, то это означает, что $y = f(x)$, где x принадлежит по крайней мере одному из множеств X и Y . Следовательно, $y = f(x) \in f(X) \cup f(Y)$. С другой стороны, если $y = f(x) \in f(X) \cup f(Y)$, то $y = f(x)$, где x принадлежит по крайней мере одному из множеств X и Y , т.е. $x \in X \cup Y$ и, следовательно, $y = f(x) \in f(X \cup Y)$. $\square$

Замечание 1.1. Теоремы остаются в силе для сумм и пересечений любого (конечного или бесконечного) числа множеств.

Замечание 1.2. Образ пересечения двух множеств, вообще говоря, не совпадает с пересечением их образов, пример приведен на рисунок 1.5.3.

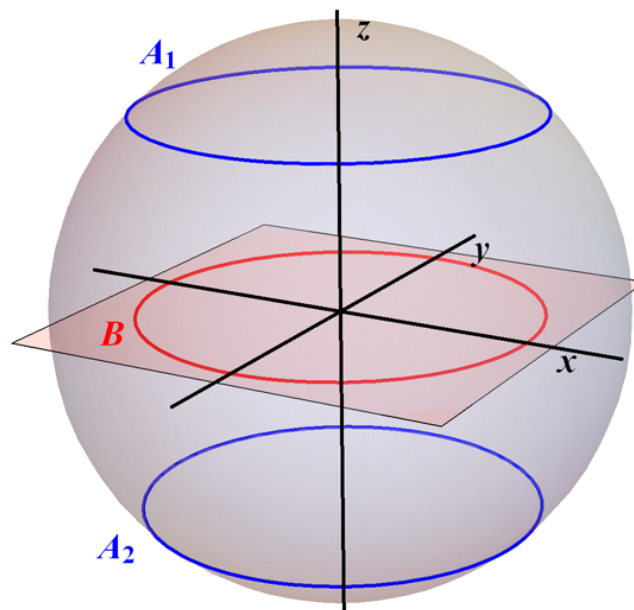


РИС. 1.5.3. Отображение представляет собой проецирование сферы радиуса R на плоскость xOy . Множества точек «синих» окружностей A_1 и A_2 не имеют общих элементов, т.е. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, при этом их образы $f(A_1) = B$ и $f(A_2) = B$ совпадают.

1.5.2. Метрические пространства

1.5.2.1. Основные определения и аксиомы

Определение 2.1. *Метрическим пространством* называется пара $R = (X, \rho)$, состоящая из некоторого множества (пространства) X элементов (точек) и расстояния, т.е. однозначной, неотрицательной, действительной функции $\rho(x, y)$, определенной для любых x и y из X и подчиненной следующим трем аксиомам:

5.1.1. *Аксиома тождества:* $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

5.1.2. *Аксиома симметрии:* $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

5.1.3. *Аксиома треугольника*: $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Определение 2.2. *Точками метрического пространства* называются элементы множества X .

Определение 2.3. *Метрика* — отображение, которое каждой паре (x, y) ставит в соответствие число $\rho(x, y)$.

1.5.2.2. Примеры метрических пространств

1.5.2.2.1. Пространство изолированных точек

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1, & \text{если } x \neq y. \end{cases} \quad (1.5.1)$$

1.5.2.2.2. Пространство действительных чисел $\mathbb{R}^1 = (\mathbb{R}, \rho)$

$$\rho(x, y) = |x - y|. \quad (1.5.2)$$

1.5.2.2.3. n -мерное арифметическое евклидово пространство $\mathbb{R}^n$

Множество упорядоченных групп из n действительных чисел $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2}. \quad (1.5.3)$$

1.5.2.2.4. n -мерное арифметическое евклидово пространство $\mathbb{R}_1^n$

То же множество упорядоченных групп из n действительных чисел, но

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |y_k - x_k|. \quad (1.5.4)$$

1.5.2.2.5. n -мерное арифметическое евклидово пространство $\mathbb{R}_\infty^n$

То же множество упорядоченных групп из n действительных чисел, но

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k - x_k|. \quad (1.5.5)$$

Таким образом, из примеров 3–5 следует, что одно и то же множество точек может быть метризовано по-разному.

1.5.2.2.6. Пространство $C[a, b]$ всех непрерывных функций, определенных на сегменте $[a, b]$

Определим расстояние как

$$\rho(f, g) = \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)|. \quad (1.5.6)$$

Пространство обозначается так же, как и множество точек: $C[a, b]$. Для случая $C[0, 1]$ используется обозначение C .

1.5.2.2.7. Пространство $C_2[a, b]$ непрерывных функций с квадратичной метрикой

Множество точек такое же, как и в примере 6, но расстояние определяется иначе:

$$\rho(f, g) = \left(\int_a^b [f(t) - g(t)]^2 dt \right)^{1/2}. \quad (1.5.7)$$

1.5.2.2.8. Пространство ℓ_2 последовательностей действительных чисел

Последовательность $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ должна удовлетворять условию $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$ (иными словами, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ сходится). Метрика в данном случае такова:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2}. \quad (1.5.8)$$

1.5.2.2.9. Пространство m всех ограниченных последовательностей $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ действительных чисел

$$\rho(x, y) = \sup_k |y_k - x_k|. \quad (1.5.9)$$

1.5.2.2.10. Пространство $\mathbb{R}_p^n$ упорядоченных групп из n действительных чисел

Положим

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |y_k - x_k|^p \right)^{1/p}, \quad (1.5.10)$$

где $p \geq 1$ — любое фиксированное число. Метрика (1.5.10) превращается в евклидову метрику (1.5.3) при $p = 2$ и в метрику (1.5.4) при $p = 1$. Можно

также показать, что метрика (1.5.5) является предельным случаем метрики (1.5.10):

$$\rho_{\infty}(x, y) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n |y_k - x_k|^p \right)^{1/p}.$$

1.5.2.2.11. Пространство ℓ_n последовательностей действительных чисел

Последовательность $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ должна удовлетворять условию $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, где $p \geq 1$ — некоторое фиксированное число. Расстояние определяется формулой

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^p \right)^{1/p}. \quad (1.5.11)$$

Замечание 2.1. Пусть $R = (X, \rho)$ — метрическое пространство и M — любое подмножество в X . Тогда M с той же функцией $\rho(x, y)$, которую мы считаем теперь определенной для x и y из M , тоже представляет собой метрическое пространство; оно называется *подпространством пространства R* .

Замечание 2.2. Определяя пространства так, как это сделано в примерах 1–11, нужно убедиться в том, что приведенные выше метрики удовлетворяют аксиомам тождества, симметрии и треугольника. То, что первая и вторая аксиомы выполняются, во всех указанных случаях очевидно. Соответствие аксиоме треугольника для каждого случая можно доказать [26, с. 55–61], используя *неравенства Коши – Буняковского*

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2; \quad (1.5.12)$$

$$\left(\int_a^b x(t)y(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b x^2(t) dt \cdot \int_a^b y^2(t) dt \quad (1.5.13)$$

$$(1.5.14)$$

и *неравенства Минковского*

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1; \quad (1.5.15)$$

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad p \geq 1. \quad (1.5.16)$$

1.5.2.3. Непрерывные отображения метрических пространств

Пусть X и Y — два метрических пространства с расстояниями $\rho_x(x_1, x_2)$ и $\rho_y(y_1, y_2)$ соответственно, f — отображение X в Y , т. е. $f(X) \subset Y$ и каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие элемент $y = f(x) \in Y$.

Определение 2.4. Отображение называется *непрерывным в точке* x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для все $x \in X$ таких, что $\rho_x(x, x_0) < \delta$, выполняется $\rho_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Если отображение непрерывно во всех точках метрического пространства X , то говорят, что f непрерывно на X .

Замечание 2.1. Если X и Y суть числовые множества, то приведенное выше определение аналогично определению непрерывности функции.

Замечание 2.2. Из аксиомы треугольника следует неравенство

$$|\rho(x, y) - \rho(x_0, y_0)| \leq \rho(x_0, x) + \rho(y_0, y).$$

Отсюда видно, что расстояние $\rho(x_1, x_2)$, если считать его функцией переменных x_1 и x_2 , также является непрерывным.

Определение 2.5. Если отображение $f : X \rightarrow Y$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно, то оно называется *гомеоморфным отображением* или *гомеоморфизмом*. Так же — *гомеоморфными* — называются и сами эти пространства X и Y .

В определении 2.4 непрерывного отображения допускается, что расстояния ρ_x и ρ_y определяются по-разному. Если же рассмотреть гомеоморфные пространства $R = (X, \rho)$ и $R' = (X, \rho')$ такие, что для любых $x_1, x_2 \in R$

$$\rho(x_1, x_2) = \rho'(f(x_1), f(x_2)),$$

то биекция f между метрическими пространствами R и R' называется *изометрией*, а сами пространства — *изометрическими*.

1.5.3. Сходимость и полнота

1.5.3.1. Основные определения

Определение 3.1. *Открытым шаром* $B(x_0, r)$ в метрическом пространстве R называется совокупность точек $x \in R$ таких, что $\rho(x, x_0) < r$. Здесь x_0 — центр шара, r — его радиус.

Определение 3.2. *Замкнутым шаром* $B[x_0, r]$ называется совокупность точек $x \in R$ таких, что $\rho(x, x_0) \leq r$.

Замечание 3.1. Обратите внимание на вид скобок в этом и предыдущем обозначениях!

Определение 3.3. ε -*окрестностью точки* x_0 называется открытый шар $B(x_0, \varepsilon)$ радиуса ε с центром в точке x_0 .

Определение 3.4. Множество $M \subset R$ называется *ограниченным*, если оно целиком содержится в некотором шаре.

Определение 3.5. $x \in R$ называется *точкой прикосновения* множества $M \subset R$, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из M . Совокупность всех точек прикосновения называется *замыканием множества* M и обозначается $[M]$.

Теорема 3.1. *Операция замыкания $M \rightarrow [M]$ обладает следующими свойствами:*

1. $M \in [M]$;
2. $[[M]] = [M]$;
3. Если $M_1 \subset M_2$, то $[M_1] \subset [M_2]$;
4. $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

Первое и третье свойства очевидны, докажем второе и четвертое.

2. $[[M]] = [M]$ Пусть $x \in [[M]] \implies$ в любой окрестности $O_\varepsilon(x)$ этой точки найдется точка $x_1 \in M$.

Положим $\varepsilon - \rho(x, x_1) = \varepsilon_1$ и рассмотрим шар $O_{\varepsilon_1}(x_1)$.

Этот шар целиком лежит внутри шара $O_\varepsilon(x)$: Действительно, если $z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$, то $\rho(z, x_1) < \varepsilon_1$, и так как $\rho(x, x_1) = \varepsilon - \varepsilon_1$, то по аксиоме треугольника

$$\rho(x, z) < \varepsilon_1 + (\varepsilon - \varepsilon_1) = \varepsilon,$$

т.е. $z \in O_\varepsilon(x)$. Так как $x_1 \in M$, то в $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ найдется точка $x_2 \in M$. Тогда $x_2 \in O_\varepsilon(x)$. Так как $O_\varepsilon(x)$ — произвольная окрестность точки x , то $x \in [M]$.

□

4. $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$ Пусть $x \in [M_1 \cup M_2]$, тогда $x \in [M_1]$ или $x \in [M_2]$:

$$[M_1 \cup M_2] \subset [M_1] \cup [M_2].$$

Так как $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ и $M_2 \subset M_1 \cup M_2$, то по свойству 3 следует обратное включение. $\square$

Определение 3.6. Предельная точка множества — такая точка M , что в любой ее окрестности содержится бесконечное число точек данного множества. Предельная точка множества может как принадлежать, так и не принадлежать самому множеству.

Примеры предельных точек:

1. Множество натуральных чисел n не имеет предельных точек (почему?).

2. Множество чисел вида $\sqrt{n} - 1/m$, где $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ имеет бесконечно много предельных точек, а именно $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$.

3. Предельными точками множества внутренних точек круга на плоскости являются все внутренние точки круга и все точки окружности, ограничивающей круг.

4. Для множества точек $M(x, y, z)$ пространства, у которых все координаты x, y, z — всевозможные рациональные числа, предельной точкой является любая точка пространства.

Определение 3.7. Изолированная точка множества $x \in M$ имеет достаточно малую ε -окрестность, которая не содержит точек из M , отличных от x .

Следствие 3.1. *Всякая точка прикосновения множества M есть либо предельная, либо изолированная точка этого множества.*

Следствие 3.2. *Замыкание множества M состоит: 1) из изолированных точек $x \in M$; 2) из предельных точек $x \in M$; 3) из предельных точек $x \notin M$.*

1.5.3.2. Сходимость последовательностей

Пусть $x_1, x_2, \dots$ — последовательность точек в метрическом пространстве R .

Определение 3.8. Последовательность сходится в точке x , если любая окрестность $O_\varepsilon(x)$ содержит все точки x_n , начиная с некоторой, т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N_ε , что для всех $n > N_\varepsilon$ $O_\varepsilon(x)$ содержит все точки x_n . Иными словами, расстояние между точками x_n и x меньше радиуса шара $O_\varepsilon(x)$: $\rho(x_n, x) < \varepsilon$.

Следствие 3.3. *Альтернативное определение: последовательность $\{x_n\}$ сходится к x , если*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0.$$

Точка x называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Следствие 3.4. *Никакая последовательность не может иметь двух различных пределов.*

Следствие 3.5. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x , то и всякая ее подпоследовательность сходится к той же самой точке.*

Теорема 3.2. *Для того, чтобы точка x была точкой прикосновения множества M , необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_n\}$ точек из M , сходящаяся к x .*

Доказательство. Докажем необходимость (достаточность очевидна). Если x точка прикосновения, то в каждой ее окрестности $O_{1/n}(x)$ содержится хотя бы одна точка $x_n \in M$. Эти точки образуют последовательность, которая сходится к x .

Определение 3.9. *Отображение $y = f(x)$ непрерывно в точке x_0 , если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 , последовательность $\{y_n = f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$.*

1.5.3.3. Полнота метрических пространств

Определение 3.10. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства R называется **фундаментальной**, если она удовлетворяет критерию Коши: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N_ε , что для всех $n_1 > N_\varepsilon$, $n_2 > N_\varepsilon$ выполняется $\rho(x_{n_1}, x_{n_2}) < \varepsilon$.

Теорема 3.3. *Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к x , тогда для любого наперед заданного ε можно найти такое N_ε , что для всех $n > N_\varepsilon$ выполняется $\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$. Тогда по аксиоме треугольника

$$\rho(x_{n_1}, x_{n_2}) \leq \rho(x_{n_1}, x) + \rho(x_{n_2}, x) < \varepsilon$$

для любых $n_1 > N_\varepsilon$, $n_2 > N_\varepsilon$.

Определение 3.11. **Полным** называется пространство, в котором сходится любая фундаментальная последовательность.

Все пространства, перечисленные в параграфе 1.5.2.2, за исключением упомянутого в примере 1.5.7 пространства $C_2[a, b]$, являются полными. Доказательства см. в [26, с. 74–76].

Теорема 3.4 (о вложенных шарах, без доказательства). *Для того, чтобы метрическое пространство R было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.*

Замечание 3.1. Пересечение замкнутых вложенных шаров в этой теореме сводится к одной точке.

1.5.4. Принцип сжимающих отображений

1.5.4.1. Основные положения

Определение 4.1. Отображение A метрического пространства R в себя называется **сжимающим**², если существует такая константа $0 \leq \alpha < 1$, что для любых $x, y \in R$ выполняется неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y). \quad (1.5.17)$$

Следствие 4.1. *Всякое сжимающее отображение непрерывно.*

Действительно, из (1.5.17) следует, что если $x_n \rightarrow x$, то и $Ax_n \rightarrow Ax$.

Определение 4.2. Точка x называется **неподвижной точкой отображения** A , если $Ax = x$.

Теорема 4.1 (принцип сжимающих отображений, Стефан Банах). *Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве R , имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Пусть $x_0 \in R$ — произвольная точка. Применим отображение A :

$$x_1 = Ax_0; \quad x_2 = Ax_1 = A^2x_0; \quad \dots; \quad x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0; \quad \dots$$

Покажем, что $\{x_n\}$ фундаментальная последовательность. Пусть $m \geq n$, тогда

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &= \rho(A^n x_0, A^m x_0) \underset{\text{в силу (1.5.17)}}{\leq} \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \underset{\text{из аксиомы треугольника}}{\leq} \\ &\leq \alpha^n [\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})] \leq \\ &\leq \alpha^n [1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}] \rho(x_0, x_1) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1 - \alpha}. \end{aligned} \quad (1.5.18)$$

²В некоторых источниках подобные отображения называются *сжатыми*.

Так как $\alpha < 1$, при достаточно больших n эта величина может быть сколь угодно малой. $\square$

Из полноты пространства R следует, что фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ имеет предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Отображение A непрерывно, поэтому

$$Ax = A \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

Итак, существование неподвижной точки доказано, докажем теперь ее единственность. Допустим, что существуют две неподвижные точки $x = Ax$ и $y = Ay$. Тогда $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y)$, откуда $\rho(x, y) \leq \alpha \rho(x, y)$. Поскольку $\alpha < 1$ и $\rho(x, y) \geq 0$, получаем $\rho(x, y) = 0$. По аксиоме тождества это возможно только при $x = y$. $\square$

Следствие 4.2. Переписав неравенство (1.5.18) в окончательной форме

$$\rho(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_0, x_1),$$

и перейдя к пределу $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x$, получим оценку погрешности для последовательных приближений $x_n = Ax_{n-1}$

$$\rho(x_n, x) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_0, Ax_0), \quad (1.5.19)$$

Замечание 4.1. Доказанная теорема помимо утверждения о существовании решения дает простой способ построения приближенного решения уравнения вида $x = f(x)$.

Оценим необходимое количество последовательных приближений: чтобы для x_n выполнялось неравенство $\rho(x_n, x) \leq \varepsilon$, достаточно взять

$$n > \frac{1}{\ln \alpha} \ln \frac{\varepsilon(1 - \alpha)}{\rho(x_0, x_1)}. \quad (1.5.20)$$

1.5.4.2. Решение уравнения $x = f(x)$

Пусть на сегменте $[a, b]$ определена функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Липшица

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|, \quad K < 1, \quad (1.5.21)$$

отображающая этот сегмент в себя. Тогда f есть сжимающее отображение и согласно доказанной теореме последовательность $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots$ сходится к единственному корню уравнения $x = f(x)$.

Замечание 4.1. Из (1.5.21) следует, что условие сжимаемости выполнено, если функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ и $|f'(x)| \leq K < 1$.

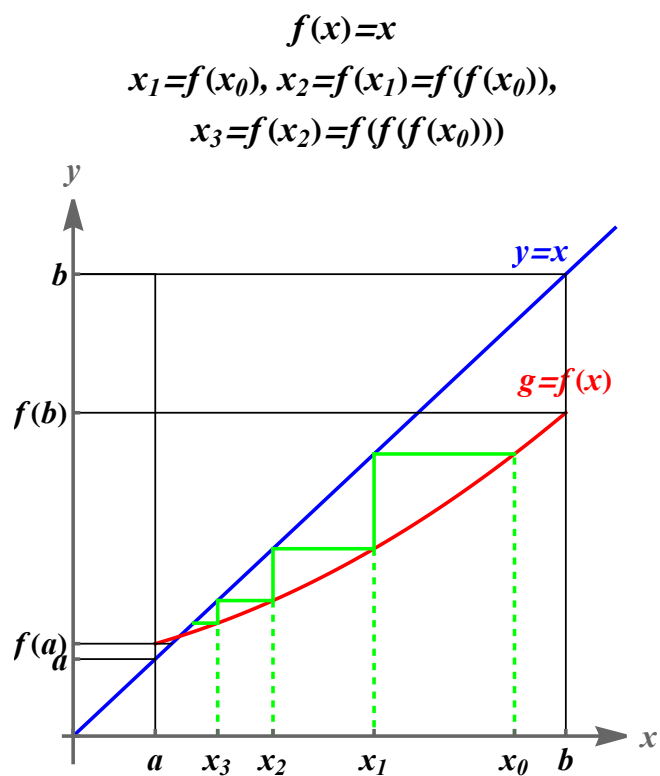


Рис. 1.5.4. Решение уравнения $x = f(x)$ в случае $0 < f'(x) < 1$

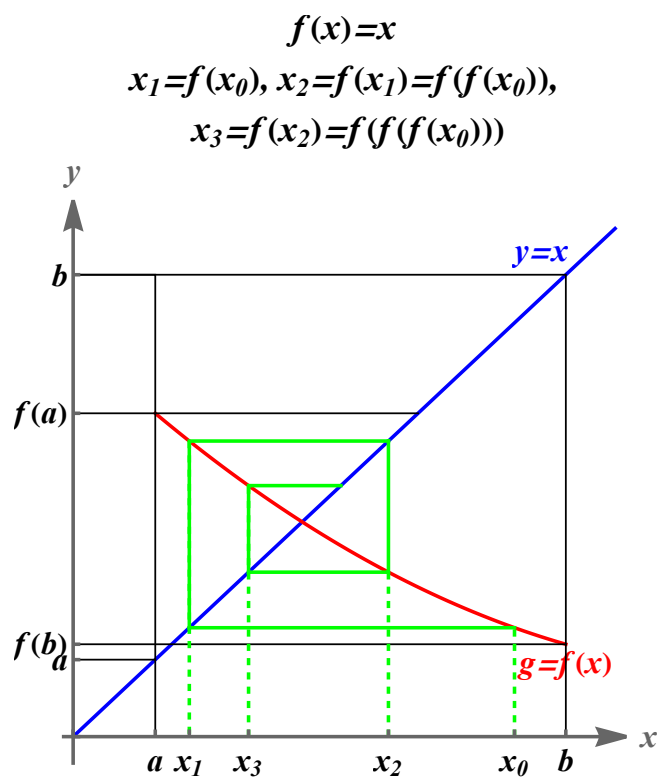


Рис. 1.5.5. Решение уравнения $x = f(x)$ в случае $-1 < f'(x) < 0$

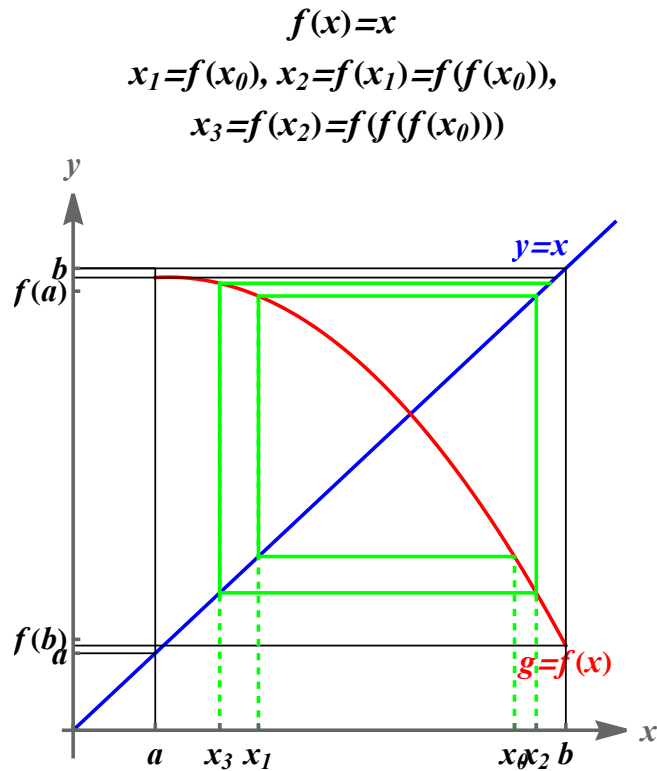


РИС. 1.5.6. Решение уравнения $x = f(x)$ в случае $|f'(x)| > 1$. Сжатия не происходит, точки расходятся

Рассмотрим уравнение

$$F(x) = 0, \quad F(a) < 0, \quad F(b) > 0, \quad 0 < K_1 \leq F'(x) \leq K_2, \quad x \in [a, b].$$

Введем функцию $f(x) = x - \mu F(x)$ и будем искать решение уравнения $x=f(x)$, равносильного уравнению $F(x) = 0$ при $\mu \neq 0$. Так как $f'(x) = 1 - \mu F'(x)$, то $1 - \mu K_2 \leq f'(x) \leq 1 - \mu K_1$ и нетрудно подобрать число μ так, чтобы можно было действовать методом последовательных приближений.

1.5.4.3. Интегральные уравнения Фредгольма

Рассмотрим линейное неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt, \quad (1.5.22)$$

где K (ядро уравнения) и f суть заданные функции, φ — искомая функция, λ — произвольный параметр. Будем предполагать, что $K(x, t)$ и $f(x)$ непрерывны при $x \in [a, b]$ и $t \in [a, b]$, тогда существует такое $M > 0$, что

$$\sup_{x, t \in [a, b]} |K(x, t)| < M.$$

Рассмотрим следующее отображение $g = A\varphi$ полного пространства $C[a, b]$ в себя:

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt.$$

Согласно (1.5.6)

$$\rho(g_1, g_2) = \max |g_1(x) - g_2(x)| \leq |\lambda| M(b-a) \max |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.$$

Таким образом, при

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \quad (1.5.23)$$

отображение A является сжимающим.

Из принципа сжимающих отображений следует, что для всякого λ , удовлетворяющего неравенству (1.5.23), уравнение Фредгольма (1.5.22) имеет единственное непрерывное решение, являющееся пределом последовательности $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots\}$, где

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi_{n-1}(t) dt, \quad (1.5.24)$$

где в качестве $\varphi_0(x)$ можно взять любую непрерывную функцию.

Замечание 4.1. Метод последовательных приближений для уравнений вида (1.5.22) применим лишь при достаточно малых значениях параметра λ . Неравенство (1.5.23) задает достаточное условие того, чтобы уравнение (1.5.22) решалось описанным в этом разделе методом. Условия разрешимости уравнения для других значений λ описаны в теореме 4.1 (альтернативе Фредгольма).

1.5.4.4. Интегральное уравнение Вольтерра

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt. \quad (1.5.25)$$

Как и для уравнения Фредгольма, K (ядро уравнения) и f — заданные непрерывные функции для всех $x \in [a, b]$, φ — искомая функция, λ — произвольный параметр.

Теорема 4.2. Пусть A — такое непрерывное отображение полного метрического пространства R в себя, что некоторая его степень $B = A^n$ является сжатием. Тогда уравнение $Ax = x$ имеет одно и только одно решение.

Пусть x — неподвижная точка отображения B , т.е. $Bx = x$. Тогда, поскольку отображение B сжимающее, последовательность $Bx_0, B^2x_0, B^3x_0, \dots$ для любого $x_0 \in R$ сходится к неподвижной точке x . Тогда

$$Ax = AB^k x = B^k Ax = B^k x_0 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$$

и, следовательно, $Ax = x$.

Эта неподвижная точка единственна, поскольку всякая точка, неподвижная относительно A , неподвижна и относительно сжимающего отображения A^n , для которого неподвижная точка согласно теореме 4.1 может быть только одна.

Вернемся теперь к уравнению (1.5.25). Введем отображение

$$A\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt$$

и покажем, что некоторая его степень является сжатием.

Пусть φ_1 и φ_2 — две непрерывные функции, заданные на $[a, b]$. Тогда

$$\begin{aligned} |A\varphi_1(x) - A\varphi_2(x)| &= |\lambda| \left| \int_a^x K(x, t) [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] dt \right| \leq \\ &\leq |\lambda| M(x - a) \max |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|, \end{aligned}$$

где $M = \max |K(x, t)|$. Применяя отображение дважды, получаем

$$|A^2\varphi_1(x) - A^2\varphi_2(x)| \leq |\lambda|^2 M^2 \frac{(x - a)^2}{1 \cdot 2} \max |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|,$$

после n -й итерации приходим к

$$|A^n\varphi_1(x) - A^n\varphi_2(x)| \leq |\lambda|^n M^n \frac{(x - a)^n}{n!} m \leq |\lambda|^n M^n m \frac{(b - a)^n}{n!},$$

где $m = \max |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$.

Очевидно, что для любого λ можно выбрать такое число n , что

$$\frac{|\lambda|^n M^n (b - a)^n}{n!} < 1$$

и, следовательно, отображение A^n будет сжимающим. Отсюда следует, что уравнение Вольтерра (1.5.25) имеет решение, и притом единственное, при любом значении λ .

1.5.4.5. Алгебраические системы

Рассмотрим систему, записанную в матричной форме:

$$AX = F,$$

где A — квадратная матрица размера $n \times n$.

Преобразуем систему к виду $X = BX + Y$. Теперь

$$X = \mathcal{P}X = BX + Y.$$

При каких условиях отображение $\mathcal{P}$ является сжимающим?

Пусть $X, Z \in \mathbb{R}_\infty^n$. Обозначим i -ю компоненту вектора BX через $(BX)_i$, т. е.

$$(BX)_i = \sum_{k=1}^n b_{ik} x_k.$$

Тогда, учитывая соотношение (1.5.5) для метрики в указанном пространстве $\mathbb{R}_\infty^n$, имеем

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Z)) &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \left((BX)_i + \tilde{Y}_i \right) - \left((BZ)_i + \tilde{Y}_i \right) \right| = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} |(BX)_i - (BZ)_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |b_{ik}| \cdot |x_k - z_k| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - z_k| \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |b_{ik}| = \alpha \rho(X, Z), \end{aligned}$$

где $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |b_{ik}|$.

Таким образом, отображение $\mathcal{P}$ является сжимающим, если

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |b_{ik}| < 1, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.5.26)$$

Выберем в качестве начального приближения

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда $X_1 = BX_0 + Y$ и, следовательно, $\rho(X_0, X_1) = \max_{1 \leq i \leq n} |(X_1)_i|$. Количество количество итераций, необходимое для достижения заданной точности ε , определяется из неравенства

$$n > \frac{1}{\ln \alpha} \ln \left[\frac{\varepsilon(1 - \alpha)}{\rho(X_0, X_1)} \right]. \quad (1.5.27)$$

Если коэффициенты матрицы A велики и условие (1.5.26) не выполняется, можно почленно разделить каждое i -е уравнение системы на a_{ii} , например,

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2; \\ -x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 3; \\ -2x_1 + x_2 - 6x_3 = -2. \end{cases}$$

переходит в

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{10} & 0 & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\alpha = \max \left(0 + \frac{1}{3} + \left| -\frac{1}{3} \right|, \frac{1}{10} + 0 + \left| -\frac{3}{10} \right|, \left| -\frac{1}{3} \right| + \frac{1}{6} + 0 \right) = \frac{2}{3},$$

$$\rho(X_0, X_1) = \max \left(\left| -\frac{1}{3} \right|, \frac{3}{10}, \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

Из неравенства (1.5.27) следует, что для достижения точности $\varepsilon = 0.01$ необходимо совершить 12 итераций.

1.5.4.6. Задача Коши для дифференциального уравнения

Теорема 4.3 (Пикара). Пусть функция $f(x, y)$ задана и непрерывна в некотором прямоугольнике

$$D = \{ |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b \},$$

и удовлетворяет в этой области условию Липшица по y :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M |y_1 - y_2|. \quad (1.5.28)$$

Тогда на некотором сегменте $|x - x_0| \leq \delta$ существует одно и только одно решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (1.5.29)$$

Замечание 4.1. Эта теорема уже была доказана в курсе дифференциальных уравнений; теперь мы рассмотрим ее с точки зрения функционального анализа.

Покажем, что начальная задача (1.5.29) эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi)) d\xi. \quad (1.5.30)$$

Пусть на сегменте $|x - x_0| \leq a$ существует функция $y(x)$, которая является решением начальной задачи, причем $|y - y_0| \leq b$. Это означает, что интегральная кривая находится в определенной в теореме области D , где функция $f(x, y)$ непрерывна. Подставив $y(x)$ в (1.5.29), получим тождество.

Проинтегрируем это тождество от x_0 до $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$. С учетом начального условия $y(x_0) = y_0$, получим (1.5.30). Таким образом, решение начальной задачи (1.5.29) удовлетворяет интегральному уравнению (1.5.30).

С другой стороны, если существует непрерывное решение интегрального уравнения (1.5.30) — функция $y(x)$ такая, что $|y - y_0| \leq b$, то в силу непрерывности $f(x, y)$ и следующей отсюда непрерывности функции $f(\xi, y(\xi))$ как сложной функции переменной ξ интеграл в правой части (1.5.30) является непрерывно дифференцируемой функцией x . Следовательно, и левая часть (1.5.30), т.е. функция $y(x)$, имеет непрерывную производную, причем эта производная равна $f(x, y(x))$, а значит, $y(x)$ есть решение уравнения (1.5.29). Выполнение начального условия легко проверяется.

Из непрерывности функции f следует, что $|f(x, y)| \leq K$ в некоторой области $D' \subset D$ такой, что $(x_0, y_0) \in D'$. Подберем такое $d > 0$, чтобы выполнялись условия

1. $(x, y) \in D'$, если $|x - x_0| \leq d, \quad |y - y_0| \leq Kd$;
2. $Md < 1$

(смысл параметра M ясен из (1.5.28)).

Пусть C^* — пространство непрерывных функций φ , определенных на сегменте $|x - x_0| \leq d$ и таких, что $|\varphi(x) - y_0| \leq Kd$, с метрикой

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \max_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.$$

Это пространство полно, так как оно является замкнутым подпространством полного пространства всех непрерывных функций на $[x_0 - d, x_0 + d]$. Рассмотрим отображение $\psi = A\varphi$, определяемое формулой

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt,$$

где $|x - x_0| \leq d$. Это отображение переводит полное пространство C^* в себя и является в нем сжатием. Действительно, пусть $\varphi \in C^*$, $|x - x_0| \leq d$, тогда

$$|\psi(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \right| \leq Kd$$

и, следовательно, $A(C^*) \subset C^*$.

Кроме того,

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))| dt \leq Md \max_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.$$

Так как $Md < 1$, отображение A является сжатием. Отсюда следует, что уравнение $\varphi = A\varphi$, т. е. уравнение (1.5.30), имеет одно и только одно решение в пространстве C^* .

Задачу можно обобщить на случай решения системы уравнений.

Теорема 4.4. Пусть дана система дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\frac{d\varphi_i(x)}{dx} = f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)), \quad i = \overline{1, n}; \quad (1.5.31)$$

$$\varphi_i(x_0) = y_{0i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.5.32)$$

где функции f_i определены и непрерывны в некоторой области D пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащей точку $(x_0, y_{01}, \dots, y_{0n})$ и удовлетворяют условию Липшица

$$\left| f_i(x, y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}) - f_i(x, y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)}) \right| \leq M \max_{1 \leq i \leq n} |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}|.$$

Тогда на некотором сегменте $|x - x_0| \leq d$ существует одно и только одно решение начальной задачи (1.5.31–1.5.32), т. е. одна и только одна система функций φ_i , удовлетворяющих уравнениям (1.5.31) и начальным условиям (1.5.32).

Теорема 4.4 доказывается по той же схеме, что и теорема Пикара.

1.6. Мера и интеграл Лебега

1.6.1. Счетные и континуальные множества

1.6.1.1. Определения и примеры

Всякое множество состоит из элементов. Если количество элементов известно (множество аудиторий физфака БГУ) или неизвестно, но заведомо конечно (множество кошек, живущих в Минске), то мы имеем *конечное множество*.

Примеры *бесконечных множеств*: множество целых чисел, множество точек на отрезке. После извлечения из бесконечного множества любого числа элементов оно не станет пустым.

Счетные и континуальные множества. Множества можно сравнивать по числу элементов. Но можно и попытаться установить биекцию, т. е. взаимно однозначное соответствие. Второй способ, в отличие от первого, может быть применим и к бесконечным множествам.

Определение 1.1. *Счетным* называется всякое множество, элементы которого можно биективно сопоставить со всеми натуральными числами.

Очевидно, что конечные множества автоматически являются счетными, только биекция устанавливается не со всеми натуральными числами, а с их конечным подмножеством.

Пример 1.1. Множество целых чисел.

Неотрицательному числу $n \geq 0$ сопоставляем нечетное число $2n + 1$, а отрицательному $n < 0$ — четное число $2|n|$.

0	-1	1	-2	2	-3	3
1	2	3	4	5	6	7

Пример 1.2. Множество нечетных отрицательных чисел.

$$-(2n - 1) \longleftrightarrow n, n = 1, 2, 3, \dots$$

Пример 1.3. Множество рациональных чисел.

Пусть $x = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Назовем *высотой рационального числа* x величину $h = |p| + q$. Очевидно, что число дробей с заданной высотой конечно. Будем нумеровать все рациональные числа по возрастанию высоты:

h	1	2	3	...
x	$0 = \frac{0}{1}$	$1 = \frac{1}{1}, -1 = \frac{-1}{1}$	$\frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$	...

Определение 1.2. *Несчетным* называется бесконечное множество, которое нельзя биективно сопоставить с множеством натуральных чисел.

1.6.1.2. Свойства счетных множеств

Теорема 1.1. *Всякое подмножество счетного множества счетно.*

Пусть A — счетное множество и $B \subset A$.

Пронумеруем элементы A : $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ и выберем элементы $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$, которые принадлежат и множеству B . Если среди чисел $n_1, n_2, \dots$ есть наибольшее, то множество B конечно, в противном случае оно счетно. $\square$

Теорема 1.2. *Сумма любого конечного или счетного множества счетных множеств есть снова счетное множество.*

Пусть $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots\}$, $\dots$ — счетные непересекающиеся множества.

Пронумеруем их элементы следующим образом:

A_1	a_{11}	$\rightarrow$	a_{12}		a_{13}	$\rightarrow$	a_{14}	...
		$\swarrow$		$\nearrow$		$\swarrow$		
A_2	a_{21}		a_{22}		a_{23}		a_{24}	...
	$\downarrow$	$\nearrow$		$\swarrow$	$\nearrow$			
A_3	a_{31}		a_{32}		a_{33}		a_{34}	...
		$\swarrow$		$\nearrow$				
A_4	a_{41}		a_{42}		a_{43}		a_{44}	...
	$\downarrow$	$\nearrow$						
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	

Теперь каждому элементу можно сопоставить одно и только одно натуральное число. $\square$

Теорема 1.3. *Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Пусть M — бесконечное множество. Выберем в нем произвольный элемент a_1 . Поскольку M бесконечно, в нем найдется элемент a_2 , отличный от a_1 , затем найдется элемент a_3 , отличный от a_1 и от a_2 и т.д. Продолжая этот процесс, получаем счетное подмножество $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ множества M . $\square$

1.6.1.3. Эквивалентные множества

Определение 1.3. Множества A и B называются *эквивалентными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Следствие 1.1. Два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда у них равное число элементов.

Следствие 1.2. Счетное множество эквивалентно множеству натуральных чисел.

Пример 1.4. Множества точек на двух любых отрезках эквивалентны между собой (рисунок 1.6.1).

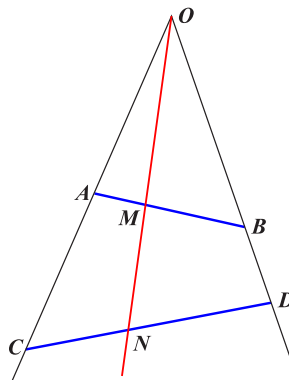


Рис. 1.6.1. Способ установления биекции между двумя отрезками.

Пример 1.5. Множество всех точек на расширенной комплексной плоскости эквивалентно множеству всех точек на сфере (рисунок 1.6.2).

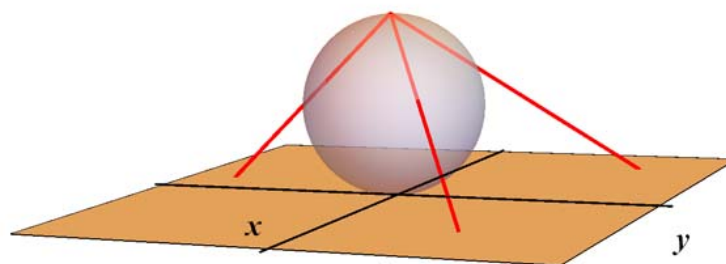


Рис. 1.6.2. Способ установления биекции между точками на сфере и точками на комплексной плоскости (стереографическая проекция).

Пример 1.6. Множество всех чисел в интервале $(0, 1)$ эквивалентно множеству всех точек на прямой: $y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$.

Замечание 1.1. Бесконечное множество может быть эквивалентно своей истинной части. Например, это множество целых чисел и множество натуральных чисел; множество точек на числовой прямой и множество точек на отрезке. Таким образом, всякое бесконечное множество эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству.

Теорема 1.4 (без доказательства). *Множество действительных чисел, заключенных между нулем и единицей, несчетно.*

Пример 1.7. Примеры множеств, эквивалентных отрезку $[0, 1]$.

1. Множество всех точек любого отрезка $[a, b]$ или интервала (a, b) .
2. Множество всех точек на прямой.
3. Множество всех точек плоскости, пространства, поверхности сферы, точек, лежащих внутри сферы, и т.д.
4. Множество всех прямых на плоскости.
5. Множество всех непрерывных функций одной или нескольких переменных.

1.6.1.4. Открытые и замкнутые множества

Замкнутое множество совпадает со своим замыканием, т. е. $M = [M]$, и содержит все свои предельные точки¹.

Пример 1.8. Отрезок прямой $[a, b]$, замкнутый шар, пустое множество, любое метрическое пространство R , всякое множество, состоящее из конечного числа точек, множество функций в $C[a, b]$, удовлетворяющих условию $|f(t)| \leq K$.

Теорема 1.5 (без доказательства). *Пересечение любого числа и сумма любого конечного числа замкнутых множеств замкнуты.*

Определение 1.4. Множество, все точки которого внутренние², называется *открытым*.

Пример 1.9. Интервал числовой прямой (a, b) , открытый шар.

Теорема 1.6. *Для того чтобы множество M было открыто, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $R \setminus M$ до всего пространства R было замкнуто.*

¹Напомним, что предельной называется такая точка M , что в любой ее окрестности содержится бесконечное число точек данного множества.

²Точка $x \in M$ называется внутренней, если существует такая окрестность O_ε этой точки, которая целиком содержится в M .

Предположим, что множество M открыто, тогда для любой его точки $x \in M$ существует окрестность $O_\varepsilon \in M$. Эта окрестность не имеет общих точек с $R \setminus M$ и, следовательно, ни одна из точек $R \setminus M$ не является точкой прикосновения³ $R \setminus M$. Таким образом, $R \setminus M$ замкнуто.

С другой стороны, если $R \setminus M$ замкнуто, то любая точка $x \in M$ имеет окрестность, целиком лежащую в M и, следовательно, множество M открыто. $\square$

1.6.1.5. Мощность множества

Если два конечных множества эквивалентны, то они состоят из одинакового числа элементов. Если же эти множества произвольны, то говорят, что они имеют одинаковую мощность. Для конечных множеств понятие мощности совпадает с понятием числа элементов множества.

Мощность множества A обозначается через $|A|$. Встречаются также обозначения $\#A$, $\overline{\overline{A}}$, $\text{card}(A)$ и $m(A)$.

Определение 1.5. Мощность множества натуральных чисел обозначается символом $\aleph_0$ (читается «алеф нуль»).

Определение 1.6. Говорят, что множества, эквивалентные множеству всех действительных чисел отрезка $[0, 1]$ имеют **мощность континуума**. Эта мощность обозначается символом c или символом $\aleph$.

Как правило, бесконечные множества или счетны, или имеют мощность континуума.

Пусть A и B — два произвольных множества, а $|A|$ и $|B|$ — их мощности. Тогда возможны следующие случаи:

1. A эквивалентно некоторой части множества B , B эквивалентно некоторой части множества A . Тогда множества эквивалентны между собой и их мощности равны: $|A| = |B|$.

2. A содержит некоторую часть, эквивалентную B , но B не содержит части, эквивалентной A . Тогда $|A| > |B|$.

3. Наоборот, B содержит некоторую часть, эквивалентную A , но A не содержит части, эквивалентной B . Тогда $|A| < |B|$.

4. Ни одно из этих двух множеств не содержит части, эквивалентной другому. Это означает, что мощности множеств A и B несравнимы между собой. Можно показать [26, с. 44–46], что такой случай невозможен.

³Точка $x \in R$ называется точкой прикосновения множества $N \subset R$, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из N .

1.6.2. Мера. Измеримые множества и измеримые функции

1.6.2.1. Определения и примеры

Мера (будем использовать для меры обозначение $\mu(A)$) — обобщение понятий длины отрезка, площади плоской фигуры, объема тела, интеграла от неотрицательной функции, взятого по некоторой области (линейной, плоской или пространственной) и т. п.

Рассмотрим систему множеств на плоскости (x, y) :

$$\begin{array}{ll} a \leq x \leq b & c \leq y \leq d \\ a < x \leq b & c < y \leq d \\ a \leq x < b & c \leq y < d \\ a < x < b & c < y < d \end{array}$$

Будем называть определенные этими неравенствами множества *прямоугольниками*.

Замкнутый прямоугольник $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ при $a < b$ и $c < d$ представляет собой обычный прямоугольник, при $a < b$ и $c = d$ или $a = b$ и $c < d$ — отрезок, при $a = b$ и $c = d$ — точку, при $a > b$ или $c > d$ — пустое множество.

Открытый прямоугольник $a < x < b, c < y < d$ сводится к прямоугольнику без границы или пустому множеству.

Полуоткрытый прямоугольник (остальные комбинации неравенств) — это настоящий прямоугольник без одной, двух или трех сторон, интервал, полуинтервал или пустое множество.

Будем обозначать класс всех прямоугольников на плоскости через $\mathfrak{S}$ (это готическая буква S). Каждому прямоугольнику $P \in \mathfrak{S}$ сопоставим меру — число $m(P)$, соответствующее геометрической площади. Мера пустого множества равна 0, мера непустого прямоугольника равна $(b - a)(d - c)$.

Мера, сопоставленная каждому прямоугольнику — действительное неотрицательное число. Мера *аддитивна*, т. е. если $P = \bigcup_{k=1}^n P_k$ и $P_i \cap P_k = \emptyset$ при $i \neq k$, то $m(P) = \sum_{k=1}^n m(P_k)$.

Определение 2.1. Непустая система множеств $\mathfrak{R}$ называется *кольцом*, если из $A \in \mathfrak{R}$ и $B \in \mathfrak{R}$ следует $A \Delta B \in \mathfrak{R}$ и $A \cap B \in \mathfrak{R}$.

Поскольку $A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$ и $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$ (см. рисунок 1.6.3), то из $A \in \mathfrak{R}$ и $B \in \mathfrak{R}$ следует $A \cup B \in \mathfrak{R}$ и $A \setminus B \in \mathfrak{R}$. Аналогично доказывается и утверждение для нескольких множеств.

Таким образом, кольцо множеств есть система множеств, замкнутая по отношению к взятию суммы и пересечения, вычитанию и образованию симметрической разности.

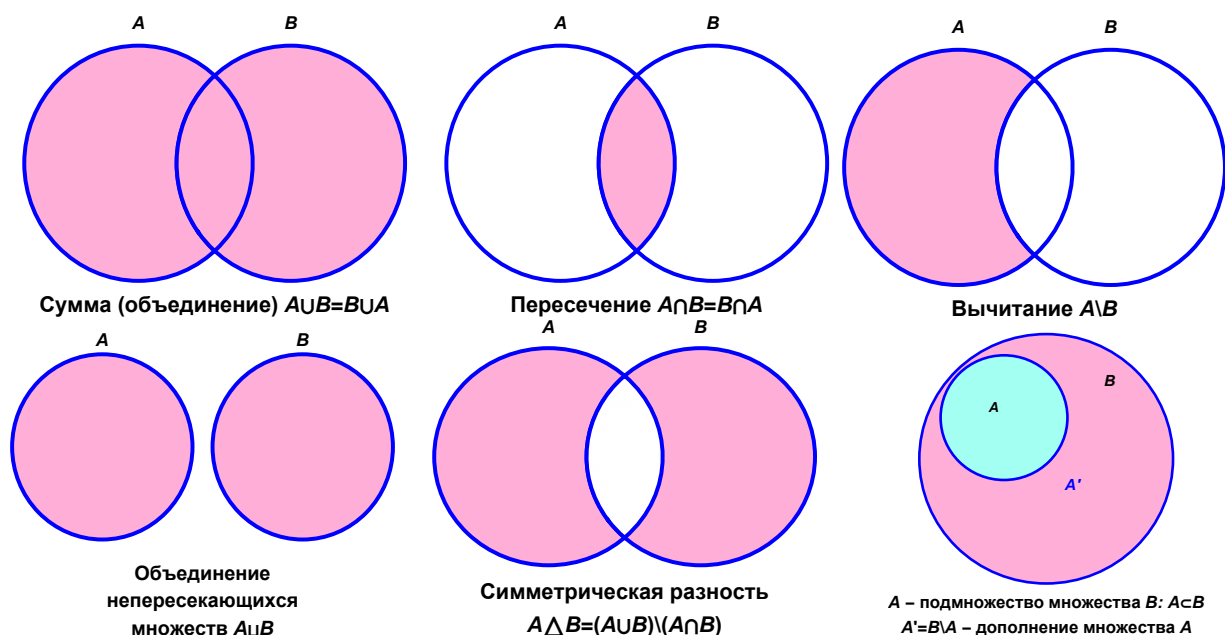


Рис. 1.6.3. Диаграммы Эйлера для операций над множествами.

Следствие 2.1. Любое кольцо содержит пустое множество, так как $A \setminus A = \emptyset$.

1.6.2.2. Элементарные множества

Определение 2.2. *Элементарным* называется множество, которое можно хотя бы одним способом представить как объединение конечного числа попарно непересекающихся прямоугольников.

Теорема 2.1. Объединение, пересечение, разность и симметрическая разность двух элементарных множеств также являются элементарными множествами.

Очевидно что пересечение двух прямоугольников — элементарное множество. Тогда, если $A = \bigcup_m P_m$ и $B = \bigcup_n Q_n$ — элементарные множества, то и $A \cap B = \bigcup_{m,n} P_m \cap Q_n$ будет элементарным множеством.

Если A и B — элементарные множества, то и их разность $A \setminus B$ также элементарное множество. Пусть P прямоугольник, содержащий каждое из этих множеств, тогда множество

$$A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)]$$

также будет элементарным.

Отсюда и из равенств

$$\begin{aligned} A \setminus B &= A \cap (P \setminus B), \\ A \Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

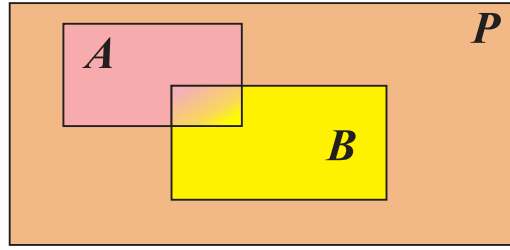


Рис. 1.6.4. К доказательству теоремы 2.1 об элементарных множествах

следует, что разность и симметрическая разность элементарных множеств являются элементарными множествами. $\boxtimes$

Следствие 2.2. *Элементарные множества образуют кольцо.*

Определение 2.3. Мера для элементарных множеств: если $A = \bigcup_k P_k$, где P_k — попарно непересекающиеся прямоугольники, то

$$m'(A) = \sum_k m(P_k). \quad (1.6.1)$$

Теорема 2.2. *Мера не зависит от способа разложения A в сумму конечного числа прямоугольников.*

Пусть $A = \bigcup_k P_k = \bigcup_n Q_n$, причем $P_i \cap P_k = \emptyset$, $Q_i \cap Q_k = \emptyset$ для $i \neq k$.

Пересечения $P_k \cap Q_n$ — прямоугольники, поэтому

$$\sum_k m(P_k) = \sum_{k,n} m(P_k \cap Q_n) = \sum_n m(Q_n)$$

(для прямоугольников $m' = m$). $\boxtimes$

Теорема 2.3 (о субаддитивности меры, без доказательства). *Мера множества не превосходит сумму мер покрывающих его множеств.*

Это означает, что если A — элементарное множество и $\{A_n\}$ — такая конечная или счетная система элементарных множеств, что $A \subset \bigcup_n A_n$, то $m'(A) \leq \sum_n m'(A_n)$.

Теорема 2.4 (свойство счетной аддитивности или σ -аддитивности, без доказательства). *Пусть элементарное множество A представлено как сумма СЧЕТНОГО числа НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ элементарных множеств A_n , $n = 1, 2, \dots$:*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

тогда

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

Таким образом, мера суммы счетного числа непересекающихся слагаемых равна сумме мер.

1.6.2.3. Лебегова мера

Определение 2.4. *Внешней мерой* множества A называется число

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \cup P_k} \sum_k m(P_k), \quad (1.6.2)$$

где нижняя грань берется по всевозможным покрытиям множества A конечными или счетными системами прямоугольников.

Замечание 2.1. Разумеется, можно рассматривать и покрытия, состоящие не только из прямоугольников, но из конечного или счетного числа любых элементарных множеств.

Если A элементарное множество, то $\mu^*(A) = m'(A)$.

Определение 2.5. Множество A называется *измеримым в смысле Лебега*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое элементарное множество B , что $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$.

Иными словами, множество измеримо, если его можно сколь угодно точно приближать элементарными множествами.

Определение 2.6. Функция μ^* , рассматриваемая только на измеримых множествах, называется *лебеговой мерой* μ .

Следующие до конца подпункта утверждения примем без доказательства.

- Измеримыми являются:

1. дополнение измеримого множества;
2. сумма и пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств;
3. разность и симметрическая разность двух измеримых множеств;

- Если $A_1, A_2, \dots, A_n$ — попарно непересекающиеся измеримые множества, то

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k) \quad (1.6.3)$$

(*счетная аддитивность* или σ -аддитивность меры).

- Если $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ — последовательность вложенных друг в друга измеримых множеств и $A = \bigcap_n A_n$, то $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ (*непрерывность меры*).

1.6.2.4. Измеримые функции

Пусть X и Y два произвольных множества и пусть в них выделены две системы подмножеств $\mathfrak{S}_X$ и $\mathfrak{S}_Y$ соответственно.

Определение 2.7. Абстрактная функция $y = f(x)$ с областью определения X , принимающая значения на Y , называется $(\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Y)$ -*измеримой*, если из $A \in \mathfrak{S}_Y$ следует, что $f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_X$.

В частности, если $X \rightarrow \mathbb{R}$ и $Y \rightarrow \mathbb{R}$ (действительные функции действительной переменной), а $\mathfrak{S}_X$ и $\mathfrak{S}_Y$ — система всех открытых (или всех замкнутых) подмножеств из $\mathbb{R}$, то определение измеримости сводится к определению непрерывности.

Сумма, разность и произведение двух измеримых функций измеримы. Частное двух измеримых функций тоже измеримо при условии, что знаменатель не обращается в нуль. Предел сходящейся при каждом $x \in X$ последовательности измеримых функций измерим.

1.6.3. Интеграл Лебега

1.6.3.1. Введение

Интеграл, введенный в курсе математического анализа, называется *интегралом Римана*. Такой интеграл применим к непрерывным функциям или функциям, имеющим не слишком много точек разрыва. Точки для построения интегральной суммы группируются по признаку близости на оси x .

Измеримая функция может иметь точки разрыва всюду или даже задана на абстрактном множестве. Для построения интеграла Лебега точки выбираются по признаку близости значений функции в этих точках. Интеграл Лебега определяется совершенно одинаково для функций, заданных на любых пространствах с мерой, в то время как интеграл Римана вводится сначала для функций одной переменной, а затем уже с соответствующими изменениями переносится на случай нескольких переменных.

Далее будем предполагать, что мера σ -аддитивна, все рассматриваемые множества $A \subset X$ будем полагать измеримыми, а функции $f(x)$ определенными для $x \in X$ и измеримыми.

1.6.3.2. Интеграл Лебега для простых функций

Определение 3.1. Функция $f(x)$, определенная на некотором пространстве X с заданном на нем мерой, называется *простой*, если она измерима и принимает не более чем счетное (т. е. конечное или счетное) число значений.

Пусть $f(x)$ простая функция, принимающая не более чем счетное число различных значений $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ (здесь $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$) и пусть A —

некоторое измеримое подмножество X . Определим интеграл от функции f по множеству A как

$$\int_A f(x) d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n y_n \mu(A_n), \quad (1.6.4)$$

где $A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\}$.

Определение 3.2. Простая функция f называется *интегрируемой* или *суммируемой* (по мере μ) на множестве A , если ряд (1.6.4) абсолютно сходится. Если f интегрируема, то сумма ряда (1.6.4) называется интегралом от f по множеству A .

Если не все y_n различны, то применяем следующую лемму:

Лемма 3.1. Пусть $A = \bigcup_k B_k$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и пусть на каждом множестве B_k функция f принимает только одно значение c_k . Тогда

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_k c_k \mu(B_k), \quad (1.6.5)$$

причем функция f интегрируема на A в том и только том случае, когда ряд (1.6.5) абсолютно сходится.

Каждое множество $A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\}$ является объединением тех B_k , для которых $c_k = y_n$. Поэтому

$$\sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_n y_n \sum_{c_k=y_n} \mu(B_k) = \sum_k c_k \mu(B_k).$$

Так как мера неотрицательна, то

$$\sum_n |y_n| \mu(A_n) = \sum_n |y_n| \sum_{c_k=y_n} \mu(B_k) = \sum_k |c_k| \mu(B_k),$$

т. е. ряды $\sum_n y_n \mu(A_n)$ и $\sum_k c_k \mu(B_k)$ абсолютно сходятся или расходятся одновременно. $\square$

1.6.3.3. Свойства интеграла Лебега от простых функций

Свойство А.

$$\int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu,$$

причем из существования интегралов в правой части равенства следует существование интеграла в левой.

Доказательство. Предположим, что f принимает значения f_i на множествах $F_i \subset A$, а g — значения g_j на множествах $G_j \subset A$, так что

$$J_1 = \int_A f(x) d\mu = \sum_i f_i \mu(F_i), \quad (1.6.6)$$

$$J_2 = \int_A g(x) d\mu = \sum_j g_j \mu(G_j). \quad (1.6.7)$$

Тогда в силу леммы

$$J = \int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \sum_i \sum_j (f_i + g_j) \mu(F_i \cap G_j); \quad (1.6.8)$$

но

$$\mu(F_i) = \sum_j \mu(F_i \cap G_j), \quad \mu(G_j) = \sum_i \mu(F_i \cap G_j),$$

поэтому из абсолютной сходимости рядов (1.6.6) и (1.6.7) следует и абсолютная сходимость ряда (1.6.8); при этом $J = J_1 + J_2$.

Свойство Б. Для любого постоянного k

$$\int_A k f(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu,$$

причем из существования интеграла в правой части следует существование интеграла в левой части (проверяется непосредственно).

Свойство В. Ограниченная на множестве A простая функция f интегрируема на A , причем если $|f(x)| \leq M$ на A , то

$$\left| \int_A f(x) d\mu \right| \leq M \mu(A)$$

(проверяется непосредственно).

1.6.3.4. Общее определение интеграла Лебега на множестве конечной меры

Определение 3.3. Функция f называется *интегрируемой (суммируемой) на множестве A* , если существует последовательность простых интегрируемых на A функций $\{f_n\}$, сходящаяся равномерно к f . Предел

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu \quad (1.6.9)$$

обозначим

$$\int_A f(x) d\mu$$

и назовем *интегралом функции f по множеству A* .

Это определение корректно, если выполнены следующие условия.

1. Предел (1.6.9) для любой равномерно сходящейся последовательности простых интегрируемых на A функций существует.

Действительно, в силу свойств А, Б и В интеграла от простых функций

$$\left| \int_A f_n(x) d\mu - \int_A f_m(x) d\mu \right| \leq \mu(A) \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)|. \quad \square$$

2. Этот предел при заданной функции f не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$.

Рассмотрим две последовательности $\{f_n\}$ и $\{f_n^*\}$, сходящиеся к f . Если бы предел (1.6.9) для этих двух последовательностей принимал различные значения, то для последовательности, полученной объединением этих двух, предел (1.6.9) не существовал бы, что противоречит первому условию. $\square$

3. Для простых функций определение интегрируемости и интеграла равносильно данному в п. 1.6.3.2

Для доказательства достаточно рассмотреть последовательность, в которой f_n равняется f для всех n . $\square$

1.6.3.5. Общие свойства интеграла Лебега

Свойства по фиксированному множеству

$$1. \int_A 1 d\mu = \mu(A).$$

$$2. \int_A k f(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu, \quad k = \text{const}.$$

$$3. \text{Аддитивность: } \int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu.$$

4. Ограниченная на множестве A функция f интегрируема на A .

$$5. \text{Монотонность: если } f(x) \geq 0, \text{ то } \int_A f(x) d\mu \geq 0.$$

- 5.1. *Следствие.* Если $f(x) \geq g(x)$, то $\int_A f(x) d\mu \geq \int_A g(x) d\mu$.
- 5.2. *Следствие.* Если $m \leq f(x) \leq M$ для всех или почти всех⁴ $x \in A$, то $m\mu(A) \leq \int_A f(x) d\mu \leq M\mu(A)$.
6. Если $\mu(A) = 0$, то $\int_A f(x) d\mu = 0$.
7. Если $f(x) = g(x)$ почти всюду, то $\int_A f(x) d\mu = \int_A g(x) d\mu$, причем оба интеграла существуют или не существуют одновременно.
8. Если функция φ интегрируема на A и почти всюду $|f(x)| \leq \varphi(x)$, то f также интегрируема на A .
9. Интегралы $I_1 = \int_A f(x) d\mu$ и $I_2 = \int_A |f(x)| d\mu$ существуют или не существуют одновременно.

Свойства на совокупности измеримых множеств

10. Если $A = \bigcup_n A_n$, где $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x) d\mu,$$

причем из существования интегралов левой части вытекает существование интегралов и абсолютная сходимость ряда в правой части.

- 10.1. *Следствие.* Если f интегрируема на A , то f интегрируема и на любом измеримом множестве $A' \subset A$.
11. Если $A = \bigcup_n A_n$, где $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, и ряд

$$\sum_n \int_{A_n} |f(x)| d\mu$$

⁴Говорят, что некоторое свойство выполнено почти всюду на A , если оно выполнено на A всюду, кроме, быть может, точек, образующих множество меры нуль.

сходится, то функция f интегрируема на A и

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x) d\mu.$$

12. **Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.** Если $f(x)$ — суммируемая на множестве A функция, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\left| \int_e f(x) d\mu \right| < \varepsilon$$

для всякого измеримого $e \subset A$ такого, что $\mu(e) < \delta$.

13. **σ -аддитивность интеграла Лебега.** Пусть f — неотрицательная функция, суммируемая на пространстве X по мере μ . Тогда функция

$$F(A) = \int_A f(x) d\mu$$

определена для всех измеримых множеств $A \subset X$, неотрицательна и σ -аддитивна, т. е. удовлетворяет условию: если $A = \bigcup_n A_n$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$, то $F(A) = \sum_n F(A_n)$. Иными словами, интеграл от неотрицательной функции обладает как функция множества всеми свойствами σ -аддитивной меры.

1.6.3.6. Интеграл Лебега на множестве бесконечной меры

До сих пор, говоря об интеграле Лебега и его свойствах, мы рассматривали функции, заданные на том или ином измеримом множестве *конечной меры*. Однако часто приходится иметь дело с функциями, заданными на множестве, мера которого бесконечна, например, на прямой или плоскости с заданной лебеговой мерой на ней. Поэтому важно распространить понятие интеграла и на этот случай.

Ограничимся случаем, когда рассматриваемое множество X может быть представлено как сумма счетного числа множеств конечной меры:

$$X = \bigcup_n X_n, \quad \mu(X_n) < \infty. \quad (1.6.10)$$

Определение 3.4. *Исчерпывающей последовательностью* называется всякая монотонно возрастающая последовательность $\{X_n\}$ измеримых подмножеств множества X , удовлетворяющую условию (1.6.10).

Определение 3.5. Если пространство X , в котором задана мера μ , представимо как сумма счетного числа множеств конечной меры, то мера μ на X называется **σ -конечной**.

Примеры σ -конечных мер: меры Лебега на прямой, плоскости, в n -мерном пространстве.

Определение 3.6. Измеримая функция f , определенная на множестве X с σ -конечной мерой μ , называется **суммируемой на X** , если она суммируема на каждом измеримом подмножестве $A \subset X$ конечной меры и если для каждой исчерпывающей последовательности $\{X_n\}$ предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_n} f(x) d\mu \quad (1.6.11)$$

существует и не зависит от выбора этой последовательности. Этот предел называется *интегралом от f по множеству X* и обозначается символом

$$\int_X f(x) d\mu.$$

Замечание 3.1. Данное выше определение суммируемости 3.3 существенно связано с предположением конечности меры множества X . Действительно, если $\mu(X) = \infty$, то из равномерной сходимости последовательности простых суммируемых функций $\{\varphi_n\}$ не следует, вообще говоря, сходимость последовательности их интегралов.

Результаты, изложенные для случая конечной меры, в основном переносятся на интегралы по множеству бесконечной меры. Важное отличие состоит в том, что в случае $\mu(X) = \infty$ ограниченная измеримая функция на X не обязана быть суммируемой. В частности, если $\mu(X) = \infty$, то никакая отличная от нуля константа не интегрируема на X .

1.6.3.7. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана

Ограничимся простейшим случаем линейной меры Лебега на прямой.

Теорема 3.1 (без доказательства). *Если существует интеграл Римана*

$$I = (R) \int_a^b f(x) dx,$$

то f интегрируема на $[a, b]$ по Лебегу и

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu = I.$$

Теорема 3.2 (критерий Лебега). *Функция интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда на этом отрезке она ограничена, и множество точек, где она разрывна, имеет нулевую меру Лебега.*

Пример 3.1 (ограниченная функция, на некотором отрезке интегрируемая по Лебегу, но не интегрируемая по Риману). Функция Дирихле на отрезке $[0, 1]$, равная 1 для рациональных и 0 для иррациональных x (доказывается в задаче 6.32).

Неограниченные функции вообще не могут быть интегрируемы по Риману, но многие из них интегрируемы по Лебегу. В частности, любая функция $f(x) \geq 0$, для которой интеграл Римана

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

существует при каждом $\varepsilon > 0$ и имеет конечный предел I при $\varepsilon \rightarrow 0$, интегрируема по Лебегу на $[a, b]$, причем

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Несобственный интеграл

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

в случае, когда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b |f(x)| dx = \infty,$$

не существует в лебеговом смысле, поскольку, согласно свойству 8, из суммируемости функции $f(x)$ следует, что и функция $|f(x)|$ тоже суммируема. Например, интеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$$

существует как условно сходящийся несобственный интеграл Римана, но не существует как интеграл Лебега.

Если рассматривается функция на всей прямой (или полупрямой), то интеграл Римана для такой функции может существовать лишь в несобственном смысле. Опять-таки, если такой интеграл сходится абсолютно, то соответствующий лебегов интеграл существует и имеет то же самое значение. Если же этот интеграл сходится лишь условно, то в лебеговом смысле функция не интегрируема. Например, функция $\sin x/x$ не интегрируема по Лебегу на всей прямой, поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty$$

Однако несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

существует, и равен π .

1.7. Линейные нормированные полные пространства

1.7.1. Линейные пространства

1.7.1.1. Определения и примеры

Определение 1.1. *Линейным (векторным) пространством* называется непустое множество L элементов x, y, z , которое удовлетворяет следующим условиям:

I. Для любых двух элементов $x, y \in L$ однозначно определен третий элемент $z \in L$, называемый их *суммой* и обозначаемый $z = x + y$, причем

1. $x + y = y + x$ (коммутативность);
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность);
3. в L существует такой элемент 0 , что $x + 0 = x$ для всех $x \in L$ (существование нуля);
4. для каждого $x \in L$ существует такой элемент $-x$, что $x + (-x) = 0$ (существование противоположного элемента).

II. Для любого числа α и любого элемента $x \in L$ определен элемент $\alpha x \in L$ (произведение элемента x на число α), причем

1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
2. $1 \cdot x = x$;
3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
4. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Пример 1.1. $\mathbb{R}^1$ — прямая линия с обычными арифметическими операциями.

Пример 1.2. n -мерное арифметическое пространство всевозможных наборов действительных $\mathbb{R}^n$ или комплексных $\mathbb{C}^n$ чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Операции сложения и умножения на число задаются так:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n);$$
$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Пример 1.3. Пространство $C[a, b]$ непрерывных (действительных или комплексных) функций с обычными операциями сложения функций и умножения их на число.

Пример 1.4. Пространство ℓ_2 последовательностей чисел (действительных или комплексных) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$.

Операции сложения и умножения на число:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) + (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots);$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots).$$

Пример 1.5. Пространство $\mathbf{c}$ сходящихся последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ с покомпонентными операциями сложения и умножения на числа.

Пример 1.6. Пространство $\mathbf{c}_0$ сходящихся к 0 последовательностей с теми же операциями сложения и умножения на числа.

Пример 1.7. Совокупность $\mathbf{m}$ всех ограниченных числовых последовательностей с теми же операциями сложения и умножения на числа, что и в примерах 4–6.

Пример 1.8. Совокупность $\mathbb{R}^\infty$ всевозможных числовых последовательностей с теми же операциями сложения и умножения на числа.

1.7.1.2. Линейная зависимость

Определение 1.2. Элементы $x, y, \dots, w$ линейного пространства L называются **линейно зависимыми**, если существуют такие числа $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, что $\alpha x + \beta y + \dots + \lambda w = 0$ и при этом не все $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ равны нулю. В противном случае элементы называются **линейно независимыми**.

Определение 1.3. Бесконечная система элементов $x, y, \dots$ пространства L называется **линейно независимой**, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Определение 1.4. Если в пространстве L можно найти n линейно независимых элементов, а любые $n + 1$ элементов этого пространства линейно зависимы, то говорят, что пространство L **имеет размерность n** . Если же в L можно указать систему из произвольного конечного числа линейно независимых элементов, то говорят, что пространство L **бесконечномерно**.

Определение 1.5. **Базисом** в n -мерном пространстве L называется любая система из n линейно независимых элементов.

1.7.1.3. Подпространства

Определение 1.6. Непустое подмножество L' линейного пространства L называется *подпространством*, если оно само образует линейное пространство по отношению к определенным в L операциям сложения и умножения на число.

Замечание 1.1. $L' \subset L$ есть подпространство, если из $x \in L'$ и $y \in L'$ следует, что $\alpha x + \beta y \in L'$ при любых α и β .

Определение 1.7. *Собственным* называется подпространство, отличное от L и содержащее хотя бы один ненулевой элемент.

Пример 1.9 (собственные подпространства). 1. Совокупность всех многочленов $P[a, b]$ в пространстве непрерывных функций $C[a, b]$.

2. Пространство $C[a, b]$ по отношению к пространству всех, непрерывных и разрывных, функций, заданных на $[a, b]$.

3. Каждое из пространств $\ell_2, c_0, c, m, \mathbb{R}^\infty$ является собственным подпространством последующего.

1.7.2. Линейные функционалы

1.7.2.1. Определения и примеры

Определение 2.1. *Функционал* — числовая функция f , определенная на некотором линейном пространстве L .

Определение 2.2. Функционал f называется *аддитивным*, если $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in L$.

Определение 2.3. Функционал f называется *однородным*, если для произвольного числа α

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Определение 2.4. Аддитивный однородный функционал называется *линейным функционалом*.

Пример 2.1 (линейные функционалы).

1. Пусть $\mathbb{R}^n$ есть n -мерное арифметическое пространство с элементами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — произвольный набор из n фиксированных чисел. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x_k$$

есть линейный функционал в $\mathbb{R}^n$.

2. Интеграл

$$I(x) = \int_a^b x(t) dt$$

представляет собой линейный функционал в пространстве $C[a, b]$.

3. Пусть y_0 — некоторая фиксированная непрерывная функция на $[a, b]$. Тогда для любой функции $x \in C[a, b]$

$$F(x) = \int_a^b x(t)y_0(t) dt.$$

будет линейным функционалом.

4. В том же пространстве $C[a, b]$ зададим функционал как

$$\delta_{t_0}(x) = \int_a^b x(t)\delta(t - t_0) dt, \quad (1.7.1)$$

где $\delta(t - t_0)$ — δ -функция Дирака:

$$\int_a^b \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} 1, & t \in (a, b), \\ 0, & t \notin (a, b) \end{cases}.$$

Иными словами, значение функционала δ_{t_0} на функции x равно значению этой функции в фиксированной точке t_0 .

1.7.2.2. Выпуклые множества и выпуклые функционалы

1.7.2.2.1. Выпуклые множества и выпуклые тела

Пусть L — некоторое линейное действительное пространство и x, y — две его точки.

Определение 2.5. *Замкнутым отрезком* в L , соединяющим точки x и y , называется совокупность всех элементов вида

$$\alpha x + (1 - \alpha)y, \text{ где } 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (1.7.2)$$

(рисунок 1.7.1). Отрезок без концевых точек x и y называется *открытым отрезком*.

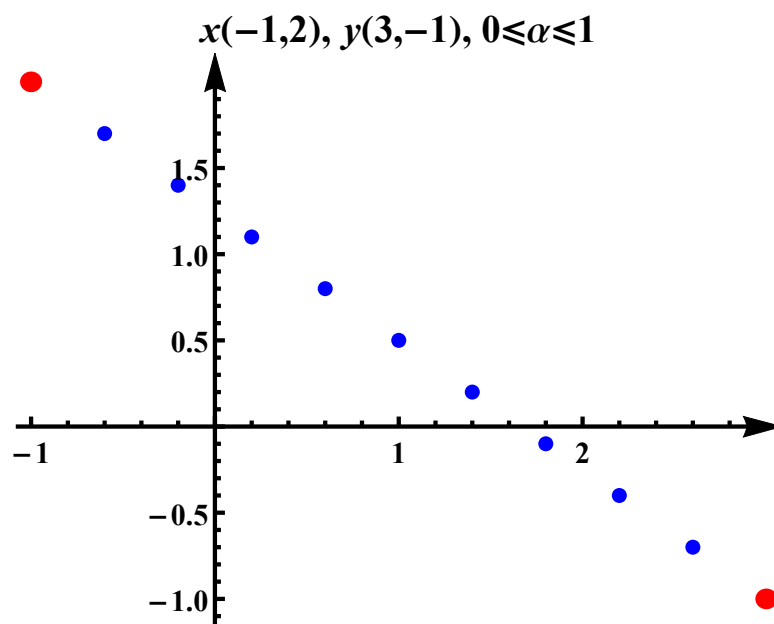


Рис. 1.7.1. Отрезок $\alpha x + (1 - \alpha)y$.

Определение 2.6. Множество $M \subset L$ называется **выпуклым**, если оно вместе с любыми двумя точками x и y содержит и соединяющий их отрезок (рисунок 1.7.2).

Определение 2.7. **Ядром** $J(E)$ произвольного множества $E \subset L$ называется совокупность таких его точек x , что для каждого $y \in L$ найдется такое число $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$, что $x + ty \in E$ при $|t| < \varepsilon$. Выпуклое множество, ядро которого не пусто, называется **выпуклым телом**.

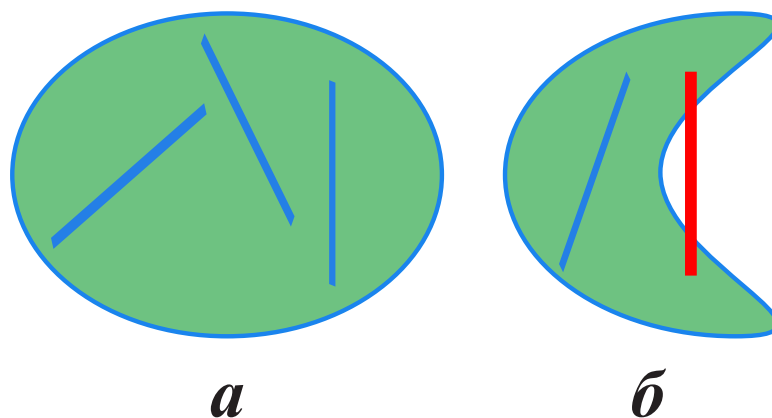


Рис. 1.7.2. Выпуклое (а) и не выпуклое (б) множества.

Пример 2.2. В трехмерном евклидовом пространстве куб, шар, тетраэдр, полупространство представляют собой выпуклые тела. Отрезок, плоскость, треугольник в том же пространстве — выпуклые множества, но не выпуклые тела.

Пример 2.3. Рассмотрим в пространстве непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ множество функций, удовлетворяющих условию $|f(t)| \leq 1$. Это множество выпукло; действительно, если $|f(t)| \leq 1$ и $|g(t)| \leq 1$, то при $\alpha \geq 0$

$$|\alpha f(t) + (1 - \alpha)g(t)| \leq \alpha + (1 - \alpha) = 1.$$

Пример 2.4. Единичный шар в ℓ_2 , т.е. совокупность таких точек $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, что $\sum x_n^2 \leq 1$, есть выпуклое тело. Его ядро состоит из точек x , удовлетворяющих условию $\sum x_n^2 < 1$.

Теорема 2.1 (без доказательства). *Если E выпуклое множество, то его ядро $J(E)$ тоже выпукло.*

Теорема 2.2 (без доказательства). *Пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.*

Замечание 2.1. Объединение выпуклых множеств не обязательно является выпуклым множеством. Пересечение выпуклых тел (будучи выпуклым множеством) не обязательно является выпуклым телом.

1.7.2.2. Однородно-выпуклые функционалы

Определение 2.8. Пусть L — действительное линейное пространство. Определенный на L функционал p называется **выпуклым**, если

$$p(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1 - \alpha)p(y)$$

для всех $x, y \in L$ и $0 \leq \alpha \leq 1$.

Определение 2.9. Функционал p называется **положительно-однородным**, если

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \tag{1.7.3}$$

для всех $x \in L$ и всех $\alpha > 0$.

Для выпуклого положительно-однородного функционала (далее будем называть его просто **однородно-выпуклым**) выполняется неравенство

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y). \tag{1.7.4}$$

Доказательство.

$$p(x + y) = 2p\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq 2\left[p\left(\frac{x}{2}\right) + p\left(\frac{y}{2}\right)\right] = p(x) + p(y).$$

Некоторые свойства однородно-выпуклых функционалов:

1. Из определения 2.9 следует, что

$$p(0) = 0. \quad (1.7.5)$$

2. Из (1.7.4) и (1.7.5) следует, что

$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) \quad (1.7.6)$$

для всех $x \in L$. Таким образом, если $p(x) \leq 0$, то $p(-x) > 0$. Ненулевой однородно-выпуклый функционал может быть всюду неотрицателен, но если *всюду* $p(x) \leq 0$, то и $p(-x) \leq 0$ и, таким образом, $p(x) \equiv 0$.

3. При любом α выполняется $p(\alpha x) \geq \alpha p(x)$. При $\alpha > 0$ это следует из (1.7.3), при $\alpha = 0$ из (1.7.5), при $\alpha < 0$ из (1.7.6) получаем

$$0 \leq p(\alpha x) + p(|\alpha|x) = p(\alpha x) + |\alpha|p(x),$$

т. е. $p(\alpha x) \geq -|\alpha|p(x) = \alpha p(x)$.

1.7.2.2.3. Продолжение функционала

Пусть L — действительное линейное пространство и L_0 — некоторое его подпространство. Пусть на подпространстве L_0 задан некоторый линейный функционал f_0 .

Определение 2.10. Линейный функционал f , определенный на всем пространстве L , называется *продолжением функционала* f_0 , если

$$f(x) = f_0(x) \quad \text{для всех } x \in L_0.$$

Теорема 2.3 (Хана — Банаха, без доказательства). Пусть p — однородно-выпуклый функционал, определенный на действительном линейном пространстве L , и пусть L_0 — линейное подпространство в L . Если f_0 — линейный функционал на L_0 , подчиненный на L_0 функционалу $p(x)$, т. е. если на L_0

$$f_0(x) \leq p(x), \quad (1.7.7)$$

то f_0 может быть продолжен до линейного функционала f на L , подчиненного $p(x)$ на всем L .

1.7.3. Нормированные пространства

1.7.3.1. Определения и примеры

Определение 3.1. Пусть L — линейное пространство. Однородно-выпуклый функционал p , определенный на L , называется *нормой*, если он удовлетворяет следующим дополнительным условиям (помимо выпуклости):

1. $p(x) = 0$ только при $x = 0$;
2. $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ для всех α .

Замечание 3.1. Из определения выпуклости следует, что нормой в L называется функционал, удовлетворяющий следующим четырем условиям (аксиомам):

1. $p(x) \geq 0$;
2. $p(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
3. $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ для всех α ;
4. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, где $x, y \in L$.

Определение 3.2. Линейное пространство L , в котором задана некоторая норма, называется **нормированным пространством**. Норма элемента $x \in L$ обозначается символом $\|x\|$.

Всякое нормированное пространство становится метрическим пространством, если ввести в нем расстояние

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Очевидно, что справедливость аксиом метрического пространства (с. 201) следует из свойств нормы.

Определение 3.3. Полное нормированное пространство называется **банаховым пространством** или *B-пространством*.

Пример 3.1. Прямая линия $\mathbb{R}$ становится нормированным пространством, если для всякого числа $x \in \mathbb{R}$ положить $\|x\| = |x|$.

Пример 3.2. Действительное n -мерное пространство $\mathbb{R}^n$ с элементами $x = (x_1, \dots, x_n)$. Пусть

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2},$$

тогда метрика определяется как

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}.$$

В этом же линейном пространстве можно ввести норму вида

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

или

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Эти нормы также определяют ранее рассмотренные метрики.

Пример 3.3. Пространство $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$:

$$\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|. \quad (1.7.8)$$

Пример 3.4. Пространство $L_p[a, b]$ классов эквивалентных функций, суммируемых по Лебегу. Норма этого пространства

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad (1.7.9)$$

Особенно важны пространства L_1 и L_2 .

Пример 3.5. Пространство m ограниченных числовых последовательностей

$$x = (x_1, \dots, x_n, \dots):$$

$$\|x\| = \sup_n |x_n|.$$

В конечномерном нормированном пространстве всякое подпространство автоматически замкнуто, т. е. содержит свои предельные точки. В бесконечномерном случае это не так.

Пример 3.6. В пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций с нормой (1.7.8) многочлены образуют подпространство, но не замкнутое. По теореме Вейерштрасса [23, с. 52] всякая непрерывная функция на отрезке есть предел равномерно сходящейся последовательности многочленов, поэтому замыкание подпространства многочленов в $C[a, b]$ есть всё $C[a, b]$.

Определение 3.4. *Подпространством нормированного пространства будем называть теперь только замкнутое подпространство: в частности, подпространством, порожденным данной системой элементов x_α , будем называть наименьшее замкнутое подпространство, содержащее x_α . Будем говорить о нем, как о линейном замыкании системы x_α .*

Определение 3.5. Совокупность элементов (не обязательно замкнутая), содержащая вместе с x и y их произвольную линейную комбинацию $\alpha x + \beta y$, называется *линейным многообразием*.

Определение 3.6. Система элементов, лежащая в нормированном пространстве E , называется *полной*, если порожденное ею (замкнутое!) подпространство есть все E .

Пример 3.7. В силу теоремы Вейерштрасса совокупность всех функций $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ полна в пространстве непрерывных функций $C[a, b]$.

1.7.3.2. Топологические пространства

Определение 3.7. Пусть X — некоторое множество (пространство-носитель). *Топологией* в X называется любая система τ его подмножеств G , удовлетворяющая двум требованиям:

1. Само множество X и пустое множество $\emptyset$ принадлежат τ .
2. Сумма $\bigcup_{\alpha} G_{\alpha}$ любого (конечного или бесконечного) и пересечение $\bigcap_{k=1}^n G_k$ любого конечного числа множеств из τ принадлежат τ .

Множество X с заданной в нем топологией τ , т. е. пара (X, τ) , называется **топологическим пространством**.

Определение 3.8. Множества, принадлежащие системе τ , называются **открытыми**.

Так же как метрическое пространство есть совокупность множества точек — «носителя» и введенной в этом множестве метрики, топологическое пространство есть совокупность множества точек и введенной в нем топологии, т. е. указания тех подмножеств, которые считаются в X открытыми.

Определение 3.9. Множество E называется **топологическим линейным пространством**, если

1. E представляет собой линейное пространство (с умножением элементов на действительные или комплексные числа).
2. E является топологическим пространством.
3. Операция сложения и умножения на числа в E непрерывны относительно заданной в E топологии.

Условие 3 означает следующее:

а) если $z_0 = x_0 + y_0$, то для каждой окрестности U точки z_0 можно указать такие окрестности V и W точек x_0 и y_0 соответственно, что $x + y \in U$ при $x \in V$, $y \in W$;

б) если $\alpha_0 x_0 = y_0$, то для любой окрестности W точки y_0 существуют такая окрестность V точки x_0 и такое число $\varepsilon > 0$, что $\alpha x \in W$ при $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$ и $x \in V$.

Все нормированные пространства относятся к топологическим линейным пространствам.

1.7.3.3. Евклидовы пространства

Определение 3.10. *Скалярным произведением* в действительном линейном пространстве R называется действительная функция (x, y) , определенная для каждой пары элементов $x, y \in R$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1. $(x, y) = (y, x)$;

2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Определение 3.11. Линейное пространство с фиксированным в нем скалярным произведением называется *евклидовым пространством*.

В евклидовом пространстве R вводится норма с помощью формулы

$$||x|| = \sqrt{(x, x)}.$$

Проверьте самостоятельно, выполняются ли в данном случае аксиомы нормы.

Угол между векторами x и y определяется в евклидовом пространстве формулой

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{||x|| \cdot ||y||}. \quad (1.7.10)$$

Выражение, стоящее в (1.7.10) справа, не превышает по модулю 1. Это следует из *неравенства Коши–Буняковского*

$$|(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||. \quad (1.7.11)$$

Докажем неравенство. Рассмотрим квадратный трехчлен от действительной переменной λ

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) = \lambda^2 ||x||^2 + 2\lambda(x, y) + ||y||^2.$$

Это выражение представляет собой скалярный квадрат вектора $(\lambda x + y)$, следовательно, $\varphi(\lambda) \geq 0$ при всех λ . Таким образом, дискриминант квадратного трехчлена меньше либо равен нулю, т. е. $4(x, y)^2 - 4 ||x||^2 ||y||^2 \leq 0$. $\square$

Если $(x, y) = 0$, то из (1.7.10) следует, что $\varphi = \pi/2$; векторы x и y ортогональны.

Определение 3.12. Система ненулевых векторов $\{x_\alpha\}$ из R называется *ортогональной*, если

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta$$

(в дальнейшем для ортогональных векторов будем использовать обозначение $x_\alpha \perp x_\beta$).

Если векторы $\{x_\alpha\}$ ортогональны, то они линейно независимы. Пусть

$$a_1 x_{\alpha_1} + a_2 x_{\alpha_2} + \cdots + a_n x_{\alpha_n} = 0.$$

Поскольку $\{x_\alpha\}$ ортогональная система,

$$(x_{\alpha_k}, a_1x_{\alpha_1} + a_2x_{\alpha_2} + \dots + a_nx_{\alpha_n}) = a_k(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) = 0$$

и, так как по свойству 4 скалярного произведения $(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) \neq 0$, получаем, что $a_k = 0$ для всех $k = \overline{1, n}$.

Определение 3.13. Если ортогональная система $\{x_\alpha\}$ полна (т.е. наименьшее содержащее ее замкнутое подпространство есть всё R), то она называется **ортгогональным базисом**.

Если при этом норма каждого элемента равна 1, то система $\{x_\alpha\}$ называется **ортгогональным нормированным базисом**.

Вообще, если система $\{x_\alpha\}$ (полная или нет) такова, что

$$(x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{при } \alpha = \beta, \end{cases}$$

то она называется **ортгогональной нормированной** или **ортонормальной** системой.

Замечание 3.1. Если $\{x_\alpha\}$ — ортогональная система, то $\left\{ \frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|} \right\}$ — ортогональная нормированная система.

1.7.3.3.1. Примеры евклидовых пространств

Пример 3.8. n -мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$, элементами которого служат системы действительных чисел $x = (x_1, \dots, x_n)$, с обычными операциями сложения и умножения и скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Ортогональный нормированный базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots, \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Пример 3.9. Пространство ℓ_2 с элементами

$$x = (x_1, \dots, x_n, \dots), \text{ где } \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty,$$

скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

и ортонормированным базисом

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots), \\ e_3 &= (0, 0, 1, \dots), \\ &\dots \end{aligned}$$

Эта система полна.

Доказательство. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ — любой вектор из ℓ_2 и $x^{(n)} = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Тогда $x^{(n)}$ есть линейная комбинация векторов $e_1, \dots, e_n$ и $\|x^{(n)} - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. $\square$

Пример 3.10. Пространство $C_2[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ действительных функций со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Важнейший частный случай: тригонометрическая система

$$\frac{1}{2}, \quad \cos \frac{2\pi n}{b-a}t, \quad \sin \frac{2\pi n}{b-a}t, \quad n = 1, 2, \dots, \quad t \in [a, b] \quad (1.7.12)$$

или

$$\frac{1}{2}, \quad \cos nt, \quad \sin nt, \quad n = 1, 2, \dots, \quad t \in [t_0, t_0 + 2\pi]. \quad (1.7.13)$$

Полнота системы (1.7.12) или (1.7.13) уже была доказана в разделе курса «Ряды Фурье».

1.7.3.4. Гильбертово пространство

Определение 3.14. Полное¹ евклидово пространство бесконечного числа измерений называется *гильбертовым пространством*.

¹Напомним, что полным называется метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства.

Определение 3.15 (более полное). *Гильбертовым пространством* называется совокупность H элементов $f, g, \dots$ произвольной природы, удовлетворяющая следующим условиям (аксиомам).

I. H есть евклидово пространство (т.е. линейное пространство с заданным в нем скалярным произведением).

II. Пространство H полно в смысле метрики $\rho(f, g) = \|f - g\|$.

III. Пространство H бесконечномерно, т.е. в нем для любого n можно найти n линейно независимых элементов.

В гильбертовом пространстве выполняются многие соотношения, известные еще из средней школы.

Теорема 3.1 (Пифагора). Пусть H — гильбертово пространство и векторы $x, y \in H$, причем $x \perp y$. Тогда $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Доказательство.

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + \underbrace{2(x, y)}_{=0} + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad \square$$

Теорема 3.2 (равенство параллелограмма). Пусть H — гильбертово пространство и векторы $x, y \in H$, тогда

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = \\ &= \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \square \end{aligned}$$

Геометрически эта теорема означает, что сумма квадратов диагоналей «параллелограмма», равна сумме квадратов всех его сторон.

Замечание 3.1. Если в школьном курсе гипотенузы и катеты треугольника, стороны и диагонали параллелограмма представляли собой обычные отрезки, то в функциональном анализе они являются элементами гильбертова пространства и могут иметь самую разнообразную природу, например, быть векторами, функциями, последовательностями.

Теорема 3.3 (о кратчайшем расстоянии от точки до подпространства). Пусть H — гильбертово пространство, L — его подпространство, $x \notin L$, $y \in L$ — вектор, расстояние до которого от x наименьшее среди всех расстояний от x до всех векторов из L . Тогда вектор $x - y$ ортогонален всем векторам из L (рисунок 1.7.3).

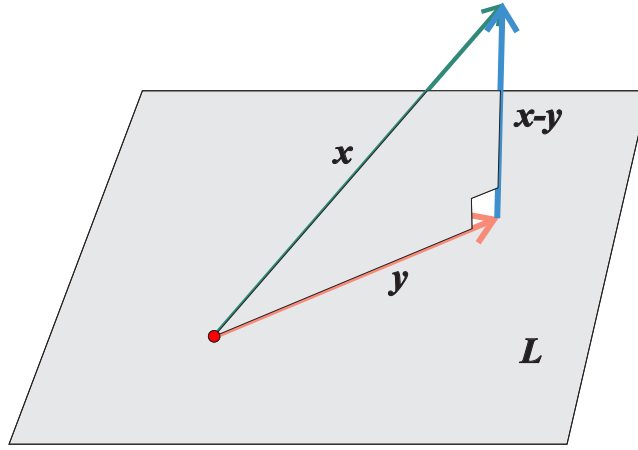


Рис. 1.7.3. Геометрическая интерпретация теоремы 3.3.
Точкой отмечено начало координат в L .

Доказательство. Рассмотрим $\forall z \in L$ и функцию $g(t) = \|x - (y + tz)\|^2$, $t \in \mathbb{R}$. Эта функция определяет квадрат расстояния от вектора x до вектора $y + tz$ и, поскольку кратчайшее расстояние до вектора x имеет вектор y , то $g(t)$ принимает минимальное значение при $t = 0$. Тогда $t = 0$ — точка минимума функции $g(z)$ и, следовательно, $g'(0) = 0$.

Далее,

$$\begin{aligned} g(t) &= \|x - (y + tz)\|^2 = (x - y - tz, x - y - tz) = \\ &= (x - y, x - y) - 2t(x - y, z) + t^2(z, z) = \|x - y\|^2 - 2t(x - y, z) + t^2\|z\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда $g'(t) = -2(x - y, z) + 2t\|z\|^2$, $g'(0) = -2(x - y, z) = 0$, $(x - y, z) = 0$ и, следовательно, $x - y \perp z$. Но z — произвольный вектор из L , и, таким образом, вектор $x - y$ ортогонален всем векторам из L . $\square$

Определение 3.16 (проекция элемента на подпространство). Пусть H — гильбертово пространство, L — его подпространство, $x \notin L$, $y \in L$ — вектор, расстояние до которого от вектора x наименьшее среди всех расстояний от x до всех векторов из L . Вектор $y \in L$ называется *проекцией элемента $x \notin L$ на подпространство L* .

Проекцию элемента x на подпространство L будем обозначать $\text{pr}_L x$.

Теорема 3.4 (о существовании проекции; без доказательства²). Пусть H — гильбертово пространство, L — его замкнутое подпространство, $x \notin L$, $x \in H$, тогда $\exists y_0 \in L$ такой, что вектор $x - y_0$ ортогонален всем векторам из L .

²Несложное, но громоздкое доказательство этой теоремы см., например, в [31, с. 22-23].

Замечание 3.2. Если подпространство L не является замкнутым, то проекция может не существовать.

Теорема 3.5 (о единственности проекции). Пусть H — гильбертово пространство, L — его замкнутое подпространство, $x \notin L$, $x \in H$, $y \in L$ — такой вектор, что $x - y$ ортогонален всем векторам из L . Тогда вектор y единственный для данного x и данного L .

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть $\exists y_1, y_2 \in L : \forall z \in L \ x - y_1 \perp z$ и $x - y_2 \perp z$, при этом $y_1 \neq y_2$. По определению ортогональности $(x - y_1, z) = 0$ и $x - y_2 \perp z$. Вычитая эти равенства и пользуясь аксиомами скалярного произведения, получаем, что

$$(x - y_1, z) - (x - y_2, z) = (x - y_1 - (x - y_2), z) = (y_1 - y_2, z) = 0.$$

При этом $y_1 - y_2 \in L$, а z — произвольный элемент из L . Тогда, выбирая $z = y_1 - y_2$, получаем, что $(y_1 - y_2, y_1 - y_2) = 0$, откуда $y_1 = y_2$, что противоречит первоначальному предположению. $\square$

Формула для ортогональной проекции элемента $x \notin L$ на подпространство L может быть легко получена, если задан ортогональный базис этого подпространства $e_1, e_2, \dots, e_n$:

$$\text{pr}_L x = \sum_{k=1}^n \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)} e_k. \quad (1.7.14)$$

В частности, если базис ортонормирован, то $\text{pr}_L x = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k$.

Метод нахождения проекции вектора на подпространство будет рассмотрен на примере задачи 7.22.

1.7.3.5. Линейные функционалы на нормированных пространствах

Определение 3.17. Функционал f , определенный на линейном пространстве E , называется **непрерывным**, если для всякого $x_0 \in E$ и для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность δ элемента x_0 , что

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad x \in \delta. \quad (1.7.15)$$

Замечание 3.1. Если E — конечномерное топологическое линейное пространство, то всякий линейный функционал на E автоматически непрерывен. В общем случае из линейности функционала его непрерывность не вытекает.

Лемма 3.1. Если линейный функционал f непрерывен в какой-либо одной точке $x \in E$, то он непрерывен и всюду на E .

Доказательство. Пусть y — произвольная точка в E и пусть $\varepsilon > 0$. Выберем окрестность δ точки x_0 так, чтобы выполнялось условие (1.7.15). Тогда сдвиг этой окрестности $\delta_1 = \delta + (y - x)$ будет искомой окрестностью точки y , так как если $z \in \delta_1$, то $z + x - y \in \delta$, следовательно,

$$|f(x) - f(y)| = |f(z - y + x) - f(x)| < \varepsilon. \quad \square$$

Следствие 3.1. Проверять непрерывность линейного функционала достаточно в одной точке, например, в точке 0.

Теорема 3.6. Для того чтобы линейный функционал f был непрерывен на E , необходимо и достаточно, чтобы существовала такая окрестность нуля в E , на которой функционал f ограничен.

Доказательство. Если функционал f непрерывен в точке 0, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность нуля, на которой $|f(x)| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

Пусть δ — такая окрестность нуля, что $|f(x)| < C$ при $x \in \delta$. Тогда $\frac{\varepsilon}{C}\delta$ есть та окрестность нуля, на которой $|f(x)| < \varepsilon$. Тем самым доказана непрерывность f в точке 0, а значит, и всюду. $\square$

Определение 3.18. Пусть f — непрерывный линейный функционал в нормированном пространстве E . Число

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|,$$

т. е. точная верхняя грань значений $|f(x)|$ на единичном шаре пространства E , называется **нормой функционала f** .

Свойства нормы функционала $\|f\|$:

$$1. \quad \|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Это следует из того, что для всякого $x \neq 0$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right|.$$

2. Для любого $x \in E$

$$\|f(x)\| \leq \|f\| \cdot \|x\|. \quad (1.7.16)$$

Если $x \neq 0$, то элемент $\frac{x}{\|x\|}$ принадлежит единичному шару, тогда по определению нормы функционала

$$\left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| = \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|,$$

откуда следует (1.7.16). Если же $x = 0$, то в (1.7.16) справа и слева стоят нули.

Пример 3.11. Интеграл

$$I(x) = \int_a^b x(t) dt,$$

где $x(t)$ — непрерывная функция на $[a, b]$, представляет собой линейный функционал в пространстве $C[a, b]$. Этот функционал ограничен, а его норма равна $b - a$. Действительно,

$$|I(x)| = \left| \int_a^b x(t) dt \right| \leq \max_{t \in [a, b]} |x(t)| \cdot (b - a) = \|x\| (b - a).$$

Равенство достигается при $x \equiv \text{const}$.

Пример 3.12. Линейный функционал

$$\delta_{t_0}(x) = \int_a^b x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0). \quad (1.7.17)$$

в пространстве $C[a, b]$. Его значение на функции $x(t)$ определяется как значение $x(t)$ в данной точке t_0 . Ясно, что $|x(t_0)| \leq \|x\|$ (равенство имеет место при $x \equiv \text{const}$). Поэтому норма функционала δ_{t_0} равна 1.

1.7.4. Операторы в банаховых пространствах

1.7.4.1. Линейные операторы

Определение 4.1. Пусть E и E_1 — два линейных топологических пространства. *Линейным оператором*, действующим из E в E_1 , называется отображение $y = Ax$, $x \in E$, $y \in E_1$, удовлетворяющее условию

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2.$$

Будем обозначать операторы заглавными латинскими буквами: $A, B, C, \dots$. Используется также заглавная буква со «шляпкой»: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \dots$

Определение 4.2. Совокупность D_A всех тех $x \in E$, для которых отображение A определено, называется **областью определения** оператора A .

Определение 4.3. Оператор A называется **непрерывным в точке** $x_0 \in D_A$, если для любой окрестности V точки $y_0 = Ax_0$ существует такая окрестность U точки x_0 , что $Ax \in V$, как только $x \in U \cap D_A$.

Оператор A называется **непрерывным**, если он непрерывен в каждой точке $x_0 \in D_A$.

Для нормированных пространств оператор A называется непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства

$$\|x_1 - x_2\| < \delta, \quad x_1, x_2 \in D_A$$

следует

$$\|Ax_1 - Ax_2\| < \varepsilon.$$

Линейный функционал есть частный случай линейного оператора. Именно, линейный функционал — это линейный оператор, переводящий данное пространство E в числовую прямую $\mathbb{R}$. Определения линейности и непрерывности оператора переходят при $E_1 = \mathbb{R}$ в соответствующие определения, введенные ранее для функционалов.

Пример 4.1. Пусть E — линейное топологическое пространство. Положим

$$Ix = x \text{ для всех } x \in E.$$

Такой оператор, переводящий каждый элемент пространства в себя, называется *единичным оператором*.

Пример 4.2. Пусть E и E_1 — произвольные линейные топологические пространства и пусть

$$Ox = 0 \text{ для всех } x \in E$$

(здесь 0 — нулевой элемент пространства E_1). Тогда O называется *нулевым оператором*.

Пример 4.3 (общий вид линейного оператора, переводящего конечномерное пространство в конечномерное). Пусть A — линейный оператор, отображающий n -мерное пространство $\mathbb{R}^n$ с базисом $e_1, \dots, e_n$ в m -мерное пространство $\mathbb{R}^m$ с базисом $f_1, \dots, f_m$. Если x — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$, то

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

и, так как x_i суть константы, в силу линейности оператора A

$$Ax = \sum_{i=1}^n x_i A e_i.$$

Таким образом, оператор A задан, если известно, во что он переводит базисные векторы $e_1, \dots, e_n$.

Рассмотрим разложения векторов $A e_i$ по базису $f_1, \dots, f_m$. Имеем

$$A e_i = \sum_{k=1}^m a_{ki} f_k.$$

Таким образом, оператор A определяется матрицей коэффициентов $\|a_{ik}\|$. Образ пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ представляет собой линейное подпространство, размерность которого равна, очевидно, рангу матрицы $\|a_{ik}\|$, т.е. во всяком случае не превосходит n . Отметим, что всякий линейный оператор, заданный в конечномерном пространстве, автоматически непрерывен.

Пример 4.4. Рассмотрим в пространстве непрерывных функций $C[a, b]$ оператор, определяемый формулой

$$\psi(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt,$$

где $K(s, t)$ — некоторая фиксированная непрерывная функция двух переменных. Функция $\psi(s)$ непрерывна для любой непрерывной функции $\varphi(t)$, так что оператор действительно переводит пространство непрерывных функций в себя. Этот оператор линеен и непрерывен.

В следующих примерах рассмотрим оператор дифференцирования в различных пространствах.

Пример 4.5. Пусть в пространстве непрерывных функций $C[a, b]$ задан оператор

$$Df(t) = f'(t).$$

Этот оператор определен, очевидно, не на всем пространстве непрерывных функций, а лишь на линейном многообразии функций, имеющих непрерывную производную. Оператор D линеен, но не непрерывен. Например, последовательность $\varphi_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$ сходится к 0 (в метрике $C[a, b]$), а последовательность $D\varphi_n(t) = \cos nt$ не сходится.

Пример 4.6. Оператор, действующий из пространства D_1 непрерывно дифференцируемых функций, заданных на $[a, b]$, с нормой

$$\|\varphi\|_1 = \max |\varphi(t)| + \max |\varphi'(t)|,$$

в пространство $C[a, b]$. Этот оператор линеен и непрерывен, он отображает все пространство D_1 на $C[a, b]$.

Пример 4.7. Оператор из примера 4.6 можно применить дважды не к любой функции из D_1 . Введем пространство D_∞ бесконечно дифференцируемых функций, заданных на $[a, b]$ с нормой

$$\|\varphi\|_n = \sup_{n,t} (|\varphi(t)|, |\varphi'(t)|, \dots, |\varphi^{(n)}(t)|).$$

Оператор дифференцирования переводит пространство D_∞ в себя и непрерывен.

1.7.4.2. Норма оператора

Определение 4.4. Линейный оператор, действующий из E в E_1 , называется **ограниченным**, если он определен на всем E и каждое ограниченное множество переводит снова в ограниченное.

Замечание 4.1. Всякий непрерывный линейный оператор ограничен.

Если E и E_1 — нормированные пространства, то условие ограниченности оператора A , действующего из E в E_1 , можно сформулировать так: оператор A называется ограниченным, если он переводит всякий шар в ограниченное множество. В силу линейности A это условие можно сформулировать так: оператор A ограничен, если существует такая постоянная C , что для всякого $f \in E$

$$\|Af\| \leq C \|f\|.$$

Определение 4.5. Наименьшее из чисел C , удовлетворяющих этому неравенству, называется **нормой оператора** A и обозначается $\|A\|$.

Теорема 4.1. Для любого ограниченного оператора A , действующего из нормированного пространства в нормированное,

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \quad (1.7.18)$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$. Оператор A линеен, поэтому

$$\alpha = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Тогда для любого элемента x

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \alpha;$$

$$\|Ax\| \leq \alpha \|x\|,$$

откуда следует, что

$$\|A\| = \inf C \leq \alpha.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $x_\varepsilon \neq 0$, что

$$\alpha - \varepsilon \leq \frac{\|Ax_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|}$$

или

$$(\alpha - \varepsilon) \|x_\varepsilon\| \leq \|Ax_\varepsilon\| \leq C \|x_\varepsilon\|.$$

Поэтому

$$\alpha - \varepsilon \leq \inf C = \|A\|.$$

В силу произвольности ε $\alpha \leq \|A\|$. Следовательно, $\|A\| = \alpha$.

1.7.4.3. Сумма и произведение операторов

Определение 4.6. Пусть A и B — два линейных оператора, действующих из линейного пространства E в пространство E_1 . Назовем их **суммой** $A + B$ оператор C , ставящий в соответствие элементу $x \in E$ элемент $y = Ax + Bx \in E_1$. Оператор определен на всех элементах, принадлежащих пересечению $D_A \cap D_B$ областей определения операторов A и B .

Замечание 4.1. Оператор C непрерывен, если A и B непрерывны.

Замечание 4.2. Если E и E_1 нормированные пространства, а операторы A и B ограничены, то $A + B$ тоже ограничен, причем

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Определение 4.7. Пусть A и B — линейные операторы, причем A действует из пространства E в E_1 , а B действует из E_1 в E_2 . **Произведением** BA операторов A и B называется оператор C , ставящий в соответствие элементу $x \in E$ элемент $z = B(Ax)$ из E_2 . Область определения D_C оператора $C = BA$ состоит из тех $x \in D_A$, для которых $Ax \in D_B$.

Замечание 4.3. Оператор BA линеен. Он непрерывен, если A и B непрерывны.

Если A и B — ограниченные операторы, действующие в нормированных пространствах, то и оператор BA ограничен, причем

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|. \quad (1.7.19)$$

Действительно,

$$\|B(Ax)\| \leq \|B\| \cdot \|Ax\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|,$$

откуда следует (1.7.19).

Определение 4.8. Если выполнено равенство

$$AB = BA,$$

то операторы A и B называются *перестановочными* или *коммутативными*.

В общем случае $AB \neq BA$, возможно даже, что один из операторов AB имеет смысл, а другой BA смысла не имеет.

Пример 4.8. Пусть

$$Af(x) = xf(x) \text{ и } Bf(x) = f'(x).$$

Тогда

$$ABf(x) = Af'(x) = xf'(x)$$

и

$$BAf(x) = Bxf(x) = xf'(x) + f(x).$$

Следовательно, $AB \neq BA$, если $f(x) \neq 0$, т. е. операторы A и B не коммутативны.

Сумма и произведение трех и более операторов определяются последовательно. Обе эти операции ассоциативны.

Произведение kA оператора A на число k определяется как оператор, который элементу x ставит в соответствие элемент kAx .

Пользуясь операциями умножения на число, сложением, умножением и возведением в натуральную степень операторов, можно строить *операторные полиномы*

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k A^k,$$

где $A^0 = I$ (единичный оператор).

Пример 4.9. Если $D = d/dx$ есть оператор дифференцирования, то операторный полином $P = D^2 + 2D - I$ действует так:

$$Py = \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + 2 \frac{dy(x)}{dx} - y(x).$$

Совокупность $\mathcal{L}(E, E_1)$ всех непрерывных линейных операторов, определенных на всем E и отображающих E в E_1 (где E и E_1 — фиксированные линейные топологические пространства), образует по отношению к операциям сложения и умножения на числа линейное пространство.

Если E и E_1 — нормированные пространства, то $\mathcal{L}(E, E_1)$ — также нормированное пространство.

1.7.4.4. Обратные операторы

Определение 4.9. Оператор A^{-1} называется *обратным* для данного оператора A , если выполнено условие

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Замечание 4.1. Обратный оператор существует не всегда.

Пример 4.10. Пусть $C^{(1)}[0, +\infty)$ — совокупность всех функций $y(x)$, непрерывно дифференцируемых в промежутке $[0, +\infty)$ и таких, что $y(0) = 0$. Тогда для оператора дифференцирования $D = d/dx$, определенного в $C^{(1)}$, обратным является

$$D^{-1}y = \int_0^x y(s) ds.$$

Действительно:

$$DD^{-1}y = \frac{d}{dx} \int_0^x y(s) ds = y(x).$$

$$D^{-1}Dy = \int_0^x y'(s) ds = y(x) - y(0) = y(x).$$

Для существования обратного оператора A^{-1} для данного оператора A , действующего из пространства $X = \{f\}$ в пространство $Y = \{g\}$, достаточно, чтобы операторное уравнение

$$Af = g \tag{1.7.20}$$

для каждого $g \in Y$ имело единственное решение $f = A^{-1}g \in X$.

Действительно, из уравнения (1.7.20) имеем

$$A(A^{-1}g) = Af = g.$$

Пусть

$$Af = h \in Y$$

и

$$A^{-1}(Af) = f_1,$$

т. е.

$$Af_1 = Af = h.$$

Таким образом, уравнение $Ax = h$ допускает два решения:

$$x = f \quad \text{и} \quad x_1 = f_1.$$

По предположенному свойству единственности эти решения совпадают, т. е.

$$A^{-1}(Af) = f_1 = f.$$

Следовательно, обратный оператор A^{-1} существует и действует из Y в X .

Можно также показать, что если операторы A и B имеют обратные операторы, то операторы AB и BA также имеют обратные операторы, причем

$$\begin{aligned}(AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}, \\ (BA)^{-1} &= A^{-1}B^{-1}.\end{aligned}$$

Для данного оператора A , имеющего обратный оператор A^{-1} , можно определить *целые отрицательные степени*:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n, \quad n > 0.$$

При этом для любых целых чисел k и m будет справедливо *правило умножения степеней*:

$$A^k A^m = A^{k+m},$$

где $A^0 = I$.

1.7.4.5. Эрмитовы операторы

Замечание 4.1. В этом разделе комплексное сопряжение мы будем обозначать не привычной чертой сверху (например, $\overline{A}$), а звездочкой: A^* .

Пусть A — линейный оператор, определенный в комплексном гильбертовом пространстве H и имеющий значения в этом же пространстве, т. е.

если $f \in H$, то $Af \in H$. Для любой пары функций f и g пространства H определено скалярное произведение

$$(Af, g) = \int_{\Omega} g^* Af d\Omega.$$

Если выполнено соотношение

$$(Af, g) = (f, A^*g), \quad (1.7.21)$$

то оператор A^* называется *сопряженным* с оператором A .

Определение 4.10. Линейный оператор A называется *самосопряженным* или *эрмитовым*, если он совпадает со своим сопряженным, т. е. $A = A^*$.

Из формулы (1.7.21) следует

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

или

$$\int_{\Omega} g^* Af d\Omega = \int_{\Omega} f Ag^* d\Omega.$$

Таким образом, в скалярном произведении эрмитов оператор A можно переставлять с первого места на второе.

Пример 4.11. Пусть $C^{(1)}(-\infty, +\infty)$ — пространство непрерывно дифференцируемых на оси функций $y = y(x)$, обращающихся в нуль на бесконечности, т. е. таких, что

$$y(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 0.$$

Тогда оператор

$$A = \frac{1}{i} \cdot \frac{d}{dx} \quad (1.7.22)$$

является эрмитовым в пространстве $C^{(1)}$.

Действительно, для любых функций $f \in C^{(1)}$ и $g \in C^{(1)}$ имеем

$$(Af, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g^* Af dx = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} g^* \frac{d}{dx} f dx.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}(Af, g) &= \frac{1}{i} \left[g^* f \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f \frac{d}{dx} g^* dx \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{i} g \right) \right]^* dx = (f, Ag). \quad \boxtimes\end{aligned}$$

Замечание 4.2. Если бы в выражении (1.7.22) отсутствовал мнимый множитель $1/i$, то соответствующий оператор не был бы эрмитовым.

Пример 4.12. Пусть $C^{(2)}(E^3)$ — пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций $u = u(x, y, z)$ в евклидовом пространстве

$$E^3 = \{-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, -\infty < z < +\infty\},$$

причем функции u регулярны на бесконечности, т.е. обращаются на бесконечности в нуль вместе со всеми своими частными производными первого порядка, которые имеют кратность нуля не ниже двух.

Можно показать [1, с. 89–90], что оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

эрмитов в пространстве $C^{(2)}(E^3)$:

$$(\Delta f, g) = (f, \Delta g).$$

Свойства эрмитовых операторов

1. Единичный оператор I эрмитов.
2. Произведение kA эрмитова оператора A на действительную постоянную k есть также эрмитов оператор. Действительно,

$$(kAf, g) = k(Af, g) = k(f, Ag) = (f, kAg),$$

так как $k^* = k$.

3. Сумма $A + B$ двух эрмитовых операторов A и B есть также эрмитов оператор. Докажем это, используя линейность операторов A и B :

$$\begin{aligned}((A + B)f, g) &= (Af + Bf, g) = (Af, g) + (Bf, g) = \\ &= (f, Ag) + (f, Bg) = (f, Ag + Bg) = (f, (A + B)g).\end{aligned}$$

Так как $A - B = A + (-1)B$, то разность $A - B$ двух эрмитовых операторов A и B есть также эрмитов оператор.

4. Произведение AB двух эрмитовых операторов A и B есть эрмитов оператор тогда и только тогда, когда операторы A и B перестановочны (коммутируют), т. е. $AB = BA$. Действительно, если операторы A и B эрмитовы, то имеем

$$((AB)f, g) = (A(Bf), g) = (Bf, Ag) = (f, B(Ag)) + (f, Bg) = (f, (BA)g).$$

Следствие 4.1. *Целые положительные степени*

$$A^2 = AA, \quad A^3 = A(A^2), \quad A^4 = A(A^3), \quad \dots$$

эрмитова оператора A также суть эрмитовы операторы.

5. Если эрмитов оператор A обратим, то обратный оператор A^{-1} также эрмитов:

$$(A^{-1}f, g) = (A^{-1}f, AA^{-1}g) = (AA^{-1}f, A^{-1}g) = (f, A^{-1}g).$$

В следующем разделе мы рассмотрим другие свойства эрмитовых операторов на примере оператора Фредгольма с симметричным ядром.

1.7.5. Метод ортогонализации Грама – Шмидта

Опишем метод, позволяющий произвольный базис евклидова пространства преобразовать в ортогональный, а затем в ортонормированный, следуя [8, с. 318–319].

Пусть в пространстве E задан некоторый базис $f_1, \dots, f_n$. Положим $h_1 = f_1$. Затем из вектора f_2 вычтем его ортогональную проекцию на линейную оболочку h_1 и положим h_2 равным полученной разности:

$$h_2 = f_2 - \frac{(f_2, h_1)}{\|h_1\|^2} h_1.$$

Отметим, что h_2 раскладывается по $f_1 = h_1$ и f_2 , причем $h_2 \neq 0$, так как в противном случае f_1 и f_2 были бы пропорциональны.

Будем продолжать таким же образом. Допустим, что построены попарно ортогональные ненулевые векторы $h_1, \dots, h_k$, причем для любого $i \leq k$ вектор h_i раскладывается по $f_1, \dots, f_i$. Положим

$$h_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(f_{k+1}, h_i)}{\|h_i\|^2} h_i.$$

Вектор h_{k+1} — проекция f_{k+1} на ортогональное дополнение линейной оболочки $h_1, \dots, h_k$ и потому ортогонален всем h_i при $i < k + 1$. Таким образом, векторы $h_1, \dots, h_{k+1}$ попарно ортогональны.

Кроме того, $h_k + 1$ раскладывается по $f_1, \dots, f_{k+1}$, так как для любого $i \leq k$ вектор h_i раскладывается по $f_1, \dots, f_i$. Отсюда следует, что $h_{k+1} \neq 0$, поскольку иначе векторы $f_1, \dots, f_{k+1}$ оказались бы линейно зависимы.

После того, как будет преобразован последний вектор f_n , мы получим ортогональную систему из n ненулевых векторов.

Итак, построен ортогональный базис h . От него можно перейти к ортонормированному базису e из векторов $e_i = h_i / \|h_i\|$ ($i = 1, \dots, n$). Это называется нормировкой базиса h .

1.8. Интегральные уравнения с симметричными ядрами

1.8.1. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра

1.8.1.1. Основные определения

Определение 1.1. *Интегральным уравнением* называется уравнение, которое содержит неизвестную функцию под знаком интеграла.

Интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода:

$$\int_a^b K(x, s)y(s) ds = f(x). \quad (1.8.1)$$

Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds \quad (1.8.2)$$

(смысл параметра λ будет рассмотрен ниже).

Интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода:

$$\int_a^x K(x, s)y(s) ds = f(x). \quad (1.8.3)$$

Интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s)y(s) ds. \quad (1.8.4)$$

Определение 1.2. Если $f(x) \equiv 0$, то соответствующее интегральное уравнение называется *однородным*.

Определение 1.3. Функция $K(x, s)$ называется *ядром интегрального уравнения*. По умолчанию будем считать ее непрерывной, а области изменения переменных x и s — совпадающими.

1.8.1.2. Сведение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода

Следуя [10, с. 204–208], покажем, что задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения порядка n

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} = f(x), \quad (1.8.5)$$

$$\left. \frac{d^k y}{dx^k} \right|_{x=x_0} = y_k^{(0)}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad a < x_0 < b \quad (1.8.6)$$

с непрерывной правой частью $f(x)$ и коэффициентами $a_k(x)$, обладающими непрерывными производными до порядка $n-1$ включительно при $a \leq x \leq b$, сводится к уравнению Вольтерра второго рода

Полином

$$z(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k^{(0)}}{k!} (x - x_0)^k$$

удовлетворяет условиям (1.8.6), а функция $u(x) = y(x) - z(x)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^n u}{dx^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \frac{d^k z}{dx^k}$$

с начальными условиями

$$\left. \frac{d^k u}{dx^k} \right|_{x=x_0} = 0, \quad k = \overline{0, n-1},$$

поэтому без ограничения общности можно считать, что все $y_k^{(0)} = 0$, т. е.

$$\left. \frac{d^k y}{dx^k} \right|_{x=x_0} = 0, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad (1.8.7)$$

Проинтегрировав (1.8.5) n раз, в силу (1.8.7) имеем:

$$y(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_0}^x dx_1 \int_{x_0}^{x_1} dx_2 \dots \int_{x_0}^{x_{n-1}} a_k(s) \frac{d^k y}{ds^k} ds = \int_{x_0}^x dx_1 \int_{x_0}^{x_1} dx_2 \dots \int_{x_0}^{x_{n-1}} f(s) ds. \quad (1.8.8)$$

или

$$y(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-s)^{n-1} a_k(s) \frac{d^k y}{ds^k} ds = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-s)^{n-1} f(s) ds. \quad (1.8.9)$$

Проинтегрировав левую часть (1.8.9) по частям с учетом условий (1.8.7), получим

$$\begin{aligned} y(x) + \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_{x_0}^x y(s) \frac{d^k}{ds^k} [a_k(s)(x-s)^{n-1}] ds = \\ = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-s)^{n-1} f(s) ds \end{aligned}$$

или

$$y(x) + \int_{x_0}^x K(x, s) y(s) ds = F(x), \quad (1.8.10)$$

где

$$\begin{aligned} K(x, s) &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} [a_k(s)(x-s)^{n-1}], \\ F(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-s)^{n-1} f(s) ds. \end{aligned}$$

Таким образом, задача (1.8.5), (1.8.7) сведена к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра второго рода (1.8.10) с непрерывным ядром $K(x, s)$ и непрерывной правой частью $F(x)$.

Замечание 1.1. Решая интегральное уравнение Вольтерра второго рода методом сжимающих отображений, мы доказали существование и единственность его решения. Из приведенных выше рассуждения вытекает существование и единственность решения задачи Коши (1.8.5), (1.8.7).

1.8.1.3. Сведение краевой задачи для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода

Покажем, что краевая задача для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (задача Дирихле)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda p(x)y &= f(x), \quad a < x < b, \\ y(a) &= A, \quad y(b) = B, \end{aligned} \quad (1.8.11)$$

где $p(x)$ и $f(x)$ — заданные непрерывные при $a \leq x \leq b$ действительные функции, A и B — заданные действительные постоянные, а λ — действительный параметр, сводится к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода.

Как и в предыдущем случае, без ограничения общности можно считать, что $A = B = 0$, т. е. краевые условия имеют вид

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (1.8.12)$$

Зададим функцию Грина

$$G(s, x) = \begin{cases} \frac{(s-b)(x-a)}{b-a}, & x \leq s, \\ \frac{(s-a)(x-b)}{b-a}, & x \geq s. \end{cases}$$

Нетрудно показать (проделайте это самостоятельно), что эта функция:

1. непрерывна в квадрате $a \leq x \leq b$, $a \leq s \leq b$;
2. в интервалах $a < x < b$, $a < s < b$ при $s \neq x$ как по s , так и по x имеет вторые производные, равные нулю;
3. подчиняется соотношению

$$\lim_{\substack{s \rightarrow x \\ s \geq x}} \frac{\partial G}{\partial s} - \lim_{\substack{s \rightarrow x \\ s \leq x}} \frac{\partial G}{\partial s} = 1, \quad a < x < b.$$

Функция $G(s, x)$ удовлетворяет тождеству (докажите!)

$$G(s, x) \frac{d^2 y}{ds^2} - y(s) \frac{\partial^2 G(s, x)}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(G \frac{dy}{ds} - y \frac{\partial G}{\partial s} \right). \quad (1.8.13)$$

Проинтегрируем (1.8.13) в интервалах $a < s < x - \varepsilon$, $x + \varepsilon < s < b$, где ε — малое положительное число и сложим полученные результаты с учетом

(1.8.11), (1.8.12) и указанных выше свойств функции Грина. Получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^b \right) G(s, x) [-\lambda p(s)y(s) + f(s)] ds = \\ & = G(x-\varepsilon, x) \frac{dy}{ds} \Big|_{s=x-\varepsilon} - G(x+\varepsilon, x) \frac{dy}{ds} \Big|_{s=x+\varepsilon} - \\ & - y(x-\varepsilon) \frac{\partial G(s, x)}{\partial s} \Big|_{s=x-\varepsilon} + y(x+\varepsilon) \frac{\partial G(s, x)}{\partial s} \Big|_{s=x+\varepsilon}, \end{aligned}$$

откуда в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ следует, что

$$y(x) = -\lambda \int_a^b G(s, x) p(s) y(s) ds + \int_a^b G(s, x) f(s) ds \quad (1.8.14)$$

или

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = F(x), \quad (1.8.15)$$

где

$$K(x, s) = -G(s, x) p(s), \quad F(x) = \int_a^b G(s, x) f(s) ds.$$

В теории обыкновенных дифференциальных известно, что краевая задача либо имеет единственное решение, либо имеет бесчисленное множество решений, либо вовсе не имеет решения.

Пусть, например,

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = y(L) = 0.$$

Общее решение уравнения

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 1.$$

Левое граничное условие приводит к $C_2 = -1$. После этого правое граничное условие выглядит так:

$$y(L) = C_1 \sin L + 1 - \cos L = 0.$$

Рассмотрим различные варианты в зависимости от значения параметра L .

- $\sin L \neq 0$, т. е. $L \neq n\pi$, $n = 1, 2, \dots$. В этом случае константа C_1 определяется однозначно: $C_1 = (\cos L - 1)/\sin L$. Уравнение имеет единственное решение.
- $\sin L = 0$, причем $n = 2k$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда $\cos L = 1$ и правое граничное условие выполнено при любом значении C_1 .
- $\sin L = 0$ и $n = 2k - 1$. Теперь $\cos L = -1$ и правое граничное условие не может быть выполнено ни при каком C_1 — краевая задача решения не имеет.

Как будет показано ниже, точно так же интегральное уравнение Фредгольма может иметь единственное решение, бесчисленное множество решений и вовсе не иметь решения.

1.8.2. Собственные значения и собственные функции однородных уравнений с симметричным ядром

1.8.2.1. Теоремы об ортогональности собственных функций и расположении собственных значений

Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$y(x) = \lambda(Ay)(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds, \quad x \in [a, b], \quad (1.8.16)$$

где A — оператор Фредгольма.

Будем предполагать, что ядро $K(x, s)$ при $x, s \in [a, b]$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $K(x, s)$ — вещественная функция.
2. $K(x, s) \not\equiv 0$.
3. $K(x, s)$ — непрерывная функция по совокупности аргументов.
4. $K(x, s)$ — симметричное ядро, т. е. $K(x, s) = K(s, x)$.

Можно показать [26, гл. 9, §2], что, если $K(x, s) = \overline{K(s, x)}$ (т. е. ядро является вещественным и симметричным), то оператор Фредгольма является эрмитовым.

Определение 2.1. Значения параметра λ , при которых уравнение (1.8.16) имеет нетривиальное решение, называются **собственными значениями**¹ интегрального уравнения (1.8.16) или собственными значениями яд-

¹В некоторых источниках они называются *характеристическими числами*.

ра $K(x, s)$, а отвечающие этим значениям нетривиальные решения называются **собственными функциями** интегрального уравнения (1.8.16) или собственными функциями ядра.

Определение 2.2. Совокупность всех собственных значений уравнения (ядра) называется **спектром уравнения (ядра)**.

Теорема 2.1. 1. Собственные значения ядра $K(x, s)$ вещественны.

2. Нахождение комплексных собственных функций сводится к нахождению вещественных собственных функций.

Доказательство. 1. Пусть $\lambda = u + iv$ — собственное значение ядра $K(x, s)$, а $y(x)$ — соответствующая собственная функция. Тогда

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds.$$

Ядро $K(x, s)$ вещественно, поэтому для комплексно сопряженных величин получаем

$$\bar{y}(x) = \bar{\lambda} \int_a^b K(x, s)\bar{y}(s) ds.$$

Запишем выражение для интеграла от квадрата модуля функции $y(x)$, пользуясь этими соотношениями:

$$\begin{aligned} \int_a^b |y(x)|^2 dx &= \int_a^b y\bar{y} dx = \bar{\lambda} \int_a^b y(x) dx \int_a^b K(x, s)\bar{y}(s) ds, \\ \int_a^b |y(x)|^2 dx &= \int_a^b \bar{y}y dx = \lambda \int_a^b \bar{y}(x) dx \int_a^b K(x, s)y(s) ds. \end{aligned} \quad (1.8.17)$$

Во втором интеграле поменяем местами переменные x и s :

$$\int_a^b |y(x)|^2 dx = \lambda \int_a^b y(x) dx \int_a^b K(s, x)\bar{y}(s) ds. \quad (1.8.18)$$

Ядро $K(x, s)$ симметрично, поэтому двойные интегралы справа равны между собой. Разделив (1.8.17) на $\bar{\lambda}$, а (1.8.18) на λ и вычитая равенства друг из друга, получаем

$$\left(\frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\lambda}\right) \int_a^b |y(x)|^2 dx = 0.$$

Если $\bar{\lambda} \neq \lambda$, то $y(x) \equiv 0$, а это противоречит предположению о том, что $y(x)$ — собственная функция ядра $K(x, s)$. Таким образом $\bar{\lambda} = \lambda$, $v = 0$ и λ может быть только действительным числом. $\square$

2. Пусть действительному собственному значению λ соответствует комплексная собственная функция $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ вещественны. Тогда

$$y_1(x) + iy_2(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) [y_1(s) + iy_2(s)] ds,$$

откуда

$$y_1(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y_1(s) ds, \quad y_2(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y_2(s) ds$$

и, таким образом, нахождение комплексной собственной функции $y(x)$ сводится к решению уравнения (1.8.16) для вещественных функций. $\square$

Теорема 2.2 (без доказательства). *Если $K(x, s)$ непрерывно и $K(x, s) \not\equiv 0$, то норма оператора Фредгольма отлична от нуля.*

Запишем уравнение (1.8.16) в форме

$$y = \lambda Ay, \quad \text{где} \quad Ay = \int_a^b K(x, s) y(s) ds. \quad (1.8.19)$$

Оператор Фредгольма A симметричен:

$$\begin{aligned} (y, Az) &= \int_a^b y(x) \left[\int_a^b K(x, s) z(s) ds \right] dx = \\ &= \int_a^b z(s) \left[\int_a^b K(x, s) y(x) dx \right] ds = \\ &= \int_a^b z(s) \left[\int_a^b K(s, x) y(x) dx \right] ds = (z, Ay). \end{aligned} \quad (1.8.20)$$

Теорема 2.3 (без доказательства). *Существует конечная или бесконечная последовательность линейно независимых собственных функций и соответствующих собственных значений ядра $K(x, s)$.*

Теорема 2.4. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Всю систему собственных функций можно ортонормировать так, чтобы были выполнены соотношения

$$\int_a^b y_i(x)y_j(x) dx = 0 \quad (i \neq j), \quad \int_a^b y_i^2(x) dx = 1.$$

Доказательство. Запишем выражения для оператора Фредгольма (1.8.19) для двух собственных функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$$Ay_1 = \frac{1}{\lambda_1}y_1, \\ Ay_2 = \frac{1}{\lambda_2}y_2.$$

Скалярное произведение в описываемом пространстве имеет вид

$$(y_1, y_2) = \int_a^b y_1(x)y_2(x) dx. \quad (1.8.21)$$

Домножим скалярно первое равенство на y_2 , второе на y_1 и вычтем второе равенство из первого:

$$(y_2, Ay_1) - (y_1, Ay_2) = \frac{1}{\lambda_1}(y_1, y_2) - \frac{1}{\lambda_2}(y_2, y_1).$$

Поскольку оператор Фредгольма симметричен, левая часть равенства обращается в нуль. Из симметричности скалярного произведения следует, что

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)(y_1, y_2) = 0.$$

Таким образом, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(y_1, y_2) = 0$.

Из линейности уравнения (1.8.16) следует, что собственная функция $y(x)$ определена с точностью до произвольного множителя, который всегда можно выбрать так, чтобы система собственных функций была ортонормированной:

$$(y_m, y_n) \equiv \int_a^b y_m(x)y_n(x) dx = \delta_n^m. \quad (1.8.22)$$

Замечание 2.1. В дальнейшем будем считать, что система собственных функций приведена к ортонормированному виду.

Теорема 2.5. *Каково бы ни было $L > 0$, может существовать лишь конечное число собственных значений, удовлетворяющих неравенству $|\lambda| < L$. Если число собственных значений бесконечно и их расположить в порядке возрастания абсолютной величины*

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots,$$

$$\text{то } \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty.$$

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Пусть имеется бесконечное число собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ таких, что $|\lambda| < L$, и отвечающих им собственных функций $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$. Вообще говоря, система функций y_n не ортогональна: $(y_i \neq y_j)$, если $\lambda_i = \lambda_j$ ².

Для доказательства теоремы применим *метод Грама – Шмидта* (Приложение, 1.7.5), который позволяет заменить систему линейно независимых функций, отвечающих одному и тому же значению λ , ортогональной системой функций. Сохраним для новых функций те же обозначения. Теперь $(y_i, y_j) = 0$, если $i \neq j$, и $\|y_i\| = 1$.

Далее:

$$\|Ay_i - Ay_j\|^2 = \left\| \frac{1}{\lambda_i} y_i - \frac{1}{\lambda_j} y_j \right\|^2 = \left(\frac{1}{\lambda_i} y_i - \frac{1}{\lambda_j} y_j, \frac{1}{\lambda_i} y_i - \frac{1}{\lambda_j} y_j \right) = \frac{1}{\lambda_i^2} + \frac{1}{\lambda_j^2} > \frac{2}{L^2}.$$

С другой стороны, в силу непрерывности оператора A из последовательности Ay_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (обозначим ее снова Ay_n), а всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall m > 0, n > N$ выполняется $\|Ay_n - Ay_{n+m}\| < \varepsilon$.

Выбирая $\varepsilon^2 = 2/L^2$, приходим к противоречию.

Теорема 2.6. *Каждому отличному от нуля собственному значению отвечает лишь конечное число линейно независимых собственных функций.*

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$ — собственное значение. Положим в теореме 2.5 $L = |\lambda|$.

Определение 2.3. *Рангом* собственного значения называется максимальное число отвечающих ему линейно независимых собственных векторов.

Теорема (альтернативная формулировка). *Каждое собственное значение оператора Фредгольма, отличное от нуля, имеет конечный ранг.*

²Выше (теорема 2.4) мы доказали ортогональность собственных функций, соответствующих различным собственным значениям.

1.8.2.2. Определение собственных значений и собственных функций

Пусть найдены собственная функция $y_1(x)$ ядра $K(x, s)$ и соответствующее собственное значение λ_1 . Как найти другие собственные функции?

Теорема 2.7. *Если $y_1(x)$ — собственная функция ядра $K(x, s)$ и λ_1 — соответствующее собственное значение, то ядро*

$$K^{(2)}(x, s) = K(x, s) - \frac{y_1(x)y_1(s)}{\lambda_1}$$

имеет те же собственные значения и собственные функции, что и ядро $K(x, s)$, кроме λ_1 и $y_1(x)$.

Доказательство. *Этап 1.* Пусть $y_2(x)$ и λ_2 — собственная функция и собственное значение ядра $K^{(2)}(x, s)$. Покажем, что y_2 ортогональна y_1 .

Введем оператор

$$\begin{aligned} A^{(2)}y &= \int_a^b K^{(2)}(x, s)y(s) ds = \\ &= \int_a^b \left[K(x, s) - \frac{y_1(x)y_1(s)}{\lambda_1} \right] y(s) ds = Ay - \frac{y_1(y_1, y)}{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Из симметричности ядра $K^{(2)}(x, s)$ следует симметричность оператора $A^{(2)}$. Собственные функции мы считаем ортонормированными, тогда $(y_1, y_1) = 1$ и

$$\begin{aligned} (y_1, y_2) &= (y_1, \lambda_2 A^{(2)}y_2) = \lambda_2 (A^{(2)}y_1, y_2) = \\ &= \lambda_2 \left(Ay_1 - \frac{y_1(y_1, y_1)}{\lambda_1}, y_2 \right) = \lambda_2 \left(\frac{y_1}{\lambda_1} - \frac{y_1}{\lambda_1}, y_2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, $(y_1, y_2) = 0$.

Этап 2. Докажем, что $y_2(x)$ является собственной функцией ядра $K(x, s)$.

Действительно,

$$y_2 = \lambda_2 A^{(2)}y_2 = \lambda_2 \left[Ay_2 - \frac{y_1(y_2, y_1)}{\lambda_1} \right].$$

Последнее слагаемое равно нулю в силу только что доказанной ортогональности $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Тогда $y_2 = \lambda_2 Ay_2$.

Этап 3. Докажем, что всякая собственная функция $y(x)$ ядра $K(x, s)$, кроме $y_1(x)$, является собственной функцией ядра $K^{(2)}(x, s)$.

Пусть $\tilde{y} = \tilde{\lambda} A \tilde{y}$. Рассмотрим равенство

$$A^{(2)} \tilde{y} = A \tilde{y} - \frac{y_1(\tilde{y}, y_1)}{\lambda_1} = \frac{\tilde{y}}{\tilde{\lambda}} - \frac{y_1}{\lambda_1}(\tilde{y}, y_1).$$

Если $\tilde{y}(x)$ совпадает с $y_1(x)$, а $\tilde{\lambda}$ соответственно с λ_1 , то правая часть равенства обращается в нуль. Поэтому $A^{(2)} \tilde{y} = 0$ и, следовательно, $\tilde{y}(x)$ не является собственной функцией ядра $K^{(2)}(x, s)$.

Если же $\tilde{y}(x)$ не совпадает с $y_1(x)$, то $(\tilde{y}, y_1) = 0$. Тогда $A^{(2)} \tilde{y} = \tilde{y}/\tilde{\lambda}$ и $\tilde{y}$ является собственной функцией ядра $K^{(2)}(x, s)$.

Следствие 2.1. Если $y_1, \dots, y_n$ — собственные функции ядра $K(x, s)$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — соответствующие собственные значения, то ядро

$$K^{(n+1)}(x, s) = K(x, s) - \sum_{i=1}^n \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i}$$

имеет те же собственные функции и собственные значения, что и ядро $K(x, s)$, за исключением $y_1, \dots, y_n$.

Утверждение доказывается применением теоремы 2.7 n раз.

Пусть найдены n собственных функций ядра $K(x, s)$, где $n \geq 1$. Строим по рассмотренному алгоритму ядро $K^{(n+1)}(x, s)$. Если $K^{(n+1)}(x, s) \not\equiv 0$, то существует собственная функция $y_{n+1}(x)$ ядра $K^{(n+1)}(x, s)$. Эта функция $y_{n+1}(x)$ будет по доказанному являться и собственной функцией ядра $K(x, s)$, ортогональной ко всем $y_1(x), \dots, y_n(x)$. Таким образом, будут найдены уже $n + 1$ собственная функция.

Этот процесс либо продолжается бесконечно, и возможно определить любое нужное число собственных функций, либо прерывается на некотором m -м шаге, когда

$$K^{(m+1)}(x, s) = K(x, s) - \sum_{i=1}^m \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i} \equiv 0.$$

В этом случае ядро $K(x, s)$ является вырожденным.

1.8.2.3. Вырожденные ядра

Определение 2.4. Ядро $K(x, s)$, представимое конечной суммой вида

$$K(x, s) = \sum_{n=1}^N \Omega_n(x) \omega_n(s) \quad (1.8.23)$$

называется **вырожденным ядром**.

Теорема 2.8. *Вырожденное ядро имеет конечное число (в общем случае, возможно, и нуль) собственных значений.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение Фредгольма (1.8.16) с вырожденным ядром вида (1.8.23):

$$y(x) = \lambda \int_a^b \sum_{n=1}^N \Omega_n(x) \omega_n(s) y(s) ds = \lambda \sum_{n=1}^N \Omega_n(x) C_n, \quad (1.8.24)$$

где

$$C_n = \int_a^b \omega_n(s) y(s) ds. \quad (1.8.25)$$

Подставим $y(x)$ в виде суммы (1.8.24) в (1.8.25):

$$C_m = \int_a^b \omega_m(s) \left[\lambda \sum_{n=1}^N \Omega_n(s) C_n \right] ds = \lambda \sum_{n=1}^N C_n P_{nm}, \quad (1.8.26)$$

где

$$P_{nm} = \int_0^\pi \Omega_n(s) \omega_m(s) ds.$$

Получена система однородных алгебраических уравнений (1.8.26) относительно C_m . Нетривиальное решение системы возможно, если

$$\det |\delta_m^n - \lambda P_{nm}| = 0. \quad (1.8.27)$$

Это соотношение является алгебраическим уравнением N -й степени относительно λ . Как известно, оно имеет не более N различных корней.

Замечание 2.1. Утверждение теоремы справедливо как для симметричных, так и для несимметричных ядер. В последнем случае собственные значения, определяемые из (1.8.27), и собственные функции могут, вообще говоря, оказаться комплексными.

Замечание 2.2. В случае вырожденного ядра собственные функции могут быть определены путем решения системы алгебраических уравнений (1.8.26), в которой λ найдено из (1.8.27), с последующей подстановкой полученных значений C_m и λ в правую часть (1.8.24).

Пример 2.1. Решить интегральное уравнение с вырожденным ядром и определить спектр ядра:

$$y(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 + s^2) y(s) ds. \quad (1.8.28)$$

1.8.2.3.1. Первый способ (как для симметричных, так и для несимметричных ядер)

Ядро уравнения является симметричным и вырожденным, т. е. представимым в виде (1.8.23), причем

$$N = 2, \quad \Omega_1(x) = x^2, \quad \Omega_2(x) = 1, \quad \omega_1(s) = 1, \quad \omega_2(s) = s^2.$$

Будем искать решение в форме (1.8.24):

$$y(x) = \lambda \sum_{n=1}^N \Omega_n(x) C_n,$$

где коэффициенты C_m определяются из системы (1.8.26):

$$C_m = \lambda \sum_{n=1}^N C_n P_{nm}.$$

Для этого сначала найдем коэффициенты $P_{nm} = \int_a^b \Omega_n(s) \omega_m(s) ds$:

$$\begin{aligned} P_{11} &= \int_0^1 s^2 \cdot 1 ds = \frac{1}{3}; & P_{12} &= \int_0^1 s^2 \cdot s^2 ds = \frac{1}{5}; \\ P_{21} &= \int_0^1 1 \cdot 1 ds = 1; & P_{22} &= \int_0^1 1 \cdot s^2 ds = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Теперь решим систему

$$\begin{cases} C_1 = \lambda (C_1 P_{11} + C_2 P_{21}) = \lambda \left(\frac{1}{3} C_1 + 1 \cdot C_2 \right); \\ C_2 = \lambda (C_1 P_{12} + C_2 P_{22}) = \lambda \left(\frac{1}{5} C_1 + \frac{1}{3} C_2 \right) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) C_1 - \lambda C_2 = 0; \\ \frac{\lambda}{5} C_1 - \left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) C_2 = 0. \end{cases} \quad (1.8.29)$$

Нетривиальное решение этой системы алгебраических уравнений существует, если определитель системы

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{3} & -\lambda \\ \frac{\lambda}{5} & -\left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \frac{3}{4}(-5 \pm 3\sqrt{5})$. Спектр ядра найден.

Пусть $C_1 = q$, тогда из первого уравнения алгебраической системы следует, что $C_2^{(1,2)} = q \frac{3 - \lambda}{3\lambda}$. Отсюда

$$y_{1,2} = q\lambda_{1,2} \left(1 \cdot x^2 + \frac{3 - \lambda_{1,2}}{3\lambda_{1,2}} \cdot 1 \right) = q \left(\lambda_{1,2}x^2 + \frac{3 - \lambda_{1,2}}{3} \right).$$

или, после подстановки значений $\lambda_{1,2}$ и упрощения выражений,

$$y_{1,2}(x) = \frac{3}{4}q \left[\left(\pm 3\sqrt{5} - 5 \right) x^2 \mp \sqrt{5} + 3 \right].$$

Подстановка полученных значений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в уравнение (1.8.28) показывает, что эти функции являются его решениями. При этом

$$\int_0^1 y_1(x)y_2(x) dx = 0,$$

т. е. функции ортогональны. Произвольный множитель q можно определить из условия ортонормированности функций

$$\int_0^1 y_1^2(x) dx = 1.$$

1.8.2.3.2. Второй способ (только для симметричных ядер)

Из формулы

$$y(x) = \lambda \sum_{n=1}^N \Omega_n(x) C_n$$

следует, что решение можно искать в виде $y(x) = C_1x^2 + C_2$. Подставив это выражение в (1.8.28) и приведя подобные, получаем

$$x^2 \left(-\frac{C_1\lambda}{3} + C_1 - C_2\lambda \right) - \frac{C_1\lambda}{5} - \frac{C_2\lambda}{3} + C_2 = 0$$

Это равенство должно выполняться для всех $x \in [0, 1]$, поэтому коэффициенты при каждой степени x следует приравнять к нулю, что снова дает систему (1.8.29).

Можно рассуждать и иначе: выразим из каждого коэффициента при степени x C_2 через C_1 и приравняем эти значения:

$$\frac{(3 - \lambda)}{3\lambda} C_1 = \frac{3\lambda}{5(3 - \lambda)} C_1.$$

Очевидно, что, решив квадратное уравнение, получим тот же результат для спектра ядра $\lambda_{1,2}$.

Снова обозначив C_1 через q

$$y_{1,2}(x) = qx^2 + \frac{(3 - \lambda_{1,2})}{3\lambda_{1,2}} q,$$

после подстановки значений $\lambda_{1,2}$ приходим к полученному ранее решению.

Теорема 2.9. *Если симметричное ядро $K(x, s)$ имеет конечное число собственных значений, то оно вырождено.*

Доказательство. Как следует из теоремы 2.6, ранг каждого собственного значения симметричного ядра $K(x, s)$ конечен. Следовательно, число независимых собственных функций также конечно.

Пусть $y_1, \dots, y_n$ — совокупность всех линейно независимых собственных функций, приведенная к ортономированному виду, а $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — соответствующие собственные значения (некоторые из них могут совпадать). Рассмотрим ядро

$$H(x, s) = K(x, s) - \sum_{i=1}^n \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i}.$$

Будем предполагать, что $H \not\equiv 0$, тогда у этого ядра должна быть собственная функция $y_{n+1}(x)$. Она, как доказано выше, ортогональна всем $y_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ и является собственной функцией ядра $K(x, s)$.

Так как по условию $y_1, \dots, y_n$ — совокупность всех линейно независимых собственных функций ядра $K(x, s)$, то $y_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x)$. Учитывая, что $(y_{n+1}, y_i) = 0$, $i = \overline{1, n}$, получим

$$\|y_{n+1}\|^2 = (y_{n+1}, y_{n+1}) = \left(y_{n+1}, \sum_{i=1}^n c_i y_i(x) \right) = \sum_{i=1}^n c_i (y_{n+1}, y_i) = 0.$$

Соотношение $\|y_{n+1}\|^2 = 0$ противоречит тому, что $y_{n+1}(x)$ — собственная функция ядра $K(x, s)$. Полученное противоречие доказывает, что $H(x, s) = 0$ и, следовательно, ядро

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^n \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i}$$

является вырожденным.

1.8.2.4. Разложение в ряды по собственным функциям

Определение 2.5. Будем обозначать через $h[a, b]$ бесконечномерное линейное пространство, элементами которого являются заданные на сегменте $[a, b]$ непрерывные функции, а скалярное произведение задается как (1.8.21).

Доказано, что существует ортонормированная последовательность собственных функций однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Таким образом, для любой $f(x) \in h[a, b]$ можно построить ряд Фурье по этим собственным функциям. При каких условиях построенный ряд Фурье будет сходиться к функции $f(x)$?

Определение 2.6. Будем говорить, что непрерывная функция $f(x)$ *представима через ядро* $K(x, s)$, если существует непрерывная на $[a, b]$ функция $h(x)$ такая, что

$$f(x) = \int_a^b K(x, s)h(s) ds \quad (1.8.30)$$

или, в операторной форме,

$$f = Ah. \quad (1.8.31)$$

Теорема 2.10 (теорема Гильберта – Шмидта, без доказательства). *Если $f(x)$ представима через симметричное ядро $K(x, s)$, то она может быть разложена в ряд*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i y_i(x), \quad f_i = \int_a^b f(x) y_i(x) dx, \quad (1.8.32)$$

причем ряд (1.8.32) сходится на $[a, b]$ к $f(x)$ абсолютно и равномерно.

1.8.3. Повторные (итерированные) ядра

1.8.3.1. Определения и теоремы

Применим оператор Фредгольма

$$Ay = \int_a^b K(x, s)y(s) ds \quad (1.8.33)$$

повторно, т.е. рассмотрим операторы $A^2y, \dots, A^ny, \dots$. Покажем, что для оператора порядка n можно задать интегральное представление, аналогичное

(1.8.33):

$$A^n y = \int_a^b K_n(x, s) y(s) ds, \quad (1.8.34)$$

где $K_n(x, s)$ — повторное ядро порядка n .

Выразим повторное ядро $K_n(x, s)$ через основное ядро $K_1(x, s) \equiv K(x, s)$. Пусть $Ay = z$, тогда

$$\begin{aligned} A^2 y = Az &= \int_a^b K(x, s) z(s) ds = \int_a^b K(x, s) \left[\int_a^b K(s, t) y(t) dt \right] ds = \\ &= \int_a^b y(t) \left[\int_a^b K(x, s) K(s, t) ds \right] dt = \int_a^b K_2(x, t) y(t) dt \end{aligned}$$

и, окончательно,

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t) K(t, s) dt. \quad (1.8.35)$$

Теорема 3.1. Для повторных ядер справедливо соотношение

$$K_m(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_{m-1}(t, s) dt, \quad m = 2, 3, \dots \quad (1.8.36)$$

Теорема легко доказывается по индукции, проделайте это самостоятельно.

Теорема 3.2. Если ядро $K(x, s)$ удовлетворяет условиям 1.8.2.1, то этими же свойствами обладает повторное ядро любого порядка.

Симметрия.

$$K_2(s, x) = \int_a^b K(s, t) K(t, x) dt = \int_a^b K(t, s) K(x, t) dt = K_2(x, s).$$

Для ядер $K_n(x, s)$ симметрия доказывается по индукции. Пусть ядра

$K_n(x, s)$, $n = 2, \dots, p$ симметричны. Воспользовавшись (1.8.36), получаем

$$\begin{aligned}
 K_{p+1}(s, x) &= \int_a^b K(s, t) K_p(t, x) dt = \int_a^b K(s, t) K_p(x, t) dt = \\
 &= \int_a^b K(s, t) dt \int_a^b K(x, \xi) K_{p-1}(\xi, t) d\xi = \\
 &= \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(s, t) K_{p-1}(t, \xi) dt = \int_a^b K(x, \xi) K_p(s, \xi) d\xi = \\
 &= \int_a^b K(x, \xi) K_p(\xi, s) d\xi = K_{p+1}(x, s).
 \end{aligned}$$

Непрерывность и вещественность ядра $K_n(x, s)$ также доказываются по индукции.

$K_n(x, s) \not\equiv 0$. Допустим противное. Пусть $K_i(x, s) \not\equiv 0$ для $i = \overline{1, n-1}$, а $K_n(x, s) \equiv 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда n четно, т. е. $n = 2m$:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b K_{2m}(x, s) y(s) ds &= A^{2m} y = A^m (A^m y) = \\
 &= \int_a^b K_m(x, t) dt \int_a^b K_m(t, s) y(s) ds = \int_a^b \left[\int_a^b K_m(x, t) K_m(t, s) dt \right] y(s) ds,
 \end{aligned}$$

откуда

$$K_{2m}(x, s) = \int_a^b K_m(x, t) K_m(t, s) dt.$$

Полагая $s = x$, получим

$$K_{2m}(s, s) = \int_a^b K_m^2(x, t) dt.$$

По сделанному предположению $K_{2m}(x, x) \equiv 0$ при любых $x \in [a, b]$, тогда и $K_m(x, t) \equiv 0$, что приводит к противоречию.

Пусть теперь n нечетно: $n = 2m - 1$, $K_i(x, s) \not\equiv 0$ для $i = \overline{1, n-1}$, а $K_n(x, s) \equiv 0$. Тогда

$$K_{n+1}(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_n(t, s) dt \equiv 0.$$

В то же время $n+1 = 2m$ есть четный номер, и по доказанному $K_{n+1}(x, s) \not\equiv 0$.

1.8.3.2. Разложение повторного ядра по собственным функциям

Из равенства (1.8.36) вытекает, что ядро $K_n(x, s)$ как функция x представимо через ядро $K(x, s)$, а роль $h(t)$ играет $K_{n-1}(t, s)$ как функция t . Поэтому по теореме Гильберта – Шмидта для $K_n(x, s)$ справедливо представление (1.8.32), которое запишем в виде

$$K_n(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_a^b K_n(t, s) y_i(t) dt \right] y_i(x). \quad (1.8.37)$$

Выражение в квадратных скобках, т. е. $\int_a^b K_n(t, s) y_i(t) dt$, есть коэффициент Фурье.

Далее, по свойству оператора Фредгольма

$$y_i = \lambda_i A y_i = \lambda_i A (\lambda_i A y_i) = \lambda_i^2 A^2 y_i = \dots = \lambda_i^n A^n y_i,$$

откуда

$$\int_a^b K_n(t, s) y_i(t) dt = \frac{y_i(s)}{\lambda_i^n}.$$

Подставляя теперь $\frac{y_i(s)}{\lambda_i^n}$ в (1.8.37), получаем

$$K_n(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i(x) y_i(s)}{\lambda_i^n}. \quad (1.8.38)$$

Теорема 3.3. При $n \geq 2$ справедливо разложение (1.8.38), причем ряд сходится абсолютно и равномерно по совокупности аргументов.

Абсолютная сходимость ряда (1.8.38) и его равномерная сходимость по каждому аргументу, если другой аргумент фиксирован, следуют из теоремы Гильберта – Шмидта. Чтобы доказать равномерную сходимость по совокупности аргументов, воспользуемся критерием Коши. Легко видеть, что

$$\sum_{i=p}^{p+m} \frac{|y_i(x)| |y_i(s)|}{|\lambda_i|^n} \leq \sqrt{\sum_{i=p}^{p+m} \frac{y_i^2(x)}{|\lambda_i|^n}} \cdot \sqrt{\sum_{i=p}^{p+m} \frac{y_i^2(s)}{|\lambda_i|^n}}. \quad (1.8.39)$$

Так как $n \geq 2$, а $|\lambda_i| \rightarrow \infty$, то члены ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i^2(x)}{|\lambda_i|^n} \quad (1.8.40)$$

начиная с достаточно большого номера i мажорируются членами ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i^2(x)}{\lambda_i^2}, \quad (1.8.41)$$

сходящегося в силу уже доказанного к $K_2(x, x)$.

Воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 3.4 (теорема Дини о равномерной сходимости функционального ряда). *Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ — неотрицательные и непрерывные функции и ряд сходится к непрерывной функции, то он сходится равномерно.*

Поскольку $K_2(x, x)$ является непрерывной функцией, а члены ряда (1.8.41) неотрицательны, то в силу теоремы Дини ряд сходится равномерно. Следовательно, мажорируемый им ряд (1.8.40) также сходится равномерно. Тогда в силу необходимости критерия Коши для этого ряда получим, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=p}^{p+m} \frac{y_i^2(x)}{|\lambda_i|^n} < \varepsilon, \quad x \in [a, b],$$

если только $p > N(\varepsilon)$, $m > 0$. Из неравенства (1.8.39) следует, что

$$\sum_{i=p}^{p+m} \frac{|y_i(x)| |y_i(s)|}{|\lambda_i|^n} \leq \varepsilon$$

при $p > N(\varepsilon)$, $m > 0$, $x \in [a, b]$, $s \in [a, b]$, т. е. ряд (1.8.38) сходится абсолютно и равномерно по совокупности аргументов.

1.8.4. Неоднородное уравнение Фредгольма с симметричным ядром. Резольвента

Рассмотрим неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds + f(x), \quad (1.8.42)$$

где ядро $K(x, s)$ при $x, s \in [a, b]$ удовлетворяет условиям (1.8.2.1):

1. $K(x, s)$ — вещественная функция.
2. $K(x, s) \not\equiv 0$.
3. $K(x, s)$ — непрерывная функция по совокупности аргументов.
4. $K(x, s)$ — симметричное ядро, т. е. $K(x, s) = K(s, x)$,

функция $f(x)$ является вещественной и непрерывной на $[a, b]$, λ — заданное число. Исследуем вопрос существования решения уравнения (1.8.42).

Допустим, что решение существует. Положим $g(x) = y(x) - f(x)$, тогда уравнение (1.8.42) в операторной форме запишется как

$$g = \lambda Ay, \quad (1.8.43)$$

где A — оператор Фредгольма с ядром $K(x, s)$.

Таким образом, функция $g(x)$ представима через ядро $K(x, s)$. Следовательно, по теореме Гильберта – Шмидта функция $g(x)$ может быть разложена в ряд

$$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m y_m(x),$$

где $y_m(x)$ — собственные функции ядра $K(x, s)$, а $g_m = (g, y_m)$ — коэффициенты Фурье.

Замечание 4.1. Если ядро имеет конечное число собственных функций, то $g(x)$ представляется конечной суммой.

Из условий (1.8.2.1), которым удовлетворяет ядро, и из (1.8.43) следует, что

$$\begin{aligned} g_m = (g, y_m) &= (\lambda Ay, y_m) = \lambda (Ay, y_m) = \lambda (y, Ay_m) = \\ &= \lambda \frac{(y, y_m)}{\lambda_m} = \lambda \frac{(f + g, y_m)}{\lambda_m} = \lambda \frac{f_m + g_m}{\lambda_m}, \end{aligned}$$

где

$$f_m = (f, y_m) = \int_a^b f(s)y_m(s) ds. \quad (1.8.44)$$

Таким образом, если решение $y(x)$ существует, то

$$y(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m y_m(x), \quad (1.8.45)$$

где

$$g_m = \lambda \frac{f_m + g_m}{\lambda_m}. \quad (1.8.46)$$

Рассмотрим два случая.

1. $\lambda \neq \lambda_m$, т. е. параметр λ не совпадает ни с одним собственным значением ядра $K(x, s)$.

Из формулы (1.8.46) следует, что $g_m = \frac{\lambda f_m}{\lambda_m - \lambda}$ и

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m y_m(x)}{\lambda_m - \lambda}. \quad (1.8.47)$$

Если ядро не вырождено и, следовательно, собственных функций бесконечно много, ряд в правой части (1.8.47) сходится равномерно. Действительно, в этом случае $\lim_{m \rightarrow \infty} |\lambda_m| = \infty$ и, таким образом, при достаточно больших m справедливо

$$\frac{1}{|\lambda_m - \lambda|} \leq \frac{2}{|\lambda_m|}. \quad (1.8.48)$$

Повторные ядра представимы в виде (1.8.38):

$$K_n(x, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m(x)y_m(s)}{\lambda_m^n},$$

тогда

$$K_1(x, s) \equiv K(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_m(x)y_m(s)}{\lambda_m}.$$

Домножим левую и правую части равенства скалярно на $f(s)$:

$$\int_a^b K(x, s)f(s) ds = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m(x)}{\lambda_m} \int_a^b y_m(s)f(s) ds = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m y_m(x)}{\lambda_m}$$

(интегрировать ряд почленно имеем право, так как согласно теореме 3.3 ряд сходится равномерно и абсолютно) или

$$2 \int_a^b K(x, s) f(s) ds = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m y_m(x)}{\lambda_m} \cdot 2, \quad (1.8.49)$$

Члены функционального ряда $2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|f_m| |y_m(x)|}{|\lambda_m|}$ при достаточно больших m в силу (1.8.48) являются мажорирующими для членов ряда в (1.8.47). Следовательно, ряд сходится абсолютно и равномерно.

Осталось проверить, что (1.8.47) действительно является решением интегрального уравнения (1.8.42). Прodelайте это самостоятельно, подставив (1.8.47) в (1.8.42), а также поясните, почему этот ряд можно интегрировать почленно.

Полученное решение единственно. Действительно, пусть имеются два решения уравнения (1.8.42) и $\tilde{y}(x)$ — их разность. Тогда $\tilde{y}(x)$ удовлетворяет однородному уравнению $\tilde{y} = \lambda A \tilde{y}$. По предположению, λ не совпадает ни с одним собственным значением ядра $K(x, s)$, тогда однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение $\tilde{y}(x) \equiv 0$, и, следовательно, решение единственно.

Вернемся к решению (1.8.47) и преобразуем его:

$$\begin{aligned} y(x) &= f + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m y_m}{\lambda_m - \lambda} = f + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m y_m}{\lambda_m} \cdot \frac{\lambda_m}{\lambda_m - \lambda} = \\ &= f + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m y_m}{\lambda_m} \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_m - \lambda} \right) = \\ &= f + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m y_m}{\lambda_m} + \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m y_m}{\lambda_m (\lambda_m - \lambda)}. \end{aligned}$$

В силу соотношений (1.8.44) и (1.8.49) имеем далее

$$y(x) = f + \lambda \int_a^b K(x, s) f(s) ds + \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m}{\lambda_m (\lambda_m - \lambda)} \int_a^b y_m(s) f(s) ds.$$

Меняя местами суммирование и интегрирование (это возможно в силу равномерной сходимости ряда в последнем слагаемом), приходим к выражению для решения уравнения (1.8.42) в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds, \quad (1.8.50)$$

где

$$R(x, s, \lambda) = K(x, s) + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m(x)y_m(s)}{\lambda_m(\lambda_m - \lambda)}. \quad (1.8.51)$$

Функция $R(x, s, \lambda)$ называется *резольвентой* симметричного ядра $K(x, s)$.

2. $\lambda = \lambda_n$, т. е. параметр λ равен некоторому собственному значению ядра $K(x, s)$.

Пусть $y_{n_1}, \dots, y_{n_p}$ — собственные функции ядра, соответствующие собственным значениям λ_n (таким образом, ранг λ_n равен p).

Предположим, что решение (1.8.42) существует, тогда снова приходим к соотношению (1.8.46)

$$g_m = \lambda \frac{f_m + g_m}{\lambda_m}.$$

Если хотя бы один из коэффициентов $f_{n_i} \neq 0$ ($i = \overline{1, p}$), то при $m = n_i$ приходим к противоречию, следовательно, предположение о существовании решения исходного уравнения (1.8.42) ошибочно.

Пусть все $f_{n_i} = (f, y_{n_i}) = 0$ для $i = \overline{1, p}$. Тогда из (1.8.46) получаем, что значения коэффициентов g_{n_i} не определены, а остальные g_m определяются однозначно. Следовательно, если решение существует, то оно имеет вид

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^p C_i y_{n_i} + \lambda \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n_1, \dots, n_p}}^{\infty} \frac{f_m y_m(x)}{\lambda_m - \lambda}, \quad (1.8.52)$$

где C_i — некоторые константы.

Подстановкой можно проверить, что выражение

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n_1, \dots, n_p}}^{\infty} \frac{f_m y_m(x)}{\lambda_m - \lambda}$$

удовлетворяет неоднородному уравнению (1.8.42). Поскольку при любых C_i сумма $\sum_{i=1}^p C_i y_{n_i}$ удовлетворяет соответствующему однородному уравнению, то все выражение (1.8.52) удовлетворяет неоднородному уравнению (1.8.42).

Теорема 4.1 (альтернатива Фредгольма, случай симметричного ядра). Пусть ядро $K(x, s)$ удовлетворяет требованиям (1.8.2.1). Тогда если λ не совпадает ни с одним собственным значением ядра $K(x, s)$, то решение интегрального уравнения существует, единственно и представимо в виде (1.8.47) или (1.8.50).

Если $\lambda = \lambda_n$, где λ_n — некоторое собственное значение ядра $K(x, s)$ и функция $f(x)$ ортогональна всем собственным функциям, соответствующим λ_n , то решение уравнения (1.8.42) существует, не является единственным и представимо в виде (1.8.52).

Если же $\lambda = \lambda_n$ и $f(x)$ не ортогональна хотя бы одной собственной функции $y_{n_i}(x)$, то решения не существует.

1.8.5. Неоднородное уравнение Фредгольма с непрерывным ядром

Рассмотрим уравнение

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds, \quad (1.8.53)$$

ядро которого $K(x, s)$ при $x, s \in [a, b]$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $K(x, s)$ — вещественная функция;
2. $K(x, s) \not\equiv 0$;
3. $K(x, s)$ — непрерывная функция по совокупности аргументов,

но не обязательно является симметричным.

Предположим, что параметр λ удовлетворяет условию

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}, \quad M = \sup_{x, s \in [a, b]} |K(x, s)|, \quad (1.8.54)$$

аналогичному условию (1.5.23). Тогда уравнение можно решать, следуя принципу сжимающих отображений:

$$y_{n+1}(x) = \lambda A y_n(x) + f(x).$$

Положим $y_0 = f$, тогда

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda A f + f; \\ y_2 &= \lambda A(\lambda A f + f) + f = \lambda^2 A^2 f + \lambda A f + f; \\ &\vdots \\ y_n &= \sum_{m=1}^n \lambda^m A^m f + f. \end{aligned} \quad (1.8.55)$$

Но, как следует из равенства (1.8.34),

$$A^m f = \int_a^b K_m(x, s)f(s) ds,$$

где $K_m(x, s)$ — повторное ядро порядка m :

$$K_1(x, s) \equiv K(x, s); \quad K_{m+1}(x, s) = \int_a^b K(x, t)K_m(t, s) dt, \quad m = 2, 3, 4, \dots$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \sup |K_m(x, s)| &= \sup \left| \int_a^b K(x, t)K_{m-1}(t, s) dt \right| \leq \\ &\leq M(b-a) \sup |K_{m-1}(x, s)| \leq \dots \leq M^m(b-a)^{m-1}, \end{aligned}$$

ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s)$ равномерно сходится при $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$. Тогда в (1.8.55) можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ и поменять местами операции суммирования и интегрирования:

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m A^m f = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(x, s) f(s) ds = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds, \end{aligned} \quad (1.8.56)$$

где

$$R(x, s, \lambda) = K(x, s) + \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s) \quad (1.8.57)$$

есть резольвента ядра $K(x, s)$.

Покажем, что в случае, когда ядро симметрично и выполняется условие (1.8.54), выражения для резольвенты (1.8.57) и (1.8.51) эквивалентны. Действительно, в этом случае, согласно (1.8.38), для $m \geq 2$ справедливо представление

$$K_m(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i^m},$$

где $y_i(x)$ — собственные функции ядра. Подставим это выражение в (1.8.57).

$$\begin{aligned} R(x, s, \lambda) &= K(x, s) + \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^{m-1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i^m} = \\ &= K(x, s) + \sum_{i=1}^{\infty} y_i(x)y_i(s) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{\lambda_i^m} = \\ &= K(x, s) + \sum_{i=1}^{\infty} y_i(x)y_i(s) \frac{\lambda/\lambda_i^2}{1 - \lambda/\lambda_i} = K(x, s) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)}. \quad \boxtimes \end{aligned}$$

Замечание 5.1. Для каждого конкретного ряда область сходимости может оказаться шире, чем это определяется условием (1.8.54), которое является достаточным для сходимости ряда (1.8.57), но не необходимым.

Более того, понятие резольвенты как функции, с помощью которой решение интегрального уравнения (1.8.53) может быть найдено с помощью формулы (1.8.56), имеет смысл для любых значений λ , при которых уравнение имеет единственное решение.

Приведем теперь без доказательства более общую версию альтернативы Фредгольма. Детальный анализ смотрите в книге [10, гл. 5, §2, пункт 3].

Определение 5.1. Уравнение

$$y^0(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y^0(s) ds \quad (1.8.58)$$

называется **соответствующим (1.8.53) однородным уравнением**.

Уравнение

$$z(x) = \lambda \int_a^b K(s, x)z(s) ds \quad (1.8.59)$$

называется **союзным с ним уравнением**.

Теорема 5.1 (альтернатива Фредгольма, случай непрерывного ядра). Пусть ядро $K(x, s)$ удовлетворяет указанным требованиям. Тогда для каждого фиксированного значения λ :

- либо соответствующее (1.8.53) однородное уравнение (1.8.58) не имеет отличного от нуля решения, и тогда уравнение (1.8.53) всегда имеет, и притом единственное решение для любой функции $f(x)$;

- либо однородное уравнение (1.8.58) имеет отличные от нуля решения, и тогда как однородное уравнение (1.8.58), так и союзное с ним уравнение (1.8.59) имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений, в этом случае уравнение (1.8.53) не для любой $f(x)$ имеет решение.

В последнем случае для разрешимости неоднородного уравнения (1.8.53) необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была ортогональна ко всем решениям союзного с (1.8.58) уравнения (1.8.59), т. е.

$$\int_a^b f(x) z_i(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad (1.8.60)$$

где $z_i(x)$, $i = 1, \dots, p$ — все линейно независимые решения союзного с (1.8.58) однородного уравнения.

1.8.6. Коллекция формул

Интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода:

$$\int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x).$$

Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds.$$

Интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода:

$$\int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x).$$

Интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s) y(s) ds.$$

Повторные ядра

$$K_1(x, s) = K(x, s);$$

$$K_m(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_{m-1}(t, s) dt, \quad m = 2, 3, \dots$$

Разложение повторного ядра по собственным функциям:

$$K_n(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i(x)y_i(s)}{\lambda_i^n}.$$

Резольвента симметричного ядра $K(x, s)$:

$$R(x, s, \lambda) = K(x, s) + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m(x)y_m(s)}{\lambda_m(\lambda_m - \lambda)}.$$

Резольвента произвольного ядра $K(x, s)$:

$$R(x, s, \lambda) = K(x, s) + \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s),$$

где $K_m(x, s)$ — повторное ядро порядка m .

2.. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

2.1. Ряды и преобразования Фурье. Задачи

В этом разделе элементарные вычисления типа интегрирования по частям или разложения на простейшие дроби будем, как правило, опускать.

2.1.1. Ряды Фурье. Периодические и непериодические функции

Примеры решения задач

1.1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = e^{ax}$ ($a \neq 0$), $-\pi < x < \pi$.

Построим график функции $f(x) = e^{ax}$ ($a \neq 0$), $-\pi < x < \pi$ (рисунок 2.1.1) и представим ее в виде ряда Фурье (1.1.12)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

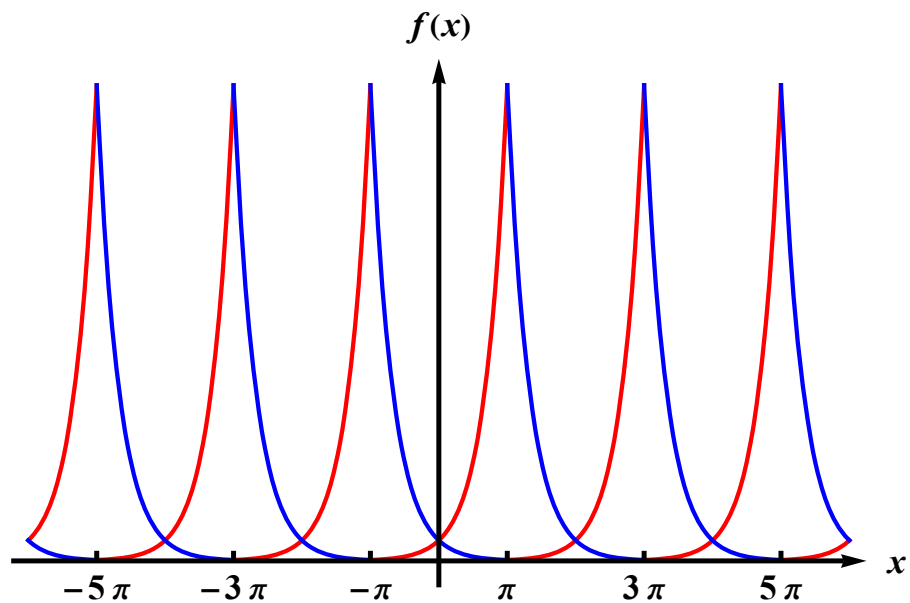


Рис. 2.1.1. К задаче 1.1. Красная линия — $a > 0$, синяя линия — $a < 0$

Коэффициенты ряда найдем по формулам Эйлера–Фурье (1.1.13).

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} dx = \frac{2 \operatorname{sh} a\pi}{a\pi}; \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos nx dx = \frac{2(-1)^n a \operatorname{sh} a\pi}{a^2 + n^2}; \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin nx dx = \frac{2(-n)(-1)^n \operatorname{sh} a\pi}{a^2 + n^2} \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$e^{ax} = \frac{2 \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} (a \cos nx - n \sin nx) \right].$$

Значения функции в точках разрыва:

$$f(\pm\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} = \frac{e^{-a\pi} + e^{a\pi}}{2} = \operatorname{ch} a\pi.$$

1.2. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & -2 < x < 0, \\ 2x - 3, & 0 < x < 2. \end{cases}$$

Найти $f(15)$.

Снова применим формулы Эйлера–Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (2x + 1) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 (2x - 3) dx = 4;$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (2x+1) \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 (2x+3) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\
&= \frac{4 \sin \pi n}{\pi n} = 0; \\
b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (2x+1) \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 (2x+3) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\
&= \frac{2(\pi n - (-1)^n 5\pi n)}{\pi^2 n^2}.
\end{aligned}$$

Значения функции в точках разрыва:

$$f(\pm\pi) = \frac{f(-2+0) + f(2-0)}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2.$$

Для нахождения $f(15)$ вычтем из 15 такое целое число периодов, чтобы результат принадлежал отрезку $[-2, 2]$: $f(15) = f(15 - 4 \cdot 4) = f(-1) = 2x + 1 \Big|_{x=-1} = -1$.

1.3. Разложить в ряд Фурье непериодическую функцию $f(x) = |x|$, $-2 < x < 2$.

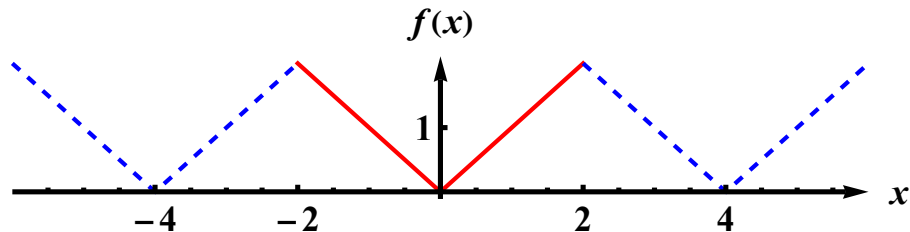


Рис. 2.1.2. К задаче 1.3

Продолжим функцию на всю числовую прямую (рисунок 2.1.2) и разложим в ряд Фурье как периодическую функцию. Коэффициенты находим

по формулам (1.1.20) при $L = 2$, причем, так как заданная функция четная, $b_n = 0$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2} \int_0^2 |x| dx = 2; \\ a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 |x| \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos \pi n - 1) = \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ -8/n^2\pi^2, & n = 2m - 1, \end{cases} \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$|x| = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2}.$$

Значения в крайних точках $f(\pm 2) = 2$.

Замечание 1.1. Полученное разложение имеет смысл только для $x \in [-2, 2]$. За пределами этого сегмента ряд Фурье будет сходиться к функции, график которой показан на рисунок 2.1.2 штриховой линией, но, разумеется, она не будет совпадать с функцией $|x|$.

1.4. Разложить в ряд Фурье по косинусам непериодическую функцию, заданную графически (рисунок 2.1.3).

Отразим функцию четным образом и найдем коэффициенты ряда Фурье (элементарные вычисления опускаем):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{7}{2}; \\ a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{2\pi} dx = \frac{2}{n\pi} \left(2 \sin \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{4n\pi}{3} \right); \\ b_n &= 0. \end{aligned}$$

1.5. Разложить в ряд Фурье по синусам непериодическую функцию $f(x) = x$, $0 < x < 1$.

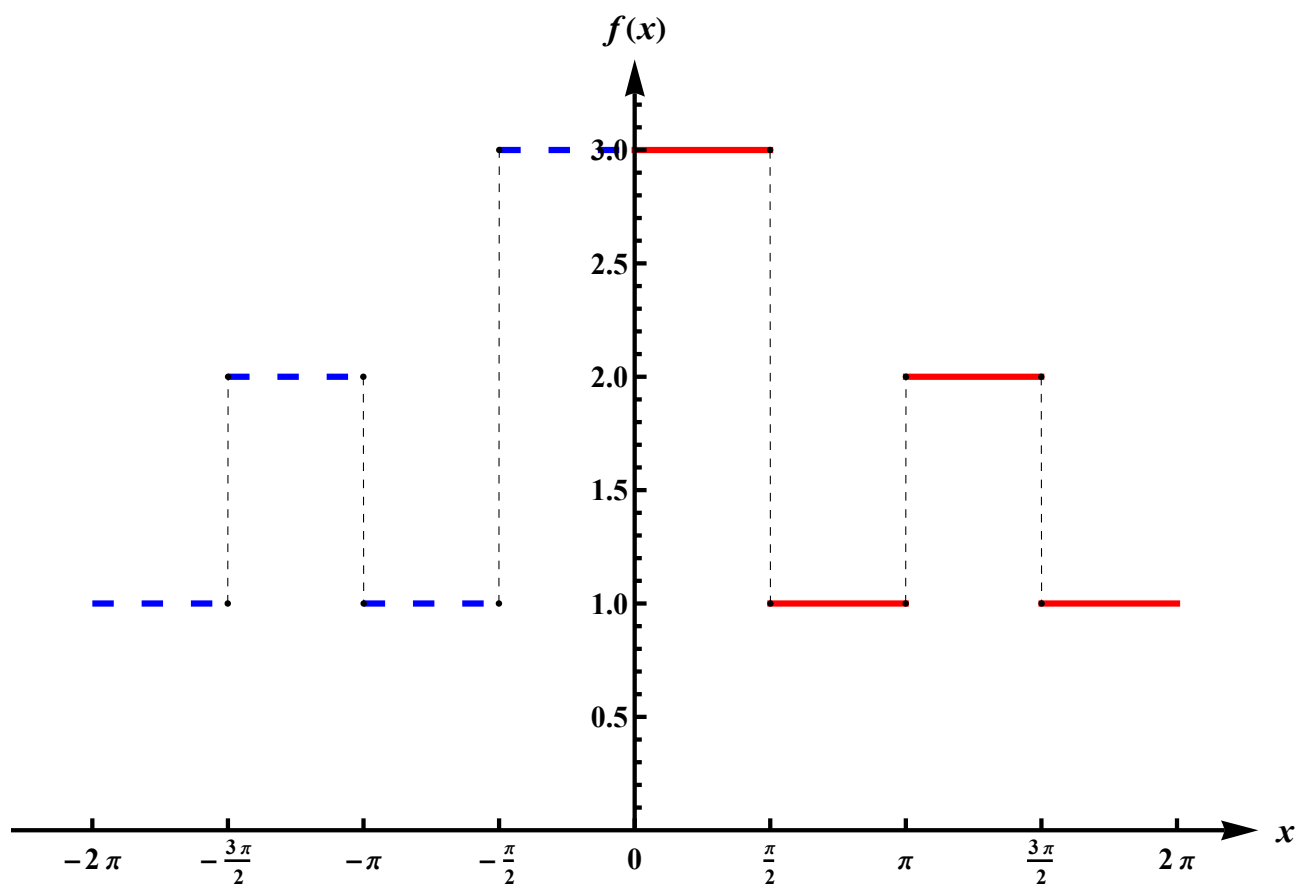


Рис. 2.1.3. К задаче 1.4. Красная линия — функция $f(x)$, синяя штриховая линия — ее отражение четным образом

Для разложения по синусам отражаем функцию нечетным образом, тогда $a_0 = a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{1} dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

1.6. Разложить в ряд Фурье функцию x^2

- а) на отрезке $[0, \pi]$ по синусам;
- б) на отрезке $[0, \pi]$ по косинусам;
- в) на отрезке $[-\pi, \pi]$.

При помощи полученного разложения вычислить суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

а) Для разложения по синусам отражаем функцию нечетным образом: $f(-x) = -x^2$.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{2}{n^2\pi} (-2 + (2 - n^2\pi^2)(-1)^n).$$

$$x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\pi}.$$

Объясните, каким образом разложение в ряд четной функции может содержать только нечетные слагаемые.

б) Для разложения по косинусам производим отражение четным образом.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{2}{n^3\pi} (2\pi n \cos \pi n + (n^2\pi^2 - 2) \sin \pi n) = \frac{4(-1)^n}{n^2};$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx. \quad (2.1.1)$$

в) Эту часть задачи решите самостоятельно.

Вычислим теперь суммы рядов с помощью разложения (2.1.1).
Положим $x = 0$, тогда

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos 0,$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \quad (2.1.2)$$

Пусть $x = \pi$:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos n\pi = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (2.1.3)$$

С другой стороны, при $x = \pi$ имеем, разбив ряд на сумму по четным и нечетным n ,

$$\begin{aligned} \pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos n\pi = \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{2k}}{(2k)^2} \cos 2k\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{2k-1}}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)\pi = \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{4} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{\pi^2}{8}. \quad (2.1.4)$$

Задания для самостоятельной работы

В каждой задаче, получив ответ, по возможности постройте в одной системе координат графики функции и частичной суммы ее ряда Фурье, взяв необходимое число слагаемых.

1.7. Разложить в ряд Фурье периодические функции:

а) $\cos ax$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $a \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

б) $f(x) = x - |x|, \quad -3 \leq x \leq 3.$

1.8. Разложить в ряд Фурье непериодические функции.

а) По косинусам: см. график на рисунке 2.1.4.

б) По синусам: $f(x) = x(3 - x), \quad 0 \leq x \leq 3.$

в) По косинусам: $f(x) = |\cos x|, \quad 0 < x < \pi.$

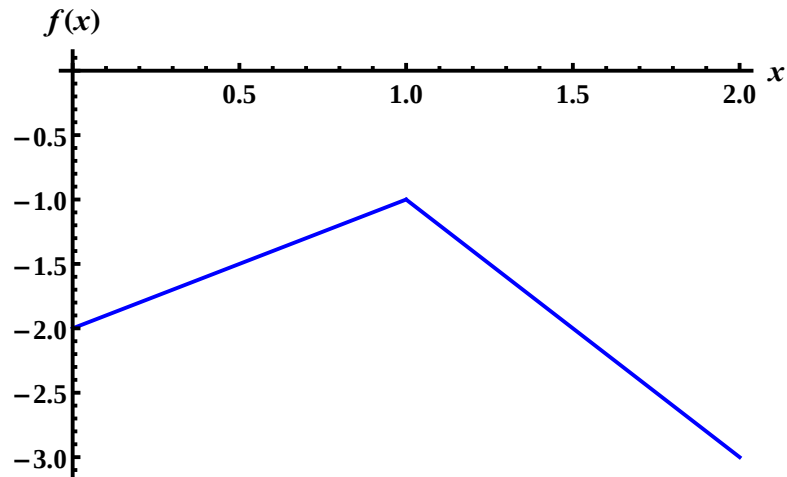


Рис. 2.1.4. К задаче 1.8, а

1.9. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

ОТВЕТЫ

1.7. Разложить в ряд Фурье периодические функции:

а) $\cos ax, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad a \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Ответ:
$$f(x) = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{a^2 - k^2}.$$

б) $f(x) = x - |x|, \quad -3 \leq x \leq 3.$

Ответ:
$$f(x) = -\frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6 [1 - (-1)^k]}{\pi^2 k^2} \cos \frac{k\pi x}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6(-1)^k}{\pi k} \sin \frac{k\pi x}{3}.$$

1.8. Разложить в ряд Фурье непериодические функции.

а) По косинусам:

Ответ:
$$f(x) = -\frac{7}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 [3 \cos \frac{\pi k}{2} - 2(-1)^k - 1]}{\pi^2 k^2} \cos \frac{k\pi x}{2}.$$

б) По синусам: $f(x) = x(3 - x), \quad 0 \leq x \leq 3.$

$$\text{Ответ: } f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{72}{\pi^3(2k-1)^3} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{3}.$$

в) По косинусам: $f(x) = |\cos x|, \quad 0 < x < \pi.$

$$\text{Ответ: } f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} \cos 2kx.$$

1.9. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x < \pi. \end{cases} **7$$

$$\text{Ответ: } f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin kx}{k}$$

2.1.2. Ряды Фурье. Разные задачи

Примеры решения задач

1.10. Доказать, что если кусочно-гладкая непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(x-\pi) = -f(x)$ для всех x , то $a_0 = 0$ и $a_{2n} = b_{2n} = 0$ для всех $n \geq 1$, и наоборот, если $a_0 = a_{2n} = b_{2n} = 0$, то $f(x-\pi) = -f(x)$.

Найдем a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx =$$

[в первом интеграле заменим x на $t - \pi$]

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t - \pi) d(t - \pi) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Для нахождения a_{2n} и b_{2n} действуем по той же схеме с учетом того, что

$$\begin{aligned} \cos 2n(t - \pi) &= \cos(2nt - 2n\pi) = \cos 2nt, \\ \sin 2n(t - \pi) &= \sin(2nt - 2n\pi) = \sin 2nt. \end{aligned}$$

Докажем обратное утверждение. Пусть $a_0 = a_{2n} = b_{2n} = 0$. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то по теореме о представимости функции в точке своим рядом Фурье имеем

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} \cos(2n-1)x + b_{2n-1} \sin(2n-1)x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(x - \pi) &= \sum_{n=1}^{\infty} [a_{2n-1} \cos(2n-1)(x - \pi) + b_{2n-1} \sin(2n-1)(x - \pi)] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-a_{2n-1} \cos(2n-1)x - b_{2n-1} \sin(2n-1)x) = -f(x). \quad \boxtimes \end{aligned}$$

1.11. Как следует продолжить интегрируемую на промежутке $[0, \frac{\pi}{2}]$ функцию $f(x)$ на промежуток $[-\pi, \pi]$, чтобы ее ряд Фурье имел вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1)x / \quad (2.1.5)$$

Пусть график функции имеет вид, указанный на рисунке 2.1.5, а. Поскольку $a_0 = a_{2n} = b_{2n} = 0$, то по доказанному в задаче 1.10 функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет равенству $f(x - \pi) = -f(x)$. Тогда на промежутке $[-\pi, -\pi/2]$ имеет место $f(x) = -f(x + \pi)$ (рисунок 2.1.5, б).

Далее, ряд (2.1.5) содержит только косинусы, следовательно, функция $f(x)$ должна быть четной. Это позволяет достроить график функции и ее продолжения (рисунок 2.1.5, в).

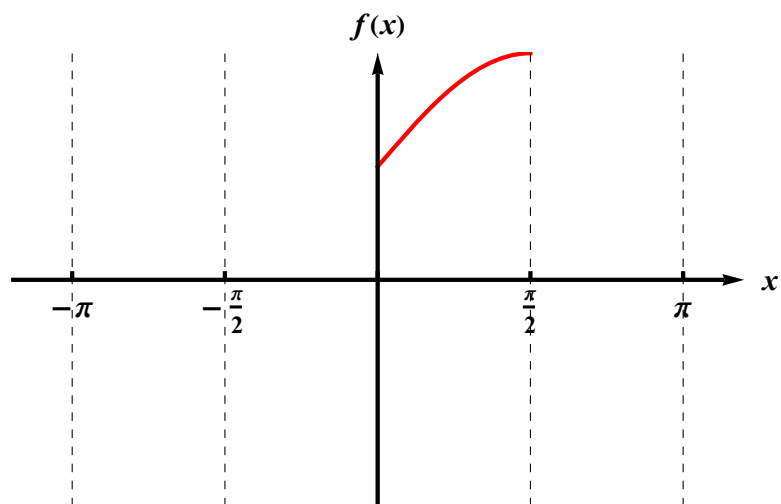
1.12. Разложить функцию $f(x) = \cos x$, заданную на $(0, \pi)$, в ряд Фурье а) по синусам; б) по косинусам.

а) Для разложения функции $\cos x$ по синусам продолжим ее на $(-\pi, 0)$ нечетным образом. Тогда $a_0 = a_n = 0, n = 1, 2, \dots$

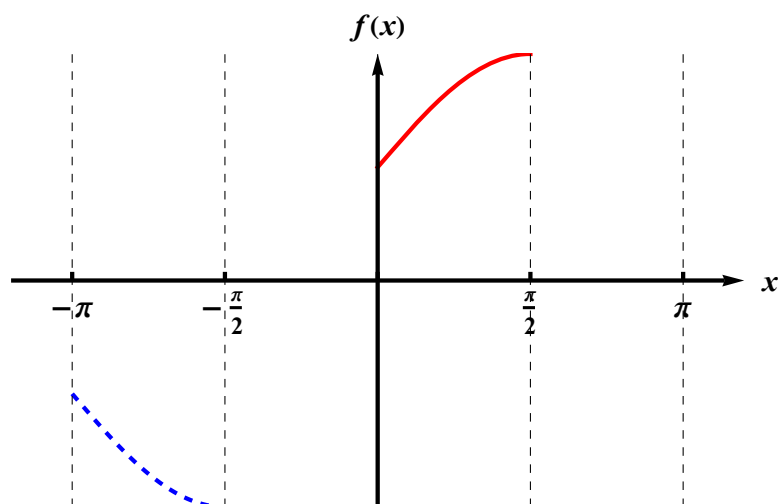
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x + \sin(n-1)x] dx = \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1} - 1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n-1} \right] = \\ &= \frac{2n}{\pi(n^2 - 1)} [(-1)^n + 1] = \begin{cases} 0, & n = 3, 5, \dots \\ \frac{4n}{\pi(n^2 - 1)}, & n = 2, 4, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Коэффициент b_1 следует вычислять отдельно:

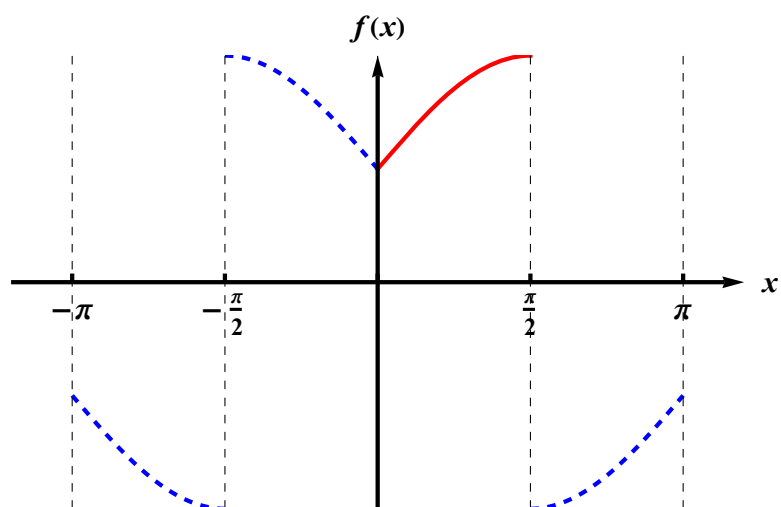
$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin x dx = 0.$$



a



б



в

Рис. 2.1.5. К задаче [1.11](#)

Таким образом,

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k}{\pi(4k^2 - 1)} \sin 2kx, \quad x \in [0, \pi].$$

б) Разложение функции $\cos x$ по косинусам постройте самостоятельно.

1.13. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \operatorname{ch} 2x$, $-2 < x < 2$.

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh} 4}{4} + 8 \operatorname{sh} 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{16 + \pi^2 n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}.$$

Очевидно, что разложение этой четной функции в ряд Фурье не будет содержать синусы.

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \operatorname{ch} 2x \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 4;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 \operatorname{ch} 2x \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx = \frac{2}{16 + n^2 \pi^2} \left[n\pi \cos 4 \sin \pi n + 4 \operatorname{sh} 4 \cos \pi n \right] = \\ &= \frac{8(-1)^n}{16 + n^2 \pi^2} \operatorname{sh} 4. \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 4 + 8 \operatorname{sh} 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{16 + n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2}.$$

1.14. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$, $-1 \leq x \leq 1$. Почему при $x = 1$ $f(x) = 1$, а сумма ряда Фурье равна 0?

Функция нечетна, поэтому $a_0 = a_n = 0$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 \sin \frac{\pi}{2} x \sin \frac{n\pi x}{1} \, dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \pi n \right) x - \cos \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) x \right] \, dx = \\ &= \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \pi n \right) x}{\frac{\pi}{2} - \pi n} - \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) x}{\frac{\pi}{2} + \pi n} \right] \Big|_0^1 = \\ &= \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \pi n \right)}{\frac{\pi}{2} - \pi n} - \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right)}{\frac{\pi}{2} + \pi n} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{9 - 4n^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{9 - 4n^2} \sin n\pi x.$$

На дополнительный вопрос ответьте самостоятельно.

1.15. Разложить функцию $f(x) = \sin \alpha x$, $0 < x < \pi$, $\alpha \neq 0$ в ряд Фурье только по косинусам.

Найдем коэффициенты, учитывая, что $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \alpha x \, dx = \frac{2}{\alpha \pi} (1 - \cos \alpha \pi) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha \pi} (1 - \cos \alpha \pi), & \alpha \notin \mathbb{Z}; \\ 0, & \alpha = 2m; \\ \frac{4}{(2m-1)\pi}, & \alpha = 2m-1. \end{cases}$$

Для коэффициента a_n также рассмотрим три случая. Если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, то

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \alpha x \sin nx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi(\alpha^2 - n^2)} (\alpha - \alpha \cos \alpha \pi \cos n\pi - n \sin \alpha \pi \sin n\pi) = \\ &= \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \left(1 - (-1)^n \cos \alpha \pi \right). \end{aligned}$$

Если α целое четное, т. е. $\alpha = 2m$, то

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2mx \cos nx \, dx = \\ &= \frac{2(n \sin(2\pi m) \sin(\pi n) + 2m \cos(2\pi m) \cos(\pi n) - 2m)}{\pi(n^2 - 4m^2)} = \\ &= -\frac{4m((-1)^n - 1)}{\pi((2m)^2 - n^2)} = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ \frac{8m}{\pi((2m)^2 - (2k-1)^2)}, & n = 2k-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Наконец, если α целое нечетное, т. е. $\alpha = 2m-1$, то

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2m-1)x \cos nx \, dx = \\ &= \frac{2[n \sin(2\pi m) \sin(\pi n) + (2m-1)(\cos(2\pi m) \cos(\pi n) + 1)]}{\pi((2m-1)^2 - n^2)} = \\ &= \frac{2(2m-1)((-1)^n + 1)}{\pi((2m-1)^2 - n^2)} = \begin{cases} \frac{4(2m-1)}{\pi((2m-1)^2 - (2k)^2)}, & n = 2k; \\ 0, & n = 2k-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\sin \alpha x = \frac{9 - \cos \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n \cos \alpha \pi)}{\alpha^2 - n^2} \cos nx, \quad \alpha \notin \mathbb{Z};$$

$$\sin 2mx = \frac{8m}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2 - (2k-1)^2} \cos(2k-1)x, \quad \alpha = 2m;$$

$$\sin(2m-1)x = \frac{2}{(2m-1)\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2m-1}{(2m-1)^2 - (2k)^2} \cos 2kx, \quad \alpha = 2m-1.$$

Задания для самостоятельной работы

1.16. Доказать, что если кусочно-гладкая непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(x - \pi) = f(x)$ для всех x (т.е. является π -периодической), то $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$ для всех $n \geq 1$, и наоборот, если $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$ для всех $n \geq 1$, то $f(x)$ — π -периодическая.

1.17. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$, $-1 < x < 1$.

1.18. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|(1-|x|)$, $-1 < x \leq 1$.

1.19. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq \omega x \leq 0, \\ \sin \omega x, & \text{если } 0 \leq \omega x \leq \pi. \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{\omega} < x \leq \frac{\pi}{\omega}.$$

Ответы

1.17. $f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4 \cos(\pi n)}{\pi - 4\pi n^2}.$

1.18. $f(x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^2}.$

1.19. $f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\omega x}{4n^2 - 1}.$

2.1.3. Ряды Фурье. Комплексная форма, равенство Парсеваля

Примеры решения задач

1.20. Каждый ряд Фурье $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$, $-\pi < x < \pi$ можно рассматривать как ряд Лорана $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$, $z = e^{ix}$ на окружности $|z| = 1$. Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$.

$$\begin{aligned}
\ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| &= \ln \left| \frac{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}{2i} \right| = \ln \left| e^{ix/2} - e^{-ix/2} \right| - \ln 2 = \\
&= \ln \left| e^{-ix/2} (e^{ix} - 1) \right| - \ln 2 = \ln \left| e^{-ix/2} \right| + \ln |e^{ix} - 1| - \ln 2 = \\
&= -\operatorname{Re} \ln (1 - e^{ix}) - \ln 2 = -\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k} - \ln 2 = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} - \ln 2.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулами $\ln z = \ln |z| + i \arg z = \operatorname{Re} \ln z + i \arg z$ и $\ln(1 - z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$.

1.21. Доказать, что функция $f(x)$, определенная в промежутке $[-\pi, \pi]$, вещественнозначна тогда и только тогда, когда коэффициенты c_k ее комплексного ряда Фурье связаны соотношениями $\overline{c_k} = c_{-k}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Докажем необходимость. Пусть условие $\overline{c_k} = c_{-k}$ выполнено для всех k и функция $f(x)$ разложена в ряд:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\cos kx + i \sin kx).$$

Функция вещественнозначна, если ее мнимая часть равна нулю.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\operatorname{Re} c_k \sin kx + \operatorname{Im} c_k \cos kx) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Re} c_{-k} \sin(-k)x + \operatorname{Im} c_{-k} \cos(-k)x) = 0.
\end{aligned}$$

Это выполняется, если равны нулю суммарные коэффициенты при синусах и при косинусах: $\operatorname{Re} c_k = \operatorname{Re} c_{-k}$, $\operatorname{Im} c_k = -\operatorname{Im} c_{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, $c_0 = 0$. Отсюда следует $\overline{c_k} = c_{-k}$. $\square$

Достаточность докажете самостоятельно.

1.22. Найти ряд Фурье в комплексной и вещественной формах для функции

$$f(x) = \frac{9 - \alpha^2}{9 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}, \quad |\alpha| < 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Выразим косинус через экспоненты и разложим функцию $f(x)$ на простейшие дроби:

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad z = e^{ix}, \quad |z| = 1. \\ f(x) &= \frac{9 - \alpha^2}{9 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} = \frac{9 - \alpha^2}{9 - \alpha(z + z^{-1}) + \alpha^2} = \\ &= \frac{(\alpha^2 - 1)z}{a(z - \alpha)(z - \alpha^{-1})} = \frac{\alpha}{z - \alpha} + \frac{1}{9 - \alpha z}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{9 - \alpha z} &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{ikx}, \\ \frac{\alpha}{z - \alpha} &= \alpha z^{-1} \frac{1}{9 - \alpha z^{-1}} = \alpha z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} z^{-n-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} e^{-i(n+1)x} = [k = -(n+1)] = \sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha^{-k} e^{ikx}.\end{aligned}$$

Здесь $|\alpha z| = |\alpha z^{-1}| = |\alpha| < 1$, поэтому ряды сходятся. Объединим эти ряды в один:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k = a^{|k|} = \begin{cases} a^k, & k \geq 0, \\ a^{-k}, & k < 0. \end{cases}$$

Функция непрерывна, следовательно, ряд Лорана сходится.

Запишем ряд в вещественной форме: $\alpha^k e^{ikx} + \alpha^k e^{-ikx}$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos kx.$$

1.23. Доказать, что для функции $f(x)$, заданной на $[-\pi, \pi]$, такой, что $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < +\infty$ справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (2.1.6)$$

где a_n и b_n — коэффициенты Фурье.

Запишем разложение функции в ряд Фурье и возведем почленно в квадрат:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx);$$

$$f^2(x) = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 \cos^2 nx + b_n^2 \sin^2 nx) + 2 \frac{a_0}{2} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) +$$

$$+ 2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty}}_{m \neq n} (a_n \cos nx + b_m \sin nx) (a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

Домножив на $1/\pi$ проинтегрируем полученное равенство от $-\pi$ до π . В силу ортогональности тригонометрических функций третье и четвертое слагаемые дают нуль, таким образом, получаем соотношение (2.1.6). $\square$

1.24. Записать равенство Парсеваля для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \alpha, \\ 0, & \alpha < |x| < \pi. \end{cases}$$

Найти суммы числовых рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Вычислим интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} 1 dx = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

Разложим функцию в ряд Фурье, учитывая, что она четная, т. е. $b_n = 0$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx =;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} \cos nx dx = \frac{2 \sin \alpha n}{n\pi}.$$

Теперь запишем равенство Парсеваля (2.1.6):

$$\frac{2\alpha}{\pi} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \sin \alpha n}{n\pi} \right)^2;$$

$$\frac{2\alpha}{\pi} - \frac{2\alpha^2}{\pi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin^2 \alpha n}{n^2 \pi^2}$$

и окончательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha n}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}.$$

Далее,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9 - \cos^2 \alpha n}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \alpha n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}$$

(см. (2.1.3)).

Наконец, пусть $\alpha = \pi/2$, тогда

$$\sin^2 n \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 1, & n = 2k - 1, \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(другим способом эта формула была получена в задаче 1.6).

1.25. Записать равенство Парсеваля для функции $f(x) = |x| \cos x$, где $x \in [-\pi, \pi]$, и найти с его помощью сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n^2 + 1)^2}{(4n^2 - 1)^4}$.

Сначала вычислим интеграл:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos^2 x dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2}.$$

Теперь найдем коэффициенты ряда Фурье (функция четная, поэтому $b_n = 0$):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x \, dx = -\frac{4}{\pi};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x [\cos(n+1)x + \cos(n-1)x] \, dx =$$

$$= 2 \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi} \cdot \frac{n^2 + 1}{(n^2 - 1)^2} = \begin{cases} -\frac{4(4k^2 + 1)}{\pi(4k^2 - 1)^2}, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k + 1, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Коэффициент a_1 вычисляется особо:

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Запишем равенство Парсеваля:

$$\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{4(4k^2 + 1)}{\pi(4k^2 - 1)^2} \right)^2;$$

$$\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{8}{\pi^2} + \frac{\pi^2}{4} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4k^2 + 1)^2}{(4k^2 - 1)^4}.$$

Теперь можно найти сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n^2 + 1)^2}{(4n^2 - 1)^4} = \frac{\pi^4}{192} + \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2}.$$

1.26. Вывести комплексную форму обобщенного равенства Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overline{d_n}, \quad (2.1.7)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ вещественные функции, c_n — коэффициент Фурье функции $f(x)$, а d_n — коэффициент Фурье функции $g(x)$.

По условию

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx} \right) dx = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_n d_k e^{i(n+k)x} dx. \end{aligned}$$

Если $n \neq -k$, то интеграл равен нулю, если $n = -k$, то он равен 2π .
Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_{-n}.$$

Но, как показано в задаче 1.21, из то, что функция $g(x)$ вещественна, следует равенство $d_{-n} = \overline{d_n}$, что и доказывает формулу (2.1.7). $\square$

Задания для самостоятельной работы

1.27. Доказать, что функция $f(x)$, определенная в промежутке $[-\pi, \pi]$, является:

а) четной (т. е. удовлетворяет соотношению $f(-x) = f(x)$) тогда и только тогда, когда коэффициенты c_n ее комплексного ряда Фурье связаны соотношениями $c_n = c_{-n}$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$;

б) нечетной (т. е. удовлетворяет соотношению $f(-x) = -f(x)$), тогда и только тогда, когда коэффициенты c_n ее комплексного ряда Фурье связаны соотношениями $c_n = -c_{-n}$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$.

1.28. Найти ряд Фурье в комплексной и вещественной формах для функции

$$f(x) = \frac{a \sin x}{9 - 2a \cos x + a^2}, \quad |a| < 1, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Подсказка: воспользуйтесь приемом, использованным в одной из разобранных выше задач.

1.29. Записать равенство Парсеваля для функций

$$f(x) = \cos ax, \quad g(x) = \sin ax, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad a \notin \mathbb{Z}.$$

1.30. Используя результат предыдущей задачи и предполагая, что a не является целым числом, вывести следующие разложения функций $\pi \operatorname{ctg} a\pi$ и $(\pi/\sin a\pi)^2$ по рациональным функциям:

$$\pi \operatorname{ctg} a\pi = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2};$$

$$\left(\frac{\pi}{\sin a\pi}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a - n)^2}.$$

1.31. Показать, что если p и q ($p \neq q$) целые неотрицательные числа, то функции $\sin(p + \frac{1}{2})x$ и $\sin(q + \frac{1}{2})x$ ортогональны на сегменте $[0, \pi]$.

1.32. Показать, что система функций

$$\sin x, \sin 3x, \sin 5x, \dots, \sin(2n - 1)x, \dots$$

ортогональна на сегменте $[0, \pi/2]$. Написать формулы для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ относительно этой системы.

Ответы

1.28. Найти ряд Фурье в комплексной и вещественной формах для функции

$$f(x) = \frac{a \sin x}{9 - 2a \cos x + a^2}.$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \text{ где } c_n = \frac{1}{2i} a^{|n|} \operatorname{sgn} n = \begin{cases} ia^{-n}/2, & \text{если } n < 0, \\ 0, & \text{если } n = 0, \\ -ia^n/2, & \text{если } n > 0. \end{cases}$$

1.29. Записать равенство Парсеваля для функций $f(x) = \cos ax$ и $g(x) = \sin ax$, $x \in [-\pi, \pi]$, $a \notin \mathbb{Z}$.

$$1 + \frac{\sin 2a\pi}{2a\pi} = 2 \frac{\sin^2 a\pi}{a^2 \pi^2} + 4 \frac{\sin^2 a\pi}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2}{(a^2 - n^2)^2};$$

$$1 - \frac{\sin 2a\pi}{2a\pi} = 4 \frac{\sin^2 a\pi}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2 - n^2)^2}.$$

1.32. $c_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2n - 1)x \, dx, n = 1, 2, \dots$

2.1.4. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

Примеры решения задач

1.33. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 1/2, & x = 0, x = 1, \\ 0, & x < 0, x > 1. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей действительной прямой и кусочно-непрерывна на каждом конечном отрезке, то для нее выполняются условия представления интегралом Фурье и справедлива формула (1.1.66)

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos z(u-x) du.$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos z(u-x) du = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot \cos z(u-x) du + \int_0^1 1 \cdot \cos z(u-x) du + \int_1^{\infty} 0 \cdot \cos z(u-x) du = \\ &= \int_0^1 \cos z(u-x) du = \frac{\sin z(u-x)}{z} \Big|_{u=0}^{u=1} = \\ &= \frac{\sin z(1-x) + \sin zx}{z} = \frac{2 \sin \frac{z}{2} \cos \frac{z(1-2x)}{2}}{z}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin z(1-x) + \sin zx}{z} dz = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{z}{2} \cos \frac{z(1-2x)}{2}}{z} dz.$$

Интеграл Фурье равен $f(x)$ в точках непрерывности. Найдем его значе-

ние при $x = 0$:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin z(1-x) + \sin zx}{z} dz \right|_{x=0} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} = \frac{f(+0) + f(-0)}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\left. \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin z(1-x) + \sin zx}{z} dz \right|_{x=1} = \frac{1}{2} = \frac{f(1+0) + f(1-0)}{2}.$$

1.34. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & 0 \leq x < 2, \\ x + 2, & -2 < x \leq 0, \\ 0, & |x| \geq 2. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой. В силу ее четности имеем

$$\begin{aligned} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos z(u-x) du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) (\cos zu \cos zx + \sin zu \sin zx) du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos zu \cos zx du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos zx dz \int_0^{\infty} f(u) \cos zu du. \end{aligned}$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_0^{\infty} f(u) \cos zu du = \int_0^2 (-u + 2) \cos zu du = -\frac{1}{z^2} (\cos 2z - 1) = 2 \frac{\sin^2 z}{z^2}.$$

Отсюда

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos zx 2 \frac{\sin^2 z}{z^2} dz = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2} \cos zx dz$$

1.35. Функцию $f(x) = e^{-x}$, $0 < x < +\infty$, представить интегралом Фурье, продолжая ее: а) четным образом, б) нечетным образом на промежуток $(-\infty, 0)$. Найти значения интегралов

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx.$$

В обоих случаях функция абсолютно интегрируема на всей числовой оси (докажите это самостоятельно), непрерывна (а) или кусочно-непрерывна (б).

а) Для непрерывной четной функции, как и в задаче 1.34, вычисляем интеграл Фурье по косинусам:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos zx \, dz \int_0^{\infty} f(u) \cos zu \, du.$$

Для внутреннего интеграла имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-u} \cos zu \, du = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{u(-1+iz)}}{-1+iz} + \frac{e^{u(-1-iz)}}{-1-iz} \right) \Big|_{u=0}^{u=\infty} = \frac{1}{1+z^2}$$

и, таким образом,

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos zx}{1+z^2} dz, \quad x \geq 0. \quad (2.1.8)$$

В частности, при $x = 1$ $e^{-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos z}{1+z^2} dz$ и, следовательно,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

б) При нечетном продолжении функция имеет разрыв при $x = 0$. Применим формулу (1.1.74):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin zx \, dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin zu \, du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin zx \, dz \int_0^{\infty} e^{-u} \sin zu \, du = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin zx \, dz \left(-\frac{e^{-u}(\sin uz + z \cos uz)}{z^2 + 1} \right) \Big|_{u=0}^{u=\infty} \end{aligned}$$

и

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{z \sin zx}{1+z^2} dz, \quad z > 0, \quad (2.1.9)$$

откуда

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Замечание 4.1. Обратите внимание на важное различие между соотношениями (2.1.8) и (2.1.9). Разложение по косинусам применимо, если $f(x)$ непрерывна при $x = 0$, а разложение по синусам — только если $f(0) = 0$. $e^0 \neq 0$, поэтому равенство (2.1.8) справедливо при $x \geq 0$, а равенство (2.1.9) — только при $x > 0$.

1.36. Найти образ Фурье для «прямоугольника»:

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 0.5, \\ 0, & |x| > 0.5. \end{cases}$$

(рисунок 2.1.6).

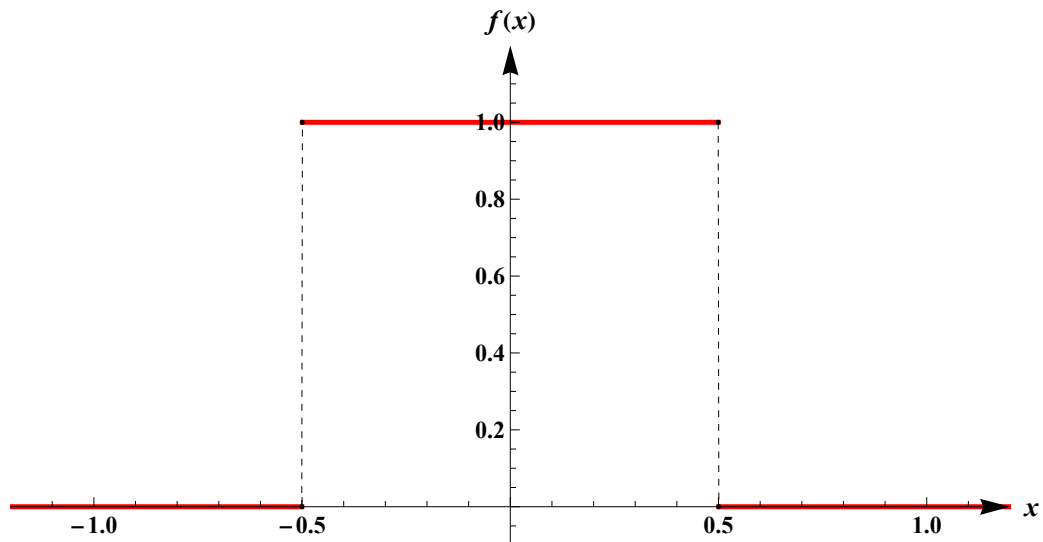


Рис. 2.1.6. К задаче 1.36

Эта несложная функция часто встречается в теории рядов Фурье, поэтому для нее задано особое обозначение. Применим к ней прямое преобра-

зование Фурье (1.1.71):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\text{rect}] = F(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-izx} \cdot 1 \cdot dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-iz} \left(e^{-iz/2} - e^{iz/2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin z/2}{z/2}, \quad z \neq 0.\end{aligned}$$

Значение при $z = 0$ нужно искать отдельно:

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/2}^{1/2} e^0 \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Очевидно, что $\lim_{z \rightarrow 0} F(z) = F(0)$, но, чтобы не прибегать к предельному переходу, удобно ввести особую функцию.

Определение 4.1. *Кардинальным синусом* называется функция, заданная соотношением

$$\text{sinc } x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases} \quad (2.1.10)$$

Эта функция аналитична для любого значения аргумента.

Замечание 4.2. В цифровой обработке сигналов функция задается через $\sin \pi x / (\pi x)$, но в этом курсе мы будем придерживаться определения (2.1.10).

Приведем без доказательства двойное равенство, которое будет использовано в главе 1.2:

$$\text{sinc } \pi x = \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right) = \frac{1}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}.$$

Окончательно

$$\mathcal{F}[\text{rect}] = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc } \frac{z}{2}. \quad (2.1.11)$$

1.37. *Найти образ Фурье для «треугольника»:*

$$\text{triang}(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

(рисунок 2.1.7).

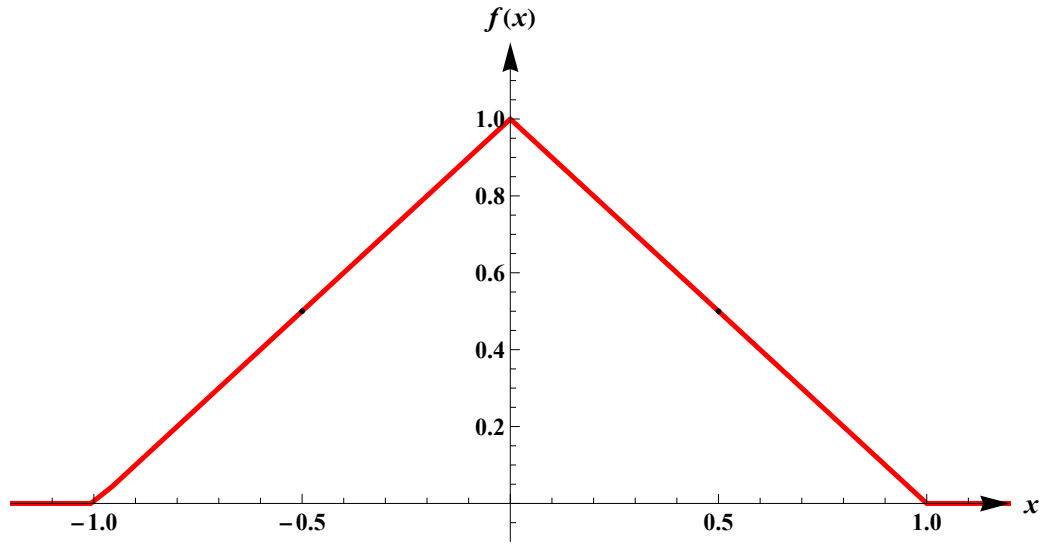


Рис. 2.1.7. К задаче 1.37

Как и в задаче 1.36, сперва найдем решение при $z \neq 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\text{triang}] &= F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} f(x) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^0 e^{-izx} (1+x) dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-izx} (1-x) dx = \\ &= \left(\frac{iz - e^{iz} + 1}{z^2} - \frac{iz + e^{-iz} - 1}{z^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4 \sin^2(z/2)}{z^2}, \quad z \neq 0.\end{aligned}$$

Для $z = 0$ имеем

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^0 (1+x) dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Таким образом, для любых z

$$\mathcal{F}[\text{triang}] = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}^2 \frac{z}{2}$$

1.38. Найти образ Фурье для функции $g(x)$, заданной графически (рис. 2.1.8).

Разумеется, задачу можно решать непосредственно, используя формулу (1.1.71). Рассмотрим, однако другой способ, используя свойства преобразования Фурье.

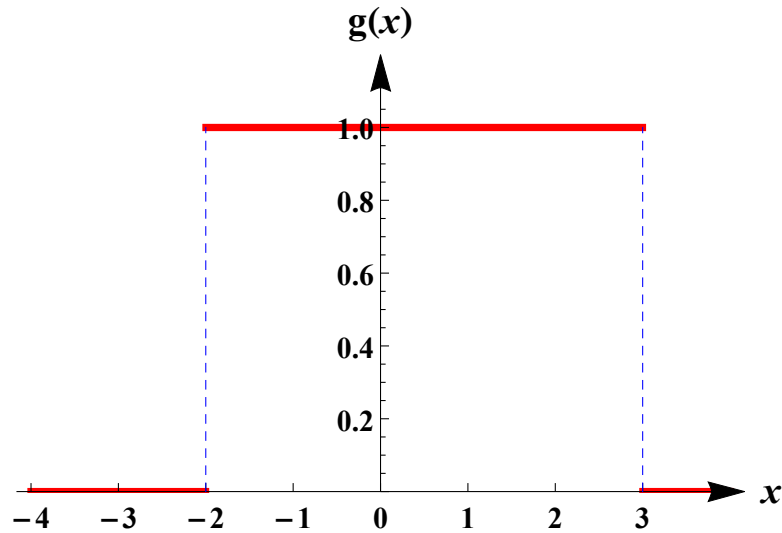


Рис. 2.1.8. К задаче 1.38

График заданной функции получен из графика функции $\text{rect}(x)$ (рисунок 2.1.6) следующим образом: растяжение в пять раз по горизонтали и сдвиг вправо на $1/2$. Таким образом, $g(x) = \text{rect}((x - 1/2)/5)$.

Применим теорему подобия (1.1.85)

$$\mathcal{F}[f(\lambda x)](z) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{z}{\lambda}\right)$$

при $\lambda = 1/5$ и теорему запаздывания (1.1.83):

$$\mathcal{F}[f(x - \alpha)](z) = e^{-i\alpha z} \mathcal{F}[f]$$

при $\alpha = 1/2$:

$$\mathcal{F}[g] = \frac{5}{\sqrt{2\pi}} e^{-iz/2} \text{sinc} \frac{5z}{2}.$$

Задания для самостоятельной работы

1.39. Представить интегралом Фурье указанную функцию.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -e^x, & x < 0. \end{cases}$$

1.40. Вычислить

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

1.41. Найти преобразование Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| \geq \pi. \end{cases}$$

1.42. Найти преобразование Фурье для функции $f(x) = \operatorname{sgn}(x-1) - \operatorname{sgn}(x-2)$.

Ответы

1.39. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{z \sin zx}{1+z^2} dz.$

1.40. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$

1.41. $F(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4}{9-4z^2} \cos \pi z.$

1.42. $2e^{-3iz/2} \operatorname{sinc} \frac{z}{2}.$

2.1.5. Преобразование Фурье. Решение интегральных и дифференциальных уравнений

Примеры решения задач

1.43. Найти образ Фурье функции, заданной графически (рисунок 2.1.9), не вычисляя интегралы.

Заданный график представляет собой график функции $\operatorname{triang}(x)$ (рисунок 2.1.7), смещенный вверх на единицу, поэтому функцию можно задать так: $f(x) = \operatorname{triang}(x) + \operatorname{rect}(x/2)$.

В силу линейности преобразования Фурье и теоремы подобия

$$\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[\operatorname{triang}] + \mathcal{F}[\operatorname{rect}(x/2)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\operatorname{sinc}^2 z + 2 \operatorname{sinc} 2z).$$

1.44. Найти автосвертку для функции $\operatorname{rect}(x)$.

В общем случае свертка задана формулой (1.1.90)

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \psi(x-t) dt.$$

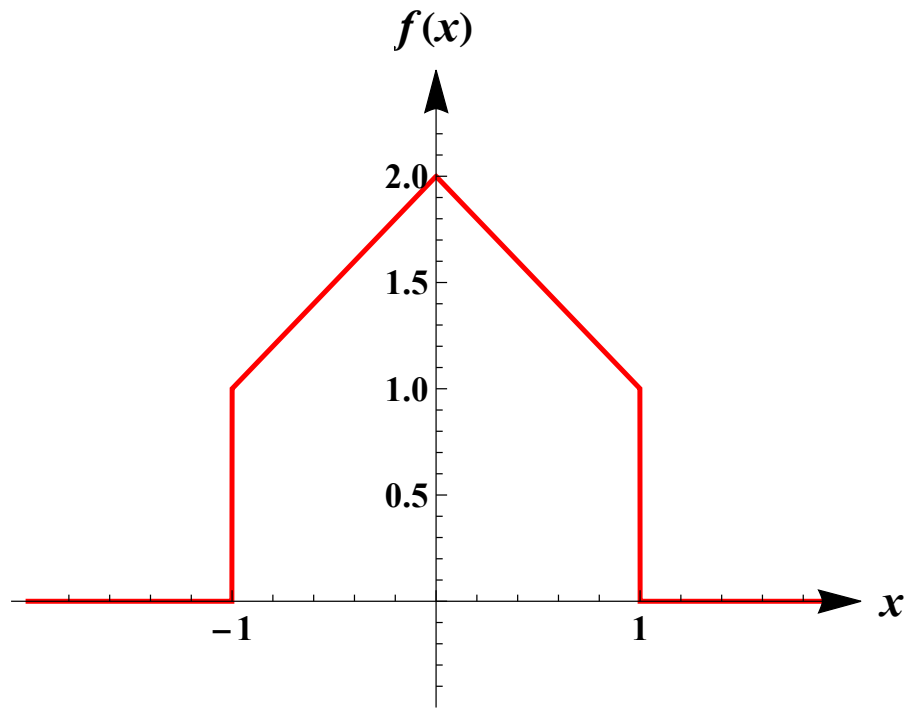


Рис. 2.1.9. К задаче 1.43

Автосверткой называется свертка в том случае, если $\varphi(t) = \psi(t)$. Таким образом,

$$(\text{rect} * \text{rect}) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) \text{rect}(x - t) dt.$$

Запишем значения подынтегральных функций:

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 0, & t < -0,5; \\ 1, & -0,5 < t < 0,5; \\ 0, & t > 0,5; \end{cases};$$

$$\text{rect}(x - t) = \begin{cases} 0, & t < x - 0,5; \\ 1, & x - 0,5 < t < x + 0,5; \\ 0, & t > x + 0,5. \end{cases}$$

В зависимости от того, какие значения принимает переменная x , можно выделить четыре случая:

$$a) x < -1 : \quad (\text{rect} * \text{rect})(x) = 0;$$

$$б) -1 \leq x < 0 : \quad (\text{rect} * \text{rect})(x) = \int_{-0,5}^{x+0,5} 1 \cdot 1 dt = 1 + x;$$

$$e) 0 \leq x < 1 : \quad (\text{rect} * \text{rect})(x) = \int_{x-0,5}^{0,5} 1 \cdot 1 \, dt = 1 - x;$$

$$з) x \geq 1 : \quad (\text{rect} * \text{rect})(x) = 0$$

(рисунок 2.1.10). Отсюда видно, что $(\text{rect} * \text{rect})(x) = \text{triang}(x)$.

1.45. Найти образ Фурье свертки двух функций $f(x)$ и $g(x)$, заданных графически (рисунок 2.1.11).

Образ Фурье свертки двух функций равен произведению образов этих функций.

Функцию $f(x)$ можно задать как сумму двух измененных «прямоугольников»:

$$f(x) = -\text{rect}\left(x + \frac{1}{2}\right) + 3\text{rect}\left(\frac{x-1}{2}\right),$$

тогда

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f] = -e^{iz/2} \text{sinc} \frac{z}{2} + 3\frac{1}{1/2}e^{-iz} \text{sinc} \left(\frac{z/2}{1/2}\right) = -e^{iz/2} \text{sinc} \frac{z}{2} + 6e^{-iz} \text{sinc} z.$$

Функция $g(x)$ — растянутый и смещенный «треугольник»:

$$g(x) = 2 \text{triang} \left(\frac{x-1}{2}\right).$$

Ее образ Фурье

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}[g] = 2\frac{e^{iz}}{1/2} \text{sinc}^2 \left(\frac{z/2}{1/2}\right) = 4e^{iz} \text{sinc}^2 z.$$

Образ фурье свертки этих функций с точностью до множителя $\sqrt{2\pi}$ равен произведению полученных образов:

$$\mathcal{F}[(f * g)] = \left(6e^{-iz} \text{sinc} z - e^{iz/2} \text{sinc} \frac{z}{2}\right) 4e^{iz} \text{sinc}^2 z.$$

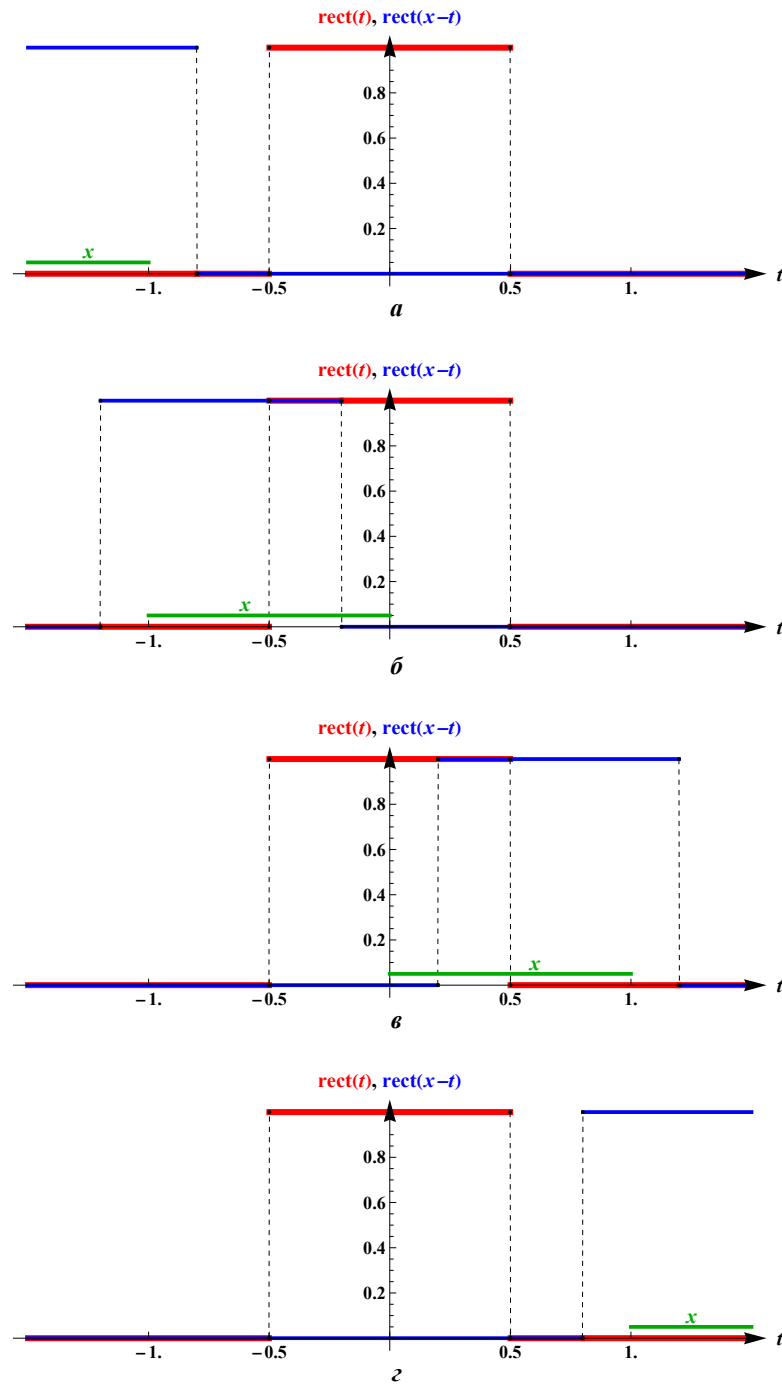
1.46. Доказать, что если $\mathcal{F}[f](z) = F(z)$, то

$$\mathcal{F}[f(x) \cos \omega x](z) = \frac{1}{2} \left[F(z - \omega) + F(z + \omega) \right]; \quad (2.1.12)$$

$$\mathcal{F}[f(x) \sin \omega x](z) = \frac{1}{2i} \left[F(z - \omega) - F(z + \omega) \right]; \quad (2.1.13)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(z) \cos \omega z](x) = \frac{1}{2} \left[f(x + \omega) + f(x - \omega) \right]; \quad (2.1.14)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(z) \sin \omega z](x) = \frac{1}{2i} \left[f(x + \omega) - f(x - \omega) \right]. \quad (2.1.15)$$



- Рис. 2.1.10. К задаче 1.44.
- а) $x < -1$: $(\text{rect} * \text{rect})(x) = 0$;
- б) $-1 \leq x < 0$: $(\text{rect} * \text{rect})(x) = \int_{-0,5}^{x+0,5} 1 \cdot 1 \, dt = 1 + x$;
- в) $0 \leq x < 1$: $(\text{rect} * \text{rect})(x) = \int_{x-0,5}^{0,5} 1 \cdot 1 \, dt = 1 - x$;
- г) $x \geq 1$: $(\text{rect} * \text{rect})(x) = 0$

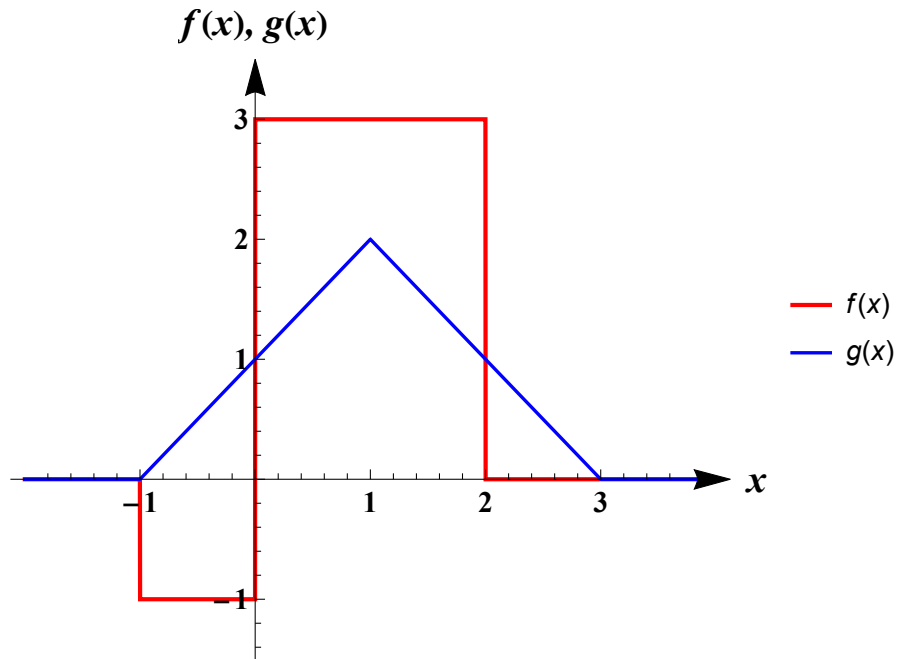


Рис. 2.1.11. К задаче 1.45

Докажем первое равенство.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(x) \cos \omega x](z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} \cos \omega x f(x) dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} f(x) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-ix(z-\omega)} + e^{-ix(z+\omega)} \right] f(x) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left[F(z - \omega) + F(z + \omega) \right]. \quad \square
 \end{aligned}$$

Остальные равенства доказываются аналогично.

1.47. Решить дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \quad a > 0, \\
 u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x),
 \end{aligned}$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x) = \int_0^x \psi(u) du$ удовлетворяют условиям, необходимым для существования преобразования Фурье.

Применим преобразование Фурье по переменной x к обеим частям уравнения, используя теорему о преобразование для производных (1.1.86):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 (iz)^2 U = 0, \\ U(z, 0) = \Phi(z), \quad ,$$

где

$$U(z, t) = \mathcal{F}[u], \quad \Phi(z) = \mathcal{F}[\varphi], \quad \Psi(z) = \mathcal{F}[\psi].$$

Дифференцирование по x свелось к умножению на $(iz)^2$ и вместо уравнения в частных производных имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + a^2 z^2 U = 0,$$

решение которого $U(z, t) = A(z) \cos azt + B(z) \sin azt$.

Для нахождения коэффициентов используем начальные условия:

$$U(z, 0) = A(z) = \Phi(z), \quad \left. \frac{dU}{dt} \right|_{t=0} = azB(z) = \Psi(z).$$

Тогда

$$U(z, t) = \Phi(z) \cos azt + \frac{1}{az} \Psi(z) \sin azt.$$

Применим теперь обратное преобразование Фурье. Формула (2.1.14) дает

$$\mathcal{F}^{-1} [\Phi(z) \cos azt] = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)].$$

Для второго преобразования используем формулы (2.1.15) и (1.1.88):

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{az} \Psi(z) \sin azt \right] = \left[\mathcal{F}^{-1} \frac{1}{a} \frac{\Psi(z)}{iz} i \sin azt \right] = \frac{1}{2a} \left[g(x + at) - g(x - at) \right].$$

Таким образом,

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} [g(x + at) - g(x - at)] = \\ = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi - \int_0^{x-at} \psi(\xi) d\xi \right]$$

и окончательно имеем *формулу Даламбера*

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

Физический смысл этой задачи о колебаниях бесконечной струны будет детально рассмотрен в курсе уравнений математической физики.

1.48. Решить интегральное уравнение Фредгольма на полуоси

$$\int_0^{\infty} f(z) \sin xz dz = e^{-x}, \quad x > 0.$$

Заданное уравнение не что иное как прямое преобразование Фурье по синусам (1.1.77), которое в более привычных обозначениях имеет вид

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin xz dx = e^{-z}$$

Сделаем обратное преобразование:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z} \sin zx dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{x}{1+x^2}.$$

1.49. Решить интегральное уравнение Фредгольма с разностным ядром на оси:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \exp \left(-\frac{(x-t)^2}{4} \right) dt = \exp \left(-\frac{x^2}{8} \right).$$

Левая часть уравнения представляет собой свертку (1.1.91), умноженную на $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} \left(\varphi * e^{-x^2/4} \right) = e^{-x^2/8}.$$

Применим преобразование Фурье:

$$\sqrt{2} \Phi(z) \mathcal{F} \left[e^{-x^2/4} \right] = \mathcal{F} \left[e^{-x^2/8} \right]. \quad (2.1.16)$$

Вычислим образ Фурье, стоящий в левой части:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[e^{-x^2/4}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} e^{-x^2/4} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2/4+izx)} dx = \left[\frac{x}{2} = y\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y^2+2izy-z^2)} e^{-z^2} dy = \frac{2e^{-z^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y+iz)^2} dy = \frac{2e^{-z^2}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\pi} = \sqrt{2}e^{-z^2}.\end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что $\mathcal{F}\left[e^{-x^2/8}\right] = 2e^{-2z^2}$ (проделайте это самостоятельно). Уравнение (2.1.16) принимает вид

$$\sqrt{2}\Phi(z)\sqrt{2}e^{-z^2} = 2e^{-2z^2},$$

откуда $\Phi(z) = e^{-z^2}$.

Найдем искомую функцию, выполнив обратное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-z^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z^2-2\frac{ix}{2}z)} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z^2-2\frac{ix}{2}z-\frac{x^2}{4})} e^{-\frac{x^2}{4}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-\frac{ix}{2})^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \sqrt{\pi} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{4}}.\end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

1.50. Найти образ Фурье функции, заданной графически (рисунок 2.1.12), не вычисляя интегралы.

1.51. Найти образ Фурье функции, заданной графически (рисунок 2.1.13), не вычисляя интегралы.

1.52. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^{\infty} f(z) \cos xz dz = \frac{1}{1+z^2}.$$

Ответы

1.50. $F(z) = 4 \operatorname{sinc}(z) - 2e^{-i \cdot 2z} \operatorname{sinc} z$.

1.51. $F(z) = -4e^{-i \cdot z} \operatorname{sinc}^2(z) + 4e^{-i \cdot z} \operatorname{sinc}(2z) + 2e^{-4i \cdot z} \operatorname{sinc}(z)$.

1.52. $f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0$.

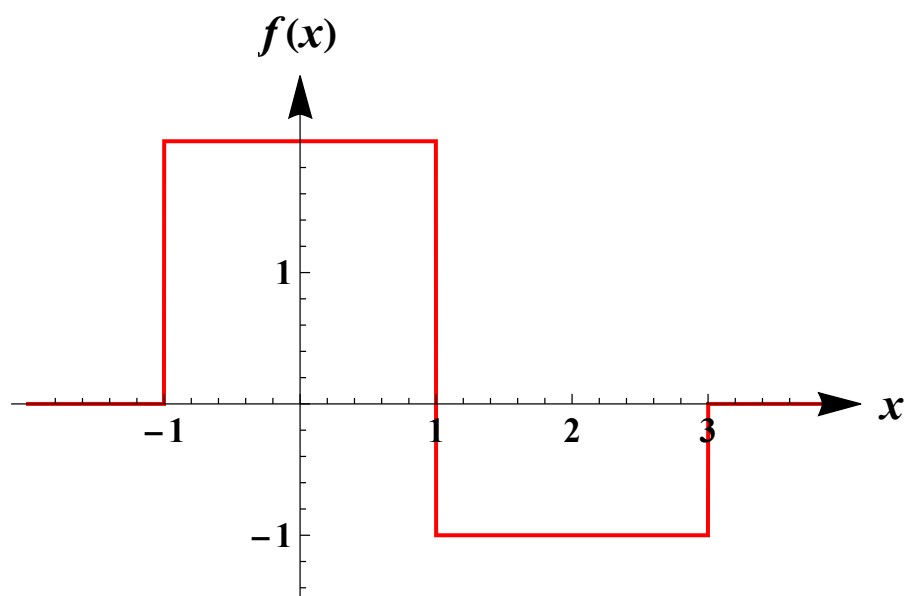


Рис. 2.1.12. К задаче [1.50](#)

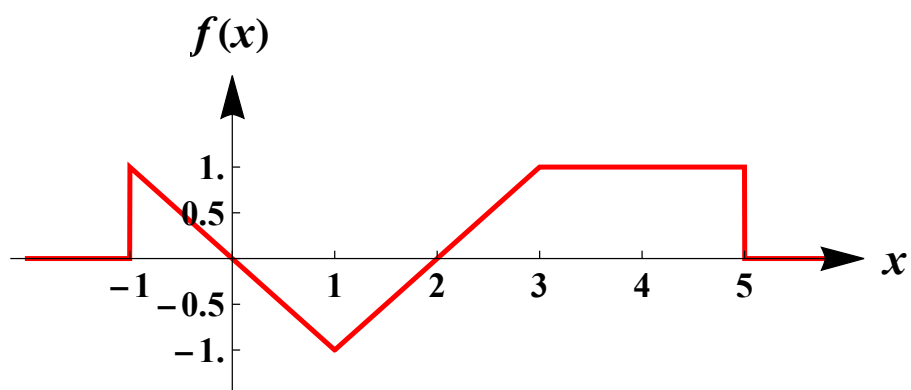


Рис. 2.1.13. К задаче [1.51](#)

2.2. Цилиндрические функции. Задачи

2.2.1. Рекуррентные соотношения

Примеры решения задач

2.1. Показать, что функция (1.2.15)

$$J_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)}$$

удовлетворяет уравнению

$$z^2 J_{\nu}''(z) + z J_{\nu}'(z) + (z^2 - \nu^2) J_{\nu}(z) = 0.$$

Подставим выражение для функции в уравнение. Ранее доказано, что ряд сходится равномерно и его можно почленно дифференцировать.

$$\begin{aligned} z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k + \nu)(2k + \nu - 1) z^{2k+\nu-2}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k + \nu + 1)} + z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k + \nu) z^{2k+\nu-1}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k + \nu + 1)} - \\ - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} + z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим последнее слагаемое:

$$\begin{aligned} z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} &= \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k=-1}}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+\nu+2}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k + \nu + 1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu-2} (k-1)! \Gamma(k + \nu)} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+\nu} 4k(k + \nu)}{2^{2k+\nu-2} k! \Gamma(k + \nu + 1)}. \end{aligned}$$

Объединим все четыре слагаемых:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left[(2k + \nu)(2k + \nu - 1) + (2k + \nu) - \nu^2 - 4k(k + \nu) \right] = 0.$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю, таким образом, заданная функция удовлетворяет уравнению, поскольку обращает его в тождество. $\square$

2.2. Доказать рекуррентные соотношения

$$\text{а)} \quad J_{\nu+1}(z) + J_{\nu-1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z); \quad (2.2.1)$$

$$\text{б)} \quad \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) - J_{\nu+1}(z) = J'_{\nu}(z); \quad (2.2.2)$$

$$\text{в)} \quad J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_{\nu}(z). \quad (2.2.3)$$

а) Снова воспользуемся представлением (1.2.15)

$$J_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)}.$$

$$J_{\nu+1}(z) + J_{\nu-1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu+1}}{k! \Gamma(k + \nu + 2)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k! \Gamma(k + \nu)}.$$

В первом слагаемом начнем суммирование с -1 (почему имеем на это право?), во втором домножим числитель и знаменатель на $k + \nu$ и воспользуемся рекуррентным соотношением (1.2.123) для гамма-функции:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu+1} (k + \nu)}{k! \Gamma(k + \nu + 2)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k! (k + \nu) \Gamma(k + \nu)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{(k-1)! \Gamma(k + \nu + 1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1} (k + \nu)}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} = \\ &= -\frac{2}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k(k-1)! \Gamma(k + \nu + 1)} k + \frac{2}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} (k + \nu) = \\ &= \frac{2}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} (k + \nu - k) = \frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z). \quad \square \end{aligned}$$

б) Задача решается аналогично предыдущей:

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) - J_{\nu+1}(z) &= \frac{\nu}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu+1}}{k! \Gamma(k + \nu + 2)} = \\ &= \frac{\nu}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu+1}}{k! \Gamma(k + \nu + 2)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\nu}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k! \Gamma(k+\nu+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(-1)^{k-1} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k(k-1)! \Gamma(k+\nu+1)} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} (2k+\nu) \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k! \Gamma(k+\nu+1)} = J'_{\nu}(z). \quad \boxtimes
\end{aligned}$$

в) Эту задачу также можно решать через ряды, но проще воспользоваться уже доказанными соотношениями: выразив $J_{\nu}(z)$ из первого равенства, подставим во второе:

$$\frac{1}{2} (J_{\nu+1}(z) + J_{\nu-1}(z)) - J_{\nu+1}(z) = J'_{\nu}(z). \quad \boxtimes$$

2.3. Доказать равенство

$$\frac{d}{dz} \left[z^{-\nu} J_{\nu}(z) \right] = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z).$$

Снова воспользуемся уже доказанным соотношением:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \left[z^{-\nu} J_{\nu}(z) \right] &= -\nu z^{-\nu-1} J_{\nu}(z) + z^{-\nu} J'_{\nu}(z) = \\
&= -\nu z^{-\nu-1} J_{\nu}(z) + z^{-\nu} \left[\frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) - J_{\nu+1}(z) \right] = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z). \quad \boxtimes
\end{aligned}$$

2.4. Доказать, что

$$\begin{aligned}
\text{а)} \quad J_{1/2}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z; \\
\text{б)} \quad J_{3/2}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right).
\end{aligned}$$

Для случая а) используем представление функции Бесселя через ряд:

$$J_{1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1/2}}{k! \Gamma(k+3/2)} = \sqrt{\frac{z}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k} 2^{-2k}}{k! \Gamma(k+3/2)} \cdot \frac{z}{z}.$$

Для вычисления гамма-функции воспользуемся формулой (1.2.124)

$$\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) = \left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} \sqrt{\pi}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} J_{1/2}(z) &= \sqrt{\frac{z}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k} 2^{-2k}}{k! \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} \sqrt{\pi}} \cdot \frac{z}{z} = \\ &= \frac{2}{z\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{z}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)(2k)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z. \quad \boxtimes \end{aligned}$$

Во втором случае используем решение предыдущей задачи:

$$\begin{aligned} J_{3/2}(z) &= -z^{1/2} \frac{d}{dz} \left[z^{-1/2} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \right] = \\ &= -\sqrt{z} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dz} \frac{\sin z}{z} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right). \quad \boxtimes \end{aligned}$$

2.5. Доказать, что функции

$$J_{\mathbf{v}}(z) \quad \text{и} \quad Y_{\mathbf{v}}(z) = \frac{J_{\mathbf{v}}(z) \cos \pi \mathbf{v} - J_{-\mathbf{v}}(z)}{\sin \pi \mathbf{v}}$$

линейно независимы.

Ранее была доказана линейная независимость функций $J_{\mathbf{v}}(x)$, $J_{-\mathbf{v}}(x)$:
вронскиан (1.2.18) в случае $\mathbf{v} \notin \mathbb{Z}$ отличен от нуля:

$$W[J_{\mathbf{v}}, J_{-\mathbf{v}}] = -\frac{2 \sin \pi \mathbf{v}}{\pi z}. \quad (2.2.4)$$

Рассмотрим теперь определитель Вронского для функций $J_{\mathbf{v}}(z)$ и $Y_{\mathbf{v}}(z)$:

$$\begin{aligned} W[J_{\mathbf{v}}, Y_{\mathbf{v}}] &= \begin{vmatrix} J_{\mathbf{v}} & Y_{\mathbf{v}} \\ J'_{\mathbf{v}} & Y'_{\mathbf{v}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{\mathbf{v}} & \frac{J_{\mathbf{v}} \cos \pi \mathbf{v} - J_{-\mathbf{v}}}{\sin \pi \mathbf{v}} \\ J'_{\mathbf{v}} & \frac{J'_{\mathbf{v}} \cos \pi \mathbf{v} - J'_{-\mathbf{v}}}{\sin \pi \mathbf{v}} \end{vmatrix} = \\ &= J_{\mathbf{v}} J'_{\mathbf{v}} \frac{\cos \pi \mathbf{v}}{\sin \pi \mathbf{v}} - J_{\mathbf{v}} J'_{-\mathbf{v}} \frac{1}{\sin \pi \mathbf{v}} - J_{\mathbf{v}} J'_{\mathbf{v}} \frac{\cos \pi \mathbf{v}}{\sin \pi \mathbf{v}} + J'_{\mathbf{v}} J_{-\mathbf{v}} \frac{1}{\sin \pi \mathbf{v}} = \\ &= -\frac{1}{\sin \pi \mathbf{v}} (J_{\mathbf{v}} J'_{-\mathbf{v}} - J'_{\mathbf{v}} J_{-\mathbf{v}}) = -\frac{1}{\sin \pi \mathbf{v}} W[J_{\mathbf{v}}, J_{-\mathbf{v}}] = \frac{2}{\pi z} \neq 0. \quad \boxtimes \end{aligned}$$

2.6. Из рекуррентного соотношения для функции Бесселя 1-го рода получить рекуррентное соотношение для функции Неймана $Y_{\mathbf{v}}(z)$.

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{v}+1}(z) + J_{\mathbf{v}-1}(z) &= \frac{2\mathbf{v}}{z} J_{\mathbf{v}}(z); \\ J_{-\mathbf{v}+1}(z) + J_{-\mathbf{v}-1}(z) &= -\frac{2\mathbf{v}}{z} J_{-\mathbf{v}}(z). \end{aligned}$$

Домножим первое равенство на $\cos \pi \nu$ и сложим:

$$\begin{aligned} J_{\nu+1}(z) \cos \pi \nu + J_{-(\nu+1)}(z) + J_{\nu-1}(z) \cos \pi \nu + J_{-(\nu-1)}(z) &= \\ &= \frac{2\nu}{z} [J_{\nu}(z) \cos \pi \nu + J_{-\nu}(z)]. \end{aligned}$$

Наконец, разделим полученное равенство почленно на $\sin \pi \nu$ и применим формулы приведения:

$$\begin{aligned} \frac{J_{\nu+1}(z) \cos \pi \nu + J_{-(\nu+1)}(z)}{\sin \pi \nu} + \frac{J_{\nu-1}(z) \cos \pi \nu + J_{-(\nu-1)}(z)}{\sin \pi \nu} &= \\ &= \frac{2\nu}{z} \cdot \frac{J_{\nu}(z) \cos \pi \nu + J_{-\nu}(z)}{\sin \pi \nu}; \\ \frac{-J_{\nu+1}(z) \cos \pi(\nu+1) + J_{-(\nu+1)}(z)}{\sin \pi(\nu+1)} + \frac{-J_{\nu-1}(z) \cos \pi(\nu-1) + J_{-(\nu-1)}(z)}{\sin \pi(\nu-1)} &= \\ &= \frac{2\nu}{z} \cdot \frac{J_{\nu}(z) \cos \pi \nu + J_{-\nu}(z)}{\sin \pi \nu}; \\ Y_{\nu+1}(z) + Y_{\nu-1}(z) &= \frac{2\nu}{z} Y_{\nu}(z). \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

2.7. Доказать рекуррентное соотношение

$$J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) = J'_{\nu}(z). \quad (2.2.5)$$

2.8. Доказать равенство $\frac{d}{dz} [z^{\nu} J_{\nu}(z)] = z^{\nu} J_{\nu-1}(z)$.

2.9. Доказать, что

$$\begin{aligned} J_{-1/2}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z; \\ J_{-3/2}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(-\frac{\cos z}{z} - \sin z \right). \end{aligned}$$

2.10. Выразить $Y_{\pm 1/2}$, $H_{\pm 1/2}^{(1)}$, $H_{\pm 1/2}^{(2)}$ через элементарные функции.

2.11. Вывести рекуррентную формулу

$$\int_0^z t^{\mu} J_{\nu}(t) dt = z^{\mu} J_{\nu+1}(z) - (\mu - \nu - 1) \int_0^z t^{\mu-1} J_{\nu+1}(t) dt.$$

(воспользоваться формулой $\frac{d}{dz} [z^\nu J_\nu(z)] = z^\nu J_{\nu-1}(z)$ и проинтегрировать по частям).

2.12. Доказать, что функции $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ и $H_\nu^{(1,2)}(z)$ попарно линейно независимы.

2.13. Из рекуррентного соотношения для функции Бесселя 1-го рода получить рекуррентное соотношение для функций Ханкеля $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$.

2.2.2. Производящая функция

Примеры решения задач

2.14. Получить разложение для производящей функции

$$\Phi(z, t) \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left[\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n. \quad (2.2.6)$$

Представим функцию как произведение двух рядов

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{zt}{2} \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k t^k}{k! 2^k}; \\ \exp \left[-\frac{zt^{-1}}{2} \right] &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^m t^{-m}}{m! 2^m}, \end{aligned}$$

первый из которых сходится для любых z, t , второй — для любых z и для $t \neq 0$.

$$\Phi(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{k+m} t^{k-m}}{k! m! 2^{k+m}}.$$

Рассмотрим три случая.

а) $k > m$. Пусть $k = m + n$, тогда коэффициент при t^n имеет вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+n}}{m! (m-n)! 2^{2m+n}} = J_n(z).$$

б) $k < m$. Положим $k = m - n$, тогда коэффициент при t^{-n}

$$\sum_{\substack{m=n \\ m=0}}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m-n}}{m! (m-n)! 2^{2m-n}} = J_{-n}(z)$$

(все слагаемые, для которых $m < n$, равны нулю по свойству факториала $(m - n)!$).

в) $k = m$. Коэффициент при t^0

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{m! m! 2^{2m}} = J_0(z).$$

Таким образом,

$$\Phi(z, t) = \exp \left[\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n,$$

причем ряд абсолютно сходится для любых z и для любых $t \neq 0$. $\square$

2.15. Получить следующие разложения:

$$\text{а)} \quad \cos(z \sin \varphi) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \cos(2n\varphi); \quad (2.2.7)$$

$$\text{б)} \quad \sin(z \sin \varphi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z) \sin[(2n-1)\varphi]. \quad (2.2.8)$$

Пусть $t = e^{i\varphi}$, тогда $t^{-1} = e^{-i\varphi}$ и

$$\Phi(z, e^{i\varphi}) = e^{ix \sin \varphi} = \cos(z \sin \varphi) + i \sin(z \sin \varphi).$$

Далее,

$$J_n(z) t^n + J_{-n}(z) t^{-n} = J_n(z) [t^n + (-1)^n t^{-n}] = J_n(z) [e^{in\varphi} + (-1)^n e^{-in\varphi}],$$

откуда

$$J_n(z) t^n + J_{-n}(z) t^{-n} = \begin{cases} 2J_n(z) \cos n\varphi, & n \text{ четное,} \\ 2iJ_n(z) \sin n\varphi, & n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Формула (2.2.6) принимает вид

$$\begin{aligned} & \cos(z \sin \varphi) + i \sin(z \sin \varphi) = \\ & = J_0(z) + 2iJ_1(z) \sin \varphi + 2J_2(z) \cos 2\varphi + 2iJ_3(z) \sin 3\varphi + 2J_4(z) \cos 4\varphi + \dots \end{aligned}$$

Запишем теперь ее, заменив z на $-z$:

$$\begin{aligned} & \cos(z \sin \varphi) - i \sin(z \sin \varphi) = \\ & = J_0(z) - 2iJ_1(z) \sin \varphi + 2J_2(z) \cos 2\varphi - 2iJ_3(z) \sin 3\varphi + 2J_4(z) \cos 4\varphi - \dots \end{aligned}$$

Складывая и вычитая эти равенства, получаем искомые разложения. $\square$

2.16. Получить следующие разложения:

$$a) \quad 1 = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z);$$

$$б) \quad \cos z = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(z);$$

$$в) \quad z \cos z = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n-1)^2 J_{2n-1}(z).$$

а) Пусть $\varphi = 0$, тогда искомое разложение следует из (2.2.7).

б) Это разложение получается из (2.2.7) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

в) Продифференцируем (2.2.8) дважды по переменной φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \sin(z \sin \varphi) &= -z^2 \cos^2 \varphi \sin(z \sin \varphi) - z \sin \varphi \cos(z \sin \varphi); \\ \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z) \sin[(2n-1)\varphi] &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z) (2n-1)^2 \sin[(2n-1)\varphi]. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, тогда

$$z \cos z = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n-1)^2 J_{2n-1}(z). \quad \square$$

2.17. Доказать теорему сложения

$$J_n(z_1 + z_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-m}(z_1) J_m(z_2). \quad (2.2.9)$$

Из формулы (2.2.6) имеем

$$\Phi(z_1 + z_2, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z_1 + z_2) t^n.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \Phi(z_1 + z_2, t) &= \exp \left[\frac{1}{2} (z_1 + z_2) (t - t^{-1}) \right] = \Phi(z_1, t) \Phi(z_2, t) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z_1) t^k \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z_2) t^m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_k(z_1) J_m(z_2) t^{k+m} = \\ &= [k+m=n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-m}(z_1) J_m(z_2) t^n. \end{aligned}$$

Сравнивая в полученных равенствах коэффициенты при t^n , приходим к соотношению (2.2.9). $\boxtimes$

2.18. *Получить интегральное представление (интеграл Бесселя):*

$$J_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(m\varphi - z \sin \varphi) d\varphi. \quad (2.2.10)$$

Вернемся к соотношениям (2.2.7) и (2.2.8):

$$\begin{aligned} \cos(z \sin \varphi) &= J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \cos 2n\varphi; \\ \sin(z \sin \varphi) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z) \sin(2n-1)\varphi. \end{aligned}$$

Домножим почленно первое равенство на $\cos m\varphi$, второе на $\sin m\varphi$ и проинтегрируем каждое по φ от 0 до π :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos m\varphi \cos(z \sin \varphi) d\varphi &= J_0(z) \int_0^\pi \cos m\varphi d\varphi + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \int_0^\pi \cos m\varphi \cos 2n\varphi d\varphi; \\ \int_0^\pi \sin m\varphi \sin(z \sin \varphi) d\varphi &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z) \int_0^\pi \sin m\varphi \sin(2n-1)\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Воспользуемся свойством ортогональности тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos m\varphi d\varphi &= \pi \delta_0^m; \\ \int_0^\pi \cos m\varphi \cos 2n\varphi d\varphi &= \frac{\pi}{2} \delta_{2n}^m; \\ \int_0^\pi \sin m\varphi \sin(2n-1)\varphi d\varphi &= \frac{\pi}{2} \delta_{2n-1}^m. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^{\pi} \cos m\varphi \cos(z \sin \varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & m \text{ нечетное,} \\ \pi J_m(z), & m \text{ четное, в том числе } 0; \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin m\varphi \sin(z \sin \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi J_m(z), & m \text{ нечетное,} \\ 0, & m \text{ четное} \end{cases}$$

или

$$\int_0^{\pi} \cos m\varphi \cos(z \sin \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} [1 + (-1)^m] J_m(z);$$

$$\int_0^{\pi} \sin m\varphi \sin(z \sin \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} [1 - (-1)^m] J_m(z),$$

откуда

$$\begin{aligned} \pi J_m(z) &= \int_0^{\pi} [\cos m\varphi \cos(z \sin \varphi) + \sin m\varphi \sin(z \sin \varphi)] d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} \cos(m\varphi - z \sin \varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

что и дает интеграл Бесселя (2.2.10). $\square$

В силу четности косинуса и нечетности синуса полученное соотношение можно также записать в виде

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\varphi - z \sin \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m\varphi - z \sin \varphi)} d\varphi.$$

Задания для самостоятельной работы

2.19. Получить следующие разложения:

$$\text{а)} \quad \cos(z \cos \varphi) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(z) \cos(2n\varphi);$$

$$\text{б)} \quad \sin(z \cos \varphi) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(z) \cos[(2n+1)\varphi];$$

$$\text{в)} \quad \sin z = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} J_{2n-1}(z);$$

$$\text{г)} \quad z = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) J_{2n-1}(z);$$

$$\text{д)} \quad z \sin z = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n)^2 J_{2n}(z).$$

2.20. Доказать соотношения:

$$\text{а)} \quad J_{\nu}(z) = \frac{H_{\nu}^{(1)}(z) + H_{\nu}^{(2)}(z)}{2} = \frac{Y_{-\nu}(z) - Y_{\nu}(z) \cos \pi \nu}{\sin \pi \nu};$$

$$\text{б)} \quad J_{-\nu}(z) = \frac{e^{\nu \pi i} H_{\nu}^{(1)}(z) + e^{-\nu \pi i} H_{\nu}^{(2)}(z)}{2} = \frac{Y_{-\nu}(z) \cos \pi \nu - Y_{\nu}(z)}{\sin \pi \nu};$$

$$\text{в)} \quad Y_{\nu}(z) = \frac{J_{\nu}(z) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi \nu} = \frac{H_{\nu}^{(1)}(z) - H_{\nu}^{(2)}(z)}{2i};$$

$$\text{г)} \quad Y_{-\nu}(z) = \frac{J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z) \cos \pi \nu}{\sin \pi \nu} = \frac{e^{\nu \pi i} H_{\nu}^{(1)}(z) - e^{-\nu \pi i} H_{\nu}^{(2)}(z)}{2i};$$

$$\text{д)} \quad H_{\nu}^{(1)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-\nu \pi i} J_{\nu}(z)}{i \sin \pi \nu} = \frac{Y_{-\nu}(z) - e^{-\nu \pi i} Y_{\nu}(z)}{\sin \pi \nu};$$

$$\text{е)} \quad H_{\nu}^{(2)}(z) = \frac{e^{\nu \pi i} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z)}{i \sin \pi \nu} = \frac{Y_{-\nu}(z) - e^{\nu \pi i} Y_{\nu}(z)}{\sin \pi \nu};$$

$$\text{ж)} \quad H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{\nu \pi i} H_{\nu}^{(1)}(z) \quad H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-\nu \pi i} H_{\nu}^{(2)}(z).$$

2.2.3. Интегральные представления

Примеры решения задач

2.21. Вычислить интеграл Неймана

$$J_n^2(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} J_{2n}(2z \sin \varphi) d\varphi. \quad (2.2.11)$$

Из формулы

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \varphi - n\varphi) d\varphi$$

для интеграла Бесселя следует, что

$$J_n^2(z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in(\theta+\varphi)} e^{-iz(\sin \theta + \sin \varphi)} d\theta d\varphi.$$

Чтобы свести двойной интеграл к обыкновенному, перейдем к новым переменным:

$$\theta - \varphi = 2\xi; \quad \theta + \varphi = 2\eta.$$

При этом якобиан преобразования

$$\frac{\partial^2(\theta, \varphi)}{\partial(\xi, \eta)^2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \end{vmatrix} = 2.$$

Далее,

$$\sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2} = \sin \eta \cos \xi.$$

Тогда

$$J_n^2(z) = \frac{1}{2\pi^2} \iint_D \exp(2ni\eta - 2iz \sin \eta \cos \xi) d\xi d\eta, \quad (2.2.12)$$

где областью интегрирования D является квадрат, для которого

$$-\pi \leq \xi - \eta \leq \pi, \quad -\pi \leq \xi + \eta \leq \pi$$

(рисунок 2.2.1, а).

Подынтегральное выражение не изменяется при одновременном увеличении ξ и η на π или при одновременном увеличении ξ на π и уменьшении η на π . В силу свойства аддитивности интеграл (2.2.12) равен сумме интегралов по четырем областям, обозначенным как A , B , C , D . Применив к областям A и B указанную процедуру, переместим их на позиции $A1$ и $B1$ (рисунок 2.2.1, б). Теперь областью интегрирования является прямоугольник

$$0 \leq \xi \leq \pi, \quad -\pi \leq \eta \leq \pi.$$

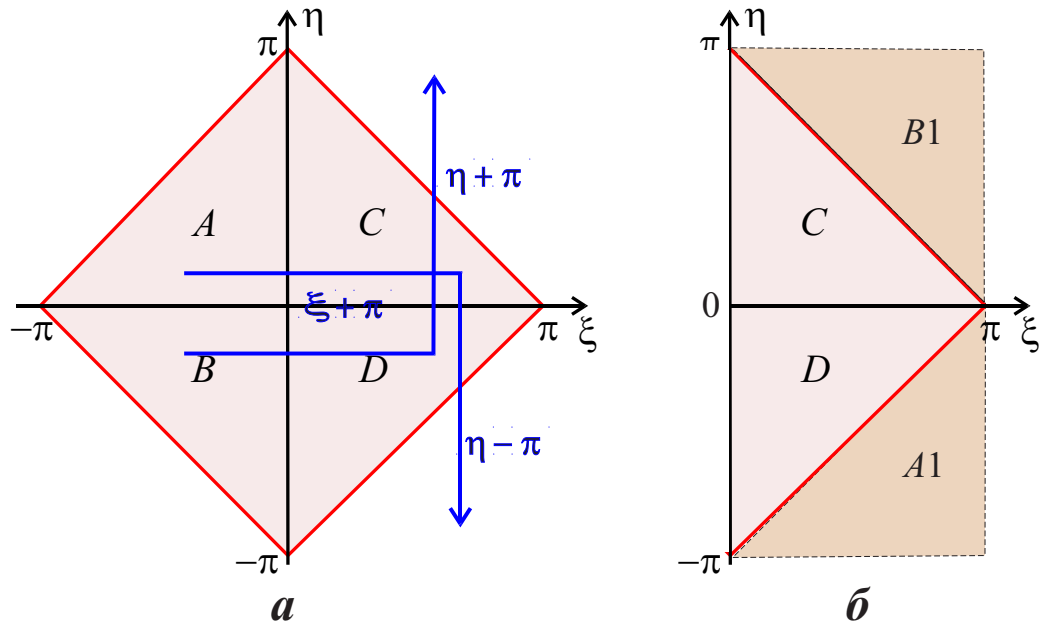


РИС. 2.2.1. К вычислению интеграла Неймана

Отсюда

$$J_n^2(z) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \exp(2ni\eta - 2iz \sin \eta \cos \xi) d\xi d\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_{2n}(2z \cos \xi) d\xi.$$

Разбив полученный интеграл на два, сделаем в каждом слагаемом замену переменной ξ на $\frac{\pi}{2} \mp \varphi$:

$$\begin{aligned} J_n^2(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_{2n}(2z \cos \xi) d\xi = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_{2n}(2z \cos \xi) d\xi}_{\xi=\pi/2-\varphi} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi J_{2n}(2z \cos \xi) d\xi}_{\xi=\pi/2+\varphi} = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_{2n}(2z \sin \varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_{2n}(2z \sin \varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Если вместо интегрирования по ξ провести интегрирование по η , то по-

лучим

$$\begin{aligned}
 J_n^2(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_0(2z \sin \eta) e^{2ni\eta} d\eta = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_0(2z \sin \eta) \cos 2n\eta d\eta = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} J_0(2z \sin \eta) \cos 2n\eta d\eta.
 \end{aligned}$$

2.22. Вычислить интеграл Вебера

$$\mathcal{I} = \int_0^{\infty} \exp(-a^2 x^2) J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx = \quad (2.2.14)$$

$$= \frac{b^{\nu}}{(2a^2)^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right), \quad a > 0, \quad b > 0, \quad \nu > -1. \quad (2.2.15)$$

Воспользуемся разложением функции Бесселя в равномерно сходящийся степенной ряд:

Рассмотрим только интеграл, сделав замену переменной $a^2 x^2 = t$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} x^{2k+2\nu+1} dx &= \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^{k+\nu+1/2} t^{-1/2}}{a^{2k+2\nu+1} 2a} dt = \\
 &= \frac{1}{2a^{2k+2\nu+2}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{k+\nu} dt = \frac{1}{2(a^{k+\nu+1})^2} \Gamma(k+\nu+1).
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{2k+\nu} \frac{\Gamma(k+\nu+1)}{2(a^{k+\nu+1})^2} = \\
 \frac{b^{\nu}}{(2a^{\nu+1})^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^{2k}}{2^{2k} (a^2)^k k!} &= \frac{b^{\nu}}{(2a^{\nu+1})^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)^k}{k!} = \frac{b^{\nu}}{(2a^2)^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right). \quad \boxtimes
 \end{aligned}$$

2.23. Получить формулу Пуассона

$$\begin{aligned}
 J_{\nu}(z) &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos zu \, du = \\
 &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \cos(z \cos \varphi) \sin^{2\nu} \varphi \, d\varphi, \quad \nu > -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Воспользуемся формулами (1.2.137) и (1.2.138) для бета-функции:

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt, \quad a > 0, \, b > 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} &= \frac{B(k+\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^1 t^{k-1/2}(1-t)^{\nu-1/2} dt.
 \end{aligned}$$

Пусть теперь $t = u^2$.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} &= \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^1 u^{2k-1} (1-u^2)^{\nu-1/2} 2u \, du = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 u^{2k} (1-u^2)^{\nu-1/2} \, du.
 \end{aligned}$$

Запишем с учетом полученного соотношения разложение функции Бесселя в степенной ряд и поменяем порядок суммирования и интегрирования:

$$\begin{aligned}
 J_{\nu}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!} \cdot \frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!} \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 u^{2k} (1-u^2)^{\nu-1/2} \, du = \\
 &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 \left[(1-u^2)^{\nu-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (zu)^{2k}}{2^{2k} \Gamma(k+1) \Gamma(k+\frac{1}{2})} \right] du.
 \end{aligned}$$

Из формулы удвоения (1.2.130)

$$\Gamma(2a) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} 2^{2a} \Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)$$

следует при $a = k + \frac{1}{2}$

$$2^{2k} \Gamma(k+1) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2k+1) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) (2k)!.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_{\nu}(z) &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 \left[(1-u^2)^{\nu-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (zu)^{2k}}{(2k)!} \right] du = \\ &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{\nu-1/2} \cos(zu) du. \end{aligned}$$

Первое выражение для формулы Пуассона получено. Для получения второго заменим u на $\cos \varphi$.

$$\begin{aligned} J_{\nu}(z) &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{\nu-1/2} \cos(zu) du = \\ &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \cos(z \cos \varphi) \sin^{2\nu} \varphi d\varphi. \quad \boxtimes \end{aligned}$$

При $\nu = 0$ формула упрощается:

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \cos \varphi) d\varphi. \quad (2.2.16)$$

2.24. Вычислить интеграл

$$\mathcal{I} = \int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad a > 0, b > 0.$$

Воспользуемся интегралом Бесселя (2.2.10)

$$J_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(m\varphi - z \sin \varphi) d\varphi.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ax} dx \int_0^{\pi} \cos(bx \sin \varphi) d\varphi = \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx \sin \varphi) dx.
\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно внутренний интеграл:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \cos(bx \sin \varphi) dx = -\frac{1}{a} \int_0^{\infty} \cos(bx \sin \varphi) de^{-ax} = \\
&= -\frac{1}{a} e^{-ax} \cos(bx \sin \varphi) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-ax} d \cos(bx \sin \varphi) = \\
&= \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-ax} b \sin \varphi \sin(bx \sin \varphi) dx = \\
&= \frac{1}{a} + \frac{b \sin \varphi}{a^2} e^{-ax} b \sin \varphi \sin(bx \sin \varphi) \Big|_0^{\infty} - \frac{b \sin \varphi}{a^2} b \sin \varphi \cdot \mathcal{I}_1,
\end{aligned}$$

откуда

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{a} - \frac{b \sin \varphi}{a^2} b \sin \varphi \cdot \mathcal{I}_1$$

и

$$\mathcal{I}_1 = \frac{a}{a^2 + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

Вернемся к искомому интегралу, сделав замену $\operatorname{tg} \varphi = t$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{a}{a^2 + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2 + b^2 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)} = \\
&= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(a^2 + b^2)(1+t^2) - b^2} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + a^2} = \\
&\frac{2a}{\pi} (a^2 + b^2) \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \frac{a^2}{a^2+b^2}} = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{\pi(a^2+b^2)} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} t \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad \boxtimes
\end{aligned}$$

2.25. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + \frac{2p+1}{x}y' + y = 0$$

с помощью замены $y = x^{-p}u$.

Вычислив первую и вторую производные от функции $x^{-p}u$, подставим их в уравнение. После упрощения имеем

$$x^{-p}u'' + x^{-p-1}u' + (x^2 - p^2)x^{-p-2}u = 0;$$

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - p^2)u = 0.$$

$$u(x) = C_1J_p(x) + C_2Y_p(x);$$

$$y(x) = x^{-p}[C_1J_p(x) + C_2Y_p(x)].$$

Задания для самостоятельной работы

2.26. Доказать, что $W[J_\nu(z), H_\nu^{(2)}(z)] = -\frac{2i}{\pi z}$.

2.27. Доказать, что $W[I_\nu(z), K_\nu(z)] = -\frac{1}{z}$.

2.28. Доказать, что $\exp \frac{x}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) t^n$

2.29. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y$$

путем замены искомой функции $y = zx$.

2.30. Решить дифференциальное уравнение

$$x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{9} \right) y = 0.$$

2.31. Доказать рекуррентное соотношение:

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x).$$

Ответы

2.29. $y(x) = C_1J_{\sqrt{m^2+1}}(x) + C_2J_{-\sqrt{m^2+1}}(x).$

2.30. $y(x) = C_1J_{1/3}(2x) + C_2J_{-1/3}(2x).$

2.2.4. Сферические и модифицированные функции

Примеры решения задач

2.32. Получить дифференциальное уравнение для сферических функций Бесселя

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+1/2}(z). \quad (2.2.17)$$

Запишем дифференциальное уравнение для функции Бесселя первого рода порядка $n + 1/2$:

$$z^2 J''_{n+1/2}(z) + z J'_{n+1/2}(z) + \left(z^2 - (n + 1/2)^2 \right) J_{n+1/2}(z) = 0$$

и заменим эту функцию на сферическую

$$J_{n+1/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} j_n(z).$$

Подставим функцию и ее производные в уравнение, сократив на постоянный множитель $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$:

$$\begin{aligned} z^2 \left[\sqrt{z} j''_n + \frac{1}{\sqrt{z}} j'_n(z) - \frac{1}{4z\sqrt{z}} j_n(z) \right] + \\ + z \left[\sqrt{z} j'_n(z) + \frac{1}{2\sqrt{z}} j_n(z) \right] + \left[z^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] j_n(z) = 0. \end{aligned}$$

Собрав коэффициенты при сферической функции и ее производных, получаем искомое уравнение:

$$z^2 j''_n(z) + 2z j'_n(z) + [z^2 - n(n + 1)] j_n(z) = 0.$$

2.33. Найти вронскианы для сферических функций Бесселя:

$$\begin{aligned} W[j_n(z), y_n(z)] &= z^{-2}; \\ W[h_n^{(1)}(z), h_n^{(2)}(z)] &= -2iz^{-2}. \end{aligned}$$

Выразим сферическую функцию Бесселя второго рода через функцию Неймана (для удобства записи будем опускать аргумент):

$$\begin{aligned} y_n &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{n+1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \cdot \frac{J_{n+1/2} \cos \pi(n + 1/2) - J_{-n-1/2}}{\sin \pi(n + 1/2)} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} (-1)^{n+1} J_{-n-1/2}. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Найдем вронскиан:

$$W[j_n, y_n] = \frac{\pi}{2z} \begin{vmatrix} J_{n+1/2} & (-1)^{n+1} J_{-n-1/2} \\ J'_{n+1/2} & (-1)^{n+1} J'_{-n-1/2} \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2z} (-1)^{n+1} W[J_{n+1/2}, J_{-n-1/2}].$$

Ранее показано (1.2.18), что

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = -\frac{2 \sin \pi \nu}{\pi z}, \quad (2.2.19)$$

поэтому

$$W[j_n, y_n] = \frac{\pi}{2z} (-1)^{n+1} \left(-\frac{2 \sin \pi \nu}{\pi z} \right) = \frac{1}{z^2} \neq 0$$

и, таким образом, функции $j_n(z)$ и $y_n(z)$ линейно независимы.

Для нахождения второго вронскиана выразим сферические функции третьего рода через $j_n(z)$ и $y_n(z)$:

$$\begin{aligned} W[h_n^{(1)}(z), h_n^{(2)}(z)] &= W[j_n + iy_n, j_n - iy_n] = \\ &= \begin{vmatrix} j_n + iy_n & j_n - iy_n \\ j'_n + iy'_n & j'_n - iy'_n \end{vmatrix} = (j_n + iy_n)(j'_n - iy'_n) - (j_n - iy_n)(j'_n + iy'_n) = \\ &= -2i(j_n y'_n - j'_n y_n) = -2iW[j_n, y_n] = -\frac{2i}{z^2}. \end{aligned}$$

Функции $h_n^{(1)}(z)$ и $h_n^{(2)}(z)$ также линейно независимы.

2.34. Доказать рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{n-1}(z) + \mathcal{S}_{n+1}(z) &= \frac{2n+1}{z} \mathcal{S}_n(z); \\ n\mathcal{S}_{n-1}(z) - (n+1)\mathcal{S}_{n+1}(z) &= (2n+1)\mathcal{S}'_n(z), \end{aligned}$$

где $\mathcal{S}$ - любая сферическая функция Бесселя.

В разделе 2.2.1 показано, что для функций Бесселя, Неймана и Ханкеля выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\nu-1}(z) - \mathcal{Z}_{\nu+1}(z) &= 2\mathcal{Z}'_\nu(z); \\ \frac{\nu}{z}\mathcal{Z}_\nu(z) - \mathcal{Z}_{\nu+1}(z) &= \mathcal{Z}'_\nu(z); \\ \mathcal{Z}_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z}\mathcal{Z}_\nu(z) &= \mathcal{Z}'_\nu(z); \\ \mathcal{Z}_{\nu-1}(z) + \mathcal{Z}_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z}\mathcal{Z}_\nu(z), \end{aligned}$$

где $\mathcal{Z}$ означает $J, Y, H^{(1)}, H^{(2)}$ или любую линейную комбинацию этих функций, коэффициенты которой не зависят от z и ν .

Нетрудно показать, что $\mathcal{S}_n = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \mathcal{Z}_{n+1/2}$. Сделаем такую замену в первом соотношении, которое следует доказать, сократив на множитель $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \mathcal{Z}_{n-1/2} + \frac{1}{\sqrt{z}} \mathcal{Z}_{n+3/2} = \frac{2n+1}{z} \frac{1}{\sqrt{z}} \mathcal{Z}_{n+1/2}(z),$$

что при замене n на $\nu - 1/2$ дает формулу (2.2.1).

Второе соотношение доказывается так же, только после замены функции следует взять производную произведения в правой части:

$$n \frac{1}{\sqrt{z}} \mathcal{Z}_{n-1/2}(z) - (n+1) \frac{1}{\sqrt{z}} \mathcal{Z}_{n+3/2}(z) = (2n+1) \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \mathcal{Z}_{n+1/2}(z) \right)'.$$

В результате приходим к формуле (2.2.3).

2.35. Найти решения дифференциального уравнения

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dw}{dx} \right) - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) w = 0.$$

Раскроем скобки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} w'' + \frac{1}{x} w' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) w &= 0; \\ x^2 w'' + x w' + (x^2 + \nu^2) w &= 0. \end{aligned}$$

Это модифицированное уравнение Бесселя (1.2.34), его полное решение

$$w(x) = C_1 J_\nu(ix) + C_2 Y_\nu(ix) = D_1 I_\nu(x) + D_2 K_\nu(x),$$

где $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода (функции Инфельда и Макдональда).

2.36. Доказать рекуррентные соотношения:

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x); \quad (2.2.20)$$

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x). \quad (2.2.21)$$

Воспользуемся соотношением (1.2.37)

$$I_{\nu}(x) = i^{-\nu} J_{\nu}(ix).$$

Для (2.2.20) имеем

$$\begin{aligned} i^{-\nu+1} J_{\nu-1}(ix) - i^{-\nu-1} J_{\nu+1}(ix) &= \frac{2\nu}{x} i^{\nu} J_{\nu}(ix); \\ J_{\nu-1}(ix) + J_{\nu+1}(ix) &= \frac{2\nu}{ix} J_{\nu}(ix). \quad \boxtimes \end{aligned}$$

Для (2.2.21):

$$\begin{aligned} i^{-\nu+1} J_{\nu-1}(ix) + i^{-\nu-1} J_{\nu+1}(ix) &= 2i^{-\nu} J'_{\nu}(ix); \\ J_{\nu-1}(ix) + J_{\nu+1}(ix) &= 2i^{-1}(ix)' J'_{\nu}(ix) = 2J'_{\nu}(ix), = . \quad \boxtimes \end{aligned}$$

2.37. Доказать, что

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta.$$

Снова используем соотношения (2.2.7) и (2.2.8):

$$\begin{aligned} \cos(z \sin \varphi) &= J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \cos 2n\varphi; \\ \sin(z \sin \varphi) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z) \sin(2n-1)\varphi. \end{aligned}$$

Пусть теперь $z = ix$, $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$, тогда

$$\begin{aligned} \cos(ix \cos \theta) &= J_0(ix) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(ix) \cos(2n\theta + \pi n); \\ \sin(ix \cos \theta) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(ix) \sin[(2n-1)\theta + \pi n - \frac{\pi}{2}]. \end{aligned}$$

Из формулы (1.2.37) имеем

$$\begin{aligned} J_{2n}(ix) &= i^{2n} I_{2n}(x) = (-1)^n I_{2n}(x); \\ J_{2n-1}(ix) &= i^{2n-1} I_{2n-1}(x) = -i(-1)^n I_{2n-1}(x); \\ J_0(ix) &= I_0(x). \end{aligned}$$

Теперь

$$\begin{aligned}\cos(x \cos \theta) &= I_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(x) \cos(2n\theta); \\ \sin(x \cos \theta) &= 2i \sum_{n=1}^{\infty} I_{2n-1}(x) \cos((2n-1)\theta),\end{aligned}$$

откуда

$$e^{x \cos \theta} = I_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(x) \cos(n\theta).$$

Умножив это равенство почленно на $\cos m\theta$ и проинтегрировав от 0 до 2π , приходим к искомому интегралу. $\square$

Задания для самостоятельной работы

2.38. Доказать, что

$$W \left[J_{\nu}(z), H_{\nu}^{(2)}(z) \right] = -\frac{2i}{\pi z}.$$

2.39. Доказать, что

$$W \left[I_{\nu}(z), K_{\nu}(z) \right] = -\frac{1}{z}.$$

2.40. Доказать, что

$$\exp \frac{x}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) t^n.$$

2.41. Доказать рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{z} \mathcal{S}_n(z) + \mathcal{S}'_n(z) &= \mathcal{S}_{n-1}(z); \\ \frac{n}{z} \mathcal{S}_n(z) - \mathcal{S}'_n(z) &= \mathcal{S}_{n+1}(z),\end{aligned}$$

где $\mathcal{S}$ — любая сферическая функция Бесселя.

2.42. Доказать рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) &= -\frac{2\nu}{x} K_{\nu}(x); \\ K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) &= -2K'_{\nu}(x).\end{aligned}$$

2.3. Ортогональные полиномы и присоединенные функции Лежандра. Задачи

2.3.1. Полиномы Лежандра

Примеры решения задач

3.1. Показать, что полиномы, задаваемые формулой Родрига (1.3.33)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n,$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению Лежандра (1.3.44)

$$(1 - x^2) P_n''(x) - 2x P_n'(x) + n(n+1) P_n(x) = 0.$$

Рассмотрим тождество

$$(x^2 - 1) \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^n = 2nx (x^2 - 1)^n \quad (2.3.1)$$

(докажите его самостоятельно). Продифференцируем (2.3.1) $(n+1)$ раз:

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[(x^2 - 1) \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^n \right] &= \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[2nx (x^2 - 1)^n \right]; \\ (x^2 - 1) \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} (x^2 - 1)^n + C_{n+1}^1 2x (x^2 - 1) \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^n + \\ &+ C_{n+1}^2 2 (x^2 - 1) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n + 0 + \dots + 0 = \\ &= 2nC_{n+1}^0 x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^n + 2nC_{n+1}^1 1 \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \end{aligned}$$

Перенесем все слагаемые в одну сторону, заменив биномиальные коэффициенты C_{n+1}^k , где $k = 0, 1, 2$, их значениями и приведем подобные:

$$\begin{aligned} &- (x^2 - 1) \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} (x^2 - 1)^n - 2x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^n + \\ &+ \left(1 - 2n(n+1) - \frac{2n(n+1)}{2} \right) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = 0 \end{aligned}$$

и, наконец, домножив на $1/(2^n n!)$, имеем

$$(1-x^2) \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} (x^2-1)^n - 2x \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2-1)^n + \\ + n(n+1) \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n = 0,$$

что с учетом (1.3.33) совпадает уравнением (1.3.44). $\square$

3.2. Воспользовавшись формулой Родрига, получить соотношение ортогональности (1.3.53):

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_m^n, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим по отдельности два случая: когда степени полиномов различны и когда они равны.

a) $m \neq n$. Пусть для определенности $m > n$.

Заменим в интеграле (1.3.53) полиномы на их представления через формулу Родрига (1.3.33):

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 \frac{d^m}{dx^m} (x^2-1)^m \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n dx$$

и n раз проинтегрируем по частям (для удобства чтения будем далее опускать постоянный множитель).

$$\underbrace{\frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^2-1)^m}_{\Big|_{-1}^1} - \int_{-1}^1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^2-1)^m \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2-1)^n dx = \\ = \dots = (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} (x^2-1)^m \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^n dx$$

(выделенное слагаемое и его последующие аналоги на верхнем и нижнем пределах обращаются в нуль).

Поскольку

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^n = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} x^{2n} = (2n)!,$$

получаем

$$(-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} (x^2-1)^m dx = 0$$

за счет значений на верхнем и нижнем пределах и, таким образом, при $m \neq n$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0.$$

б) $m = n$.

Снова выражаем полиномы через формулу Родрига и n раз интегрируем по частям:

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} (2n)! \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx.$$

Вычислим отдельно интеграл, воспользовавшись интегральным представлением бета-функции (1.2.138):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx &= 2 \int_0^1 (1 - x^2)^n dx = [x^2 = t] = \\ &= 2 \int_0^1 (1 - t)^n \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \int_0^1 (1 - t)^n t^{-1/2} dt = B\left(n + 1, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} B\left(n + 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\Gamma(n + 1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n + 3/2)} = \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{n!\sqrt{\pi}}{(n + 1/2)(n - 1/2) \dots (1/2)\sqrt{\pi}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{n!2^{n+1}}{(2n + 1)!!} = \frac{2}{2n + 1} \end{aligned}$$

и окончательно

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n + 1} \delta_n^m. \quad \square$$

3.3. Получить рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра

$$\begin{aligned} (n + 1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) &= (2n + 1)xP_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) &= (n + 1)P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Для производящей функции полиномов Лежандра (1.3.37)

$$\Phi(x, t) = (1 - 2tx + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

выполняется тождество

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (t - x)\Phi = 0$$

(докажите это самостоятельно). В силу регулярности функции ряд в (1.3.37) сходится равномерно, поэтому при подстановке в тождество его можно почленно дифференцировать:

$$\begin{aligned} & (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + (t - x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \\ & = (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x)t^n + (t - x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0. \end{aligned}$$

Полученное выражение обращается в нуль при любом t только тогда, когда суммарный множитель при t^n равен нулю. Раскрыв скобки и приведя подобные, получаем

$$(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x). \quad \square$$

Самостоятельно выведите второе соотношение, используя тождество

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial \Phi}{\partial x} - t\Phi = 0.$$

3.4. Разложить функцию $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ в ряд по полиномам Лежандра и вычислить интеграл

$$\int_{-1}^1 f(x)P_3(x) dx.$$

Зная явный вид полиномов Лежандра (1.3.34), нетрудно решить обратную задачу, т. е. выразить степени переменной x через полиномы:

$$x^0 = P_0(x); \quad x^1 = P_1(x); \quad x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x); \quad x^3 = \frac{1}{5}P_1(x) + \frac{2}{5}P_3(x); \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 = \\
 &= P_0(x) + P_1(x) + \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{5}P_1(x) + \frac{2}{5}P_3(x) = \\
 &= \frac{4}{3}P_0(x) + \frac{8}{5}P_1(x) + \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{2}{5}P_3(x).
 \end{aligned}$$

Очевидно, что при подстановке полученного выражения в интеграл в силу свойства ортогональности ненулевой результат даст только слагаемое, содержащее третью степень полинома и, таким образом,

$$\int_{-1}^1 f(x)P_3(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{5}P_3(x)P_3(x) dx = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{2 \cdot 3 + 1} = \frac{4}{35}.$$

3.5. Вычислить интеграл Лапласа

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi \right)^n d\varphi. \quad (2.3.2)$$

В разделе 1.3.7.2 при выводе соотношения для производящей функции полиномов Лежандра была получена формула (1.3.36)

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{(u^2 - 1)^n}{2^n(u - x)^{n+1}} du,$$

где C' — замкнутый контур, окружающий точку $u = x$.

Пусть C' — окружность радиуса $|x^2 - 1|^{1/2}$ с центром в точке $u = x$. Тогда

$$u = x + (x^2 - 1)^{1/2} e^{i\varphi}, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

откуда

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2 - 1}e^{i\varphi} + (x^2 - 1)e^{2i\varphi}}{2(x^2 - 1)^{1/2}e^{i\varphi}} \right]^n i d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2e^{i\varphi}} + x + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2}e^{i\varphi} \right]^n d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right]^n d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi \right)^n d\varphi. \quad \boxtimes
 \end{aligned}$$

Важное следствие. Сделаем в интеграле Лапласа (2.3.2) замену переменной $x = \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$:

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi)^n d\varphi = \\ &= \frac{1}{4^n} \sum_{m=0}^n C_{2m}^n C_{2n-2m}^{n-m} \cos(n-2m)\theta. \end{aligned}$$

3.6. Доказать справедливость представления

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}.$$

Снова воспользуемся формулой Родрига (1.3.33):

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{2n-2k} = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k C_n^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{1}{2^n} \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad \square \end{aligned}$$

Замена верхнего предела суммирования с n на $\lfloor n/2 \rfloor$ объясняется тем, что при n -кратном дифференцировании слагаемые со степенями $2n-2k < n$, т.е. $k > \lfloor n/2 \rfloor$, обнуляются.

Задания для самостоятельной работы

3.7. Получить рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра

$$\begin{aligned} xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) &= nP_n(x), \quad n = 1, 2, \dots, \\ P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) &= (2n+1)P_n(x). \end{aligned}$$

3.8. Разложить в ряд по полиномам Лежандра функцию $f(x) = 3x^2 - x + 2$ и вычислить интегралы

$$\int_{-1}^1 f(x) P_2(x) dx, \quad \int_{-1}^1 f(x) P_3(x) dx.$$

3.9. Разложить в ряд по полиномам Лежандра $P_n(\cos \theta)$ функцию $f(\theta) = 1 + \cos \theta + \sin^2 \theta$.

3.10. Вычислить интеграл:

$$\int_{-1}^1 x^{2025} P_4(x) dx.$$

3.11. Вычислить интеграл, не выражая полином Лежандра через x :

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P_2(x) dx.$$

Подсказка: воспользуйтесь интегралом Лапласа (2.3.2) и следствиями из него:

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi)^n d\varphi = \\ &= \frac{1}{4^n} \sum_{m=0}^n C_n^{2m} C_{n-m}^{2n-2m} \cos(n-2m)\theta. \end{aligned}$$

Ответы

3.8. $4/5, 0$.

3.11. $-\pi/16$.

2.3.2. Полиномы Эрмита

Примеры решения задач

3.12. Получить соотношение для производящей функции полиномов Эрмита

$$\Phi(x, t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (2.3.3)$$

Представим регулярную функцию $\Phi(x, t)$ рядом Тейлора по степеням t :

$$\Phi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \Phi(x, 0) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{x^2-(x^2-2xt+t^2)} \Big|_{t=0} = \frac{e^{x^2}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \Big|_{t=0} = \\ &= [x-t=u] = \frac{e^{x^2}}{n!} (-1)^n \frac{d^n e^{-u^2}}{du^n} \Big|_{u=x}. \end{aligned}$$

Формула Родрига для полиномов Эрмита имеет вид (1.3.69)

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{e^{-x^2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2} \cdot 1),$$

таким образом, соотношение (2.3.3) доказано.

3.13. *Используя производящую функцию, получить формулу*

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

$$\Phi(x, t) = e^{2xt} e^{-t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2x)^m}{m!} t^m \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k}.$$

Пусть $m + 2k = n$, тогда

$$\Phi(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k} \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{(2x)^{n-2k}}{(n-2k)!} t^{n-2k} =$$

(если $k > n/2$, то $1/(n-2k)! = 0$)

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Сравнивая коэффициенты при t^n , получаем заданную формулу. $\square$

3.14. *Используя производящую функцию, получить рекуррентные формулы для полиномов Эрмита.*

Подставим в тождество

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - (2x - 2t)\Phi = 0$$

(докажите его самостоятельно) выражение (2.3.3) производящей функции через полиномы Эрмита, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} n t^{n-1} - (2x - 2t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n &= 0; \\ \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 0}}^{\infty} n \frac{H_n(x)}{n!} t^{n-1} - 2x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq -1}}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} &= 0; \\ \sum_{k=0}^{\infty} (n+1) \frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)n!} t^n - 2x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{n(n-1)!} n t^n &= 0 \end{aligned}$$

(подумайте, почему мы имели право изменять начальные значения индексов суммирования).

Приравняем к нулю суммарный коэффициент при t^n :

$$\frac{H_{n+1}(x)}{n!} - 2x \frac{H_n(x)}{n!} + 2n \frac{H_{n-1}(x)}{n!} = 0,$$

откуда

$$H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x) = 2xH_n(x). \quad \boxtimes \quad (2.3.4)$$

Самостоятельно получите рекуррентное соотношение

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x),$$

воспользовавшись тождеством

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - 2t\Phi = 0.$$

3.15. Вычислить норму полиномов Эрмита.

Ортогональность полиномов Эрмита разных степеней с весом e^{-x^2}

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = 0 \quad \text{при } m \neq n.$$

доказывается обычным образом (см. раздел 1.3.3.1 на с. 124).

Для нахождения нормы запишем рекуррентное соотношение (2.3.4) для $H_{n-1}(x)$ и для $H_n(x)$:

$$\begin{aligned} H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x) &= 0; \\ H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Домножим первое уравнение на $H_n(x)$, второе на $H_{n-1}(x)$ и вычтем второе равенство из первого:

$$\begin{aligned} H_n^2(x) - 2xH_n(x)H_{n-1}(x) + 2(n-1)H_n(x)H_{n-2}(x) - \\ - H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) + 2xH_n(x)H_{n-1}(x) - 2nH_{n-1}^2(x) = 0. \end{aligned}$$

Теперь домножим полученное равенство на e^{-x^2} и проинтегрируем от $-\infty$ до ∞ . При этом все слагаемые, содержащие произведения полиномов разных степеней, сведутся к нулю, в результате имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x)e^{-x^2} dx = 2n \int_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}^2(x)e^{-x^2} dx.$$

Выразим сходным образом $H_{n-1}(x)$ через $H_{n-2}(x)$ и так далее:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx &= 2n \int_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}^2(x) e^{-x^2} dx = \\ &= (2n)(2n-2) \int_{-\infty}^{\infty} H_{n-2}^2(x) e^{-x^2} dx = \dots = \\ &= (2n)(2n-2) \dots 2 \int_{-\infty}^{\infty} H_0^2(x) e^{-x^2} dx = [H_0(x) = 1] = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}. \quad (2.3.5)$$

3.16. Разложить по полиномам Эрмита функции $\text{ch } ax$, $\text{sh } ax$.

В соотношении (2.3.3) сделаем замены $2t = a$ и $2t = -a$:

$$\begin{aligned} e^{ax} &= e^{a^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^n; \\ e^{-ax} &= e^{a^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \left(\frac{-a}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\text{ch } ax = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} = \frac{1}{2} e^{a^2/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \cdot \frac{a^n + (-a)^n}{2^n}.$$

Член ряда в правой части отличен от нуля только для четных n . Заменяя n на $2k$, имеем

$$\text{ch } ax = e^{a^2/4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_{2k}(x)}{(2k)! 2^{2k}} a^{2k}.$$

Так же получается и разложение для $\text{sh } ax$:

$$\text{sh } ax = e^{a^2/4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_{2k+1}(x)}{(2k+1)! 2^{2k+1}} a^{2k+1}.$$

3.17. Получить интегральные представления

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos 2xt \, dt; \quad (2.3.6)$$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \sin 2xt \, dt \quad (2.3.7)$$

и свести их к виду

$$H_n(x) = \frac{2^n (-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 + 2txi} t^n \, dt. \quad (2.3.8)$$

Сначала решим задачу из курса теории функций комплексной переменной:

Вычислить с помощью интегральной теоремы Коши:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda \alpha x) \, dx, \quad \lambda > 0, \alpha > 0.$$

Построим прямоугольный контур (рисунок 2.3.1):

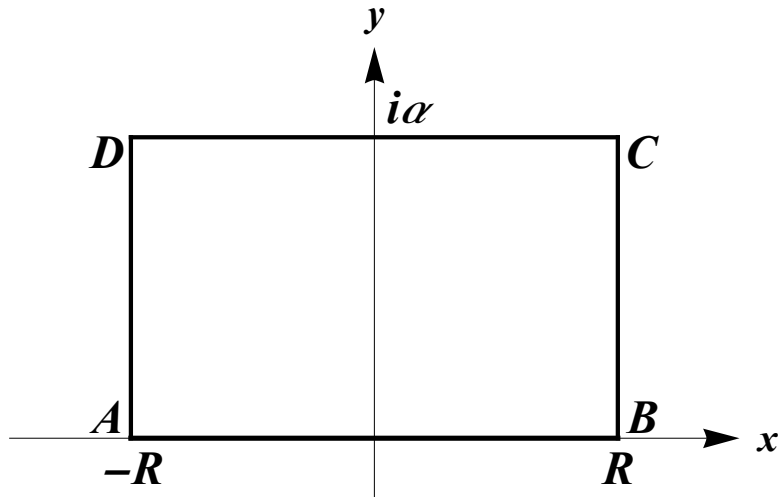


Рис. 2.3.1. К задаче 2.3.2

Функция $f(z) = e^{-\lambda z^2}$ аналитична внутри и на границе этого контура, поэтому

$$\int_{ABCD} f(\xi) \, d\xi = 0. \quad (2.3.9)$$

Разобьем интеграл на четыре, сделав в каждом случае соответствующую замену переменной:

$$\begin{aligned}
\int_{AB} &= \int_{-R}^R e^{-\lambda x^2} dx; \\
\int_{BC} &= i \int_0^\alpha e^{-\lambda(R+iy)^2} dy = i \int_0^\alpha e^{-\lambda(R^2+2iRy-y^2)} dy; \\
\int_{DA} &= i \int_\alpha^0 e^{-\lambda(-R+iy)^2} dy = -i \int_0^\alpha e^{-\lambda(R^2-2iRy-y^2)} dy; \\
\int_{CD} &= \int_R^{-R} e^{-\lambda(x+i\alpha)^2} d(x+i\alpha) = \int_{-R}^R e^{-\lambda x^2} e^{\lambda\alpha^2} e^{-2\lambda\alpha ix} dx = \\
&= \int_{-R}^R e^{-\lambda x^2} e^{\lambda\alpha^2} (\cos(2\lambda\alpha x) - i \sin(2\lambda\alpha x)) dx = \int_{-R}^R e^{-\lambda x^2} e^{\lambda\alpha^2} \cos(2\lambda\alpha x) dx.
\end{aligned}$$

Устремим $R \rightarrow \infty$, тогда интегралы вдоль BC и DA стремятся к нулю. Равенство (2.3.9) сводится к

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx - e^{\lambda\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda\alpha x) dx = 0,$$

причем первое слагаемое представляет собой интеграл Пуассона. Окончательно имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda\alpha x) dx = e^{-\lambda\alpha^2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}. \quad (2.3.10)$$

Воспользуемся формулой (2.3.10), заменив в ней λ на 1, x на t , α на x . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt = e^{-x^2} \sqrt{\pi},$$

откуда

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(2xt) dt. \quad (2.3.11)$$

Из формулы Родрига (1.3.69) следует, что

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x).$$

Продифференцировав равенство (2.3.11) $2n$ раз, получаем

$$(-1)^{2n} e^{-x^2} H_{2n}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} (2t)^{2n} e^{-t^2} \cos(2xt + 2n\pi/2) dt,$$

откуда следует (2.3.6). Разложение (2.3.7) получается аналогичным образом.

Замечание 2.1. Дифференцирование под знаком интеграла законно, так как при $|x| < R$ интеграл в (2.3.11) мажорируется сходящимся интегралом

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2+2Rt} dt$$

и поэтому сходится равномерно в круге $|x| \leq R$ произвольного радиуса R .

Для получения разложения (2.3.8) изменим в (2.3.6–2.3.7) пределы интегрирования (в обоих случаях подынтегральные функции четны)

$$H_{2n}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos 2xt dt;$$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{2n+2}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \sin 2xt dt$$

и прибавим в каждом случае слагаемое, интеграл от которого по симметричному интервалу равен нулю:

$$H_{2n}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} (\cos 2xt + i \sin 2xt) dt;$$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{2n+2}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} (\sin 2xt - i \cos 2xt) dt,$$

так как функции $e^{-t^2}t^{2n} \sin 2xt$ и $e^{-t^2}t^{2n+1} \cos 2xt$ нечетны. Имеем

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n}(i)^{2n}e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2xti} t^{2n} dt;$$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+1}(i)^{2n}e^{x^2}}{i\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2xti} t^{2n+1} dt$$

Поскольку $i^{2n} = (-i)^{2n}$ и $i^{2n-1} = (-i)^{2n+1}$, заменив в первом равенстве $2n$, а во втором $2n+1$ на n , приходим к представлению (2.3.8)

$$H_n(x) = \frac{2^n(-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2txi} t^n dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \boxtimes$$

3.18. Доказать, что рекуррентное соотношение для ортонормированных полиномов Эрмита имеет вид

$$\sqrt{n+1} \tilde{H}_{n+1}(x) + \sqrt{n} \tilde{H}_{n-1}(x) = \sqrt{2} x \tilde{H}_n(x).$$

Воспользуемся соотношением ортогональности (2.3.5)

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

и рекуррентным соотношением (2.3.4)

$$H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x) = 2xH_n(x).$$

Ортонормированные полиномы Эрмита $\tilde{H}_n(x)$ получаются из обычных полиномов делением на квадратичную норму:

$$\tilde{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{d_n} = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}.$$

Тогда рекуррентное соотношение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{2^{n+1}(n+1)! \sqrt{\pi}} \tilde{H}_{n+1}(x) + 2n \sqrt{2^{n-1}(n-1)! \sqrt{\pi}} \tilde{H}_{n-1}(x) = \\ = 2x \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}} \tilde{H}_n(x), \end{aligned}$$

откуда после очевидных преобразований получаем желаемую формулу. $\boxtimes$

Задания для самостоятельной работы

3.19. Разложить по полиномам Эрмита функции: $x^3 + x^2 + x + 1$.

3.20. Разложить по полиномам Эрмита функции $\cos ax, \sin ax$.

3.21. Разложить по полиномам Эрмита функцию $e^{-a^2 x^2}$, $\operatorname{Re} a^2 > -1$.

Подсказки

3.21. Функция $\exp(-ax^2)$ четная, поэтому

$$\exp(-ax^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} H_{2n}(x).$$

Воспользуйтесь интегральным представлением из задачи 3.17. Поменяйте порядок интегрирования и вычислите все интегралы.

Ответы

3.21. $c_{2n} = \frac{(-1)^n a^{2n}}{2^{2n} n! (1 + a^2)^{n+1/2}}.$

2.3.3. Разные полиномы

Примеры решения задач

3.22. Получить соотношение ортогональности (1.3.67) для присоединенных функций Лежандра.

Функции Лежандра первого рода являются одним из решений уравнения Лежандра (1.3.44)

$$(1 - x^2) P_v''(x) - 2x P_v'(x) + v(v+1) P_v(x) = 0.$$

Продифференцировав это уравнение m раз, получаем уравнение (1.3.56)

$$(1 - x^2) v_m'' - 2(m+1)x v_m' + [v(v+1) - m(m-1)] v_m = 0,$$

где

$$v_m(x) = \frac{d^m P_v(x)}{dx^m},$$

Подставим это выражение в (1.3.56), умножив уравнение почленно на $(x^2 - 1)^{m/2}$:

$$\begin{aligned} - (x^2 - 1)^{m/2+1} \frac{d^{m+2} P_v(x)}{dx^{m+2}} - 2(m+1)x (x^2 - 1)^{m/2} \frac{d^{m+1} P_v(x)}{dx^{m+1}} + \\ + (v - m)(v + m + 1) (x^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m P_v(x)}{dx^m} = 0. \end{aligned}$$

Присоединенные функции Лежандра первого рода имеют вид (1.3.59)

$$P_{\nu}^m(x) = (x^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m P_{\nu}(x)}{dx^m}.$$

Сделав в полученном равенстве соответствующую замену, получаем искомое рекуррентное соотношение

$$P_{\nu}^{m+2}(x) + \frac{2(m+1)}{(x^2-1)^{1/2}} x P_{\nu}^{m+1}(x) + (\nu-m)(\nu+m+1) P_{\nu}^m(x) = 0.$$

3.23. Используя соотношение ортогональности и рекуррентное соотношение для полиномов Чебышёва 2-го рода, вычислить интеграл:

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1) U_2(x) \sqrt{1-x^2} dx.$$

Воспользовавшись рекуррентным соотношением

$$U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) = 2xU_n(x),$$

выразим $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$ и найдем полиномы степеней $1, 2, \dots$. Полином нулевой степени можно получить из условия нормировки (1.3.106): $U_0(x) \equiv U_0(1) = 1$.

Затем выразим x^n через линейную комбинацию полиномов:

n	$U_n(x)$	x^n
0	1	$U_0(x)$
1	$2x$	$\frac{1}{2}U_1(x)$
2	$4x^2 - 1$	$\frac{1}{4}(U_2(x) + U_0(x))$
3	$8x^3 - 4x$	$\frac{1}{8}(U_3(x) + 4x)$
4	$16x^4 - 12x^2 + 1$	$\frac{1}{16}(U_4(x) + 3U_2(x) + 2U_0(x))$

Для вычисления интеграла обратимся к соотношению ортогональности

$$\int_{-1}^1 U_n(x) U_m(x) (1-x^2)^{1/2} dx = \frac{\pi}{2} \delta_n^m.$$

Очевидно, что слагаемые с нечетной степенью x можно сразу отбросить — интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку равен нулю.

Заменим x^0, x^2, x^4 на их выражения через полиномы:

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{16}(U_4(x) + 3U_2(x) + 2U_0(x)) + \right. \\ \left. + \frac{3}{4}(U_2(x) + U_0(x)) + U_0(x) \right] U_2(x) \sqrt{1-x^2} dx.$$

Теперь в силу свойства ортогональности следует отбросить в первой скобке под знаком интеграла все полиномы, кроме $U_2(x)$:

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{16} \cdot 3U_2(x) + \frac{3}{4}U_2(x) \right] U_2(x) \sqrt{1-x^2} dx = \\ = \frac{15}{16} \int_{-1}^1 U_2^2(x) (1-x^2)^{1/2} dx = \frac{15\pi}{32}.$$

3.24. Используя производящую функцию (1.3.109)

$$\Phi(x, t) \equiv (1-t)^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) =,$$

получить рекуррентные формулы для полиномов Лагерра.

Производящая функция подчиняется тождеству

$$(1-t^2) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + [x - (1-t)(1+\alpha)] \Phi = 0$$

(докажите это самостоятельно).

Подставим в тождество вместо функции ее выражение через ряд (1.3.109):

$$(1-t^2) \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) n t^{n-1} + [x - (1-t)(1+\alpha)] \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n = 0.$$

Раскроем скобки, изменив при необходимости начальное значение индекса суммирования:

$$\sum_{\substack{n \neq 0 \\ n=1}}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) n t^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) n t^n + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n=-1}}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) n t^{n+1} + \\ + x \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n - (1+\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n + (1+\alpha) \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n=-1}}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^{n+1} = 0$$

(напомним, что ортогональные полиномы степени -1 считаются равными нулю). Далее,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} L_{n+1}^{(\alpha)}(x)(n+1)t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)nt^n + \sum_{n=0}^{\infty} L_{n-1}^{(\alpha)}(x)(n-1)t^n + \\ & + x \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^n - (1+\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^n + (1+\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} L_{n-1}^{(\alpha)}(x)t^n = 0. \end{aligned}$$

Собрав теперь коэффициенты при t^n , и приведя подобные, получаем искомого рекуррентное соотношение (1.3.110):

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = (2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x).$$

3.25. Используя дифференциальное уравнение для полиномов Чебышёва первого рода (1.3.105)

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0,$$

доказать, что

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta. \quad (2.3.12)$$

Пусть $x = \cos \theta$, тогда $\theta = \arccos x$ и

$$\begin{aligned} \frac{dT_n}{dx} &= \frac{dT_n}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dT_n}{d\theta} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{dT_n}{d\theta}; \\ \frac{d^2T_n}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dT_n}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{dT_n}{d\theta} \right) = \\ &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{dT_n}{d\theta} \right) = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2T_n}{d\theta^2} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{dT_n}{d\theta}. \end{aligned}$$

Заменив в дифференциальном уравнении производные по x на производные по θ и приведя подобные, получаем

$$\frac{d^2T_n}{d\theta^2} + n^2T_n = 0.$$

Это уравнение имеет с точностью до постоянного множителя два решения: $A \cos n\theta$ и $B \sin n\theta$.

Воспользуемся формулой Муавра:

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cos^k \theta i^{n-k} \sin^{n-k} \theta$$

и сравним действительные и мнимые части обеих сторон равенства.

В правой части действительные слагаемые получаются только при $n - k = 2m$, $m = 0, [n/2]$. Каждое такое слагаемое имеет вид

$$(-1)^m C_n^{m-2m} \cos^{n-2m} \theta \sin^{2m} \theta = (-1)^m C_n^{m-2m} \cos^{n-2m} \theta (1 - \cos^2 \theta)^m$$

и, таким образом, $\cos n\theta$ представляет собой многочлен по степеням $\cos \theta$.

Для $\sin n\theta$ имеем $n - k = 2m + 1$

$$i(-1)^m C_n^{m-2m-1} \cos^{n-2m-1} \theta \sin^{2m+1} \theta,$$

тогда $\cos^{n-2m-1} \theta = (1 - \sin^2 \theta)^{(n-2m-1)/2}$ и степени синуса не будут целыми: многочлена не получается.

Итак, полиномы Чебышёва первого рода имеют вид $T_n(\cos \theta) = A \cos n\theta$. Для нахождения множителя A воспользуемся стандартизацией: $T_n(1) = 1$. Если $x = 1$, то $\theta = 0$ и $T_n(\theta) = \cos n\theta$. $\square$

3.26. Доказать соотношение, связывающее полиномы Чебышёва первого и второго рода:

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{dT_{n+1}(x)}{dx}. \quad (2.3.13)$$

Запишем дифференциальное уравнение для полиномов Чебышёва 1-го рода степени $n+1$:

$$(1 - x^2) T_{n+1}''(x) - x T_{n+1}'(x) + (n+1)^2 T_{n+1}(x) = 0.$$

Продифференцируем его почленно и положим $dT_{n+1}(x)/dx = y(x)$:

$$-2x \frac{dy}{dx} + (1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - xy - x \frac{dy}{dx} + (n+1)^2 y = 0$$

или

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + n(n+2)y = 0.$$

Полученное уравнение совпадает с дифференциальным уравнением (1.3.107) для полиномов Чебышёва 2-го рода степени n . Тогда $y(x) = AU_n(x)$.

Используя стандартизацию (1.3.106) $U_n(1) = n+1$, покажем, что $A = n+1$. Пусть $x = \cos \theta$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \frac{dT_{n+1}(x)}{dx} &= \frac{1}{n+1} \frac{d \cos(n+1)\theta}{d\theta} \left(-\frac{1}{\sin \theta} \right) = \\ &= -\frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin \theta} (-(n+1) \sin(n+1)\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Полученное выражение стремится к $n+1$ при $\theta \rightarrow 0$, т. е. при $x \rightarrow 1$. $\square$

3.27. Воспользовавшись вычисленным ранее интегралом Вебера (2.2.14)

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx = \frac{b^{\nu}}{(2a^2)^{\nu+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}},$$

доказать, что

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha/2}}{n!} \int_0^{\infty} t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha}(2\sqrt{xt}) e^{-t} dt.$$

Сделаем в интеграле Вебера замены:

$$\nu = n + \alpha, \quad a = 1, \quad b = 2\sqrt{y}, \quad x = \sqrt{t}.$$

Теперь (1.2.69) принимает вид

$$\frac{(2\sqrt{y})^{n+\alpha}}{2^{n+\alpha+1}} e^{-y} = \int_0^{\infty} e^{-t} J_{n+\alpha}(2\sqrt{yt}) (\sqrt{t})^{n+\alpha+1} \frac{dt}{2\sqrt{t}},$$

откуда

$$(\sqrt{y})^{n+\alpha} e^{-y} = \int_0^{\infty} e^{-t} J_{n+\alpha}(2\sqrt{yt}) (\sqrt{t})^{n+\alpha} dt.$$

Заменим y на x и домножим левую и правую части равенства на $(\sqrt{x})^{n+\alpha}$:

$$x^{n+\alpha} e^{-x} = \int_0^{\infty} e^{-t} J_{n+\alpha}(2\sqrt{xt}) (\sqrt{xt})^{n+\alpha} dt. \quad (2.3.14)$$

Воспользуемся соотношением (1.2.49)

$$\frac{d}{dz} [z^{\nu} \mathcal{Z}_{\nu}(z)] = z^{\nu} \mathcal{Z}_{\nu-1}(z),$$

где $\mathcal{Z}_{\nu}(z)$ — любая цилиндрическая функция. Пусть $z = 2\sqrt{u}$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} &= \frac{1}{2} 2\sqrt{u} \frac{d}{du}; \\ \sqrt{u} \frac{d}{du} [2^{\nu} u^{\nu/2} J_{\nu}(2\sqrt{u})] &= 2^{\nu} u^{\nu/2} J_{\nu-1}(2\sqrt{u}); \\ \frac{d}{du} [u^{\nu/2} J_{\nu}(2\sqrt{u})] &= u^{(\nu-1)/2} J_{\nu-1}(2\sqrt{u}). \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Вернемся к (2.3.14) и продифференцируем это равенство n раз по x с учетом (2.3.15) (можно показать, что дифференцирование под знаком интеграла законно):

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n} x^{n+\alpha} e^{-x} &= \int_0^\infty e^{-t} \frac{d^n}{dx^n} \left[(xt)^{(n+\alpha)/2} J_{n+\alpha} \left(2\sqrt{xt} \right) \right] dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-t} x^{\alpha/2} t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_{n+\alpha-n} \left(2\sqrt{xt} \right) dt.\end{aligned}$$

Применив формулу Родрига для полиномов Лагерра (1.3.111), получаем искомое соотношение

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha/2}}{n!} \int_0^\infty t^{n+\alpha/2} J_\alpha \left(2\sqrt{xt} \right) e^{-t} dt.$$

Задания для самостоятельной работы

3.28. Выразить степени переменной x через полиномы Лежандра $P_n(x)$, Эрмита $H_n(x)$, Лагерра $L_n^{(0)}(x)$ и Чебышёва 2-го рода $U_n(x)$:

x^k	$P_n(x)$	$H_n(x)$	$L_n^{(0)}(x)$	$U_n(x)$
x^0	•••••	•••••	•••••	•••••
x^1	•••••	•••••	•••••	•••••
x^2	•••••	•••••	•••••	•••••
x^3	•••••	•••••	•••••	•••••
x^4	•••••	•••••	•••••	•••••

3.29. Используя соотношение ортогональности и рекуррентное соотношение для полиномов Лагерра, вычислить интеграл:

$$\int_0^\infty (3x^4 - 2x^3 - x^2 + x - 3) L_2^{(0)}(x) e^{-x} dx.$$

3.30. Используя соотношение ортогональности и рекуррентное соотношение для полиномов Эрмита, вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^\infty (3x^4 - 2x^3 - x^2 + x - 3) H_2(x) e^{-x^2} dx.$$

Чем решение этой задачи отличается от решения предыдущей?

3.31. Доказать, что рекуррентное соотношение для ортонормированных полиномов Лагерра имеет вид

$$f_{n+1}\tilde{L}_{n+1}^{(\alpha)}(x) + f_n\tilde{L}_{n-1}^{(\alpha)}(x) = (rx + \Delta_n)\tilde{L}_n^{(\alpha)}(x),$$

где

$$f_n = \sqrt{\frac{n(n + \alpha - 1)}{\alpha}}, \quad r = \frac{1}{\alpha}, \quad \Delta_n = \frac{2n + \alpha}{\sqrt{\alpha}}.$$

3.32. Воспользовавшись соотношением для производящей функции

$$(1 - t)\frac{\partial \Phi}{\partial x} + t\Phi = 0,$$

получить рекуррентное соотношение для полиномов Лагерра

$$\frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx} - \frac{dL_{n-1}^{(\alpha)}(x)}{dx} + L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0.$$

Ответы

3.29. 394.

3.30. $16\sqrt{\pi}$.

2.4. Основы операционного исчисления. Задачи

2.4.1. Нахождение изображений

Примеры решения задач

Найти преобразование Лапласа от заданных функций

4.1. $f(t) = \theta(t)$.

$$F(p) = \int_0^{\infty} \theta(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

4.2. $f(t) = t^n, \quad n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} F(p) &= -\underbrace{\frac{1}{p} t^n e^{-pt} \Big|_0^{\infty}}_{=0} + \frac{n}{p} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-pt} dt = -\frac{n}{p^2} \int_0^{\infty} t^{n-1} d e^{-pt} = \\ &= -\underbrace{\frac{n}{p^2} t^{n-1} e^{-pt} \Big|_0^{\infty}}_{=0} + \frac{n}{p^2} \int_0^{\infty} (n-1) t^{n-2} e^{-pt} dt = \dots = \frac{n(n-1) \dots 1}{p^{n+1}} \end{aligned}$$

и окончательно

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (2.4.1)$$

В частности, $t \doteq \frac{1}{p^2}$.

4.3. $f(t) = t^n e^{at}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Согласно теореме смещения [2.3](#) $e^{at} f(t) \doteq F(p-a)$, поэтому

$$t^n e^{at} \doteq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}. \quad (2.4.2)$$

4.4. $f(t) = \mathcal{T}(\omega t)$, $\mathcal{T} = \{\sin, \cos, \text{sh}, \text{ch}\}$.

Найдем $\mathcal{L}[\sin(t)](p) = \int_0^{\infty} \sin t e^{-pt} dt$. Интегрируя по частям, имеем

$$\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Преобразование для $\sin \omega t$ находим, следуя теореме подобия 2.2:

$$f(\omega t) \doteq \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right).$$

$$\sin \omega t \doteq \frac{1}{\omega} \frac{1}{\frac{p^2}{\omega^2} + 1} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (2.4.3)$$

Изображения остальных функций находим аналогично.

4.5. $f(t) = t^n \mathcal{T}(\omega t)$, $\mathcal{T} = \{\sin, \cos, \text{sh}, \text{ch}\}$.

Задачу для синуса решим тремя способами.

Первый способ.

$$\begin{aligned} t^n \sin \omega t &\doteq \int_0^{\infty} t^n \sin \omega t e^{-pt} dt = \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} t^n (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} t^n e^{-(p-i\omega)t} dt - \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} t^n e^{-(p+i\omega)t} dt = \\ &= \frac{1}{2i} \frac{n!}{(p-i\omega)^{n+1}} - \frac{1}{2i} \frac{n!}{(p+i\omega)^{n+1}} = \frac{n!}{2i} \cdot \frac{(p+i\omega)^{n+1} - (p-i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}}. \end{aligned}$$

и окончательно

$$t^n \sin \omega t \doteq \frac{n!}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} [(-1)^k C_{n+1}^{2k+1} p^{n-2k-1} \omega^{2k+1}]$$

(слагаемые в числителе с четными степенями ω уничтожаются, с нечетными — удваиваются).

Второй способ.

$$\begin{aligned} t^n \sin \omega t &\doteq \int_0^{\infty} t^n \sin \omega t e^{-pt} dt = \text{Im} \int_0^{\infty} t^n e^{i\omega t} e^{-pt} dt = \text{Im} \frac{n!}{(p-i\omega)^{n+1}} = \\ &= \frac{n!}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} \text{Im}(p+i\omega)^{n+1} = \end{aligned}$$

$$= \frac{n!}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} [(-1)^k C_{n+1}^{2k+1} p^{n-2k-1} \omega^{2k+1}].$$

Третий способ. Воспользуемся теоремой 2.9 о дифференцировании изображения:

$$\begin{aligned} -tf(t) &\doteq F'(p); \\ (-t)^n f(t) &\doteq F^{(n)}(p); \\ t^n \sin \omega t &\doteq (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \left[\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right]. \end{aligned}$$

Самостоятельно докажите, что этот результат совпадает с выражениями, полученными первым и вторым способами.

Соотношения для остальных функций доказываются аналогично.

$$4.6. \quad f(t) = \int_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau \, d\tau.$$

По теореме 2.5 об интегрировании оригинала

$$\begin{aligned} \int_0^t \varphi(\tau) \, d\tau &\doteq \Phi(p); \\ f(t) &\doteq \frac{1}{p} \mathcal{L} [\tau \operatorname{sh} 2\tau] = \mathcal{L} [\tau (e^{2\tau} - e^{-2\tau})], \end{aligned}$$

откуда по формуле (2.4.2)

$$f(t) \doteq \frac{1}{2p} \left[\frac{1}{(p-2)^2} - \frac{1}{(p+2)^2} \right] = \frac{4}{(p^2 - 4)^2}.$$

$$4.7. \quad f(t) = \frac{\sin \omega t}{t}.$$

Используем теорему 2.6 об интегрировании изображения:

$$\begin{aligned} \frac{f(t)}{t} &\doteq \int_p^\infty F(p) \, dp. \\ \frac{\sin \omega t}{t} &\doteq \int_p^\infty \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \, dp = \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega} \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega} = \operatorname{arcctg} \frac{p}{\omega}. \end{aligned}$$

$$4.8. f_1(t) = (t-1)^2 \theta(t-1); \quad f_2(t) = (t-1)^2.$$

Применим теорему запаздывания 2.4:

$$f(t-a) \doteq e^{-ap} F(p);$$

$$(t-1)^2 \theta(t-1) \doteq e^{-p} \frac{2}{p^3}.$$

Для функции $(t-1)^2$, если понимать ее буквально, без мысленного домножения на функцию Хевисайда (см. замечание 1.1), результат будет иным: $(t-1)^2 = t^2 - 2t + 1 \doteq \frac{2}{p^3} - 2\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$ (почему?).

4.9. $f(t)$ задана графически (рисунок 2.4.1).

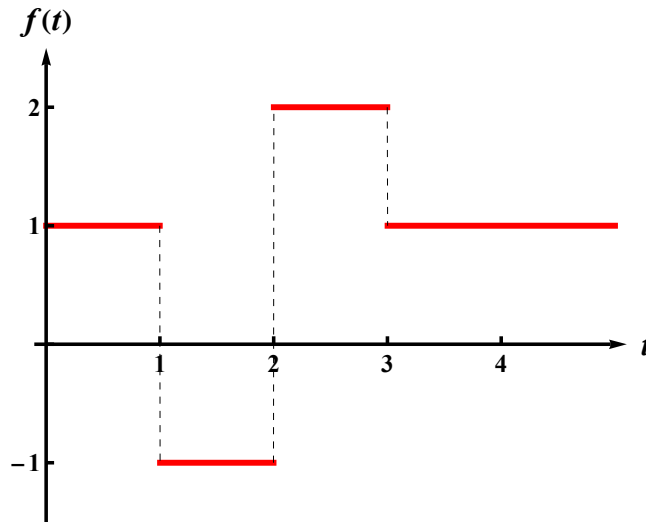


Рис. 2.4.1. К задаче 4.9

На интервале $(0, 1)$ $f(t) = \psi_0(t) = 1 \cdot \theta(t)$. Какую функцию $\psi_1(t)$ нужно прибавить, чтобы при $t \in (1, 2)$ выполнялось равенство $f(t) = -1$?

Пусть $\psi_1(t) = -1 \cdot \theta(t-1) + (-1) \cdot \theta(t-1)$, тогда

$$1 \cdot \theta(t) - 1 \cdot \theta(t-1) + (-1) \cdot \theta(t-1) =$$

$$= \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \text{ т. к. при } t < 1 \theta(t-1) = 0 \\ -1, & 1 < t < 2, \text{ т. к. при } t > 1 \text{ два первых слагаемых уничтожаются.} \end{cases}$$

Далее добавляем функцию $\psi_2(t) = 1 \cdot \theta(t-2) + 2 \cdot \theta(t-2)$. Первое слагаемое «отключает» интервал $(1, 2)$, второе добавляет интервал $(2, 3)$. Наконец,

$\psi_3(t) = -2 \cdot \theta(t-3) + 1 \cdot \theta(t-3)$ завершает построение функции:

$$\begin{aligned} f(t) &= \psi_0(t) + \psi_1(t) + \psi_2(t) + \psi_3(t) = \\ &= 1 \cdot \theta(t) - 1 \cdot \theta(t-1) + (-1) \cdot \theta(t-1) + 1 \cdot \theta(t-2) + \\ &\quad + 2 \cdot \theta(t-2) - 2 \cdot \theta(t-3) + 1 \cdot \theta(t-3) = \\ &= \theta(t) - 2\theta(t-1) + 3\theta(t-2) - \theta(t-3). \end{aligned}$$

Теперь можно применить преобразование Лапласа:

$$f(t) \doteq \frac{1}{p} (-e^{-3p} + 3e^{-2p} - 2e^{-p} + 1)$$

4.10. $f(t)$ задана графически (рисунок 2.4.2).

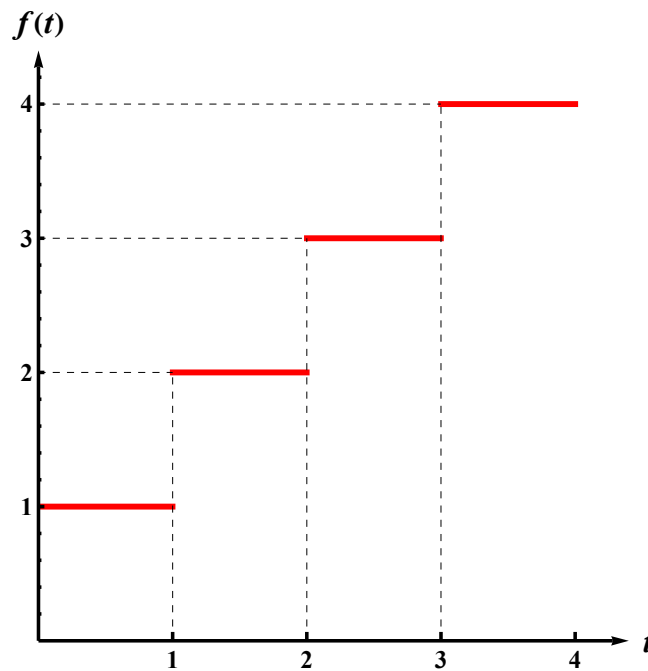


Рис. 2.4.2. К задаче 4.10

Эта ступенчатая функция может быть выражена через ряд по функциям Хевисайда:

$$f(t) = \theta(t) + \theta(t-1) + \theta(t-2) + \dots + \theta(t-n) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \theta(t-n).$$

По свойству 2.1 линейности преобразования Лапласа

$$f(t) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}[\theta(t-n)](p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-np}}{p} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 - e^{-p}}.$$

Ряд сходится, поскольку $\operatorname{Re} p > \sigma_0 > 0$ и, следовательно, $|e^{-p}| < 1$.

4.11. $f(t) = t^\alpha, \alpha > -1.$

$$t^\alpha \doteq \int_0^\infty t^\alpha e^{-pt} dt = \int_0^\infty (pt)^{(\alpha+1)-1} \frac{1}{p^\alpha} e^{-pt} \frac{d(pt)}{p} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$$

(см. интегральное представление гамма-функции (1.2.122)). При $\alpha \in \mathbb{N}$ получаем формулу (2.4.1).

Задания для самостоятельной работы

Найти преобразование Лапласа заданных функций

4.12. $f(t) = \cos^2 t$

4.13. $f(t) = \sin^3 t$

4.14. $f(t) = \operatorname{ch}^2 t.$

4.15. $f(t) = \operatorname{sh}^2 t.$

4.16. $f(t) = \int_0^t (\tau + 1) \cos \omega \tau d\tau$

4.17. $f(t) = e^{-at} \cos^2 bt$

4.18. $f(t) = e^t \cos t \cos 2t.$

4.19. $f(t) = e^{-t} \sin t \sin 3t.$

4.20. $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}.$

4.21. $f(t) = \frac{\operatorname{sh}^2 t}{t}.$

4.22. $f(t) = \frac{e^{-t} - 1}{t}.$

4.23. $f(t) = \begin{cases} 2t - t^2, & 0 < t < 2 \\ 0, & 2 < t \end{cases}$

4.24. *Докажите, что*

$$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha) \doteq \frac{p^{\alpha-\beta}}{p^\alpha \mp a}, \quad \operatorname{Res} > |a|^{1/\alpha},$$

где

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

есть функция Миттаг-Леффлера.

Подсказка: докажите сначала соотношение

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(t^{\alpha} z) dt = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

Ответы

$$4.12. \cos^2(t) \doteq \frac{p^2+2}{p^3+4p}.$$

$$4.13. \sin^3 t \doteq \frac{6}{p^4+10p^2+9}.$$

$$4.14. \operatorname{ch}^2 t \doteq \frac{\frac{p}{2}+1}{p^2-4}.$$

$$4.15. \operatorname{sh}^2 t \doteq \frac{\frac{p}{2}}{p(p^2-4)}.$$

$$4.16. \int_0^t (\tau+1) \cos \omega \tau d\tau \doteq \frac{p^3+p^2+p\omega^2-\omega^2}{p(p^2+\omega^2)^2}$$

$$4.17. e^{-at} \cos^2(bt) \doteq \frac{(a+p)^2+2b^2}{(a+p)((a+p)^2+4b^2)}.$$

$$4.18. e^t \cos t \cos(2t) \doteq \frac{(p-1)((p-2)p+6)}{((p-2)p+2)((p-2)p+10)}.$$

$$4.19. e^{-t} \sin t \sin(3t) \doteq \frac{6(p+1)}{(p(p+2)+5)(p(p+2)+17)}.$$

$$4.20. \frac{\sin^2 t}{t} \doteq \frac{1}{4} \ln \left(\frac{4}{p^2} + 1 \right).$$

$$4.21. \frac{\operatorname{sh}^2 t}{t} \doteq -\frac{1}{4} \ln \left(1 - \frac{4}{p^2} \right).$$

$$4.22. \frac{e^{-t}-1}{t} \doteq \ln \left(\frac{p}{p+1} \right).$$

$$4.23. f(t) \doteq \frac{4e^{-p}}{p^3} (p \operatorname{ch} p - \operatorname{sh} p).$$

2.4.2. Нахождение оригиналов

Примеры решения задач

Найти оригиналы следующих изображений.

$$4.25. F(p) = \frac{p}{(p^2-1)(p^2+4)}.$$

Представим заданную функцию в виде разложения на простейшие дроби:

$$F(p) = \frac{p}{(p^2-1)(p^2+4)} = \frac{1}{10(p-1)} + \frac{1}{10(p+1)} - \frac{p}{5(p^2+4)}$$

и применим к каждому слагаемому обратное преобразование Лапласа.

$$f(t) = \frac{1}{10} (e^{-t} + e^t) - \frac{1}{5} \cos 2t = \frac{1}{5} (\operatorname{sh} t - \cos 2t).$$

$$\mathbf{4.26.} \quad F(p) = \frac{p}{p^2 + 4p + 5}.$$

Функция $F(p)$ удовлетворяет условиям второй теоремы разложения [3.2](#), поэтому можно применять формулу [\(1.4.47\)](#)

$$f(t) = \sum_{(p_k)} \operatorname{res} [F(p)e^{pt}, p_k].$$

$F(p)$ имеет два простых полюса $p_{1,2} = -2 \pm i$. Известно, что если $F(p)$ представляется в виде отношения двух аналитических в окрестности p_0 функций

$$F(p) = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)},$$

где $\varphi(p_0) \neq 0$, а функция $\psi(p)$ имеет в точке p_0 нуль первого порядка, то

$$\operatorname{res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)} \Big|_{z=z_0}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{res} [F(p)e^{pt}, -2 + i] + \operatorname{res} [F(p)e^{pt}, -2 - i] = \\ &= \frac{pe^{pt}}{2p + 4} \Big|_{p=-2+i} + \frac{pe^{pt}}{2p + 4} \Big|_{p=-2-i} = \\ &= \left(\frac{1}{2} - i\right) e^{(-2-i)t} + \left(\frac{1}{2} + i\right) e^{(-2+i)t} = e^{-2t} \left[\frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}) - (e^{it} + ie^{-it}) \right] = \\ &= e^{-2t} (\cos t - 2 \sin t). \end{aligned}$$

$$\mathbf{4.27.} \quad F(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}.$$

Выделим в знаменателе полный квадрат:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p^2 + p + 1} = \frac{1}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}t}{2} \right) \end{aligned}$$

(использована формула (2.4.3) с учетом теоремы сдвига). Разумеется, эту задачу можно также решать разложением на простейшие дроби или с использованием вычетов.

$$4.28. F(p) = \frac{p}{(p+1)^2}.$$

Преобразуем функцию:

$$F(p) = \frac{p}{(p+1)^2} = \frac{p+1-1}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \doteq e^{-t} - e^{-t}t.$$

$$4.29. F(p) = \frac{p}{(p^2+4)^2}$$

Заданное изображение можно записать как произведение изображений двух известных функций:

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+4)^2} = \frac{p}{(p^2+4)} \cdot \frac{1}{(p^2+4)} = \mathcal{L}[\cos 2t] \cdot \mathcal{L}[(\sin 2t)/2].$$

Тогда оригинал $F(p)$ можно найти по теореме 2.10 о свертке:

$$f(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \sin 2\tau \cos 2(t-\tau) d\tau = \frac{1}{4}t \sin 2t.$$

$$4.30. F(p) = \frac{e^{-3p}}{(p-1)^2}$$

По теореме сдвига 2.3 $\frac{1}{(p-1)^2} \doteq te^t$. Множитель e^{-3p} указывает на теорему запаздывания 2.4:

$$F(p) = \frac{e^{-3p}}{(p-1)^2} \doteq (t-3)e^{t-3}\theta(t-3)$$

(см. замечание 2.1 к теореме запаздывания).

$$4.31. \text{Найти изображение функции } f(t) = \frac{1 - \cos t}{t}.$$

Заданная функция ограничена в окрестности нуля, так как $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$, и является оригиналом, поэтому она удовлетворяет условиям теоремы 2.6 об интегрировании изображения:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos t}{t} &\doteq \int_p^\infty (\mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[\cos t]) dp - \int_p^\infty \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} \right) dp = \\ &= \left[\ln p - \frac{1}{2} \ln(p^2+1) \right] \Big|_p^\infty = \ln \frac{\sqrt{p^2+1}}{p}. \end{aligned}$$

4.32. Доказать, что для полиномов Лагерра, заданных формулой Родрига (1.3.111)

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t})$$

выполняется

$$L_n(t) = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n.$$

Решим обратную задачу: покажем, что заданное изображение имеет своим оригиналом полином Лагерра.

$$\frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^n C_n^k 1^{n-k} \left(-\frac{1}{p}\right)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k p^{-k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{p^k},$$

где $a_k = (-1)^{k-1} C_n^{k-1}$.

Найдем оригинал $\varphi(t)$ по первой теореме разложения 1.4.3.1.

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} t^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} C_n^{k-1}}{(k-1)!} t^{k-1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{(k)!} t^k.$$

Начальное значение индекса суммирования $k = 0$ заменено здесь на $k = 1$, так как при $k = 0$ имеет место $1/(k-1)! = 0$. Верхний предел изменен с бесконечности на n , поскольку при $k > n$ биномиальные коэффициенты C_n^k равны нулю.

Обратимся теперь к формуле Родрига.

$$\begin{aligned} L_n(t) &= \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) = \frac{e^t}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k (t^n)^{(n-k)} (e^{-t})^{(k)} = \\ &= \frac{e^t}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k e^{-t} n(n-1) \dots (k+1) t^k = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{n(n-1) \dots (k+1)}{n!} t^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{1}{k!} t^k = \varphi(t). \quad \square \end{aligned}$$

4.33. Найти изображение функции $f(t) = t - [t]$, где $[t]$ — целая часть t .

Легко видеть, что функция $f(t) = t - [t]$ периодична с периодом $T = 1$ (рисунок 2.4.3). Для нахождения ее изображения воспользуемся формулой

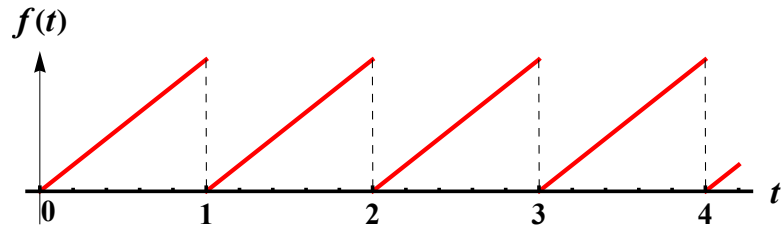


Рис. 2.4.3. К задаче 4.33

(1.4.31)

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-p}} \int_0^1 e^{-pt} t dt = \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-p}} \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} t \Big|_0^1 + \frac{1}{p} \int_0^1 e^{-pt} dt \right] = \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-p}} \left[-\frac{1}{p} e^{-p} - \frac{1}{p^2} (e^{-p} - 1) \right] = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1 - (p+1)e^{-p}}{1 - e^{-p}} = \\
 &= \frac{1}{p^2} \left(1 - \frac{p e^{-p}}{1 - e^{-p}} \right) = \frac{1}{p^2} \left(1 - \frac{p}{e^p - 1} \right).
 \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

Найти оригиналы следующих изображений

4.34. $F(p) = \frac{1}{p^2 + 6p + 10}$

4.35. $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 9)^2}$

4.36. $F(p) = \frac{p + 3}{(p + 1)(p + 2)(p^2 + 1)}$

4.37. $F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} (e^{-2p} + 2e^{-3p} + 3e^{-4p})$

4.38. $F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-1/p}$

4.39. Доказать соотношение

$$J_0(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}},$$

воспользовавшись первой теоремой разложения.

4.40. Найти преобразование Лапласа функции $f(t) = \arcsin(\sin t)$. Сделать обратное преобразование и сравнить графики полученной и исходной функций.

Ответы

$$\mathbf{4.34.} \quad F(p) = \frac{1}{p^2 + 6p + 10} \doteq e^{-3t} \sin t.$$

$$\mathbf{4.35.} \quad F(p) = \frac{p}{(p^2 + 9)^2} \doteq \frac{1}{6} t \sin 3t.$$

$$\mathbf{4.36.} \quad F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)(p^2+1)} \doteq \frac{1}{5} (e^{-2t} (5e^t - 1) + 3 \sin t - 4 \cos t).$$

4.37.

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} (e^{-2p} + 2e^{-3p} + 3e^{-4p}) \doteq \\ \doteq -\theta(t-2) \sin(2-t) - 2\theta(t-3) \sin(3-t) - 3\theta(t-4) \sin(4-t).$$

$$\mathbf{4.38.} \quad F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-1/p} \doteq t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}).$$

Подсказка: представьте экспоненту в виде степенного ряда.

4.39. *Подсказка:* разложите функцию $(p^2 + 1)^{-1/2}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности.

4.40. $f(t) = \arcsin(\sin t) \doteq \frac{1 - \operatorname{sch}(\frac{\pi p}{2})}{p^2}$, где $\operatorname{sch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ — гиперболический секанс.

Подсказка: Запишите $f(t)$ как периодическую составную функцию.

2.4.3. Решение уравнений

Примеры решения задач

Решить дифференциальные уравнения при помощи преобразования Лапласа.

$$\mathbf{4.41.} \quad x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

Применим преобразование Лапласа к обеим частям уравнения, используя теорему 2.7 о дифференцировании оригинала. Пусть $x(t) \doteq X(p)$, тогда

$$\underbrace{p^2 X(p) - p \cdot 0 - 1}_{\mathcal{L}[x'']} + 2 \underbrace{p X(p) - 0}_{\mathcal{L}[x']} - 3X(p) = \frac{1}{p+1}; \\ X(p)(p^2 + 2p - 3) = \frac{1}{p+1} + 1; \\ X(p) = \frac{p+2}{(p-1)(p+1)(p+3)} = -\frac{1}{4(p+1)} - \frac{1}{8(p+3)} + \frac{3}{8(p-1)}.$$

Теперь применяем обратное преобразование и находим решение уравнения:

$$x(t) = \frac{3e^t}{8} - \frac{e^{-t}}{4} - \frac{e^{-3t}}{8}.$$

Далее в этом разделе очевидные комментарии будем опускать.

4.42. $x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0$

$$\begin{aligned} p^2 X(p) - 2p - 0 + pX(p) - 2 &= \frac{p}{p^2 + 1}; \\ X(p) &= \frac{2p^3 + 2p^2 + 3p + 2}{p(p+1)(p^2+1)} = \frac{1}{2(p^2+1)} - \frac{p}{2(p^2+1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+1} + \frac{2}{p}; \\ x(t) &= \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} e^{-t} + 2. \end{aligned}$$

4.43. $x''' + 3x'' - 4x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = 2$

$$\begin{aligned} p^3 X(p) - 0 - 0 - 2 + 3p^2 X(p) - 0 - 0 - 4X(p) &= 0; \\ X(p) &= \frac{2}{p^3 + 3p^2 - 4} = \frac{2}{(p-1)(p+2)^2}; \\ x(t) &= \operatorname{res} \left[\frac{2}{(p-1)(p+2)^2} e^{pt}, p=1 \right] + \operatorname{res} \left[\frac{2}{(p-1)(p+2)^2} e^{pt}, p=-2 \right] = \\ &= \frac{2}{(p+2)^2} e^{pt} \Big|_{p=1} + \frac{1}{1!} \frac{d}{dp} \left[\frac{2}{p-1} e^{pt} \right] \Big|_{p=-2} = \frac{2}{9} e^t + \left[\frac{2te^{pt}}{p-1} - \frac{2e^{pt}}{(p-1)^2} \right] \Big|_{p=-2} \end{aligned}$$

и окончательно

$$x(t) = \frac{2}{9} e^{-2t} (e^{3t} - 3t - 1).$$

4.44. Решить уравнение $x'' + 4x = f(t)$, если функция в правой части задана графически (рисунок 2.4.4).

Рассмотрим сначала физический смысл задачи. Система с собственной частотой $\omega_0 = 2$ совершает вынужденные колебания под действием силы $f(t)$ (строго говоря, это сила, приведенная к массе тела, т. е. сила деленная на массу). В первую единицу времени (будем называть ее условной секундой) сила линейно возрастает, в течение второй условной секунды остается равной

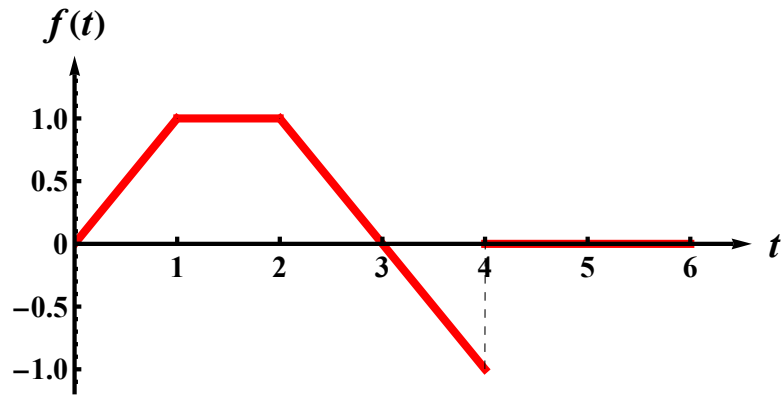


Рис. 2.4.4. К задаче 4.44

1, в следующие две условные секунды линейно изменяется от 1 до -1 и далее колебания становятся свободными:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 1, & 1 < t < 2 \\ 3 - t, & 2 < t < 4. \end{cases}$$

или

$$\begin{aligned} f(t) &= t\theta(t) - t\theta(t-1) + 1 \cdot \theta(t-1) - 1 \cdot \theta(t-2) + \\ &\quad + (3-t)\theta(t-2) - (3-t)\theta(t-4) = \\ &= t\theta(t) - (t-1)\theta(t-1) - (t-2)\theta(t-2) + (t-3)\theta(t-4). \end{aligned}$$

Найдем изображение этой функции. Для трех первых слагаемых применяем теорему запаздывания, а вот четвертое слагаемое следует преобразовать: $(t-3)\theta(t-4) = (t-4)\theta(t-4) + \theta(t-4)$. Тогда

$$\begin{aligned} f(t) &= t\theta(t) - (t-1)\theta(t-1) - (t-2)\theta(t-2) + (t-4)\theta(t-4) + \theta(t-4) \doteq \\ &\doteq \frac{1}{p^2} (1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-4p} + pe^{-4p}). \end{aligned}$$

Теперь найдем изображение искомой функции; очевидно, что

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-4p} + pe^{-4p}}{p^2(p^2 + 4)} = \\ &= \frac{1}{4} (1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-4p} + pe^{-4p}) \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 4} \right). \end{aligned}$$

Для каждого из десяти слагаемых оригинал находим с учетом теоремы сдвига с обязательным домножением на функцию Хевисайда.

Ответ, конечно, получается громоздким:

$$x(t) = \frac{t\theta(t-4)}{4} - \frac{t\theta(t-2)}{4} - \frac{t\theta(t-1)}{4} - \frac{3\theta(t-4)}{4} + \frac{\theta(t-2)}{2} + \frac{\theta(t-1)}{4} + \\ + \frac{1}{8}\theta(t-4)\sin(8-2t) + \frac{1}{8}\theta(t-2)\sin(2(t-2)) + \\ + \frac{1}{8}\theta(t-1)\sin(2(t-1)) - \frac{1}{4}\theta(t-4)\cos(8-2t) + \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\sin 2t.$$

4.45. $x'' + x = f(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, где $f(t)$ функция с периодом $T = 4$, причем

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 2, \\ 0, & 2 < t < 4. \end{cases}$$

Для построения изображения функции $f(t)$ воспользуемся формулой (1.4.31)

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-4p}} \left(\int_0^2 2e^{-pt} dt + \int_2^4 0 \cdot e^{-pt} dt \right) = \\ = \frac{2 - 2e^{-2p}}{(1 - e^{-4p})p} = \frac{2}{(1 + e^{-2p})p}.$$

Решаем уравнение:

$$p^2 X(p) - p + X(p) = \frac{2}{(1 + e^{-2p})p}; \\ X(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{2}{p(p^2 + 1)(1 + e^{-2p})}.$$

Для первого слагаемого нахождение оригинала очевидно:

$$\frac{p}{p^2 + 1} \doteq \cos t.$$

Оригинал для второго слагаемого найдем, выразив изображение в виде ряда и применив теорему смещения:

$$\frac{2}{p(p^2 + 1)(1 + e^{-2p})} = \frac{2}{p(p^2 + 1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2pn} = \\ = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \right) (-1)^n e^{-2pn} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{e^{-2pn}}{p} - e^{-2pn} \frac{p}{p^2 + 1} \right) \doteq \\ \doteq 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [1 - \cos(t - 2n)] \theta(t - 2n).$$

Таким образом,

$$x(t) = \cos t + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [1 - \cos(t - 2n)] \theta(t - 2n).$$

4.46. Решить систему дифференциальных уравнений при помощи преобразования Лапласа:

$$\begin{cases} x' - x + y = \frac{3}{2}t^2, \\ y' + 4x + 2y = 4t + 1, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

Применим преобразование Лапласа к обоим уравнениям, решим полученную алгебраическую систему и проведем обратное преобразование:

$$\begin{cases} pX(p) - X(p) + Y(p) = \frac{3}{2} \frac{2}{p^3}, \\ pY(p) + 4X(p) + 2Y(p) = \frac{4}{p^2} + \frac{1}{p}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p-1)X(p) + Y(p) = \frac{3}{p^3}, \\ 4X(p) + (p+2)Y(p) = \frac{4}{p^2} + \frac{1}{p}. \end{cases}$$

$$X(p) = -\frac{1}{p^3}, \quad Y(p) = \frac{p+2}{p^3}.$$

$$x(t) = -\frac{t^2}{2}, \quad y(t) = t(t+1).$$

Решить интегральные уравнения при помощи преобразования Лапласа.

4.47. $\int_0^t e^{2(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau = t^2 e^t$

Это интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода типа свертки. Применим преобразование Лапласа к обеим его частям.

$$\mathcal{L}[e^{2t}] \cdot \mathcal{L}[\varphi(t)] = \mathcal{L}[t^2 e^t];$$

$$\frac{1}{p-2} \Phi(p) = \frac{2}{(p-1)^3};$$

$$\Phi(p) = \frac{2(p-2)}{(p-1)^3} = \frac{2}{(p-1)^2} - \frac{2}{(p-1)^3};$$

$$\varphi(t) = 2te^t - t^2 e^t.$$

$$4.48. \varphi(t) = \cos t + \int_0^t e^{t-\tau} \varphi(\tau) d\tau$$

Интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода типа свертки решается так же.

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p-1} \cdot \Phi(p); \\ \Phi(p) \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) &= \frac{p}{p^2+1}; \\ \Phi(p) &= \frac{(p-1)p}{(p-2)(p^2+1)} = \frac{3}{5} \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{5} \frac{1}{p^2+1} + \frac{2}{5} \frac{1}{p-2}; \\ \varphi(t) &= \frac{1}{5} (3 \cos t + \sin t + 2e^{2t}). \end{aligned}$$

$$4.49. \varphi(t) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^t \sin 2(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \frac{2}{p^2+4} \Phi(p); \\ \Phi(p) &= \frac{p^2+4}{p(p^2+3)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \operatorname{res} \left[\frac{p^2+4}{p(p^2+3)} e^{pt}, p=0 \right] + \\ &+ \operatorname{res} \left[\frac{p^2+4}{p(p^2+3)} e^{pt}, p=i\sqrt{3} \right] + \operatorname{res} \left[\frac{p^2+4}{p(p^2+3)} e^{pt}, p=-i\sqrt{3} \right] = \\ &= \frac{p^2+4}{(p^2+3)} e^{pt} \Big|_{p=0} + \frac{p^2+4}{2p^2} e^{pt} \Big|_{p=i\sqrt{3}} + \frac{p^2+4}{2p^2} e^{pt} \Big|_{p=-i\sqrt{3}} = \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{6} e^{i\sqrt{3}t} - \frac{1}{6} e^{-i\sqrt{3}t} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos(\sqrt{3}t). \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

Решить при помощи преобразования Лапласа:

$$4.50. x'' + 2x' = t \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

$$4.51. x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = A \sin \omega t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

$$4.52. x''' + 3x'' + 3x' + x = 1, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = 0.$$

4.53. $x'' + x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad \text{где}$

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t, & 1 < t \leq 2 \\ t - 2, & 2 < t \leq 3 \\ 1, & t > 3 \end{cases}$$

4.54. $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - y = t, \end{cases}, \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 4$

4.55. $x'' + \omega^2 x = a[\theta(t) - \theta(t - b)], \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$

4.56. $\varphi(t) = t + \int_0^t \sin 2(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau$

Ответы

4.50. $x(t) = \frac{2e^{-2t}}{25} - \frac{1}{5}t \sin t + \frac{14 \sin t}{25} - \frac{2}{5}t \cos t - \frac{2 \cos t}{25}.$

4.51. $x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = A \sin \omega t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{(\beta - \omega_0)(\beta + \omega_0)} \left(4\beta^2 \omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \right)} \times \\ \times \left[A e^{-\beta t} \left(\omega (2\beta^2 + \omega^2 - \omega_0^2) \operatorname{sh} \left(t \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} e^{\beta t} \left((\omega_0^2 - \omega^2) \sin(t\omega) - 2\beta \omega \cos \omega t \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\beta \omega \sqrt{(\beta - \omega_0)(\beta + \omega_0)} \operatorname{ch} \left(t \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \right) \right) \right].$$

Если громоздкое решение вызывает трудности, попробуйте решить задачу при $\omega = \omega_0$. Постройте график и объясните физический смысл задачи.

4.52. $x(t) = 1 - e^{-t} \left(\frac{t^2}{2} + t + 1 \right)$

4.53.

$$x(t) = t^2(-\theta(t-1)) - t\theta(t-3) + 2t\theta(t-2) - t\theta(t-1) + 3\theta(t-3) - \\ - 4\theta(t-2) + 4\theta(t-1) - 3\theta(t-1) \sin(1-t) + 2\theta(t-2) \sin(2-t) - \\ - \theta(t-3) \sin(3-t) - 2\theta(t-1) \cos(1-t) + t^2 + 2 \cos(t) - 2.$$

4.54. $x(t) = \frac{1}{9}(-3t - 9e^{-t} + 28e^{3t} - 1), \quad y(t) = -\frac{t}{3} + e^{-t} + \frac{28e^{3t}}{9} - \frac{1}{9}.$

4.55. $x(t) = \frac{a}{\omega^2} (\theta(t) - \cos \omega t - \theta(t-b) + \cos(t-b))$

4.56. $\Phi(p) = \frac{p^2 + 4}{p^2(p^2 + 2)} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 2}; \quad \varphi(t) = 2t - \frac{\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}.$

2.4.4. Разные задачи

Примеры решения задач

4.57. Вычислить интеграл

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{u \sin tu}{1 + u^2} du.$$

Применим к функции преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} f(t) \doteq F(p) &= \int_0^{\infty} \frac{u^2}{(p^2 + u^2)(1 + u^2)} du = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{(1 - p^2)(1 + u^2)} du - \int_0^{\infty} \frac{p^2}{(1 - p^2)(p^2 + u^2)} du = \\ &= \frac{1}{1 - p^2} \operatorname{arctg} u \Big|_0^{\infty} - \frac{p^2}{1 - p^2} \frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{u}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1 - p^2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{p}{1 - p^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \\ &= \frac{1}{1 + p} \cdot \frac{\pi}{2} \doteq f(t) = \frac{\pi}{2} e^{-t}. \end{aligned}$$

4.58. Решить уравнение с помощью интеграла Дюамеля:

$$x'' - x' =, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Рассмотрим два уравнения с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{aligned} x'' - x' &= f(t), \quad f(t) = \frac{e^{2t}}{(1 + e^t)^2}, \\ x_1'' - x_1' &= g(t), \quad g(t) = 1. \end{aligned}$$

Применим преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} (p^2 - p)X(p) &= F(p), \\ (p^2 - p)X_1(p) &= G(p) = \frac{1}{p}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{p^2 - p} F(p), \\ X_1(p) &= \frac{1}{p^2(p - 1)} = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p - 1}. \end{aligned}$$

Тогда по теореме о свертке

$$x_1(t) = (t * e^t) = e^t - t - 1.$$

Воспользуемся интегралом Дюамеля (1.4.55) с учетом того, что $x_1(0) = 0$:

$$\begin{aligned} pX_1(p)F(p) &\doteq x(t) = \int_0^t f(\tau)x'_1(t-\tau) d\tau + 0 = \int_0^t \frac{e^{2\tau}}{(1+e^\tau)^2}(e^{t-\tau} - 1) d\tau = \\ &= \int_0^t \frac{e^{t+\tau}}{(1+e^\tau)^2} d\tau - \int_0^t \frac{e^{2\tau}}{(1+e^\tau)^2} d\tau = \\ &= [e^\tau = u] = \\ &= e^t \int_1^{e^t} \frac{du}{(1+u)^2} - \int_1^{e^t} \frac{u}{(1+u)^2} du = \\ &= e^t \int_1^{e^t} \frac{du}{(1+u)^2} - \int_1^{e^t} \frac{u+1-1}{(1+u)^2} du = (e^t+1) \int_1^{e^t} \frac{du}{(1+u)^2} - \int_1^{e^t} \frac{1}{1+u} du = \\ &= -(e^t+1) \frac{1}{1+u} \Big|_1^{e^t} - \ln(1+u) \Big|_1^{e^t} = \frac{1}{2}(e^t-1) - \ln \frac{1+e^t}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$x(t) = \frac{1}{2}(e^t-1) - \ln \frac{1+e^t}{2}.$$

4.59. Доказать, что

$$J_n(t) \doteq \frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Начнем с функции Бесселя нулевого порядка. Эта проблема уже рассматривалась в задаче 4.40, но сейчас мы применим другой способ, решая уравнение с переменными коэффициентами (см. пункт 1.4.4.3).

Уравнение Бесселя при $n=0$ имеет вид

$$t^2 z''(t) + tz'(t) + t^2 z(t) = 0, \quad z(0) = 1, \quad z'(0) = 0. \quad (2.4.4)$$

Перепишем его в форме $(tz'(t))' + tz(t) = 0$ и применим преобразование Лапласа, используя теорему 2.7 о дифференцировании оригинала

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(+0)$$

и теорему 2.9 о дифференцировании изображения

$$(-t)^n f(t) \doteq F^{(n)}(p).$$

Получим

$$\begin{aligned} tz(t) &\doteq -\frac{dZ(p)}{dp}; \\ tz' &\doteq -\frac{d}{dp}\mathcal{L}[z'] = -\frac{d}{dp}(pZ(p) - z(0)); \\ (tz')' &\doteq p \left[-\frac{d}{dp}(pZ(p) - z(0)) - tz'(0) \right]. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в дифференциальное уравнение и решим его:

$$\begin{aligned} -p\frac{d}{dp}(pZ(p) - z(0)) - \frac{dZ(p)}{dp} &= 0; \\ (p^2 + 1)\frac{dZ(p)}{dp} + pZ(p) &= 0; \\ \frac{dZ(p)}{Z(p)} &= -\frac{p}{p^2 + 1} dp; \\ \ln |Z(p)| &= -\frac{1}{2} \ln(p^2 + 1) + \ln C; \\ Z(p) &= \frac{C}{\sqrt{p^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Для нахождения константы используем первую предельную теорему 2.8

$$\begin{aligned} \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} p Z(p) &= z(+0); \\ \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} p \frac{C}{\sqrt{p^2 + 1}} &= C = z(+0) = 1. \end{aligned}$$

Уравнению Бесселя (2.4.4) удовлетворяют как функция Бесселя $J_0(t)$, так и функция Неймана $Y_0(t)$, однако из заданных начальных условий следует, что выбрать надо цилиндрическую функцию первого рода. Тогда

$$J_0(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Обратимся теперь к рекуррентному соотношению, доказанному в задаче 2.3:

$$\frac{d}{dt} \left[t^{-\nu} J_{\nu}(t) \right] = -t^{-\nu} J_{\nu+1}(t).$$

Пусть $\nu = 0$, тогда $J_1(t) = -J'_0(t)$ и по теореме о дифференцировании оригинала

$$\mathcal{L}[J_1(t)] = -(p\mathcal{L}[J_0(t)] - J_0(0)) = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} + 1 = \frac{\sqrt{p^2 + 1} - p}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Теперь используем соотношение (2.2.3)

$$J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_\nu(z),$$

откуда следует

$$J_n(t) = J_{n-2}(t) - 2J'_{n-1}(t), \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad J_{n-1}(0) = 0.$$

Тогда

$$J_n(t) = \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^{n-2}}{\sqrt{p^2 + 1}} - 2p \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^{n-1}}{\sqrt{p^2 + 1}} = \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Самостоятельно докажите это равенство.

4.60. Найти изображение по Лапласу функции $f(t) = |\sin \omega t|$.

Эта функция периодична с периодом π/ω . Воспользуемся формулой (1.4.31):

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-p\pi/\omega}} \int_0^{\pi/\omega} e^{-pt} \sin \omega t dt = \\ &= -\frac{1}{1 - e^{-p\pi/\omega}} \cdot \frac{e^{-pt}(p \sin \omega t + \omega \cos \omega t)}{p^2 + \omega^2} \Big|_0^{\pi/\omega} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \frac{1 + e^{-p\pi/\omega}}{1 - e^{-p\pi/\omega}} = \\ &= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \frac{\exp\left(\frac{p\pi}{2\omega}\right) + \exp\left(-\frac{p\pi}{2\omega}\right)}{\exp\left(\frac{p\pi}{2\omega}\right) - \exp\left(-\frac{p\pi}{2\omega}\right)} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \operatorname{cth} \frac{p\pi}{2\omega}. \end{aligned}$$

4.61. Решить дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$x''(t) - 2x'(t-1) = t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Применим к обеим частям уравнения преобразование Лапласа с учетом теоремы запаздывания:

$$\begin{aligned} p^2 X(p) - p \cdot 0 - 0 - 2pX(p)e^{-p} - 0 &= \frac{1}{p^2}. \\ X(p) &= \frac{1}{p^3(p - 2e^{-p})} = \frac{1}{p^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2e^{-p}}{p}} = \frac{1}{p^4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2e^{-p}}{p}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k e^{-kp}}{p^{k+4}}. \end{aligned}$$

Поскольку $1/p^{k+4} \doteq t^{k+3}/(k+3)!$, обратное преобразование дает решение

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k (t-k)^{k+3}}{(k+3)!} \theta(t-k).$$

4.62. Решить дифференциальное уравнение, объяснив его физический смысл:

$$x'' + \omega_0^2 x = a \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Колебательная система с собственной частотой ω_0 находится под действием периодической импульсной вынуждающей силы. Поскольку согласно (1.4.39) $\delta(t) \doteq 1$, имеем с учетом теоремы запаздывания

$$p^2 X(p) + \omega_0^2 X(p) = a \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kpT};$$

$$X(p) = \frac{a}{p^2 + \omega_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kpT} = \frac{a}{(p^2 + \omega_0^2)(1 - e^{-pT})}.$$

Обратное преобразование проводим так же, как в задаче 4.45. Функция $X(p)$ имеет полюсы в точках $0, \pm i\omega_0$ и $p_k = \frac{2\pi ki}{T}$, $k = 1, 2, \dots$. Будем предполагать, что $T \neq T_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{\omega_0}$ (самостоятельно разъясните физический смысл этого предположения), тогда все полюсы простые. По второй теореме разложения имеем

$$x(t) = \frac{a}{\omega_0^2} \left[\frac{1}{T} - \frac{\omega_0}{2 \sin \frac{\omega_0 T}{2}} \cos \omega_0 \left(t + \frac{T}{2} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2T}{T^2 - k^2 T_0^2} \cos k \frac{T_0}{T} \omega_0 T \right]$$

(рисунок 2.4.5).

4.63. Решить дифференциальное уравнение

$$x'(t) = x(\gamma t), \quad x(0) = 1, \quad \gamma > 0.$$

При $\gamma = 1$ решение очевидно: $x = e^t$.

Применим преобразование Лапласа с использованием теоремы о дифференцировании оригинала и теоремы подобия:

$$pX(p) - 1 = \frac{1}{\gamma} X\left(\frac{p}{\gamma}\right).$$

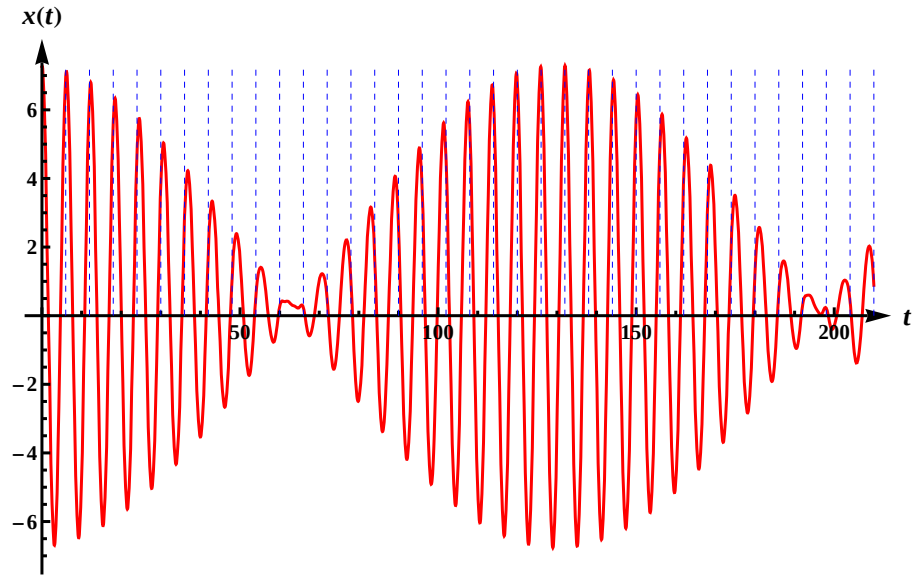


Рис. 2.4.5. К задаче 4.62

Разложим изображение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\begin{aligned}
 X(p) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}; \\
 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^{k-1}} - 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k \gamma^{k-1}}{p^k}; \\
 c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k+1}}{p^k} - 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k \gamma^{k-1}}{p^k}; \\
 c_1 - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k+1} - c_k \gamma^{k-1}}{p^k} &= 0.
 \end{aligned}$$

Для того, чтобы равенство выполнялось при любых p , необходимо выполнение рекуррентного соотношения: $c_1 = 1$ и

$$c_{k+1} = c_k \gamma^{k-1} = c_{k-1} \gamma^{(k-1)+(k-2)} = \dots = c_1 \gamma^{(k-1)+(k-2)+\dots+1} = 1 \cdot \gamma^{k(k-1)/2}.$$

Отсюда

$$X(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma^{k(k-1)/2}}{p^k}$$

и по первой теореме разложения

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k-1}}{(k-1)!} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{k(k-1)/2}}{k!} t^k.$$

Исследуем полученный знакоположительный ряд на сходимость по признаку Даламбера:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma^{(k+1)k/2} k! t^{k+1}}{\gamma^{k(k-1)/2} (k+1)! t^k} = t \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma^k}{k+1} = \begin{cases} 0, & 0 < \gamma \leq 1, \\ \infty, & \gamma > 1. \end{cases}$$

Таким образом, ряд сходится и уравнение имеет решение при $0 < \gamma \leq 1$.

Задания для самостоятельной работы

4.64. а) Найти изображение функции $f(t) = \frac{1 - e^t}{t}$.

б) По свойству линейности преобразования Лапласа

$$\mathcal{L} \left[\frac{1 - e^t}{t} \right] = \mathcal{L} \left[\frac{1}{t} \right] - \mathcal{L} \left[\frac{e^t}{t} \right].$$

Верно ли это утверждение?

4.65. Доказать, что если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$e^{\beta t} f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F \left(\frac{p - \beta}{\alpha} \right).$$

4.66. Решить уравнение с помощью интеграла Дюамеля:

$$x'' - x' = \frac{1}{1 + e^t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

4.67. Найти оригинал функции $F(p) = \frac{1}{\sqrt{(p + \alpha)^2 - \beta^2}}$.

4.68. Решить дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$x''(t) - x(t - 1) = t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

4.69. Получить соотношение $\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}$, воспользовавшись формулой для изображения периодических функций.

Ответы

4.64. а) $f(t) = \frac{1 - e^t}{t} \doteq \ln \frac{p - 1}{p}$.

4.66. $x(t) = e^t - 1 - (t + \ln 2)(e^t + 1) + (e^t + 1) \ln(e^t + 1)$.

$$\textbf{4.67. } F(p) = \frac{1}{\sqrt{(p + \alpha)^2 - \beta^2}} \doteq e^{-\alpha t} I_0(\beta t)$$

Подсказка: вспомните задачу 4.40. Сначала положите $\alpha = 0$ и разложите

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 - \beta^2}} = \frac{1}{p\beta} \left(1 - \frac{\beta^2}{p^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\beta p \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{p^2}}}$$

в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки по формуле разложения бинома, примените первую теорему разложения и сравните результат с рядом для модифицированной функции Бесселя нулевого порядка. Для учета ненулевого α используйте теорему смещения.

$$\textbf{4.68. } x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t - k)^{2k+3}}{(2k + 3)!} \theta(t - k).$$

2.5. Метрические пространства. Задачи

2.5.1. Метрика

Примеры решения задач

5.1. Доказать, что операция замыкания $M \rightarrow [M]$ обладает следующими свойствами:

- а) $M \in [M]$;
- б) $[[M]] = [M]$;
- в) Если $M_1 \subset M_2$, то $[M_1] \subset [M_2]$;
- г) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

Свойства а и в очевидны, докажем остальные.

б) $[[M]] = [M]$

Пусть $x \in [[M]] \implies$ в любой окрестности $O_\varepsilon(x)$ этой точки найдется точка $x_1 \in M$.

Положим $\varepsilon - \rho(x, x_1) = \varepsilon_1$ и рассмотрим шар $O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Этот шар целиком лежит внутри шара $O_\varepsilon(x)$: Действительно, если $z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$, то $\rho(z, x_1) < \varepsilon_1$, и так как $\rho(x, x_1) = \varepsilon - \varepsilon_1$, то по аксиоме треугольника

$$\rho(x, z) < \varepsilon_1 + (\varepsilon - \varepsilon_1) = \varepsilon,$$

т.е. $z \in O_\varepsilon(x)$. Так как $x_1 \in M$, то в $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ найдется точка $x_2 \in M$. Тогда $x_2 \in O_\varepsilon(x)$. Так как $O_\varepsilon(x)$ — произвольная окрестность точки x , то $x \in [M]$.

⊠

г) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$

Пусть $x \in [M_1 \cup M_2]$, тогда $x \in [M_1]$ или $x \in [M_2]$:

$$[M_1 \cup M_2] \subset [M_1] \cup [M_2].$$

Так как $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ и $M_2 \subset M_1 \cup M_2$, то по свойству 3 следует обратное включение. ⊠

5.2. Построить взаимно однозначное отображение:

- а) отрезка $[0, 1]$ на отрезок $[a, b]$
- б) интервала $(0, 1)$ на всю числовую прямую
- в) числовой прямой на интервал (a, b)
- г) отрезка $[0, 1]$ на интервал $(0, 1)$

- а) $y_1 = (b - a)x$; $y_2 = y_1 + a$.
 б) $y_1 = x - \frac{1}{2}$, $y_2 = \pi y_1$, $y_3 = \operatorname{tg} y_2$.
 в) $y_1 = \operatorname{arctg} x$, $y_2 = y_1 + \frac{\pi}{2}$, $y_3 = \frac{b-a}{\pi} y_2$, $y_4 = y_3 + a$.
 г) $0 \mapsto \frac{1}{2}$, $1 \mapsto \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} \mapsto \frac{1}{4}$, $\frac{1}{3} \mapsto \frac{1}{5}$, ... Остальные точки отображаются в себя.

5.3. Пусть $X = \mathbb{R}$. Являются ли метриками следующие функции:

- а) $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$.
 б) $\rho(x, y) = (x - y)^2$.

Аксиомы симметрии и тождества выполняются в обоих случаях. Проверим выполнение аксиомы треугольника.

а) $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$.

Возведем в квадрат обе части неравенства

$$\begin{aligned} \sqrt{|x - y|} &\leq \sqrt{|x - z|} + \sqrt{|z - y|}. \\ \underbrace{|x - y|}_{\leq |x - z| + |z - y| + 2\sqrt{|x - z| \cdot |z - y|}} &\leq |x - z| + |z - y| + 2\sqrt{|x - z| \cdot |z - y|}. \end{aligned}$$

Выделенная часть неравенства выполняется, последнее слагаемое положительно, поэтому полное неравенство тем более справедливо.

б) $\rho(x, y) = (x - y)^2$. Очевидно, что, например, при $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$ имеет место $(x - y)^2 = 4$ и $(x - z)^2 + (z - y)^2 = 2$, т. е. аксиома треугольника не выполняется.

Таким образом, функция *а* может быть метрикой, функция *б* не может.

5.4. Пусть на прямой $\mathbb{R}$ расстояние определяется формулой

$$\rho(u, v) = \frac{|u - v|}{\sqrt{1 + u^2} \sqrt{1 + v^2}}.$$

Показать, что $\rho(u, v)$ является метрикой.

Очевидно, что аксиомы тождества и симметрии выполняются, проверим аксиому треугольника. Пусть $u \mapsto \operatorname{tg} x$, $v \mapsto \operatorname{tg} y$, $x, y \in [-\pi/2, \pi/2]$, тогда

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \cdot |\cos x \cos y| = |\sin x \cos y - \sin y \cos x| = \\ &= |\sin(x - y)| = |\sin(x - z + z - y)| = \\ &= |\sin(x - z) \cos(z - y) + \sin(z - y) \cos(x - z)| \leq \\ &\leq |\sin(x - z) \cos(z - y)| + |\sin(z - y) \cos(x - z)| \leq \\ &\leq |\sin(x - z)| + |\sin(z - y)| = \rho(x, z) + \rho(z, y). \quad \square \end{aligned}$$

5.5. $C[a, b]$ — пространство всех непрерывных действительных функций, определенных на сегменте $[a, b]$. Доказать, что

$$\rho(f, g) = \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)|. \quad (2.5.1)$$

является метрикой.

Очевидно, что аксиома симметрии удовлетворяется. Аксиома тождества также удовлетворяется, но важно отметить, что функции должны совпадать только на сегменте $[a, b]$ — за его пределами их поведение значения не имеет (рисунок 2.5.1).

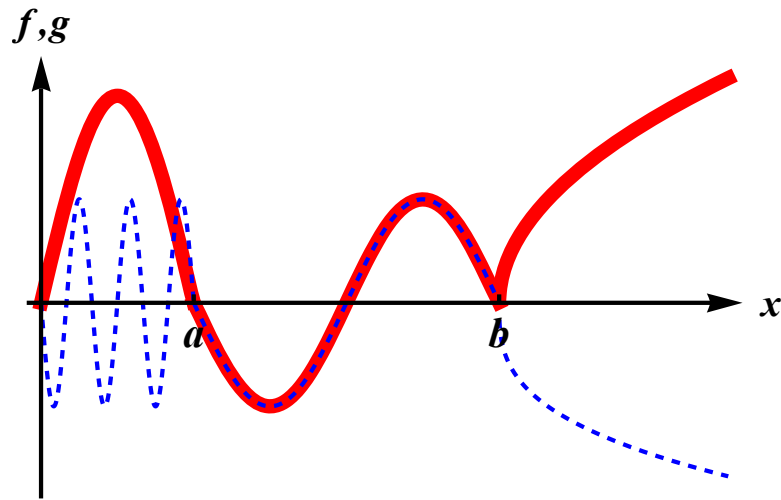


РИС. 2.5.1. К задаче 5.5 Аксиома тождества выполняется, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают на сегменте $[a, b]$.

Рассмотрим аксиому треугольника. Для любой функции $h(t) \in C[a, b]$ выполняется

$$\begin{aligned} |f(t) - g(t)| &\leq |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)| \leq \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - h(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |h(t) - g(t)|. \end{aligned}$$

Это неравенство удовлетворяется для всех $t \in [a, b]$, следовательно, и для того значения t , при котором левая часть максимальна. Тогда

$$\max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - h(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |h(t) - g(t)|,$$

аксиома треугольника удовлетворяется и, таким образом, функция (2.5.1) является метрикой в пространстве $C[a, b]$.

5.6. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Будет ли (X, d) метрическим пространством, если $d(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$?

Аксиомы тождества и симметрии, очевидно, выполняются. Рассмотрим аксиому треугольника.

$\rho(x, y)$ метрика, поэтому

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

Рассмотрим функцию $t/(1+t)$. Ее производная при $t > 0$

$$\left(\frac{t}{1+t}\right)' = \frac{1}{(1+t)^2}$$

всюду положительна, поэтому функция монотонно возрастает. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} \leq \frac{\rho(x, z) + \rho(z, y)}{1 + \rho(x, z) + \rho(z, y)} \leq \\ &\leq \frac{\rho(x, z)}{1 + \rho(x, z) + \rho(z, y)} + \frac{\rho(z, y)}{1 + \rho(x, z) + \rho(z, y)} \leq \frac{\rho(x, z)}{1 + \rho(x, z)} + \frac{\rho(z, y)}{1 + \rho(z, y)} \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y). \quad \square$$

5.7. Изобразите на одном рисунке шары $B[0, 1]$ в пространствах

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}_2^2 & \rho(x_0, x) = \sqrt{\sum_{k=1}^2 (x_k - x_{0k})^2}; \\ \mathbb{R}_1^2 & \rho_1(x_0, x) = \sum_{k=1}^2 |x_k - x_{0k}|; \\ \mathbb{R}_\infty^2 & \rho_\infty(x_0, x) = \max_{k=1,2} |x_k - x_{0k}|. \end{array}$$

Шаром $B[x_0, R]$ называется множество элементов x пространства, удовлетворяющих условию $\rho(x_0, x) \leq R$.

Согласно условию задачи x_0 — точка на плоскости с координатами $(0, 0)$, а $R = 1$. Таким образом, для пространства $\mathbb{R}_2^2$ шар задается равенством $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ и представляет собой круг единичного радиуса с центром в начале координат. Для $\mathbb{R}_1^2$ имеем $|x_1| + |x_2| \leq 1$, для $\mathbb{R}_\infty^2$ — $\max(|x_1|, |x_2|) = 1$ или $\{-1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$ (рисунок 2.5.2).

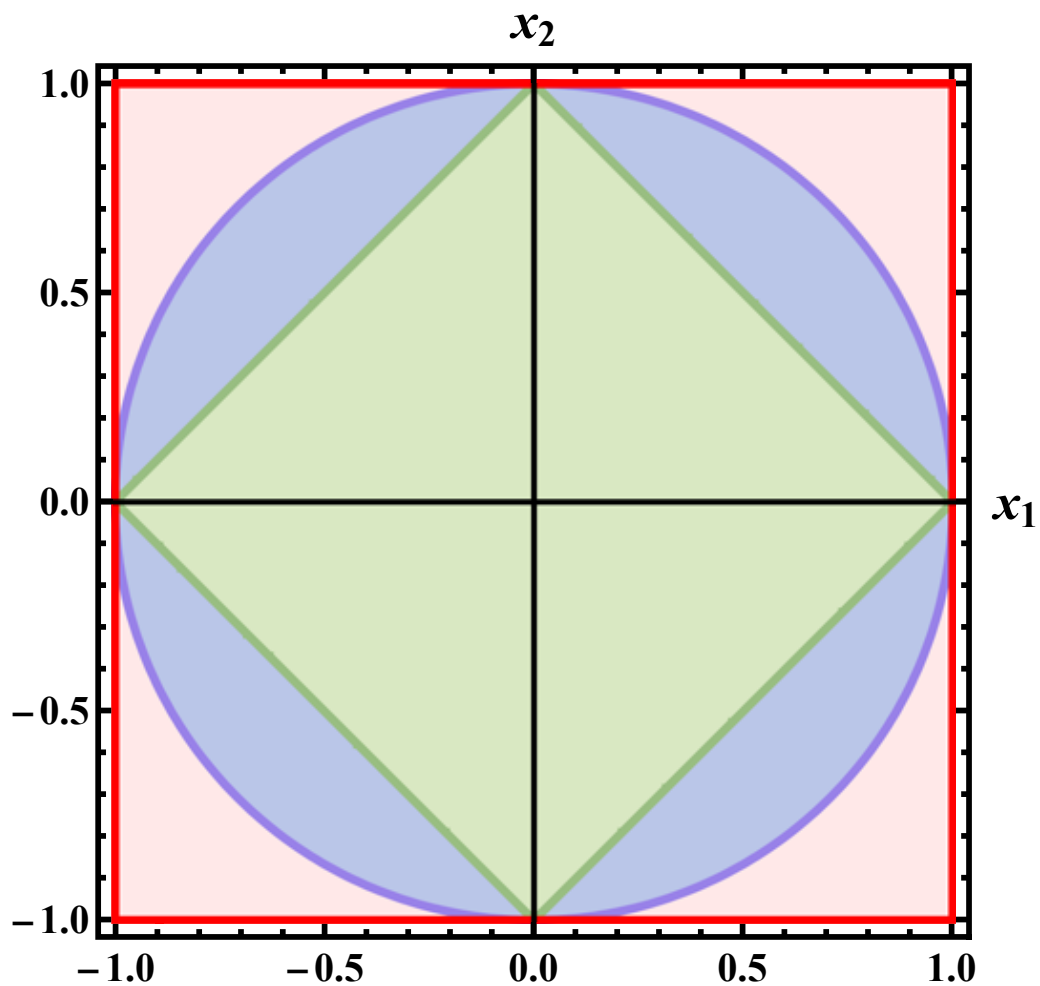


Рис. 2.5.2. К задаче 5.7. Шар $B[0, 1]$ в пространстве $\mathbb{R}_2^2$ — круг, в пространстве $\mathbb{R}_1^2$ — квадрат с вершинами $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$, в пространстве $\mathbb{R}_\infty^2$ — квадрат с вершинами $(\pm 1, \pm 1)$

5.8. Что представляет собой шар $B[0, r]$ пространства $C[0, 1]$?

Искомый шар представляет собой множество непрерывных функций $f(t)$, удовлетворяющих неравенству

$$\rho(f, 0) \equiv \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| \leq 1.$$

Иными словами, графики этих функций на сегменте $[0, 1]$ лежат в прямоугольнике с вершинами $(-r, 0)$ и $(1, r)$ (рисунок 2.5.3).

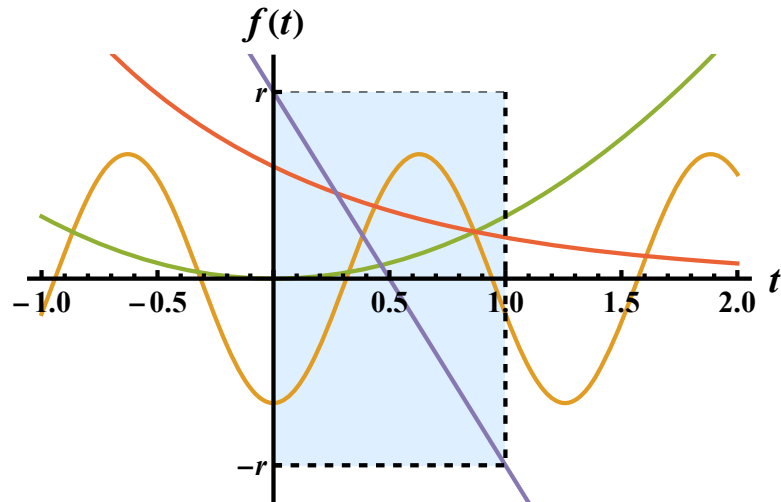


Рис. 2.5.3. К задаче 5.8. Шар $B[0, r]$ пространства $C[0, 1]$

Как и в задаче 5.5, функции должны удовлетворять условию только на сегменте $[0, 1]$, за его пределами — не обязательно.

5.9. Приведите пример такого метрического пространства, в котором шар большего радиуса составлял бы правильную часть шара меньшего радиуса.

Выберем в качестве пространства M круг радиуса r с центром в начале координат. Пусть B — круг радиуса R ($R > r$) с центром в $(r, 0)$. Тогда $M \cap B$, т. е. шар пространства M радиуса R целиком лежит в шаре радиуса r , который совпадает с этим пространством (рисунок 2.5.4). Дополнение этого шара до B , т. е. множество $B \setminus M$, не входит в пространство M и поэтому не рассматривается.

Задания для самостоятельной работы

5.10. Даны три множества A , B , C . Записать с помощью теоретико-множественных операций выражение для множества элементов, которые принадлежат:

- а) всем трем множествам

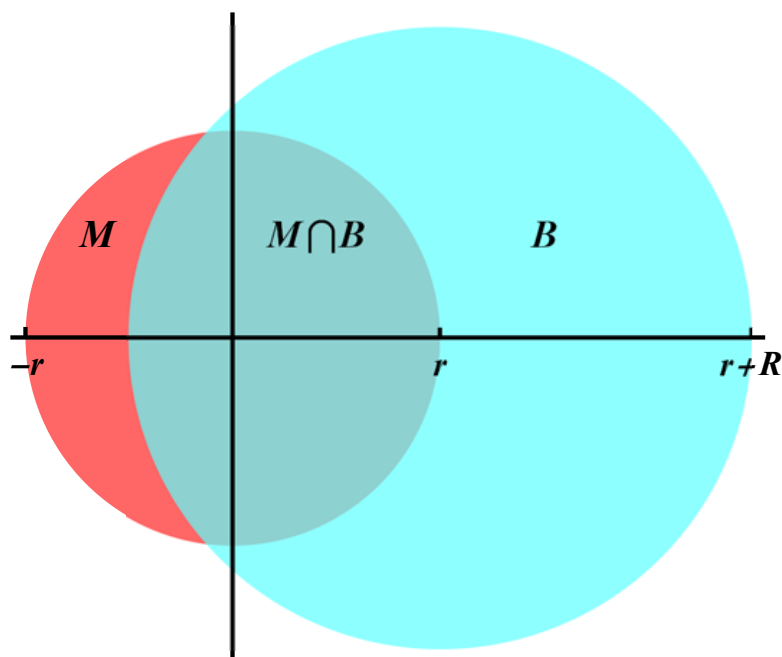


Рис. 2.5.4. К задаче 5.9

- б) по крайней мере двум из этих множеств
- в) любым двум из этих множеств, но не принадлежат всем трем
- г) по крайней мере одному из этих множеств
- д) любому одному из этих множеств, но не принадлежат двум остальным.

5.11. Пусть $R = (X, \rho)$. Доказать, что функция $d(x, y) = \ln[1 + \rho(x, y)]$ также является метрикой.

5.12. Пусть $X = \mathbb{R}$. Будут ли метриками следующие функции:

- а) $\rho(x, y) = \sin^2(x - y)$;
- б) $\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$;
- в) $\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$?

5.13. Будет ли метрическим пространством множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, если $\rho(x, y) = |x(t_0) - y(t_0)|$, где $t_0 \in [a, b]$ — некоторая фиксированная точка.

5.14. Является ли функция $\rho(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$ метрикой на множестве $\mathbb{R}$?

5.15. Можно ли на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ ввести метрику равенством $\rho(m, n) = |e^{in} - e^{im}|$ (здесь $i^2 = -1$)?

5.16. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Будет ли (X, d) метрическим пространством, если $d(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$?

Подсказка: перебрать все варианты типа $\rho(x, y) \leq 1$, $\rho(x, z) \geq 1$, $\rho(z, y) \leq 1$.

5.17. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Будет ли (X, d) метрическим пространством, если

а) $d(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y))$;

б) $d(x, y) = h(\rho(x, y))$, где $h: [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$ — непрерывная строго возрастающая функция такая, что

$$h(0) = 0, \quad h(t + s) \leq h(t) + h(s), \quad (t, s \geq 0);$$

в) $d(x, y) = \operatorname{arctg} \rho(x, y)$?

5.18. В метрическом пространстве

$$C[-1, 1], \quad \rho(f, g) = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f - g|$$

описать множества $B(|x|; 1)$, $B[x^2, 1]$, $S[x^3, 1]$.

Подсказка: буква S обозначает сферу, определение которой придумайте самостоятельно!

5.19. Построить шары $B[0, 1]$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, если для $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ расстояние определено следующим образом:

а) $\rho(x, y) = \max(\sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}, |x_3 - y_3|)$;

б) $\rho(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + |x_3 - y_3|^2}$;

в) $\rho(x, y) = 2|x_1 - y_1| + \frac{1}{3}|x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|$.

5.20. В метрическом пространстве $(\mathbb{N}, \rho)$, где

$$\rho(m, n) = \begin{cases} 0, & m = n \\ 1 + \frac{1}{n + m}, & m \neq n \end{cases},$$

найти $B(1, 3/2)$, $B(1, (n + 1)/(n + 2))$, $B[n, 1 + 1/(2n)]$, где $n \in \mathbb{N}$ — фиксированное, $S(1, 1)$, $S(1, 2)$.

2.5.2. Принцип сжимающих отображений

Примеры решения задач

5.21. Покажите, что функция $f(x) = x^2$ отображает промежуток $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ в себя. Является ли это отображение сжимающим? Если да, то найдите неподвижную точку.

Первое утверждение очевидно. Проверим второе.

Пусть x_1 и x_2 произвольные точки отрезка $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2| \leq \frac{2}{3} \rho(x_1, x_2). \quad \square$$

5.22. Проверьте, что функция $f(x) = 4x - 4x^2$ отображает промежуток $[0, 1]$ в себя. Является ли это отображение сжимающим?

Очевидно, что $f(x) = 4x(1 - x) \geq 0$ при $x \in [0, 1]$. Покажем, что $f(x) - 1 \leq 0$, т. е. промежуток $[0, 1]$ отображается в себя:

$$f(x) - 1 = -(2x - 1)^2 \leq 0 \implies f(x) \leq 1.$$

Пусть $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$, тогда

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = 1 > \frac{1}{2} = \rho(x_1, x_2).$$

Отображение не является сжимающим.

5.23. Пусть в полном метрическом пространстве X заданы два сжимающих отображения A и B , причем

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha_A \rho(x, y), \quad \rho(Bx, By) \leq \alpha_B \rho(x, y).$$

Доказать, что если при всех $x \in X$ выполняется $\rho(Ax, Bx) < \varepsilon$ (такие отображения A и B называются ε -близкими), то их неподвижные точки находятся на расстоянии, не превосходящем $\frac{\varepsilon}{1 - \alpha}$, где $\alpha = \max(\alpha_A, \alpha_B) < 1$.

Обозначим неподвижные точки через x^* , y^* , тогда $Ax^* = x^*$, $By^* = y^*$. По теореме Банаха каждое сжимающее отображение имеет единственную неподвижную точку, не зависящую от выбора начального приближения, поэтому $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k x^* = y^*$. Далее,

$$\begin{aligned} \rho(x^*, y_k) &\leq \rho(x^*, y_1) + \rho(y_1, y_2) + \cdots + \rho(y_{k-1}, y_k) \leq \\ &\leq \rho(x^*, Bx^*) (1 + \alpha_b + \cdots + \alpha_b^{k-1}) \leq \rho(x^*, Bx^*) \frac{1}{1 - \alpha_B}. \end{aligned}$$

Устремим теперь k к бесконечности:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^*, y_k) = \rho(x^*, y^*) \leq \frac{\rho(x^*, Bx^*)}{1 - \alpha_B} = \frac{\rho(Ax^*, Bx^*)}{1 - \alpha_B} < \frac{\varepsilon}{1 - \alpha}. \quad \square$$

5.24. При каком R отображение $A : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $A(t) = t^3$ является сжатием в шаре $B[0, R]$? Покажите, что A не является сжатием вблизи неподвижных точек $t = 1$ и $t = -1$.

Пусть t и s две точки шара.

$$\rho(A(t), A(s)) = |t^3 - s^3| = |t - s| (t^2 + ts + s^2) \leq 3R^2 |t - s| = 3R^2 \rho(t, s).$$

Отсюда $\alpha = 3R^2$ и для того, чтобы отображение было сжимающим, необходимо, чтобы выполнялось $R < 1/\sqrt{3}$.

Очевидно, что для $t = 1$ и $t = -1$ имеет место $A(t) = t$. Однако в этих случаях $t^2 + ts + s^2 = 1 \pm s + s^2 > 1$ и, следовательно, сжатия нет.

5.25. Покажите, что отображение $B(t) = \frac{t^2 + 2}{2t}$ является сжимающим на отрезке $[1, 2]$.

Воспользуемся теоремой Лагранжа о среднем значении: если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b) , то найдётся такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$. В данном случае имеем

$$\begin{aligned} \rho(B(t), B(s)) &= \left| \frac{t^2 + 2}{2t} - \frac{s^2 + 2}{2s} \right| = \left| t - s \right| \cdot \left(\frac{t^2 + 2}{2t} \right)' \Big|_{t=\xi} = \\ &= \left| t - s \right| \cdot \frac{2\xi^2 - 4}{4\xi^2} = \left| t - s \right| \cdot \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{\xi^2} \right|, \quad \xi \in [1, 2]. \end{aligned}$$

Запишем цепочку неравенств:

$$1 < \xi < 2 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{\xi^2} < 1 \Rightarrow -1 < -\frac{1}{\xi^2} < -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{\xi^2} < \frac{1}{4}$$

и окончательно

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{\xi^2} \right| < \frac{1}{2} < 1,$$

откуда $\rho(B(t), B(s)) < \frac{1}{2} \rho(t, s)$, отображение B сжимающее. $\square$

5.26. Является ли сжимающим отображение $f(x) = x + \frac{1}{x}$ прямой $[1, \infty)$ в себя?

$$\begin{aligned}\rho(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| = \left| x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \\ &= |x - y| \cdot \left(1 - \frac{1}{xy} \right), \quad xy \geq 1.\end{aligned}$$

Неравенство $\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y)$ выполняется, однако это не означает сжатия. При достаточно больших x или y множитель $\left(1 - \frac{1}{xy}\right)$ становится сколь угодно близким к 1, а коэффициент α должен быть строго меньше единицы независимо от значений x и y .

5.27. С точностью до $\varepsilon = 0,001$ найти решение уравнения $\operatorname{tg} x = x$ в интервале $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$. Будет ли отображение сжимающим?

Для того, чтобы уравнение $f(x) = x$ решалось методом сжимающих отображений, необходимо выполнение условия $|f'(x)| < 1$. Для заданной функции

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \geq 1.$$

Перейдем к обратной функции: $x = \operatorname{arctg} x + \pi$ (объясните, для чего здесь нужно второе слагаемое). Условия для производной теперь выполняется:

$$\frac{d(\operatorname{arctg} x + \pi)}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}.$$

Найдем множитель α :

$$|f'(x)| = \frac{1}{x^2 + 1} < \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 1} < 0.2884 = \alpha.$$

Положим $x_0 = 3$, тогда $x_1 = \operatorname{arctg} x_0 + \pi = \operatorname{arctg} 3 + \pi \approx 4,39$, откуда $\rho(x_0, x_1) \approx 1,39$.

Количество итераций оценим по формуле (1.5.20):

$$n > \frac{1}{\ln \alpha} \ln \frac{\varepsilon(1 - \alpha)}{\rho(x_0, x_1)} = \frac{1}{\ln 0,2884} \ln \frac{0,001(1 - 0,2884)}{1,3906} \approx 6,094.$$

После семи итераций имеем $x \approx x_7 = 4,4934 \dots$

5.28. Доказать, что последовательность x_n цепных дробей

$$2, \quad 2 + \frac{1}{2}, \quad 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \quad \dots$$

является сходящейся и найти ее предел.

Запишем выражения для членов последовательности:

$$x_1 = 2, \quad x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Тогда $x_n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Далее, при $n \geq 2$ имеем $x_{n-1} \geq 2$ или $0 < \frac{1}{x_{n-1}} \leq \frac{1}{2}$ и, следовательно, $x_n \leq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ при $n \geq 2$. При этом $x_1 = 2 \leq \frac{5}{2}$. Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in \left[2, \frac{5}{2}\right]$.

Рассмотрим отображение $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ на отрезке $\left[2, \frac{5}{2}\right]$.

$$\frac{2}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{12}{5} \leq 2 + \frac{1}{x} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow 2 + \frac{1}{x} \in \left[\frac{12}{5}, \frac{5}{2}\right] \subset \left[2, \frac{5}{2}\right].$$

Следовательно, f отображает отрезок $\left[2, \frac{5}{2}\right]$ в себя.

Далее:

$$\begin{aligned} \rho(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| = \left|2 + \frac{1}{x} - 2 - \frac{1}{y}\right| = \\ &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y - x|}{|x| \cdot |y|} \leq \frac{1}{4}|y - x| = \frac{1}{4}\rho(x, y). \end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha = \frac{1}{4} < 1$ и отображение является сжимающим. Оно имеет единственную неподвижную точку $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, где $x_n = f(x_{n-1}) = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}$.

Перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем $x^* = 2 + \frac{1}{x^*}$. Решая квадратное уравнение, получаем $x^* = 1 + \sqrt{2}$. Второй корень квадратного уравнения $x = 1 - \sqrt{2}$ отбрасывается, поскольку предел последовательности не может быть отрицательным.

Задания для самостоятельной работы

5.29. Установить, какие из следующих отображений являются сжимающими на вещественной прямой $\mathbb{R}$:

а) $f(x) = 2x + 3$;

б) $f(x) = \frac{1}{3}x + 5$;

в) $f(x) = x + 6$;

г) $f(x) = -x + 2$.

5.30. Является ли сжимающим отображение $f(x) = x^3$, если оно задано в метрическом пространстве:

а) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$; б) $\left[0, \frac{3}{4}\right]$?

5.31. Найти неподвижные точки для сжимающих отображений из задач 1 и 2.

5.32. Применяя принцип сжимающих отображений, решить уравнение $x = 2xe^x - 1$ с точностью до 10^{-2} .

2.5.3. Принцип сжимающих отображений (приложения)

Примеры решения задач

5.33. Решить неоднородное интегральное уравнение Фредгольма методом последовательных приближений, указав, при каких значениях параметра λ этот метод применим.

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 xt\varphi(t) dt. \quad (2.5.2)$$

Ядро имеет вид $K(x, t) = xt$, тогда $M = \max |K(x, t)| = 1$ и из неравенства (1.5.23) $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ следует, что $|\lambda| < 1$. Это достаточное условие, ниже покажем, что оно не является необходимым.

Выберем в качестве начального приближения $\varphi_0(x) = f(x) = x$. Найдем последующие приближения по формуле (1.5.24):

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x + x\frac{\lambda}{3}; \\ \varphi_2(x) &= x + x\frac{\lambda}{3} + x\frac{\lambda^2}{9}; \\ \varphi_3(x) &= x + x\frac{\lambda}{3} + x\frac{\lambda^2}{9} + \frac{\lambda^3}{27}; \\ &\vdots \\ \varphi_n(x) &= x \left[\left(\frac{\lambda}{3}\right)^0 + \left(\frac{\lambda}{3}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{\lambda}{3}\right)^n \right] \end{aligned}$$

(самостоятельно докажите последнее соотношение по индукции).

Перейдем к пределу:

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^n = \frac{x}{1 - \frac{\lambda}{3}} = \frac{3}{3 - \lambda}x.$$

Геометрический ряд сходится, если его знаменатель по модулю меньше единицы, таким образом, в данном случае $|\lambda| < 3$. Это условие менее строгое, чем полученное по формуле (1.5.23) $|\lambda| < 1$. Вместе с тем, если подставить полученное выражение $\varphi(x) = 3x/(3 - \lambda)$ в уравнение (2.5.2), то оно обращает уравнение в тождество при любых λ , кроме $\lambda = 3$, хотя при $|\lambda| > 3$ ряд расходится. Это означает, что для таких λ принцип сжимающих отображений неприменим и решение следует искать другим способом.

Подробный анализ других способов решения уравнения Фредгольма будет дан в главе 1.8.

5.34. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение Вольтерра:

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x (t - x)\varphi(t) dt.$$

Действуем так же, как в предыдущей задаче. Положим $\varphi_0(x) = 1$, тогда

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= 1 - \frac{x^2}{2}; \\ \varphi_2(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}; \\ \varphi_3(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}; \\ &\vdots \\ \varphi_n(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x.$$

5.35. С точностью до $\varepsilon = 0,01$ найти решение линейной алгебраической системы

$$\begin{cases} -0.97x_1 + 0.1x_2 + 0.05x_3 = 0,5; \\ -0.02x_1 + 1.15x_2 + 0.2x_3 = 0; \\ -0.17x_1 + 1.13x_3 = 1. \end{cases}$$

Запишем систему в матричной форме: $AX = Y$, где

$$A = \begin{pmatrix} -0.97 & 0.1 & 0.05 \\ -0.02 & 1.15 & 0.2 \\ -0.17 & 0 & 1.13 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и преобразуем ее к виду $X = BX + \tilde{Y}$.

$$\begin{aligned} -0.97x_1 + 0.1x_2 + 0.05x_3 &= 0.5 \iff x_1 = 0.03x_1 + 0.1x_2 + 0.05x_3 - 0.5; \\ -0.02x_1 + 1.15x_2 + 0.2x_3 &= 0 \iff x_2 = 0.02x_1 - 0.15x_2 - 0.2x_3; \\ -0.17x_1 + 1.13x_3 &= 1 \iff x_3 = 0.17x_1 - 0.13x_3 + 1. \end{aligned}$$

Теперь

$$X = \mathcal{P}X = BX + \tilde{Y},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0.03 & 0.1 & 0.05 \\ 0.02 & -0.15 & -0.2 \\ 0.17 & 0 & -0.13 \end{pmatrix}; \quad \tilde{Y} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При каких условиях отображение $\mathcal{P}$ является сжимающим?

Пусть $X, Z \in \mathbb{R}_\infty^n$, метрика в этом пространстве имеет вид (1.5.5)

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k - x_k|.$$

Обозначим i -ю компоненту вектора BX через $(BX)_i$, т. е. $(BX)_i = \sum_{k=1}^n b_{ik}x_k$, тогда

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Z)) &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \left((BX)_i + \tilde{Y}_i \right) - \left((BZ)_i + \tilde{Y}_i \right) \right| = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} |(BX)_i - (BZ)_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |b_{ik}| \cdot |x_k - z_k| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - z_k| \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |b_{ik}| = \alpha \rho(X, Z), \end{aligned}$$

где $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |b_{ik}|$.

Таким образом, отображение $\mathcal{P}$ является сжимающим, если

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |b_{ik}| < 1, \quad i = \overline{1, n}$$

В данном случае для матрицы B получаем $\max\{0.18, 0.37, 0.30\} = 0.37 < 1$, следовательно, отображение сжимающее.

Пусть $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, тогда $X_1 = BX_0 + \tilde{Y} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и, следовательно, $\rho(X_0, X_1) = 1$. Количество итераций, необходимых для достижения заданной

точности, определяется из неравенства

$$n > \frac{1}{\ln \alpha} \ln \left[\frac{\varepsilon(1 - \alpha)}{\rho(X_0, X_1)} \right].$$

Подставив сюда $\alpha = 0.37$, $\varepsilon = 0.01$ и $\rho(X_0, X_1) = 1$, получаем, что $n > 5.0965$, т. е. $n=6$.

Проделав шесть итераций, получаем решение:

$$X = \begin{pmatrix} -0.489 \\ -0.148 \\ 0.812 \end{pmatrix}.$$

5.36. Докажите, что данную систему можно решить методом последовательных приближений. Сколько итераций потребуется для достижения решения с погрешностью, не превышающей 0,01?

$$\begin{cases} 10x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4; \\ -2x_1 + 10x_2 + x_3 = 5; \\ -2x_1 + x_2 - 8x_3 = -1. \end{cases}$$

Для решения этой задачи систему следует предварительно привести к виду, в котором коэффициенты будут малыми. Разделим почленно первое уравнение на 10, второе на 10, третье на 8:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{10}x_2 + \frac{3}{10}x_3 = \frac{4}{10}; \\ -\frac{2}{10}x_1 + x_2 + \frac{1}{10}x_3 = \frac{5}{10}; \\ -\frac{2}{8}x_1 + \frac{1}{8}x_2 - x_3 = -\frac{1}{8}. \end{cases}$$

Далее решение ищется так же, как в предыдущей задаче. Приведем только основные результаты:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{3}{5}, \quad \rho(0, 1) = \frac{1}{2}$$

Для $\varepsilon = 0,01$ число итераций составляет 10.

Задания для самостоятельной работы

5.37. Решить неоднородные интегральные уравнения Фредгольма. При каких значениях λ в каждом случае применим принцип сжимающих отображений?

а) $\varphi(x) = 2 + \lambda \int_0^1 (xt) \varphi(t) dt.$

б) $\varphi(x) = x + \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(t) dt.$

в) $\varphi(x) = x^2 + 2 \int_0^1 t^2 \varphi(t) dt.$

г) $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 xt^2 \varphi(t) dt + 1.$

5.38. Решить неоднородные интегральные уравнения Вольтерра.

а) $\varphi(x) = 2x - 4 \int_0^x (t - x) \varphi(t) dt.$

б) $\varphi(x) = x + \int_0^x tx \varphi(t) dt;$

С точностью до $\varepsilon = 0,01$ найти решения линейных алгебраических систем, определив необходимое число итераций.

5.39.

$$\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 4; \\ -3x_1 + 3x_2 - 10x_3 = -3. \end{cases}$$

5.40.

$$\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 = -3; \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -2. \end{cases}$$

Ответы

5.37.

а) $\varphi(x) = 2 - \frac{3\lambda x}{\lambda - 3}.$ б) $\varphi(x) = x + \frac{1}{4}.$

$$\text{B)} \quad \varphi(x) = x^2 + \frac{6}{5}. \quad \text{Г)} \quad \varphi(x) = 1 + \frac{4\lambda x}{12 - 3\lambda}.$$

5.38.

$$\text{a)} \quad \varphi(x) = \operatorname{sh} 2x. \quad \text{б)} \quad \varphi(x) = x e^{x^3/3}.$$

2.6. Мера и интеграл Лебега. Задачи

2.6.1. Счетные и континуальные, открытые и замкнутые множества

Примеры решения задач

6.1. На плоскости построено некоторое множество попарно не пересекающихся букв T (размеры и ориентации этих букв могут быть и различными). Может ли множество этих букв быть несчетным?

Поставим в соответствие каждой букве тройку рациональных точек A, B, C так, чтобы каждый из соединяющих их отрезков пересекал бы либо ножку, либо один из боковых отростков буквы (рисунок 2.6.1). Каждой такой тройке соответствует не более одной буквы T (в противном случае буквы пересекались бы). Теперь между заданным множеством букв T и некоторым множеством троек рациональных точек на плоскости установлено взаимно однозначное соответствие. Так как множество таких троек не более чем счетно, то и множество попарно не пересекающихся букв T также не более чем счетно.

6.2. Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции, заданной на сегменте $[a, b]$, конечно или счетно.

Каждая точка разрыва $x_0 \in [a, b]$ монотонно возрастающей функции $f(x)$ является точкой разрыва первого рода. Действительно, так как функция $f(x)$ монотонна и ограничена на $[a; x_0)$, то она имеет предел $x \rightarrow x_0 - 0$; аналогично этому проверяется, что функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow x_0 + 0$.

Назовем скачком функции в точке разрыва x_0 разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$. В каждой точке разрыва монотонно возрастающей функции скачок положителен. Легко проверить, что множество точек разрыва, в которых скачок больше $\alpha > 0$ конечно: число этих точек не больше, чем $(f(b) - f(a)) / \alpha$.

Обозначим через B_k множество точек разрыва со скачком, большим $1/k$. Очевидно, что множество B всех точек разрыва равно сумме всех B_k :

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k \cup \dots$$

Так как все B_k конечны, то B не более чем счетно.

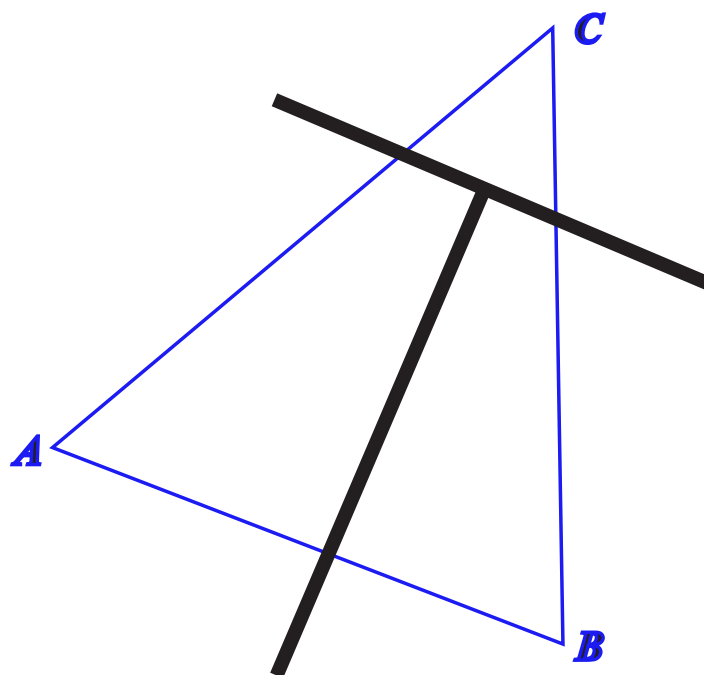


Рис. 2.6.1. К задаче 6.1

6.3. Какова мощность множества всех строго возрастающих непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$?

Мощность континуума. Обозначим через A множество всех функций вида kx , где $k > 0$; через B — множество всех строго возрастающих непрерывных функций, через C — множество всех непрерывных функций. Тогда $A \subset B \subset C$. Но A и C имеют мощность континуума; следовательно, B также имеет мощность континуума.

6.4. Доказать, что если расстояние между любыми двумя точками множества E на прямой больше единицы, то множество E конечно или счетно.

Разобьем прямую на счетное множество отрезков точками $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots$. Каждый такой отрезок содержит не более одной точки данного множества, поэтому между точками множества E и некоторой совокупностью построенных отрезков существует взаимно однозначное соответствие. Следовательно, множество E не более чем счетно.

6.5. Пусть дано открытое множество $F \subset [a, b]$. Доказать, что $G = [a, b] \setminus F$ — замкнутое множество.

Нужно доказать, что G содержит все свои предельные точки. Из определения разности множеств следует, что $\forall x \in [a, b]$ либо $x \in F$, либо $x \in G$.

Пусть x — предельная точка множества G , т. е. в любой окрестности точки x имеются точки множества G , отличные от x .

Очевидно, $x \in [a, b]$. Докажем, что $x \in G$. Предположим противное. Тогда $x \in F$, и так как F — открытое множество, то существует окрестность точки x , целиком принадлежащая F . Следовательно, в этой окрестности точки x нет ни одной точки из множества G , но это противоречит тому, что x — предельная точка G . Следовательно, предположение неверно, поэтому $x \in G$, и, значит, G — замкнутое множество.

6.6. Доказать, что если A — неограниченное множество положительной меры на прямой $\mathbb{R}$, то в нем найдется хотя бы одна пара точек, расстояние между которыми рационально, и пара точек, расстояние между которыми иррационально.

Если неверно второе утверждение, то расстояние между точками множества всегда рационально. Множество A непустое, тогда в нем есть какой-то элемент x , а остальные точки имеют вид $x+q$, где $q \in \mathbb{Q}$ рационально. Значит, множество не более чем счётно, и его мера Лебега нулевая, что противоречит условию.

Задания для самостоятельной работы

6.7. Какова мощность множества всех рациональных функций с целыми коэффициентами в числителе и знаменателе?

6.8. Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции, определенной на всей числовой прямой, конечно или счётно.

6.9. Какова мощность множества всех монотонных функций на отрезке $[a, b]$ (не только непрерывных)? Подсказка: воспользуйтесь результатом задачи 5 аудиторного занятия.

6.10. На плоскости построено некоторое множество попарно не пересекающихся букв Г. Может ли это множество быть несчётным?

6.11. На плоскости задано множество E такое, что расстояние между любыми двумя точками этого множества больше, чем a (где a — данное положительное число). Доказать, что множество E не более, чем счётно (т. е. либо счётно, либо конечно).

6.12. Выяснить, являются ли следующие множества конечными, счётными или множествами мощности континуум:

- а) Множество рациональных чисел.
- б) Множество всех упорядоченных пар рациональных чисел.

- в) Множество всех конечных последовательностей рациональных чисел.
- г) Множество всех последовательностей из нулей и единиц.
- д) Множество всех многочленов с рациональными коэффициентами.
- е) Множество всех открытых кругов на плоскости рационального радиуса, координаты центра которых рациональны.
- ж) Множество попарно непересекающихся треугольников на плоскости.
- з) Множество всех сходящихся последовательностей целых чисел.
- и) Множество всех последовательностей целых чисел.
- к) Множество всех непрерывных на отрезке $[0, 1]$ числовых функций.
- л) Множество всех непрерывных на отрезке $[0, 1]$ числовых функций, принимающих в рациональных точках отрезка рациональные значения.

6.13. Какова мощность множества всех треугольников на плоскости, вершины которых имеют рациональные координаты?

6.14. На плоскости построено некоторое множество попарно не пересекающихся окружностей. Может ли это множество быть несчетным?

Ответы

6.7. Счетное множество.

6.9. Мощность континуума.

6.10. Такое множество может иметь любую мощность, меньшую или равную мощности континуума.

Подсказка. Постройте произвольное множество M на прямой $y = -x$ и посмотрите на рисунок 2.6.2.

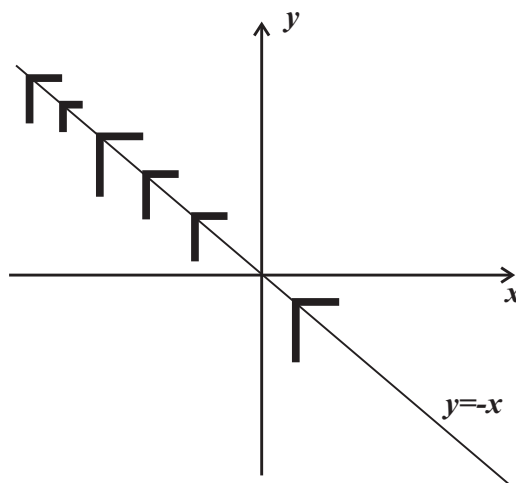


Рис. 2.6.2. К задаче 6.10.

2.6.2. Мера Лебега

Примеры решения задач

6.15. Доказать, что мера Лебега множества рациональных чисел равна нулю.

Множество рациональных чисел счетно. Упорядочим точки множества $\mathbb{Q}$: $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$. Зададим $\varepsilon > 0$ и окружим каждую точку r_n интервалом δ_n длины $\frac{\varepsilon}{2^n}$.

Сумма длин этих интервалов $\delta = \sum \delta_n$ есть открытое множество, покрывающее $\mathbb{Q}$. Интервалы δ_n могут пересекаться, поэтому

$$\mu(\delta) = \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\delta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Так как ε можно выбрать сколь угодно малым, то $\mu\mathbb{Q} = 0$. $\square$

То же рассуждение, разумеется, относится и к любому отрезку числовой прямой.

6.16. Доказать, что мера Лебега множества алгебраических чисел равна нулю.

Определение 2.1. Алгебраическое число — корень полинома, коэффициенты которого рациональные числа. Целым алгебраическим числом называется корень полинома с целыми коэффициентами, причем старший коэффициент отличен от нуля. Число, которое не является корнем такого полинома, называется *трансцендентным*.

Очевидно, что алгебраические числа могут быть как рациональными, так и иррациональными, как действительными, так и комплексными.

Докажем, что множество алгебраических чисел $\mathbb{A}$ счетное.

Нетрудно видеть, что приведением к общему знаменателю полином с рациональными коэффициентами сводится к многочлену с целыми коэффициентами $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, имеющему те же корни. Назовем *высотой* этого полинома положительное целое число

$$h = n + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|. \quad (2.6.1)$$

Если высота h полинома задана, то его степень и абсолютные значения коэффициентов ограничены, следовательно, может существовать лишь конечное число полиномов вида (2.6.1) с данной высотой.

Перенумеруем эти полиномы. Наименьшая возможная высота полинома есть $h = 2$, полиномов с такой высотой только два: x и $-x$. Присвоим им номера 1 и 2.

Выпишем полиномы с высотой $h = 3$:

$$x^2, \quad -x^2, \quad x+1, \quad x-1, \quad -x+1, \quad -x-1, \quad 2x, \quad -2x$$

и присвоим им номера 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Затем перейдем к полиномам высоты $h = 4$ и т. д. Таким образом может быть пронумеровано множество всех полиномов вида (2.6.1).

В силу основной теоремы алгебры полиномов степени n вида (2.6.1) может иметь лишь конечное (не более n) число различных корней. Пронумеруем корни каждого полинома, например, по возрастанию модуля, затем по возрастанию действительной и мнимой частей, отбрасывая «дубликаты». В результате мы получим ряд чисел, в котором каждый корень полинома вида (2.6.1) встретится один и только один раз. Множество алгебраических чисел пронумеровано, следовательно, оно счетное.

Утверждение о том, что мера Лебега этого множества равна нулю, доказывается так же, как в задаче 6.15.

6.17. Доказать, что множество A чисел отрезка $S = [0, 1]$, десятичное разложение которых невозможно без цифры 5, измеримо по Лебегу, и найдите его меру.

Рассмотрим сначала множество A_1 тех чисел из S , в десятичном разложении которых первой цифрой после запятой будет непременно цифра 5. Это множество есть интервал $A_1 = (0.5, 0.6)$ (длина интервала 0.1). Заметим, что число 0.5 в этот интервал не входит, потому что его можно записать без использования цифры 5: $0.5 = 0.499999 \dots$

Теперь из $S \setminus A_1$ отберем множество A_2 тех чисел, в десятичном разложении которых второй цифрой после запятой будет непременно цифра 5. Множество A_2 состоит из девяти интервалов

$$(0.05, 0.06), (0.15, 0.16), \dots, (0.45, 0.46), (0.65, 0.66), \dots, (0.95, 0.96)$$

длины 0,01 каждый. Интервал $(0.55, 0.56)$ исключен, так как мы уже учли его, рассматривая множество A_1 .

Далее рассуждаем аналогично: те числа из $S \setminus (A_1 \cup A_2)$, в десятичном разложении которых на третьем месте после запятой окажется непременно цифра 5, составляют множество A_3 , являющееся объединением 81 интервала длиной 0,001 каждый, и так далее. Таким образом, имеем Множества A_i суть объединения конечного числа интервалов и поэтому измеримы, они попарно не пересекаются, поэтому и их объединение

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$$

измеримо, причем

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots = \frac{1}{10} + \frac{9}{100} + \dots + \frac{9^{n-1}}{10^n} + \dots = 1.$$

6.18. Какова мощность множества всех вещественных чисел, заключенных между 0 и 1, в десятичном разложении которых цифра 3 находится на третьем месте?

Взаимно однозначное соответствие между множеством A десятичных дробей указанного вида и множеством B всех десятичных дробей устанавливаем следующим образом: каждой бесконечной дроби из A ставим в соответствие бесконечную дробь из B , которая получается из первой дроби вычеркиванием цифры, стоящей на третьем месте. Например, дроби $x = 0,253461\dots \in A$ соответствует дробь $y = 0,25461\dots \in B$; дроби $x = 0,263758\dots \in A$ соответствует дробь $y = 0,26758\dots \in B$. Множество B имеет мощность континуума, следовательно, A также имеет мощность континуума.

6.19. Найти меру Лебега множества тех точек отрезка $[0, 1]$, в десятичном разложении которых единица встречается конечное число раз.

Если на фиксированном месте находится какая-то определённая цифра, вероятность такого события (мера множества) равна $1/10$. Тогда для чисел без 1 на заданном месте мера равна $9/10$. Аналогично для двух фиксированных цифр вероятность всегда равна $1/100$. Пара цифр, не равных 1, дает меру $(9/10)^2$. Поскольку цифра 1 не встречается далее нигде, мера будет не превосходить $(9/10)^k$ при любом k , а это значит, что она равна нулю.

6.20. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^1$ измеримо, и найти его меру Лебега.

$$A = \left\{ x \mid \exists k \in \mathbb{N}, \frac{1}{2^k} x < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} \right\}.$$

Множество A состоит из неперекрывающихся интервалов, каждый из которых имеет длину $1/3^k$. Тогда мера этого множества в силу свойства σ -аддитивности (1.6.3) определяется как

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}.$$

6.21. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^1$ измеримо, и найти его меру Лебега.

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(k, k + \frac{1}{k} \right).$$

Множество A также состоит из неперекрывающихся интервалов, но его мера

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty.$$

Таким образом, A — измеримое множество бесконечной меры.

6.22. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^1$ измеримо, и найти его меру Лебега.

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (k, k + 2^{-k}).$$

Интервалы не перекрываются, мера определяется по формуле

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Измеримое множество конечной меры может быть неограниченным на прямой (рисунок 2.6.3).



Рис. 2.6.3. К задаче 6.22

6.23. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^1$ измеримо, и найти его меру Лебега.

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{10}, \frac{1}{k} + \frac{1}{10} \right).$$

В данном случае длина каждого интервала равна $1/5$, но эти интервалы перекрываются, поэтому мерой Лебега будет внешняя мера (1.6.2)

$$\mu(A) = \inf_{A \subset \cup P_k} \sum_k m(P_k).$$

При $k = 1$ имеем интервал $(0.9, 1.1)$, остальные интервалы сливаются, образуя $(0.0, 0.6)$ и, таким образом, $\mu(A) = 0.8$.

6.24. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^1$ измеримо, и найти его меру Лебега.

$$A = \left\{ x \left| \sin \frac{1}{x} > 0, 0 < x < 1 \right. \right\}.$$

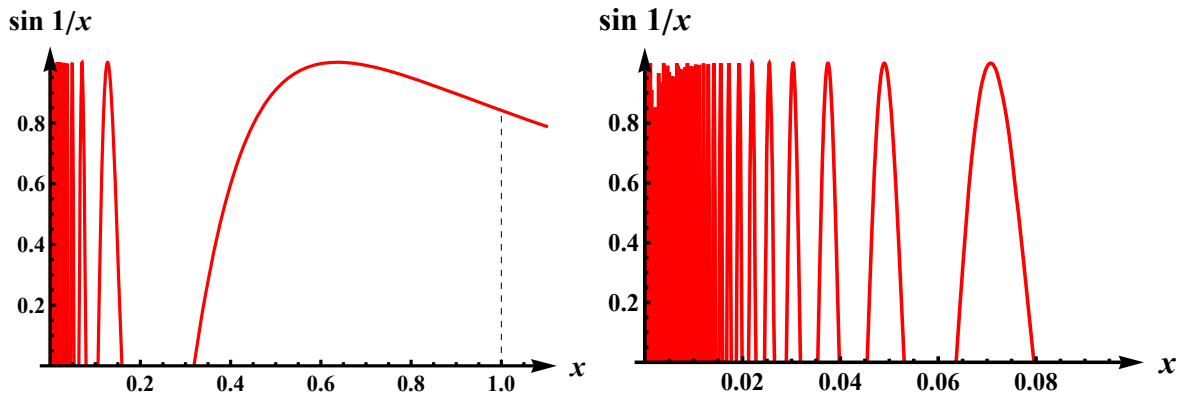


Рис. 2.6.4. К задаче 6.24. Приведена только область, в которой $\sin 1/x > 0$

Найдем интервалы, где $\sin \frac{1}{x} > 0$; это $2\pi k < \frac{1}{x} < \pi + 2\pi k$ и, следовательно, но,

$$\frac{1}{\pi + 2\pi k} < x < \frac{1}{2\pi k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Кроме этого нужно добавить интервал $x \in \left(\frac{1}{\pi}, 1\right)$ (самостоятельно поясните, почему, воспользовавшись рисунком 2.6.4).

Эти интервалы не перекрываются, поэтому

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi k} - \frac{1}{\pi + 2\pi k} \right) + 1 - \frac{1}{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) + 1 - \frac{1}{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) \right] + 1 - \frac{1}{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} (1 - \ln 2) + 1 - \frac{1}{\pi} = 1 - \frac{1}{\pi} \ln 2. \end{aligned}$$

6.25. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^2$ измеримо, и найти его меру Лебега.

$$A = \left\{ (x, y) \left| \cos \frac{1}{x^2 + y^2} > \frac{1}{2}, \quad x^2 + y^2 \leq 1 \right. \right\}.$$

Первое неравенство сводится к

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < \frac{1}{x^2 + y^2} < \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{N} \dots$$

или

$$\frac{1}{\frac{\pi}{3} + 2\pi k} < x^2 + y^2 < \frac{1}{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}.$$

Сюда следует добавить полуинтервал $1 \leq \frac{1}{x^2 + y^2} < \frac{\pi}{3}$ или $\frac{3}{\pi} < x^2 + y^2 \leq 1$.

Итого имеем систему колец, площади которых

$$\pi \left(\frac{1}{2\pi k - \frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{3}} \right) = \frac{6}{36k^2 - 1} \quad \text{и} \quad \pi \left(1 - \frac{3}{\pi} \right).$$

Таким образом,

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{36k^2 - 1} + \pi \left(1 - \frac{3}{\pi} \right) = \frac{1}{2} (6 - \sqrt{3}\pi) + \pi \left(1 - \frac{3}{\pi} \right) = \pi - \frac{\sqrt{3}\pi}{2}.$$

6.26. Пусть на $[-5, 1)$ задана мера Лебега. Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 1 + t^2, & t \in [-5, -\sqrt{2}] \setminus \mathbb{Q}; \\ \frac{1}{t-1}, & t \in [-5, -\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}; \\ e^{t^2} \sin t, & t \in . \end{cases}$$

найти все точки непрерывности и разрыва. Построить эквивалентную функцию с минимальным числом точек разрыва.

Две функции f и g , заданные на одном и том же μ -измеримом множестве $A \subset X$, называются *эквивалентными* (или μ -*эквивалентными*), если множество точек x из A , где $f(x) \neq g(x)$, имеет меру нуль.

Эквивалентные функции $f \sim g$ называются еще *почти всюду равными* (или почти всюду равными относительно меры μ). Если две функции f и g , заданные на измеримом множестве A , эквивалентны, то они одновременно измеримы. Для произвольных измеримых функций эквивалентность не означает совпадения.

Очевидно, что на интервале $(-\sqrt{2}, 1)$ функция непрерывна. На отрезке $[-5, -\sqrt{2}]$ функция разрывна во всех точках $t \in [-5, -\sqrt{2}] \setminus \mathbb{Q}$, т. е. $t \in \mathbb{I}$.

Эквивалентная функция

$$g(t) = \begin{cases} 1 + t^2, & t \in [-5, -\sqrt{2}] \\ e^{t^2}, & t \in (-\sqrt{2}, 1) \end{cases}$$

имеет только одну точку разрыва $t = -\sqrt{2}$.

Задания для самостоятельной работы

6.27. Найти меру множества A тех точек отрезка $[0; 1]$, которые допускают разложение в бесконечную десятичную дробь без использования цифры 5.

6.28. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^1$ измеримо, и найти его меру Лебега.

$$A = \left\{ x \left| \cos \frac{1}{x} > 0, \ 0 < x < 1 \right. \right\}.$$

6.29. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^2$ измеримо, и найти его меру Лебега.

$$A = \left\{ (x, y) \left| \sin \frac{1}{x^2 + y^2} > 0, \ x^2 + y^2 \leq 1 \right. \right\}.$$

Ответы

6.27. A — множество меры нуль.

6.28. $\mu(A) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16k^2 - 1} + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = \frac{1}{2}.$

6.29. $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k+1)} + \left(1 - \frac{1}{\pi}\right) = 2 - \frac{1}{\pi} - \ln 2.$

2.6.3. Интеграл Лебега

Примеры решения задач

6.30. Вычислить интеграл Лебега, если он существует

$$J = \int_{[0; +\infty)} \frac{1}{[x+1][x+2]} d\mu_1.$$

Воспользуемся следующим свойством интеграла Лебега: если $A = \bigcup_k A_k$, где $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_k \int_{A_k} f(x) d\mu,$$

Для наглядности оформим решение в виде таблицы:

Множество A_k	$\mu_1(A_k)$	$f(x, y)$
$0 \leq x < 1$	1	$\frac{1}{2}$
$1 \leq x < 2$	1	$\frac{1}{2 \cdot 3}$
$2 \leq x < 3$	1	$\frac{1}{3 \cdot 4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-1 \leq x < k$	1	$\frac{1}{k \cdot (k+1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Отсюда

$$J = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{[k-1; k]} \frac{1}{k(k+1)} d\mu_{1k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1.$$

6.31. Вычислить интеграл Лебега, если он существует:

$$J = \int_{(0;1]} \left[\frac{1}{x} \right] d\mu_1.$$

Множество A_k	$\mu(A_k)$	$f(x)$
$\frac{1}{2} < x \leq 1$	$1 - \frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}$	$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$	k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Далее,

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}.$$

Ряд расходится, следовательно, интеграл Лебега не существует.

6.32. Вычислить интеграл Лебега, если он существует:

$$J = \int_{[0;1]} D(x) d\mu_1,$$

где $D(x)$ — функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Интегрируема ли функция в смысле Римана? Почему?

Рассмотрим разбиение отрезка $[0, 1]$ на два измеримых подмножества A_1 и A_2 состоящие соответственно из рациональных и иррациональных точек отрезка $[0, 1]$. Тогда $D(x) = 1$ на A_1 и $D(x) = 0$ на A_2 и, следовательно, точные верхняя и нижняя границы функции Дирихле на каждом из этих

подмножеств совпадают и составляют 1 и 0 соответственно. Отсюда точная нижняя и точная верхняя границы интегральной суммы равны и составляют $1 \cdot \mu(A_1) + 0 \cdot \mu(A_2) = 0$, т. е. интеграл Лебега существует и его значение равно нулю.

Для ответа на второй вопрос воспользуемся критерием Лебега (теорема 3.2): функция интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда на этом отрезке она ограничена, и множество точек, где она разрывна, имеет нулевую меру Лебега.

Пусть a — произвольная точка отрезка $[0, 1]$. Известно, что можно выбрать последовательность рациональных чисел $\{x_n\}$, сходящуюся к a , и такую же последовательность иррациональных чисел $\{y_n\}$. Поскольку $D(x_n) = 1$, а $D(y_n) = 0$, соответствующие $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ последовательности значений функции имеют разные пределы, т. е. D разрывна в a .

Таким образом, точки разрыва функции D заполняют весь отрезок $[0, 1]$. Так как мера множества точек разрыва отлична от нуля (равна 1), то, в силу критерия Лебега, D не интегрируема по Риману на $[0, 1]$.

6.33. Доказать, что функция Римана

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ рациональное число,} \\ 0, & x \text{ иррациональное число,} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

интегрируема по Риману на $[0, 1]$, и найти $\int_0^1 R(x) dx$.

Снова применим критерий Лебега. Очевидно, что функция Римана ограничена на $[0, 1]$. Она непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{I}$, так как ее предел в каждой такой точке равен нулю, но разрывна в точках $x \in \mathbb{Q}$, так как в каждой такой точке она имеет строгий локальный максимум. При этом множество точек разрыва имеет меру нуль и, следовательно, функция интегрируема по Риману.

Интеграл от этой функции равен нулю, поскольку функция Римана равна нулю почти всюду¹ на $[0, 1]$.

6.34. Интегрируема ли по Риману функция

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \in \mathbb{I}, \\ \sin x, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

¹Напомним, что некоторое свойство выполнено почти всюду на A , если оно выполнено на A всюду, кроме, быть может, точек, образующих множество меры нуль.

на отрезке $[0; 1]$? Интегрируема ли она по Лебегу относительно меры Лебега μ_1 на $\mathbb{R}$?

Если функция интегрируема по Лебегу, то найти $\int_{[0;1]} f(x) d\mu_1$.

Функция разрывна во всех точках $x \in \mathbb{I}$, следовательно, она не интегрируема по Риману (мера множества точек разрыва не равна нулю).

Для вычисления интеграла по Лебегу

$$J = \int_{[0;1]} f(x) d\mu_1$$

построим эквивалентную функцию. Поскольку $\mu_1(\mathbb{Q}) = 0$, а $\mu_1(\mathbb{I}) = 1$ на отрезке $[0; 1]$, имеет место $f(x) \sim 2^x$ и интеграл Лебега сводится к интегралу Римана:

$$J = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}.$$

6.35. Вычислить интеграл Лебега $J = \int_{[0;1]} f(x) d\mu_1$, если

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \in \mathbb{I} \cap (\frac{1}{3}; +\infty), \\ x^2, & x \in \mathbb{I} \cap [0; \frac{1}{3}), \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Рассмотрим интеграл на полуинтервалах $[0; \frac{1}{3})$ и $(\frac{1}{3}; 1]$ (точку $x = \frac{1}{3}$ можно исключить, ее мера равна нулю).

Рассуждая так же, как и в предыдущей задаче, устанавливаем, что $f(x) \sim x^2$ на $[0; \frac{1}{3})$ и $f(x) \sim \ln x$ на $(\frac{1}{3}; 1]$. Тогда

$$J = \int_0^{\frac{1}{3}} x^2 dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 \ln x dx = \frac{1}{81} + \frac{\ln 3 - 2}{3} = .$$

6.36. Вычислить интеграл Лебега $J = \int_{[0;2]} f(x) d\mu_1$, если

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{A}, \\ \sin \pi x, & x \in [0; 1) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}, \\ \cos \pi x, & x \in [1; 2] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}, \end{cases}$$

где $\mathbb{A}$ — множество алгебраических чисел.

Множество алгебраических чисел счетно и его мера Лебега равна нулю, поэтому интеграл Лебега построением эквивалентной функции

$$f(x) \sim f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \in [0; 1), \\ \cos \pi x, & x \in [1; 2] \end{cases}$$

сводится к интегралу Римана:

$$J = \int_{[0;2]} f(x) d\mu_1 = \int_0^1 \sin \pi x dx + \int_1^2 \cos \pi x dx = \frac{2}{\pi}.$$

6.37. Пусть μ_1 — мера Лебега на числовой прямой $\mathbb{R}$. Вычислить интеграл Лебега:

$$J = \int_{[0,1]} \operatorname{sign} \sin \frac{\pi}{x} d\mu_1.$$

Снова составим таблицу:

Множество A_k	$f(x)$
$\frac{1}{2} < x \leq 1$	-1
$\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3}$	-1
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}$	$(-1)^{k+1}$
$\vdots$	$\vdots$

Тогда

$$\begin{aligned} J &= -\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \dots = \\ &= -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} - \dots = \\ &= -2 \left(-1 + \frac{1}{2}\right) - 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) = 1 - 2 \ln 2. \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

6.38. Вычислить интеграл $\int_{[0;+\infty)} e^{-[x]} d\mu_1.$

6.39. Вычислить интеграл $\int_{[0;+\infty)} \frac{1}{[x]!} d\mu_1$.

6.40. Вычислить интеграл $\int_{[-\frac{1}{e};e]} f(x) d\mu_1$, где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x \in [-\frac{1}{e}; e] \setminus \mathbb{Q}; \\ \operatorname{arctg} 2x, & x \in [-\frac{1}{e}; e] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ответы

6.38. $\frac{e}{e-1}$.

6.39. e .

6.40. $1 + \ln \frac{e+2}{2e-1}$.

2.6.4. Интеграл Лебега

Примеры решения задач

6.41. Канторово множество строится следующим образом: из отрезка $[0, 1]$ исключается интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, затем из оставшихся двух сегментов выбрасываются интервалы длины $\frac{1}{3^2}$ с центрами в серединах этих сегментов; затем из оставшихся четырех сегментов исключаются интервалы длины $\frac{1}{3^3}$ с центрами в серединах этих сегментов и так далее. Множество C , оставшееся после исключения всех указанных интервалов, является совершенным множеством (совершенным называется замкнутое множество, не содержащее изолированных точек); оно называется канторовым совершенным множеством. Его точки разделяются на два рода: точки 1-го рода — концы выбрасываемых интервалов (таких точек счетное множество) и точки 2-го рода (все остальные точки множества C ; их — континуум).

Изобразить канторово множество и доказать, что его мера Лебега равна нулю.

Найдем сумму длин всех выброшенных интервалов (рисунок 2.6.5):

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1.$$



Рис. 2.6.5. К задаче 6.41. Канторово множество

Следовательно, мера дополнительного к канторовому множеству C открытого множества $[0, 1] \setminus C$ равна 1, откуда $\mu(C) = 0$. Таким образом, множество мощности континуума может иметь нулевую меру.

6.42. Вычислить интеграл Лебега от функции $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$, если $f(x) = 1$ в точках канторова множества, а на смежных интервалах графиком функции служат верхние полуокружности, опирающиеся на эти интервалы, как на диаметры.

Обозначим смежные интервалы канторова множества, расположенные в порядке убывания их длин, символами (ξ, η) . Тогда

$$\int_{[0,1]} f(x) d\mu_1 = \int_C f(x) d\mu_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[\xi_n, \eta_n]} f(x) d\mu_1.$$

Интеграл по C равен нулю, так как $\mu(C) = 0$. Интегралы по интервалам (ξ_n, η_n) могут быть вычислены как интегралы Римана, следовательно, каждый из них равен площади соответствующего полукруга:

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(\eta_n - \xi_n)^2}{8}.$$

Но для канторова множества имеем:

$$\begin{aligned} \eta_1 - \xi_1 &= \frac{1}{3}; \\ \eta_2 - \xi_2 &= \eta_3 - \xi_3 = \frac{1}{3^2}; \\ \eta_4 - \xi_4 &= \dots = \eta_7 - \xi_7 = \frac{1}{3^3} \end{aligned}$$

и т. д. Поэтому

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{8} \left[\frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^{2n}} \right] = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{\pi}{56}.$$

6.43. Доказать, что функция $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, μ_1 -измерима на $\mathbb{R}$, если:

$$a) \quad f(x) = \sin[x];$$

$$б) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos ne^x}{n\sqrt[3]{n}};$$

$$в) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^4 + n^4};$$

$$г) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[x]}{1 + n^5[x]^2};$$

$$д) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos x}.$$

а) Функция f принимает счетное число значений $\sin k$, $k \in \mathbb{Z}$. А именно, $f(x) = \sin k$, если x принадлежит промежутку $A_k = [k, k + 1)$, причем $\cup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k + 1) = \mathbb{R}$. Так как промежутки A_k являются μ_1 -измеримыми, то исследуемая функция f также μ_1 -измерима на $\mathbb{R}$.

б) Рассматриваемый ряд непрерывных функций сходится равномерно на $\mathbb{R}$, поскольку

$$\frac{|\cos ne^x|}{n\sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

а числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$ сходится. Поэтому сумма этого ряда, т. е. функция f , является непрерывной на $\mathbb{R}$ и, следовательно, μ_1 -измеримой.

в) Члены рассматриваемого функционального ряда являются непрерывными на $\mathbb{R}$ функциями и поэтому μ_1 -измеримыми. Если $x > 0$, то эквивалентность

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{x^4 + n^4} \sim \frac{x}{x^4 + n^4}, \quad n \rightarrow \infty$$

позволяет сделать вывод о сходимости этого ряда для $x \geq 0$. Аналогично, если $x < 0$, то

$$-\operatorname{arctg} \frac{x}{x^4 + n^4} \sim -\frac{x}{x^4 + n^4}, \quad n \rightarrow \infty,$$

поэтому для рассматриваемых x ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^4 + n^4}$ сходится. Таким образом, заданный ряд μ_1 -измеримых функций сходится на множестве $\mathbb{R}$. Тогда его сумма f также является μ_1 -измеримой функцией согласно следующей теореме:

Теорема 4.1. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ μ -измеримых функций, определенных на множестве A , сходится в каждой точке $x \in A$ к функции $y = f(x)$, $x \in A$. Тогда предельная функция $y = f(x)$, $x \in A$, является μ -измеримой.

з) Функция $y = [x]$, $x \in \mathbb{R}$, является простой, принимающей целые значения $k \in \mathbb{Z}$ на μ_1 -измеримых множествах $A_k = [k, k+1)$ и поэтому μ_1 -измеримой. Тогда и все функции $y_n = \frac{n[x]}{1+n^5[x]^2}$ также μ_1 -измеримы, как частное μ_1 -измеримых функций. Кроме того, воспользовавшись при $[x] \neq 0$ эквивалентностью

$$\frac{n[x]}{1+n^5[x]^2} \sim \frac{[x]^{-1}}{n^4}, \quad n \rightarrow \infty,$$

получаем, что рассматриваемый функциональный ряд сходится на множестве $\mathbb{R}$ и, следовательно, функция f является μ_1 -измеримой.

д) Члены функционального ряда являются непрерывными функциями и по признаку Лейбница этот ряд сходится при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$. Поэтому его сумма f является μ_1 -измеримой на $\mathbb{R}$ функцией.

6.44. Доказать, что при $n \rightarrow \infty$

$$f_n(x) = x + \sin^n \pi x + \cos^n \pi x \rightarrow f(x) = x$$

почти всюду на $\mathbb{R}$ относительно меры Лебега μ_1 .

Напомним, что некоторое свойство выполнено *почти всюду* на A , если оно выполнено на A всюду, кроме, быть может, точек, образующих множество меры нуль.

В тех точках $x \in \mathbb{R}$, для которых $|\sin \pi x| < 1$ и $|\cos \pi x| < 1$, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \pi x = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \pi x = 0$. Если же $x \in \mathbb{R}$ таково, что $\sin \pi x = \pm 1$ или $\cos \pi x = \pm 1$, то предел функций $\sin^n \pi x$ или $\cos^n \pi x$ равен единице или не существует.

Рассмотрим множество

$$\begin{aligned} A_0 &= \{x \in \mathbb{R} : \sin \pi x = \pm 1 \text{ или } \cos \pi x = \pm 1\} = \\ &= \{k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{1}{2} + k : k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Это счетное множество (объединение двух счетных множеств) и поэтому $\mu_1(A_0) = 0$. Тогда для каждой точки ($x \in \mathbb{R} \setminus A_0$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x + \sin^n \pi x + \cos^n \pi x) = x$$

я, следовательно, почти всюду на $\mathbb{R}$ (относительно меры Лебега μ_1) последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$.

6.45. Вычислить интеграл Лебега

$$J = \int_A (-1)^{[x^2+y^2]} d\mu_2,$$

где $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 5\}$.

Область интегрирования — замкнутый круг $x^2 + y^2 \leq 5$. Функция $[x^2 + y^2]$ принимает значения 0, 1, 2, 3, 4 в концентрических кольцах и значение 5 на окружности $x^2 + y^2 = 5$. Мерой Лебега μ_2 кольца является его площадь, т. е. $\pi(R^2 - r^2)$, где R и r соответственно внешний и внутренний радиусы, а мера Лебега μ_2 окружности равна нулю (ее можно рассматривать как кольцо, у которого $R = r$).

Тогда

$$J = (-1)^0 \pi * 1 + (-1)^1 \pi * (2 - 1) + (-1)^2 \pi * (3 - 2) + (-1)^3 \pi * (4 - 3) + (-1)^4 \pi * (5 - 4) + (-1)^5 * 0 = \pi.$$

6.46. Для заданной в области $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ функции $f(x, y)$ найдите интеграл Лебега $\int_D f(x, y) d\mu_2$, если

$$f(x, y) = \begin{cases} 3, & 0 \leq |x + 2y| < 1, \\ 0, & 1 \leq |x + 2y| < 2, \\ 1, & 2 \leq |x + 2y| < 3, y \in \mathbb{I}, \\ 2, & 2 \leq |x + 2y| < 3, y \in \mathbb{Q} \\ 4, & |x + 2y| = 3. \end{cases}$$

Изобразим указанные в условиях области (рисунок 2.6.6). Внутри параллелограмма $f(x, y) = 3$. Внутри трапеций $f(x, y) = 0$. Внутри треугольников $f(x, y) = 1$ (для $f(x, y) = 2$ мера Лебега равна нулю). В точках $(1, 1)$ и $(-1, -1)$ $f(x, y) = 3$, но мера Лебега нулевая.

Итого:

$$3 * S_{\text{пар}} + 2 * (0 * S_{\text{трап}}) + 2 * (1 * S_{\text{треуг}}) + 0 * 4 = 3 * (1 * 2) + 0 + 2 * (1 * \frac{1}{4}) + 0 = \frac{13}{2}.$$

6.47. Для заданной в области

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq m, 0 \leq y \leq m, x \leq y, m \in \mathbb{N}\}$$

функции $f(x, y) = \frac{1}{\left[\frac{y}{x}\right]}$ найдите интеграл Лебега $J = \int_D f(x, y) d\mu_2$.

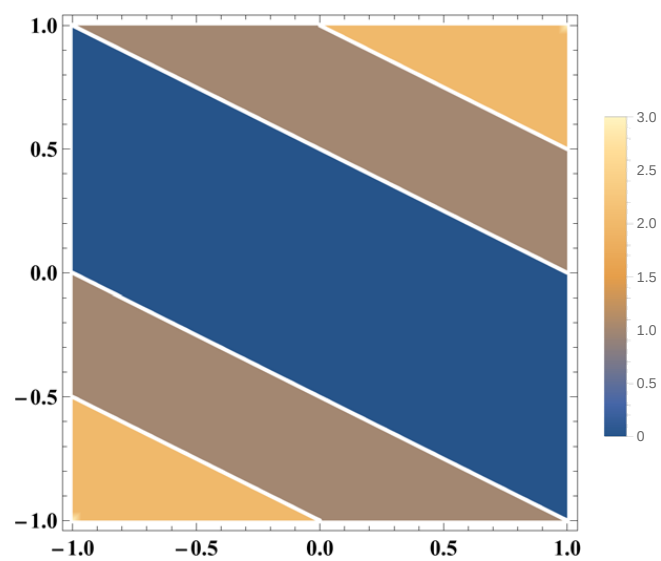


Рис. 2.6.6. К задаче 6.46

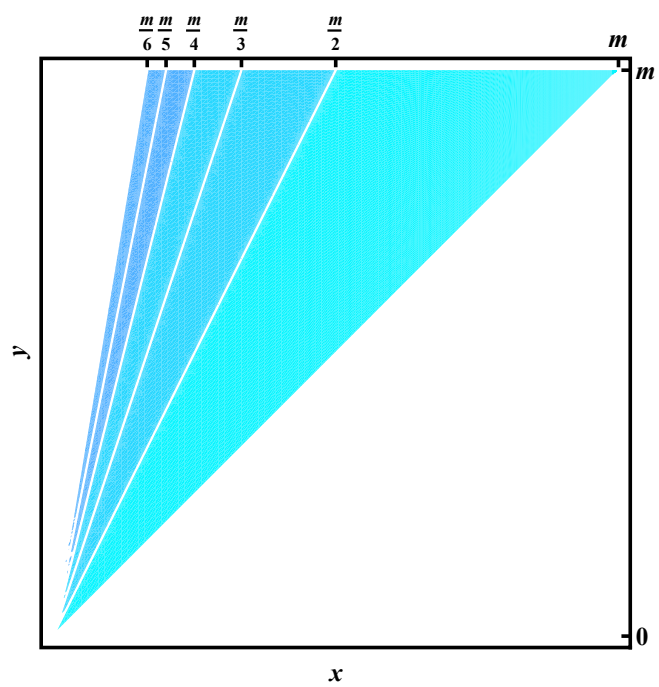


Рис. 2.6.7. К задаче 6.47

Пусть $k = \left[\frac{y}{x} \right]$. Тогда площадь каждого треугольника

$$S_k = \frac{1}{2}m \left(\frac{m}{k} - \frac{m}{k+1} \right)$$

и

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^2}{2} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{m^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right].$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

(см. (2.6.2)), имеем

$$J = \frac{m^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right).$$

6.48. Для заданной в области $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ функции $f(x, y)$ найдите интеграл Лебега, если

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2, & y < x^2, \\ xy, & y \geq x^2, x \notin \mathbb{Q}, \\ e^{x+y}, & y \geq x^2, x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Найдем функцию $g(x, y)$, эквивалентную $f(x, y)$:

$$g(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2, & y < x^2, \\ xy, & y \geq x^2. \end{cases}$$

Теперь интеграл Лебега сводится к сумме двойных интегралов Римана.

Ниже линии $y = x^2$:

$$J_1 = \iint_{y < x^2} x^2 y^2 d\mu_2 = \iint_{y < x^2} x^2 y^2 dx dy = \int_0^1 x^2 dx \int_0^{x^2} y^2 dy = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{x^6}{3} dx = \frac{1}{27}.$$

Выше линии $y = x^2$:

$$J_2 = \iint_{y \geq x^2} xy d\mu_2 = \iint_{y \geq x^2} xy dx dy = \int_0^1 x dx \int_{x^2}^1 y dy = \int_0^1 x \left(\frac{1}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{1}{6}.$$

Теперь искомый интеграл $J = J_1 + J_2 = \frac{11}{54}$.

6.49. Рассмотрим на множестве $A = (0; 1]$ функцию f , которая на полуинтервале $A_k = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ принимает значение $\frac{(-1)^k}{k^\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$. При каких α она будет интегрируема по Лебегу на $(0; 1]$ относительно меры μ_1 ?

Функция f является простой на множестве A , поскольку она принимает счетное число значений $\frac{(-1)^k}{k^\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = (0; 1]$. Все множества A_k μ_1 -измеримы, поэтому f также μ_1 -измерима.

Согласно определению, функция f будет интегрируемой на A , если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \mu_1(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}(k+1)}.$$

Этот ряд сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > -1$. Таким образом, заданная функция f интегрируема по Лебегу лишь при $\alpha > -1$ (докажите это самостоятельно) и

$$\int_{(0;1]} f(x) d\mu_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\alpha+1}(k+1)}.$$

Замечание. Ряд сходится условно и при $\alpha = -1$, но в этом случае функция f не является интегрируемой по Лебегу, поскольку отсутствует абсолютная сходимость.

Задания для самостоятельной работы

6.50. Пусть μ_2 — мера Лебега на плоскости $\mathbb{R}^2$. Вычислить интеграл Лебега:

$$\int_{x^2 \leq y \leq 4} \sqrt{[y - x^2]} d\mu_2.$$

6.51. Вычислить интеграл Лебега

$$\int_A (-1)^{[x^2+y^2]} d\mu_2, \quad A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 5\}.$$

6.52. Вычислить интеграл Лебега $\int_{[0, \pi/2]} f(x) d\mu_1$, где

$$f(x) = \sin x;$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{Q} \\ \cos x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \cos x \in \mathbb{Q} \\ \sin^2 x, & \cos x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

6.53. Вычислить интеграл Лебега $\int_{[0,1]} f(x) d\mu_1$, если

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (\frac{1}{3}, 1] \cap \mathbb{I}; \\ x^3, & x \in [0, \frac{1}{3}) \cap \mathbb{I}; \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

6.54. Для заданной в области $D = \{(x, y) : x + y < 1, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ функции $f(x, y)$ найдите интеграл Лебега, если

$$f(x, y) = \begin{cases} x - y, & |x| + |y| \leq 1, \\ 1, & |x| + |y| > 1, x \notin \mathbb{Q}, \\ \cos x, & |x| + |y| > 1, x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

6.55. Для заданной в области $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq m, 0 \leq y \leq m, x \leq y, m \in \mathbb{N}\}$ функции

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \left[\frac{y}{x}\right] \text{ четное;} \\ 0, & \left[\frac{y}{x}\right] \text{ нечетное} \end{cases}$$

найдите интеграл Лебега $J = \int_D f(x, y) d\mu_2$.

Ответы

6.50. $\frac{4}{3}(4 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}).$

6.51. $-\pi.$

6.55. $1 - \ln 2.$

2.6.5. Суммирование некоторых рядов

2.6.5.1. Ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} q^{2k-1}$

Известно, что при $|q| < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q};$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{2k} = \frac{q^2}{1-q^2}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} q^k - \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k} = \frac{q}{1-q} - \frac{q^2}{1-q^2} = \frac{q}{1-q^2}.$$

2.6.5.2. Ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1})$

Запишем частичную сумму ряда:

$$S_n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \dots + a_{n-1} - a_n + a_n - a_{n+1} = a_1 - a_{n+1}.$$

В силу необходимого условия сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$, поэтому сумма ряда, т. е. предел частичных сумм, $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1$.

2.6.5.3. Ряды обратных квадратов

Нахождение сумм

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}. \quad (2.6.2)$$

подробно рассмотрено в задаче 1.6 (с. 302).

2.7. Линейные нормированные полные пространства. Задачи

2.7.1. Линейные пространства. Норма

Примеры решения задач

7.1. Образуют ли в пространстве $C[-1, 1]$ подпространства следующие подмножества:

- а) монотонные функции;
- б) непрерывно дифференцируемые функции;
- в) непрерывные функции, удовлетворяющие условию $x(0) = 0$;
- г) функции, удовлетворяющие условию $\int_a^b x(t) dt = 0$, где $[a, b] \in [-1, 1]$;
- д) функции, удовлетворяющие условию Липшица с одной и той же константой.

Монотонные функции подпространства в $C[-1, 1]$ не образуют, потому что разность двух монотонных функций (например, $t^3 - t$) может быть немонотонной.

Непрерывно дифференцируемые функции также не образуют подпространство. Например, функция $x_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}$ непрерывно дифференцируема на $[-1, 1]$ для любых натуральных n , но

$$\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} - |t| = \frac{t^2 + \frac{1}{n} - t^2}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} + |t|} = \frac{1}{n \left(\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} + |t| \right)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = |t|$. Таким образом, функция $|t|$ предельная точка множества, но она не является непрерывно дифференцируемой.

Непрерывные функции, удовлетворяющие условию $x(0) = 0$, образуют подпространство, потому что для любых α и β выполняется $\alpha x(0) + \beta y(0) = 0$.

Функции, удовлетворяющие условию $\int_a^b x(t) dt = 0$, где $[a, b] \in [-1, 1]$, образуют подпространство, это следует из свойства линейности интеграла.

Функции, удовлетворяющие условию Липшица (1.5.21) с одной и той же константой подпространство не образуют.

Пусть A_K — множество функций, удовлетворяющих условию с константой K , $x, y \in A$. Тогда функции $x + y$ и $2x$ удовлетворяют условию с константой $2K$. Действительно,

$$\begin{aligned} |x + y - 2x| &= |y - x| = |x - y| = |x(t_1) + y(t_1) - x(t_2) - y(t_2)| \leq \\ &\leq |x(t_1) - x(t_2)| + |y(t_1) - y(t_2)| \leq 2K. \end{aligned}$$

7.2. Показать, что в пространстве $C[0, \pi]$ функции $1, \cos t, \cos^2 t$ линейно независимы.

Условие линейной зависимости — равенство нулю линейной комбинации $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cos t + \alpha_3 \cos^2 t$, $\forall t \in [0, \pi]$. Возьмем три произвольных различных значения t из указанного отрезка и проверим, имеет ли система

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cos t_1 + \alpha_3 \cos^2 t_1 = 0, \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cos t_2 + \alpha_3 \cos^2 t_2 = 0, \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cos t_3 + \alpha_3 \cos^2 t_3 = 0 \end{cases}$$

нетривиальное решение.

Вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos t_1 & \cos^2 t_1 \\ 1 & \cos t_2 & \cos^2 t_2 \\ 1 & \cos t_3 & \cos^2 t_3 \end{vmatrix} = (\cos t_1 - \cos t_2)(\cos t_2 - \cos t_3)(\cos t_3 - \cos t_1).$$

Поскольку косинус на отрезке $[0, \pi]$ монотонно убывает, ни один из сомножителей не равен нулю и, следовательно, ни при каких $t \in [0, \pi]$ не равен нулю определитель. Таким образом, эта система линейных однородных уравнений имеет лишь тривиальное решение и, следовательно, указанные функции линейно независимы.

7.3. Будет ли выпуклым в пространстве $C[0, 1]$ множество полиномов степени k ?

Множество называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками x и y содержит и соединяющий их отрезок $\alpha x + (1 - \alpha)y$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Множество P полиномов степени k определяется как

$$P = \left\{ x(t) \in C[0, 1] : x(t) = \sum_{m=0}^k a_m t^m, a_k \neq 0 \right\}.$$

Пусть

$$x(t) = \sum_{m=0}^k a_m t^m \neq 0, \quad y(t) = \sum_{m=0}^k b_m t^m \neq 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Тогда $x(t), y(t) \in P$. Построим соединяющий их отрезок:

$$s(t) = \alpha x(t) + (1 - \alpha)y(t) = \sum_{m=0}^k [\alpha a_m + (1 - \alpha)b_m] t^m.$$

Очевидно, что $s(t)$ многочлен. Но элементами множества P являются многочлены степени k и можно подобрать такие значения α, a_k, b_k (например, $\alpha = 1/2, a_k = -b_k$), для которых коэффициент при k -й степени в $s(t)$ будет равен нулю и, следовательно, $s(t) \notin P$.

Таким образом, множество P не является выпуклым.

7.4. *Задаёт ли функция $x \rightarrow f(x)$ норму на числовой прямой?*

$$\begin{array}{l|l} a) f(x) = \sqrt{x}; & d) f(x) = 5|x|; \\ б) f(x) = \sqrt{|x|} & e) f(x) = x^2; \\ в) f(x) = |x - 1|; & ж) f(x) = |\arctg x|; \\ г) f(x) = \sqrt{x^2}; & з) f(x) = \ln |x|. \end{array}$$

Напомним, что нормой в линейном пространстве L называется функционал $p(x)$, удовлетворяющий следующим четырем условиям (аксиомам):

1. $p(x) \geq 0$;
2. $p(x) = 0$ только при $x = 0$;
3. $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ для всех α ;
4. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, где $x, y \in L$.

Функции a и $з$ не определены всюду на числовой прямой.

Функция $в$ не удовлетворяет аксиоме 2, т. к. $f(1) = 0$.

Для функций $б, e, ж$ не выполняется аксиома 3.

И только функции $г$ и $д$ определены всюду на числовой прямой и удовлетворяют всем аксиомам, поэтому они задают норму.

7.5. *Является ли нормой на множестве определения следующая функция:*

$$C[a, b] \ni x \rightarrow \max_{a \leq t \leq \frac{a+b}{2}} |x(t)|$$

Легко видеть, что первая, третья и четвертая аксиомы нормы выполняются. Проверим вторую аксиому.

Пусть $\|x\| = 0$, тогда $\max_{a \leq t \leq \frac{a+b}{2}} |x(t)| = 0$ и, следовательно, $x(t) = 0 \forall t \in [a, \frac{a+b}{2}]$.

Построим непрерывную функцию $x(t) = \theta(t - \frac{a+b}{2})(t - \frac{a+b}{2})$, где θ — функция Хевисайда (рисунок 2.7.1). Для нее не выполняется условие $x(t) = 0 \forall t \in [a, b]$, таким образом, вторая аксиома не выполняется.

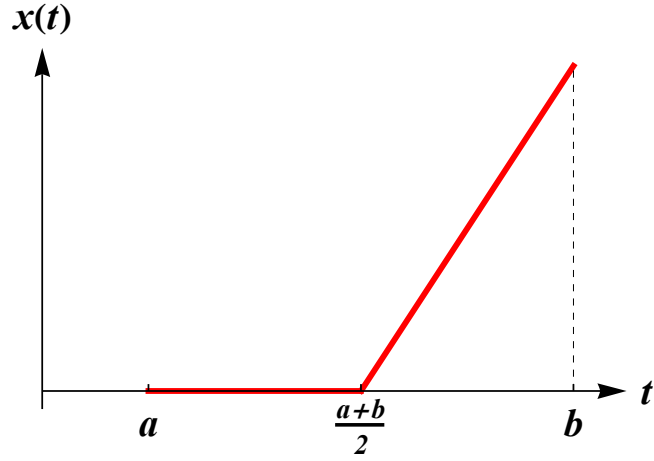


Рис. 2.7.1. К задаче 7.5.

7.6. Является ли нормой в пространстве непрерывно дифференцируемых один раз функций следующая функция:

$$C^{(1)}[a, b] \ni x \rightarrow |x(a)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)|.$$

Выполнение первой, третьей и четвертой аксиом очевидно. Проверим выполнение второй аксиомы.

Если $x(t) = 0$ на $[a, b]$, то $|x(a)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = 0$. Обратное утверждение: если $|x(a)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = 0$, выполняются оба равенства $|x(a)| = 0$ и $\max_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = 0$, откуда следует, что $\forall t \in [a, b] \ x(t) = c = \text{const}$. Так как $x(a) = 0$, то $c = 0$ и, следовательно, $x(t) = 0$ на $[a, b]$. Функция задает норму.

7.7. Сходится ли в нормированном пространстве последовательность $\{x_n\}$, если:

$$E = L_1[0, 1], \quad x_n(t) = \begin{cases} e^{-t/n}, & t \in \mathbb{I}; \\ 0, & t \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Напомним, что $L_p[a, b]$ — пространство классов эквивалентных функций, суммируемых по Лебегу. Норма этого пространства (1.7.9)

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

в данном случае $p = 1$.

Поскольку функция $x(t)$ интегрируема по Лебегу, она измерима и ограничена, однако не интегрируема по Риману, так как разрывна на множестве

меры $\mu > 0$. Эквивалентная функция (будем обозначать ее так же) имеет вид $x_n(t) = e^{-t/n}$.

Последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится в $L_1[0, 1]$ к $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = 1$ при любом фиксированном $t \in [0, 1]$. Она сходится по норме данного пространства, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n(t) - x(t)\| = 0$. Найдем этот предел.

$$\|x_n(t) - 1\| = \int_0^1 |x_n(t) - 1| dt = \int_0^1 (1 - x_n(t)) dt = 1 - \frac{e^{-1/n} - 1}{-1/n}.$$

Отсюда легко показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n(t) - 1\| = 0$ и, таким образом, последовательность сходится в указанном пространстве.

7.8. Показать, что соотношение $\rho(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt$ определяет метрику в $L_p[0, 1]$, $0 < p < 1$. Будет ли нормой выражение $\int_0^1 |x(t)|^p dt$?

Выполнение аксиом тождества и симметрии очевидно. Проверим выполнение аксиомы треугольника.

При $0 < p < 1$, $a > 0$, $b > 0$ справедливо неравенство $(a + b)^p \leq a^p + b^p$. Тогда

$$\int_0^1 |x(t) + y(t)|^p dt \leq \int_0^1 |x(t)|^p dt + \int_0^1 |y(t)|^p dt. \quad \boxtimes$$

Нормой величина $\int_0^1 |x(t)|^p dt$ не является, так как не выполняется третья аксиома.

7.9. Найти предел последовательности $\{x_n\}$, где $x_n(t) = \frac{nt}{n+t}$, в пространстве $C[0, 2]$, если он существует.

Необходимое условие сходимости — существование для любого фиксированного t из $[0, 2]$ предела $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$; очевидно, что этот предел равен t . Проверим, сходится ли последовательность по норме пространства $C[0, 2]$.

Норма элемента f пространства $C[ab]$ (т. е. непрерывной функции, заданной на $[ab]$) имеет вид

$$\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

В данном случае

$$||x_n - x|| = \max_{t \in [0,2]} \left| \frac{nt}{n+t} - t \right| = \max_{t \in [0,2]} \left| \frac{t^2}{n+t} \right|.$$

Приравняв производную выражения под знаком модуля по t к нулю, получаем точки, подозрительные на экстремум: 0 и $-2n$; последняя отбрасывается, так как лежит за пределами заданного отрезка. Значения на концах отрезка:

$$\frac{t^2}{n+t} \Big|_{t=0} = 0; \quad \frac{t^2}{n+t} \Big|_{t=2} = \frac{4}{n+2}.$$

Тогда

$$||x_n - x|| = \max \left(0, \frac{4}{n+2} \right) = \frac{4}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

и, следовательно, последовательность сходится и ее предел по норме пространства $C[0, 2]$ равен t .

7.10. Сходится ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-kt}$ в нормированном пространстве $L_1[0, 1]$?

Найдем частичную сумму ряда:

$$\begin{aligned} \int S_n(t) dt &= - \sum_{k=1}^n \int k e^{-kt} dt = - \sum_{k=1}^n e^{-kt} + C = - \frac{1 - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}} + C; \\ S_n(t) &= \left(- \frac{1 - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}} + C \right)' = \frac{e^{-nt} (e^{(n+1)t} + n - e^t(n+1))}{(e^t - 1)^2} \end{aligned}$$

и

$$S(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) = \frac{e^t}{(e^t - 1)^2}.$$

Исследуем теперь ряд на сходимость по норме пространства $L_1[0, 1]$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} ||S_n - S|| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |S_n(t) - S(t)| dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-nt} (n - e^t(n+1))}{(e^t - 1)^2} dt = \\ &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-nt} (n - e^t(n+1))}{(e^t - 1)^2} dt = 0. \end{aligned}$$

Ряд сходится. $\square$

Задания для самостоятельной работы

7.11. Образуют ли в пространстве $C[-1, 1]$ подпространства следующие подмножества:

- а) непрерывные четные функции;
- б) многочлены степени $\leq k$;
- в) непрерывные кусочно-линейные функции.

7.12. Найти предел последовательности $x_n(t) = t^n - t^{2n}$ в пространстве $C[0, 1]$, если он существует.

7.13. Проверить, является ли пара $(X, \|\cdot\|)$ нормированным пространством, если

$$X = \left\{ x \in C^{(1)}[a, b] : x'(a) = 0 \right\},$$
$$\|x\| = \int_a^b |x'(t)| dt + |x(a)|.$$

7.14. Сходится ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (t^k - t^{k-1})$ в нормированном пространстве $C[0, 1]$?

Ответы

7.12. Последовательность не сходится по норме пространства $C[0, 1]$.

7.13. Является.

7.14. Ряд не сходится по норме пространства $C[0, 1]$.

2.7.2. Гильбертово пространство

Примеры решения задач

7.15. Сходится ли последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, 0, 0, \dots \right),$$

в пространстве ℓ_3 ?

Необходимое условие сходимости последовательности — наличие поко-

ординатного предела.

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\right); \\ x_2 &= \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, 0, \dots\right); \\ &\vdots \\ x_n &= \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, 0, 0, \dots\right). \end{aligned}$$

Отсюда $x_n(1) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, $x_n(2) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$ и т. д. Таким образом, $\{x_n\}$ покоординатно сходится к точке

$$a = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \dots\right)$$

Элементами пространства ℓ_3 являются последовательности чисел $z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots)$ такие, что $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^3 < \infty$. Легко видеть, что $a \in \ell_3$, потому что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^3 = \frac{1}{1 - 2^{-3}} < \infty.$$

Норма в пространстве ℓ_3 задается соотношением $\|z\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^3\right)^{1/3}$. Поскольку

$$\|x_n - a\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - a(k)|^3\right)^{1/3} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{1}{2^k}\right|^3\right)^{1/3} = \frac{8}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+3}.$$

Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\| = 0$ и, таким образом, последовательность $\{x_n\}$ сходится по норме пространства ℓ_3 .

7.16. Для функции e^t найти многочлен второй степени $p(t)$ такой что норма $\|e^t - p(t)\|$ минимальна в $L_2[-1, 1]$.

Норма пространства $L_p[a, b]$ (1.7.9) в условиях задачи имеет вид

$$\|x\| = \left(\int_{-1}^1 |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Очевидно, что для нахождения минимума нормы достаточно найти минимум ее квадрата, т. е. $\min \int_{-1}^1 |x(t)|^2 dt$. По свойству монотонности интеграла минимум достигается в точке минимума подынтегральной функции.

Пусть

$$\varphi(a, b, c,) = \int_{-1}^1 (e^t - p(t))^2 dt = \int_{-1}^1 (e^t - at^2 - bt - c)^2 dt.$$

Для нахождения минимума этой функции найдем ее частные производные по a, b, c и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \frac{4a}{5} + \frac{4c}{3} - 2e + \frac{10}{e} = 0, \\ \frac{4b}{3} - \frac{4}{e} = 0, \\ \frac{4a}{3} + 4c - 2e + \frac{2}{e} = 0, \end{cases}$$

откуда

$$a = \frac{15(e^2 - 7)}{4e}, \quad b = \frac{3}{e}, \quad c = -\frac{3(e^2 - 11)}{4e}. \quad (2.7.1)$$

Норма $\|e^t - p(t)\|$ минимальна в $L_2[-1, 1]$ при $p(t) = at^2 + bt + c$, где коэффициенты a, b, c задаются в (2.7.1).

7.17. В гильбертовом пространстве ℓ_2 найти высоту AD треугольника ABC , где:

$$A = (0, 0, \dots, 0, \dots); \quad B = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \dots, \frac{1}{4^k}, \dots\right); \quad C = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{3^k}, \dots\right).$$

Ясно, что точка D лежит на прямой, проходящей через точки B и C . Это означает, что выполняется равенство

$$\begin{aligned} D = \alpha B + (1 - \alpha)C &= \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{1 - \alpha}{3}, \frac{\alpha}{4^2} + \frac{1 - \alpha}{3^2}, \dots, \frac{\alpha}{4^k} + \frac{1 - \alpha}{3^k}, \dots\right) = \\ &= \left[\alpha \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}, \alpha \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{3^2}, \dots, \alpha \left(\frac{1}{4^k} - \frac{1}{3^k}\right) + \frac{1}{3^k}, \dots\right]. \end{aligned}$$

Поскольку отрезок AD высота треугольника, он ортогонален к основа-

нию BC , т. е. равно нулю скалярное произведение (AD, BC) , где

$$\begin{aligned} AD = D - A &= \left[\alpha \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3}, \alpha \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \frac{1}{3^2}, \dots, \right. \\ &\quad \left. \dots, \alpha \left(\frac{1}{4^k} - \frac{1}{3^k} \right) + \frac{1}{3^k}, \dots \right], \\ BC = C - B &= \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}, \dots, \frac{1}{3^k} - \frac{1}{4^k}, \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

Скалярное произведение в пространстве ℓ_2 имеет вид $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$, тогда

$$\begin{aligned} (AD, BC) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\alpha \left(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{4^k} \right)^2 + \frac{1}{3^k} \left(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{4^k} \right) \right] = \\ &= -\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{4^k} \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \left(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{4^k} \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9^k} - \frac{1}{12^k} \right)}{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{16^k} - 2 \cdot \frac{1}{12^k} + \frac{1}{9^k} \right)} = \frac{45}{13}.$$

Подставив эту величину в выражение (2.7.2) для D , найдем искомую высоту:

$$\begin{aligned} AD = D - A &= \\ &= \left[\frac{45}{13} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3}, \frac{45}{13} \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{45}{13} \left(\frac{1}{4^k} - \frac{1}{3^k} \right) + \frac{1}{3^k}, \dots \right]. \end{aligned}$$

См. также задачу 7.26.

7.18. Найти углы треугольника, образованного в пространстве $L_2[-1, 1]$ элементами

$$x_1(t) = 1, \quad x_2(t) = t, \quad x_3(t) = t^2.$$

Введем обозначения для вершин треугольника:

$$A = x_1(t) = 1, \quad B = x_2(t) = t, \quad C = x_3(t) = t^2.$$

Тогда косинус угла при вершине A определяется через скалярное произведение и нормы соответствующих сторон:

$$\begin{aligned}\cos \varphi_A &= \frac{(BA, CA)}{\|BA\| \cdot \|CA\|} = \frac{(t-1, t^2-1)}{\|t-1\| \cdot \|t^2-1\|} = \\ &= \frac{\int_{-1}^1 (t-1)(t^2-1) dt}{\sqrt{\int_{-1}^1 (t-1)^2 dt} \sqrt{\int_{-1}^1 (t^2-1)^2 dt}} = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \sqrt{\frac{16}{15}}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Косинусы остальных углов находим аналогично:

$$\begin{aligned}\cos \varphi_B &= \frac{(CB, AB)}{\|CB\| \cdot \|AB\|} = \frac{(t^2-t, 1-t)}{\|t^2-t\| \cdot \|1-t\|} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \\ \cos \varphi_C &= \frac{(AC, BC)}{\|AC\| \cdot \|BC\|} = \frac{(1-t^2, t-t^2)}{\|1-t^2\| \cdot \|t-t^2\|} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Далее определяем по косинусам углы. Заданный треугольник тупоугольный и равнобедренный. Заметим, что

$$\arccos \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} + \arccos \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} + \arccos \left(-\frac{1}{4}\right) \approx 0.659 + 0.659 + 1.824 = 3.142 = \pi.$$

7.19. Пусть A — оператор интегрирования

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s) ds,$$

действующий в пространстве $C[0, 1]$. Показать, исходя из определений, что A — линейный ограниченный оператор, и найти его норму.

Линейность оператора следует из свойств интеграла Римана.

Теорема 4.1 утверждает, что для любого ограниченного оператора A , действующего из нормированного пространства в нормированное,

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

По свойствам пространства $C[0, 1]$

$$\|Ax\| = \max_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t x(s) ds \right| \leq \max_{t \in [0, 1]} \int_0^t |x(s)| ds \leq \max_{x \in [0, 1]} |x(s)| \cdot \max_{t \in [0, 1]} \int_0^t dt \leq \|x\|.$$

Отсюда

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq 1 \quad (2.7.3)$$

и, таким образом, оператор ограничен.

Пусть теперь $\tilde{x}(t) \equiv 1$, следовательно, $\|\tilde{x}(t)\| = 1$. Тогда

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|A\tilde{x}\| = \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 1 \, ds = 1. \quad (2.7.4)$$

Из сравнения соотношений (2.7.3) и (2.7.4) следует, что $\|A\| = 1$.

7.20. Провести ортогонализацию системы $x_1 = t$, $x_2 = 1 - t^2$, $x_3 = t^3$ в $L_2[-1, 1]$ с весом t^2 .

Воспользуемся методом Грама–Шмидта (с. 264).

Обозначим ортогональные функции буквой h . Тогда $h_1(t) = x_1(t) = t$. Вычтем из вектора x_2 его ортогональную проекцию на h_1 (1.7.14) и положим h_2 равным полученной разности:

$$h_2 = x_2 - \frac{(x_2, h_1)}{\|h_1\|^2} h_1.$$

Далее,

$$h_3 = x_3 - \frac{(x_3, h_1)}{\|h_1\|^2} h_1 - \frac{(x_3, h_2)}{\|h_2\|^2} h_2. \quad (2.7.5)$$

Скалярное произведение и норма в указанном пространстве с весом t^2 имеют вид

$$(x_1, x_2) = \int_{-1}^1 x_1(t)x_2(t)t^2 \, dt;$$

$$\|x\| = \sqrt{\int_{-1}^1 x^2(t)t^2 \, dt}.$$

Произведя вычисления, получаем ортогональную систему:

$$h_1(t) = t, \quad h_2(t) = 1 - t^2, \quad h_3(t) = t^3 - \frac{5}{7}t.$$

Легко показать, что скалярные произведения (h_1, h_2) , (h_1, h_3) , (h_2, h_3) равны нулю.

Приведем построенный ортогональный базис к ортонормированному виду: $e_k = h_k / \|h_k\|$, $k = 1, 2, 3$:

$$e_1(t) = t\sqrt{\frac{5}{2}}; \quad e_2(t) = (1 - t^2) \frac{\sqrt{105}}{4}; \quad e_3(t) = \left(t^3 - \frac{5}{7}\right) \frac{21\sqrt{62}}{124}.$$

Полученные функции по-прежнему ортогональны, но теперь $\|e_k\| = 1$, $k = 1, 2, 3$.

7.21. Провести ортогонализацию системы

$$x_1 = (1, 0, 1, 0, 0, \dots), \quad x_2 = (0, 1, 1, 0, 0, \dots), \quad x_3 = (0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots)$$

в пространстве ℓ_2 с весом 2^{2k} .

Снова воспользуемся методом Грама-Шмидта. В пространстве ℓ_2 скалярное произведение и норма с весом ρ_k имеют вид

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \rho_k;$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \rho_k}.$$

Построим ортогональный базис:

$$\begin{aligned} h_1 &= x_1 = (1, 0, 1, 0, 0, \dots); \\ h_2 &= x_2 - \frac{(x_2, h_1)}{\|h_1\|^2} h_1 = \\ &= (0, 1, 1, 0, 0, \dots) - \frac{0 \cdot 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 1 \cdot 2^6}{1^2 \cdot 2^2 + 0^2 \cdot 2^4 + 1^2 \cdot 2^6} (1, 0, 1, 0, 0, \dots) = \\ &= (0, 1, 1, 0, 0, \dots) - \frac{64}{68} (1, 0, 1, 0, 0, \dots) = \left(-\frac{16}{17}, 1, \frac{1}{17}, 0, \dots\right); \\ h_3 &= \left(-\frac{16}{21}, -\frac{4}{21}, \frac{1}{21}, 1, 0, \dots\right) \end{aligned}$$

(здесь опущены несложные, но громоздкие вычисления элемента h_3). Легко проверить, что полученные последовательности образуют ортогональный базис.

Для построения ортонормированного базиса разделим каждый элемент на его норму:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{h_1}{\|h_1\|} = \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \dots \right); \\ e_2 &= \frac{h_2}{\|h_2\|} = \frac{1}{\sqrt{357}} \left(-4, \frac{17}{4}, \frac{1}{4}, 0, \dots \right); \\ e_3 &= \frac{h_3}{\|h_3\|} = \frac{1}{\sqrt{1785}} \left(-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{21}{8}, 0, \dots \right). \end{aligned}$$

7.22. В пространстве $L_2[-1, 1]$ найти ортогональную проекцию функции $\operatorname{sgn} x$ на подпространство многочленов степени не выше 2.

Очевидно, что элементы $1, x, x^2$ образуют базис заданного подпространства. Ортогонализуем этот базис: применим в пространстве $L_2[-1, 1]$ процесс Грама-Шмидта к элементам $1, x, x^2$. Действуя так же, как в предыдущих задачах, получим:

$$e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad e_2 = \frac{\sqrt{6}x}{2}; \quad e_3 = \frac{\sqrt{10}(3x^2 - 1)}{4}. \quad (2.7.6)$$

Для нахождения проекции воспользуемся формулой (1.7.14), учитывая, что скалярное произведение в пространстве $L_2[-1, 1]$ задается соотношением

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt:$$

$$\operatorname{pr}_{\{1, x, x^2\}} \operatorname{sgn} x = \alpha_0 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3,$$

где

$$\alpha_0 = (\operatorname{sgn} x, e_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x dx = 0;$$

$$\alpha_1 = (\operatorname{sgn} x, e_2) = \frac{\sqrt{6}}{2} \int_{-1}^1 x \cdot \operatorname{sgn} x dx = \frac{\sqrt{6}}{2} \int_{-1}^1 |x| dx = \frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$\alpha_2 = (\operatorname{sgn} x, e_3) = \frac{\sqrt{10}}{4} \int_{-1}^1 (3x^2 - 1) \operatorname{sgn} x dx = 0$$

и, таким образом, $\operatorname{pr}_{\{1, x, x^2\}} \operatorname{sgn} x = \frac{3}{2} x$.

Самостоятельно ответьте на дополнительный вопрос: как называются полученные ортогонализацией многочлены (2.7.6)?

Задания для самостоятельной работы

7.23. В гильбертовом пространстве $L_2[0, 1]$ найти углы между функциями Радемахера:

$$R_n(x) = \operatorname{sgn} [\sin (2^n \pi x)] = (-1)^{[2^n x]}, \quad n \geq 1, \quad r_0(x) = 1.$$

Подсказка: Сперва решите простую задачу: найдите R_0, R_n , вычислив соответствующий интеграл Лебега. Затем попробуйте более общий случай $R_n, R_m, m > n$.

7.24. Найдите углы треугольника, образованного элементами

$$x = (1, 0, 0, 0, \dots), \quad y = (0, 1, 0, 0, \dots), \quad z = (0, 0, 1, 0, \dots)$$

в пространстве ℓ_2 .

7.25. В гильбертовом пространстве $L_2[0, \pi]$ построить медиану AM , высоту AH и биссектрису AS треугольника ABC если

$$A(t) = \cos t, \quad B(t) = 2 \sin 2t, \quad C(t) = 3 \sin t.$$

7.26. В определении отрезка (1.7.2) указано, что параметр α принимает значения большие нуля и меньшие единицы. Вместе с тем, в задаче 7.17 $\alpha = 45/13 > 1$. Это означает, что точка D лежит вне отрезка BC левее B и, следовательно, угол при вершине B тупой. Найдите этот угол.

7.27. Ортонормировать систему $(1, t, t^2)$ в пространстве $L_2[0, \infty]$ с весом e^{-t} . Сравнить полученные полиномы с известными вам из главы 1.3.

7.28. В пространстве ℓ_2 найти ортогональную проекцию элемента

$$x_0 = \left\{ \left(-\frac{1}{3} \right)^k \right\}_{k=1}^{\infty} \equiv \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \dots, \left(-\frac{1}{3} \right)^k, \dots \right\}$$

на подпространство

$$L = \{x = \{e_k\} \in \ell_2 : e_1 - 2e_3 + 3e_4 = 0\}.$$

Ответы

7.23. Функции Радемахера взаимно ортогональны.

7.24. $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

7.25. *Подсказка:* биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону (то есть делит своим основанием противоположную

сторону) в отношении, равном отношению двух прилежащих сторон. См. рисунок 2.7.2.

$$M(t) = \frac{1}{2} B(t) + \frac{1}{2} C(t).$$

$$S(t) = \alpha B(t) + (1 - \alpha)C(t), \quad \alpha = \frac{\sqrt{\frac{30\pi}{15\pi - 32}}}{1 + \sqrt{\frac{30\pi}{15\pi - 32}}} \approx 0.714.$$

$$H(t) = \beta B(t) + (1 - \beta)C(t), \quad \beta = \frac{16 + 27\pi}{39\pi} \approx 0.823.$$

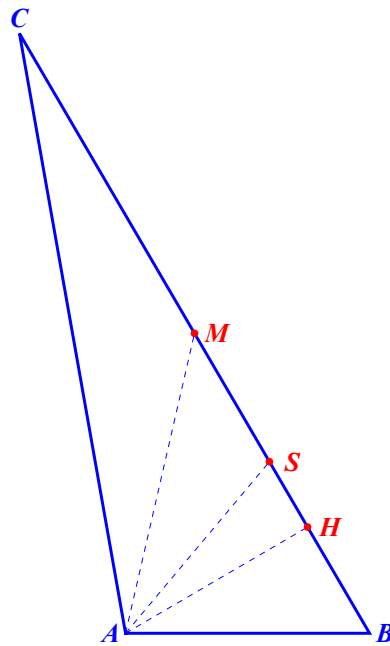


Рис. 2.7.2. Геометрическая интерпретация решения задачи 7.25

7.26. $\cos \varphi = -8\sqrt{\frac{2}{143}}, \quad \varphi \approx 2.8 \text{ рад} \approx 161^\circ.$

7.27. $x_0(t) = 1, \quad x_1(t) = 1 - t, \quad x_2(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 4t + 1).$

7.28. $\text{pr}_L x_0 = \left\{ \left(-\frac{1}{3} \right)^k \right\}_{k=1}^{\infty} + \frac{1}{63} (1, 0, -2, 3, 0, 0, \dots).$

2.8. Интегральные уравнения с симметричными ядрами. Задачи

2.8.1. Однородные интегральные уравнения с вырожденным ядром

Примеры решения задач

*Решить однородное интегральное уравнение с вырожденным ядром.
Найти спектр ядра, определить ортонормированные собственные функции.*

$$8.1. \quad y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+s)y(s) ds.$$

Ядро $K(x, s) = \cos(x+s)$ симметричное и вырожденное. Действительно, $K(x, s) = K(s, x)$ и

$$K(x, s) = \cos x \cos s - \sin x \sin s = \Omega_1(x)\omega_1(s) + \Omega_2(x)\omega_2(s),$$

где

$$\Omega_1(x) = \cos x, \quad \Omega_2(x) = \sin x, \quad \omega_1(s) = \cos s, \quad \omega_2(s) = -\sin s.$$

Будем искать решение в виде (1.8.24)

$$y(x) = \lambda \sum_{m=1}^2 \Omega_m(x) C_m.$$

Коэффициенты C_m задаются системой линейных алгебраических уравнений (1.8.26)

$$C_m = \lambda \sum_{n=1}^2 C_n P_{nm}, \quad m = 1, 2,$$

где

$$P_{nm} = \int_0^{\pi} \Omega_n(s) \omega_m(s) ds.$$

Легко показать, что матрица множителей P_{nm} имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix},$$

тогда система в матричной форме имеет вид $C = \lambda PC$, где $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$.

Нетривиальное решение этой системы существует, если

$$\det(E - \lambda P) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 + \lambda \frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда следуют собственные значения: $\lambda_{1,2} = \pm \frac{2}{\pi}$. Спектр ядра найден.

Если $\lambda = \lambda_1 = \frac{\pi}{2}$, то система принимает вид

$$\begin{cases} 0 \cdot C_1 = 0, \\ 2C_2 = 0, \end{cases}$$

т. е. $C_2 = 0$, $C_1 = q_1$, где q_1 — произвольная константа. Аналогично в случае $\lambda = \lambda_2 = -\frac{\pi}{2}$ имеем $C_1 = 0$, $C_2 = q_2$.

Таким образом, собственными функциями уравнения являются

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \lambda_1 q_1 \Omega_1(x) + 0 = \frac{2}{\pi} q_1 \cos x, \\ y_2(x) &= 0 + \lambda_2 q_2 \Omega_2(x) = -\frac{2}{\pi} q_2 \sin x. \end{aligned}$$

Очевидно, что эти функции ортогональны. Чтобы привести их к ортонормированным, найдем q_1 , q_2 из соотношений

$$\begin{aligned} \int_0^\pi y_1^2(x) dx &= \int_0^\pi \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 q_1^2 \cos^2 x dx = \frac{2q_1^2}{\pi}, \\ \int_0^\pi y_2^2(x) dx &= \int_0^\pi \left(-\frac{2}{\pi}\right)^2 q_2^2 \sin^2 x dx = \frac{2q_2^2}{\pi}. \end{aligned}$$

Ортонормированные собственные функции имеют вид

$$\tilde{y}_1(x) = \frac{y_1(x)}{\sqrt{2/\pi} q_1} = \sqrt{2}\pi \cos x, \quad \tilde{y}_2(x) = \frac{y_2(x)}{\sqrt{2/\pi} q_2} = \sqrt{2}\pi \sin x.$$

Если λ не равно ни одному из собственных значений, уравнение имеет только тривиальное решение.

$$\mathbf{8.2.} \quad y(x) = \lambda \int_0^1 x s(2s+1) y(s) ds.$$

Решаем это уравнение по алгоритму предыдущей задачи, давая только самые необходимые комментарии.

$$\Omega_1(x) = x, \quad \Omega_2(x) = x, \quad \omega_1(s) = 2s^2, \quad \omega_2(s) = s,$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения:

$$\det(E - \lambda P) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 + \frac{1}{3}\lambda \end{vmatrix} = 1 - \frac{5}{6}\lambda = 0.$$

Таким образом, имеется только одно собственное значение $\lambda = \frac{6}{5}$.

Определим теперь коэффициенты C_m :

$$\begin{cases} C_1 = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 \right) = \frac{3}{5} (C_1 + C_2), \\ C_2 = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{3}C_2 \right) = \frac{2}{5} (C_1 + C_2) \end{cases}$$

и, таким образом, $C_1 = q$, $C_2 = \frac{2}{3}q$. Единственная собственная функция имеет вид $y(x) = 2qx$, ортонормированная функция $\tilde{y}(x) = \sqrt{3}x$.

8.3. Если для любых $x, s \in [a, b]$ выполняется $K(x, s) = -K(s, x)$, то ядро называется кососимметричным. Показать, что все отличные от нуля собственные значения таких ядер — чисто мнимые числа.

Доказательство проходит так же, как в теореме 2.1, до получения формул (1.8.17–1.8.18):

$$\begin{aligned} \int_a^b |y(x)|^2 dx &= \bar{\lambda} \int_a^b y(x) dx \int_a^b K(x, s) \bar{y}(s) ds, \\ \int_a^b |y(x)|^2 dx &= \lambda \int_a^b y(x) dx \int_a^b K(s, x) \bar{y}(s) ds = \\ &= -\lambda \int_a^b y(x) dx \int_a^b K(x, s) \bar{y}(s) ds. \end{aligned}$$

Разделив первое равенство на $\bar{\lambda}$, а второе на λ и вычитая равенства друг из друга, получаем

$$\left(\frac{1}{\bar{\lambda}} + \frac{1}{\lambda}\right) \int_a^b |y(x)|^2 dx = 0.$$

Собственная функция $y(x) \not\equiv 0$, поэтому $\lambda = -\bar{\lambda}$ и, следовательно, число λ чисто мнимое. $\square$

$$8.4. \quad y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x-s)y(s) ds.$$

Для этой задачи

$$\Omega_1(x) = \sin x, \quad \Omega_2(x) = -\cos x, \quad \omega_1(s) = \cos s, \quad \omega_2(s) = \sin s.$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det(E - \lambda P) = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda\pi \\ \lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2\pi^2 = 0.$$

Как и следовало ожидать, собственные значения кососимметричного ядра $K(x, s) = \sin(x-s)$ — чисто мнимые числа $\lambda_{1,2} = \pm \frac{i}{\pi}$.

Система уравнения для нахождения коэффициентов имеет вид

$$\begin{cases} C_1^{(j)} = \lambda_j (0 \cdot C_1^{(j)} + \pi C_2^{(j)}) = \pm i C_2^{(j)}, \\ C_2^{(j)} = \lambda_j (-\pi C_1^{(j)} + 0 \cdot C_2^{(j)}) = \mp i C_1^{(j)}. \end{cases}$$

где $j = 1, 2$. Положим $C_1 = q$ (произвольная константа), тогда $C_2 = \mp iq$. Собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \lambda_1 (q \sin x - iq \cos x) = \frac{i}{\pi} q (\sin x - i \cos x) = \frac{q}{\pi} e^{ix}, \\ y_2(x) &= \lambda_2 (q \sin x + iq \cos x) = -\frac{i}{\pi} q (\sin x + i \cos x) = \frac{q}{\pi} e^{-ix}. \end{aligned}$$

Самостоятельно приведите их к ортонормированной форме.

$$8.5. \quad y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x-s)y(s) ds.$$

$$\Omega_1(x) = \cos x, \quad \Omega_2(x) = \sin x, \quad \omega_1(s) = \cos s, \quad \omega_2(s) = \sin s.$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\det(E - \lambda P) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\pi}{2}\lambda & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\pi}{2}\lambda \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{\pi}{2}\lambda\right)^2 = 0.$$

Итак, спектр ядра содержит лишь одно собственное значение $\lambda = \frac{2}{\pi}$.

Далее,

$$\begin{cases} C_1 &= \lambda \left(\frac{\pi}{2}C_1 + 0 \cdot C_2\right) = C_1, \\ C_2 &= \lambda \left(0 \cdot C_1 + \frac{\pi}{2}C_2\right) = C_2, \end{cases}$$

откуда следует, что коэффициенты C_1 и C_2 могут быть любыми константами. Одному собственному значению соответствуют две собственные функции $y_1(x) = C_1 \cos x$ и $y_2(x) = C_2 \sin x$, иными словами, ранг данного собственного значения равен 2.

Общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

$$8.6. \quad y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xs + x^2 s^2) y(s) ds.$$

Очевидно, что решение уравнения в силу линейности интеграла будет иметь вид

$$y(x) = \lambda (ax + bx^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lambda (ax + bx^2) &= \lambda \int_{-1}^1 (xs + x^2 s^2) (\lambda (as + bs^2)) ds; \\ ax + bx^2 &= \lambda \left(\frac{2a}{3}x + \frac{2b}{5}x^2 \right). \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения, приходим к системе

$$\begin{cases} a = \lambda_1 \frac{2a}{3}, \\ b = \lambda_2 \frac{2b}{5}, \end{cases}$$

откуда находим собственные значения: $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{5}{2}$. Соответствующие им собственные функции $y_1(x) = ax$, $y_2(x) = bx$, где a и b — произвольные константы.

$$8.7. \quad y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} x \cos xy(s) ds.$$

Вырожденное ядро состоит из одного слагаемого: $K(x, s) = \Omega_1(x)\omega_1(s)$, где $\Omega_1(x) = x \cos x$, $\omega_1(s) = 1$. При этом

$$C_1 = \lambda C_1 P_{1,1} = \lambda C_1 \int_{-\pi}^{\pi} \Omega(s)\omega(s) ds = \lambda C_1 \int_{-\pi}^{\pi} s \cos s \cdot 1 ds = 0,$$

т.е. $C_1 = 0$ и, следовательно, уравнение не имеет нетривиальных решений. Спектр ядра пуст.

Задания для самостоятельной работы

Решить однородное интегральное уравнение с вырожденным ядром. Найти спектр ядра, определить ортонормированные собственные функции.

$$8.8. \quad y(x) = \lambda \int_0^{\pi} (\cos^2 x \cos 2s + \cos 3x \cos^3 s) y(s) ds.$$

$$8.9. \quad y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x \operatorname{ch} s - s^2 \operatorname{sh} x) y(s) ds.$$

$$8.10. \quad y(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 - s^2) y(s) ds.$$

8.11. Проверьте, удовлетворяют ли полученные в задаче 8.6 функции уравнению, ортогональны ли они между собой. Найдите решение уравнения другим способом и сравните результаты.

Ответы

8.8. $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}$, $y_1(x) = q \cos^2 x$, $\lambda_2 = \frac{8}{\pi}$, $y_2(x) = q \cos 3x$. Нормировку рассчитайте самостоятельно.

8.9. Спектр ядра пуст.

2.8.2. Неоднородные интегральные уравнения с вырожденным ядром

Примеры решения задач

Решить неоднородное интегральное уравнение с вырожденным ядром. Найти спектр и собственные функции ядра, выяснить, при каких значениях λ уравнение имеет решение, а при каких нет, и пояснить, почему, используя альтернативу Фредгольма (теорема 4.1).

Рассмотрим задачу о решении неоднородного уравнения Фредгольма с вырожденным ядром в общем виде.

Пусть ядро уравнения

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds + f(x)$$

симметрично и имеет вид $K(x, s) = \sum_{n=1}^N \Omega_n(x)\omega_n(s)$, а функция $f(x)$ является вещественной и непрерывной на $[a, b]$. Тогда

$$y(x) = \lambda \sum_{m=1}^N \Omega_m(x) \int_a^b \omega_m(s)y(s) ds + f(x) = \lambda \sum_{m=1}^N C_m \Omega_m(x) + f(x), \quad (2.8.1)$$

$$\begin{aligned} C_m &= \int_a^b \omega_m(s)y(s) ds = \int_a^b \omega_m(s) \left(\lambda \sum_{n=1}^N C_n \Omega_n(s) + f(s) \right) ds = \\ &= \lambda \sum_{n=1}^N C_n \int_a^b \Omega_n(s)\omega_m(s) ds + \int_a^b \omega_m(s)f(s) ds \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$C_m = \lambda \sum_{n=1}^N C_n P_{nm} + F_m, \quad m = \overline{1, N}, \quad (2.8.2)$$

где

$$P_{nm} = \int_a^b \Omega_n(s)\omega_m(s) ds, \quad F_m = \int_a^b \omega_m(s)f(s) ds. \quad (2.8.3)$$

Если параметр λ не равен ни одному из собственных значений ядра, то система (2.8.2) совместна. Решив ее с учетом (2.8.3), находим единственное решение по формуле (2.8.1). В противном случае решение уравнения существует, но не является единственным, только если функция $f(x)$ ортогональна ко всем собственным функциям, соответствующих данному собственному значению.

Для несимметричного ядра решение (не единственное) существует, если функция $f(x)$ ортогональна ко всем нетривиальным решениям союзного уравнения

$$z(x) = \lambda \int_a^b \underbrace{K(s, x)} z(s) ds.$$

$$8.12. \quad y(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-s)y(s) ds + \cos 2x.$$

Для данного уравнения с вырожденным *симметричным* ядром

$$\Omega_1(x) = \cos x, \quad \Omega_2(x) = \sin x, \quad \omega_1(s) = \cos s, \quad \omega_2(s) = \sin s.$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Система неоднородных линейных уравнений для определения коэффициентов C_m имеет вид

$$\begin{cases} C_1 = \lambda \left(\frac{\pi}{4} C_1 + \frac{1}{2} C_2 \right) + \frac{1}{3}, \\ C_2 = \lambda \left(\frac{1}{2} C_1 + \frac{\pi}{4} C_2 \right) - \frac{1}{3} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \left(1 - \lambda \frac{\pi}{4}\right) C_1 - \frac{\lambda}{2} C_2 = \frac{1}{3}, \\ \frac{\lambda}{2} C_1 - \left(1 - \lambda \frac{\pi}{4}\right) C_2 = \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (2.8.4)$$

Собственные значения ядра можно найти, приравняв определитель системы к нулю:

$$-\left(1 - \lambda \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{4} = 0,$$

откуда $\lambda_{1,2} = \frac{4}{\pi \pm 2}$. Если $\lambda \neq \lambda_{1,2}$, то уравнение имеет единственное решение:

$$C_{1,2} = \frac{\mp 4}{3(\pi\lambda - 2\lambda - 4)},$$

$$y(x) = \lambda(C_1\Omega_1(x) + C_2\Omega_2(x)) + f(x) = \lambda(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \cos 2x =$$

$$= \frac{4\lambda}{3(\pi\lambda - 2\lambda - 4)} (\sin x - \cos x) + \cos 2x.$$

Пусть теперь $\lambda = \lambda_1 = \frac{4}{\pi + 2}$. Решение однородной системы дает $C_1 = C_2$ и, следовательно, собственной функцией является $y_1 = q(\cos x + \sin x)$, где q — произвольная константа. Эта функция ортогональна $f(x)$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)y_1(x) dx = 0,$$

поэтому согласно альтернативе Фредгольма уравнение имеет решение, которое не является единственным.

Найдем это решение. Система (2.8.4) при $\lambda = \lambda_1$ дает $C_2 = C_1 - \frac{\pi + 2}{6}$. Тогда по формуле (2.8.1) имеем (снова обозначив C_1 через q)

$$y(x) = \lambda q \cos x + \lambda \left(q - \frac{\pi + 2}{6} \right) \sin x + \cos 2x =$$

$$= \frac{4q}{\pi + 2} (\cos x + \sin x) - \frac{2}{3} \sin x + \cos 2x.$$

Самостоятельно проверьте подстановкой, что полученная функция удовлетворяет уравнению при любом значении q .

Если же $\lambda = \lambda_2 = \frac{4}{\pi - 2}$, то $C_1 = -C_2$ и собственной функцией является $y_2(x) = q(\cos x - \sin x)$. Она не ортогональна $f(x)$, система (2.8.4) и интегральное уравнение не имеют решений.

$$\mathbf{8.13.} \quad y(x) = \lambda \int_0^1 (2xs - xs^2) y(s) ds + x.$$

Вычислим необходимые величины:

$$\Omega_1(x) = -x, \quad \Omega_2(x) = 2x, \quad \omega_1(s) = s^2, \quad \omega_2(s) = s;$$

$$F_1 = \frac{1}{4}, \quad F_2 = \frac{1}{3};$$

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Система (2.8.2) после приведения подобных имеет вид

$$\begin{cases} (1 + \frac{\lambda}{4}) C_1 C_2 = \frac{1}{4}, \\ \frac{\lambda}{3} C_1 + (1 - \frac{2}{3}\lambda) C_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Приравнивая к нулю определитель

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{\lambda}{4} & -\frac{\lambda}{2} \\ \frac{\lambda}{3} & 1 - \frac{2}{3}\lambda \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{2\lambda}{3}\right) \left(\frac{\lambda}{4} + 1\right) + \frac{\lambda^2}{6} = 1 - \frac{5\lambda}{12},$$

получаем, что спектр ядра содержит одно собственное значение $\lambda_1 = \frac{12}{5}$.

Если $\lambda \neq \lambda_1$, то система имеет единственное решение

$$C_1 = -\frac{3}{5\lambda - 12}, \quad C_2 = -\frac{4}{5\lambda - 12}$$

и, следовательно,

$$y(x) = \lambda (C_1(-x) + C_2 \cdot 2x) + x = -\frac{12x}{5\lambda - 12}.$$

Для исследования случая $\lambda = \lambda_1$ найдем нетривиальные решения союзного уравнения

$$z(x) = \lambda \int_0^1 (2xs - x^2s) z(s) ds.$$

Пусть $z(x) = Ax + Bx^2$, тогда

$$\begin{aligned} Ax + Bx^2 &= \lambda \int_0^1 (2xs - x^2s) (As + Bs^2) ds = \\ &= \lambda \left(-\frac{Ax^2}{3} + \frac{2Ax}{3} - \frac{Bx^2}{4} + \frac{Bx}{2} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{cases} A = \lambda \left(\frac{2}{3}A + \frac{1}{2}B \right), \\ B = \lambda \left(-\frac{1}{3}A - \frac{1}{4}B \right) \end{cases}$$

и при $\lambda = \lambda_1$ получаем $A = -2B$. Собственная функция союзного уравнения имеет вид $z_1(x) = B(x^2 - 2x)$. Очевидно, что $z_1(x)$ и $f(x)$ не ортогональны и, следовательно, при $\lambda = \lambda_1$ заданное уравнение решений не имеет.

Задания для самостоятельной работы

Решить интегральные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром. Определить спектр ядра.

$$8.14. \quad y(x) = \lambda \int_0^3 x(s+1)y(s) ds + 2x.$$

$$8.15. \quad y(x) = \lambda \int_0^\pi \cos(x-s)y(s) ds + \sin x.$$

$$8.16. \quad y(x) = \lambda \int_0^1 [xs + (x+1)(s+1)] y(s) ds + 2x.$$

$$8.17. \quad y(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(2x+s)y(s) ds + \sin x.$$

Ответы

$$8.14. \quad y(x) = \frac{-4x}{-2 + 27\lambda}.$$

$$8.15. \quad y(x) = \frac{-2 \sin x}{-2 + \pi\lambda}.$$

$$8.16. \quad y(x) = \frac{20\lambda + (24 - 36\lambda)x}{\lambda^2 - 32\lambda + 12}.$$

$$8.17. \quad y(x) = \frac{3\pi\lambda \cos 2x}{4\lambda + 6} + \sin x.$$

2.8.3. Интегральные уравнения Фредгольма с непрерывным ядром

Примеры решения задач

8.18. Построить двумя способами резольвенту для уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+s)y(s) ds + f(x). \quad (2.8.5)$$

Первый способ. Ядро $\sin(x+s)$ симметрично, поэтому для построения резольвенты можно воспользоваться формулой (1.8.51)

$$R(x, s, \lambda) = K(x, s) + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m(x)y_m(s)}{\lambda_m(\lambda_m - \lambda)},$$

где $y_m(s)$ — собственные функции ядра, соответствующие собственным значениям λ_m .

Сначала решим соответствующее (2.8.5) однородное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+s)y(s) ds.$$

$$\Omega_1(x) = \sin x, \quad \Omega_2(x) = \cos x, \quad \omega_1(s) = \cos s, \quad \omega_2(s) = \sin s.$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\pi}$, $y_{1,2} = q(\sin x \pm \cos x)$. Из условия ортонормированности собственных функций следует, что $q = 1/\sqrt{2\pi}$.

Теперь найдем резольвенту:

$$\begin{aligned} R(x, s, \lambda) &= K(x, s) + \lambda \sum_{m=1}^2 \frac{y_m(x)y_m(s)}{\lambda_m(\lambda_m - \lambda)} = \\ &= \sin(x+s) + \lambda \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sin x + \cos x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sin s + \cos s)}{\frac{1}{\pi}(\frac{1}{\pi} - \lambda)} + \\ &+ \lambda \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sin x - \cos x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sin s - \cos s)}{-\frac{1}{\pi}(-\frac{1}{\pi} - \lambda)} = \\ &= \sin(x+s) + \frac{\lambda\pi \cos(s-x) + \lambda^2\pi^2 \sin(s+x)}{1 - \lambda^2\pi^2} \end{aligned}$$

и окончательно

$$R(x, s, \lambda) = \frac{\lambda\pi \cos(x-s) + \sin(s+x)}{1 - \pi^2\lambda^2}. \quad (2.8.6)$$

Второй способ. Согласно равенству (1.8.57)

$$R(x, s, \lambda) = K(x, s) + \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s),$$

где $K_m(x, s)$ — повторные ядра, которые определяются через рекуррентное соотношение (1.8.36)

$$K_m(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_{m-1}(t, s) dt, \quad m = 2, 3, \dots$$

Найдем их:

$$\begin{aligned}
 K_2(x, s) &= \int_0^{2\pi} K(x, t) K(t, s) dt = \int_0^{2\pi} \sin(x+t) \sin(t+s) dt = \pi \cos(x-s); \\
 K_3(x, s) &= \int_0^{2\pi} K(x, t) K(t, s) dt = \int_0^{2\pi} \sin(x+t) \pi \cos(t-s) dt = \pi^2 \sin(x+s); \\
 &\vdots \\
 K_{2m}(x, s) &= \pi^{2m-1} \cos(x-s); \quad K_{2m+1}(x, s) = \pi^{2m}
 \end{aligned}$$

(самостоятельно докажите это по индукции).

Теперь построим резольвенту:

$$\begin{aligned}
 R(x, s, \lambda) &= \sin(x+s) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\lambda^{2m-1} \pi^{2m-1} \cos(x-s) + \lambda^{2m} \pi^{2m} \right] = \\
 &= \sin(x+s) + \frac{\lambda \pi}{1 - \lambda^2 \pi^2} \cos(x-s) + \frac{\lambda^2 \pi^2}{1 - \lambda^2 \pi^2} \sin(x+s)
 \end{aligned}$$

(о суммировании таких рядов см. в Приложении ??, 2.6.5) и наконец

$$\begin{aligned}
 R(x, s, \lambda) &= \sin(x+s) + \frac{\lambda \pi \cos(s-x) + \lambda^2 \pi^2 \sin(s+x)}{1 - \lambda^2 \pi^2} = \\
 &= \frac{\lambda \pi \cos(x-s) + \sin(s+x)}{1 - \pi^2 \lambda^2},
 \end{aligned}$$

что совпадает с (2.8.6).

Замечание 3.1. Ряды, использованные при решении задачи вторым способом, сходятся при $|\lambda| < 1/\pi$. Это условие является достаточным для сходимости, но не является необходимым для построения резольвенты, которая имеет смысл при всех $\lambda \neq \pm 1/\pi$.

Теперь решение уравнения (2.8.5) можно найти по формуле (1.8.56)

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds.$$

8.19. Построить резольвенту для уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin x \cos s e^{x+s} y(s) ds + f(x).$$

Данное ядро несимметрично, поэтому воспользуемся формулой (1.8.57).
Найдем ядро $K_2(x, s)$:

$$\begin{aligned} K_2(x, s) &= \int_0^\pi K(x, t)K(t, s) dt = \int_0^\pi \sin x \cos t e^{x+t} \sin t \cos s e^{t+s} dt = \\ &= \frac{1}{2} \sin x \cos s e^{x+s} \int_0^\pi \sin 2t e^{2t} dt = \frac{1 - e^{2\pi}}{8} \sin x \cos s e^{x+s} = \frac{1 - e^{2\pi}}{8} K(x, s). \end{aligned}$$

Очевидно, что каждое последующее повторное ядро будет отличаться от предыдущего лишь постоянным множителем и, таким образом,

$$K_m(x, s) = \left(\frac{1 - e^{2\pi}}{8} \right)^{m-1} \sin x \cos s e^{x+s}.$$

Построим резольвенту:

$$\begin{aligned} R(x, s, \lambda) &= K(x, s) + \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s) = \\ &= \sin x \cos s e^{x+s} + \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^{m-1} \left(\frac{1 - e^{2\pi}}{8} \right)^{m-1} \sin x \cos s e^{x+s} = \\ &= \sin x \cos s e^{x+s} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\lambda \frac{1 - e^{2\pi}}{8} \right)^{m-1} = \\ &= \sin x \cos s e^{x+s} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\lambda \frac{1 - e^{2\pi}}{8} \right)^m = \\ &= \sin x \cos s e^{x+s} \frac{1}{1 - \frac{\lambda(1 - e^{2\pi})}{8}} = \frac{8}{8 + \lambda(e^{2\pi} - 1)} \sin x \cos s e^{x+s}. \end{aligned}$$

Ряд сходится при $|\lambda| < 8/(e^{2\pi} - 1)$, но, как и в предыдущей задаче, полученное выражение справедливо для всех λ , не обращающих в нуль знаменатель дроби, т. е. $\lambda \neq -8/(e^{2\pi} - 1)$. Самостоятельно докажите, что

$$\lambda = -\frac{8}{e^{2\pi} - 1}$$

есть собственное значение ядра данного уравнения..

Решить интегральные уравнения при различных значениях параметров.

$$\mathbf{8.20.} \quad y(x) = \lambda \int_0^1 (x + s)y(s) ds + Ae^x + Bx.$$

Найдем собственные значения и собственные функции ядра.

$$\Omega_1(x) = x, \quad \Omega_2(x) = 1, \quad \omega_1(s) = 1, \quad \omega_2(s) = s;$$

$$F_1 = (e - 1)A + \frac{B}{2}, \quad F_2 = A + \frac{B}{3};$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{3} \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{3} = 0,$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = -6 \pm 4\sqrt{3}, \quad y_{1,2}(x) = q \left(x \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

где $q = \sqrt{\frac{3}{2 \pm \sqrt{3}}}$ множитель, необходимый для того, чтобы собственная функция была ортонормированной.

Если $\lambda \neq \lambda_{1,2}$, то уравнение разрешимо для всех значений A и B . Несложные, но громоздкие вычисления дают

$$\begin{aligned} y(x) = & -\frac{2\lambda(A((2e-5)\lambda+6)+2B)}{\lambda^2+12\lambda-12} + \\ & + \frac{6(A(e(\lambda-2)-3\lambda+2)\lambda+B(\lambda-2))}{\lambda^2+12\lambda-12}x + Ae^x. \end{aligned}$$

Пусть $\lambda = \lambda_{1,2}$, тогда уравнение имеет решение (не единственное) только в том случае, когда функция $Ae^x + Bx$ ортогональна собственным функциям ядра. Для $\lambda = \lambda_1$ имеем

$$\int_0^1 q \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) (Ae^x + Bx) dx = \left(1 + \frac{e-1}{\sqrt{3}} \right) A + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) B = 0,$$

для $\lambda = \lambda_2$

$$\int_0^1 q \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) (Ae^x + Bx) dx = \left(1 - \frac{e-1}{\sqrt{3}} \right) A + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) B$$

Решения для этих случаев найдите самостоятельно.

$$\mathbf{8.21.} \quad y(x) = \lambda \int_0^1 x \sin 2\pi s y(s) ds + Ax.$$

Важное отличие этой задачи от задачи 8.20 заключается в том, что ядро $K(x, s) = x \sin 2\pi s$ несимметрично и, следовательно, если λ равно одному из собственных значений, то проверять функцию Ax на ортогональность следует по отношению к собственным функциям союзного уравнения.

Очевидно, что $\Omega_1(x) = x$, $\omega_1(s) = \sin 2\pi s$, матрица P содержит только один элемент

$$P_{11} = \int_0^1 x \sin 2\pi x \, dx = -\frac{1}{2\pi}$$

и, следовательно, характеристическое уравнение имеет вид $1 + \lambda/2\pi = 0$, откуда следует единственное собственное значение ядра $\lambda_1 = -2\pi$.

Если $\lambda \neq -2\pi$, то уравнение имеет единственное решение при любых A :

$$\begin{aligned} C_1 &= \lambda P_{11} C_1 + F_1 = -\frac{\lambda}{2\pi} C_1 + \int_0^1 Ax \sin 2\pi x \, dx = -\frac{\lambda}{2\pi} C_1 - \frac{A}{2\pi}; \\ C_1 &= -\frac{A}{\lambda + 2\pi}; \\ y(x) &= \lambda C_1 \Omega_1(x) + Ax = \left(A - \frac{A\lambda}{\lambda + 2\pi} \right) x = \frac{2\pi A\lambda}{\lambda + 2\pi} x. \end{aligned}$$

Найдем теперь собственную функцию союзного уравнения

$$z(x) = \lambda \int_0^1 s \sin 2\pi x z(s) \, ds.$$

Поскольку уравнение

$$C_1 = \lambda P_{11} C_1 = \lambda \int_0^1 s \sin 2\pi s \, ds \cdot C_1 = -\frac{\lambda}{2\pi} C_1,$$

имеет только тривиальные решения, собственные функции отсутствуют и, следовательно, искомой ортогональности нет. Таким образом, при $\lambda = \lambda_1 = -2\pi$ заданное уравнение не имеет решений и при каких значениях A .

Задания для самостоятельной работы

8.22. Построить резольвенту для уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^1 x e^s \, ds + f(x), \quad |\lambda| < 1.$$

8.23. Построить резольвенту для уравнения

$$y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x + \sin s) ds + f(x), \quad |\lambda| < \frac{1}{2\pi}.$$

Решить уравнения при различных значениях параметров.

8.24. $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x + s)y(s) ds + ax + b.$

8.25. $y(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} xsy(s) ds + ax + b \sin x.$

Ответы

8.22. $R(x, s, \lambda) = \frac{xe^s}{1 - \lambda}.$

8.23. $R(x, s, \lambda) = \frac{x + \sin x + 2\pi\lambda(x \sin x + 1)}{1 - (2\pi\lambda)^2}.$

8.24. Если $\lambda \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, то для любых a и b

$$y(x) = b + \frac{6\lambda b + 3a}{3 - 4\lambda^2}x + \frac{4\lambda^2 b + 2\lambda a}{3 - 4\lambda^2}.$$

Если $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то уравнение разрешимо лишь в случае $a + \sqrt{3}b = 0$. При этом

$$y(x) = b + q \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3} \right),$$

где q — произвольная постоянная.

Если $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то уравнение разрешимо лишь в случае $a - \sqrt{3}b = 0$. При этом

$$y(x) = b + q \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3} \right),$$

q — произвольная постоянная.

8.25. При $\lambda \neq \frac{24}{\pi^3}$ уравнение разрешимо при любых значениях параметров a и b . При $\lambda = \frac{24}{\pi^3}$ уравнение разрешимо при условии $\pi^3 a + 24b = 0$.

3.. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

3.1. Контрольные работы

3.1.1. Пробная контрольная работа № 1

1. Ряды Фурье (периодическая функция)

1.1. Построить график периодической функции, заданной на указанном отрезке, и разложить функцию в ряд Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < -\pi/2 \\ -1, & -\pi/2 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi/2 \\ x, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Ответ:

$$a_0 = \frac{3\pi}{8}; \quad a_n = -\frac{-2(-1)^n + \pi n \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n^2}; \quad b_n = \frac{4 \sin^2\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\pi n}.$$

1.2. Построить график периодической функции, заданной на указанном отрезке, и разложить функцию в ряд Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 < x < -1 \\ x^2, & -1 < x < 1 \\ x, & 1 < x < 2 \end{cases}, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Ответ:

$$a_0 = \frac{11}{12}; \quad a_n = \frac{4 \left[\pi(-1)^n n - 4 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \pi n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right]}{\pi^3 n^3}; \quad b_n = 0.$$

1.3. Построить график периодической функции, заданной на указанном отрезке, и разложить функцию в ряд Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & -3 < x < -1 \\ -x, & -1 < x < 1 \\ 1 - 2x, & 1 < x < 3 \end{cases}, \quad -3 \leq x \leq 3.$$

Ответ:

$$a_0 = 0; \quad a_n = 0; \quad b_n = \frac{2 \left(5\pi(-1)^n n + 3 \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) \right)}{\pi^2 n^2}.$$

Ответ: 1.4. Построить график периодической функции, заданной на указанном отрезке, и разложить функцию в ряд Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} x, & -2 < x < -1 \\ -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 < x < 2 \end{cases}, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Ответ:

$$a_0 = -\frac{1}{4}; \quad a_n = \frac{4 \left(\cos \left(\frac{\pi n}{2} \right) - (-1)^n \right)}{\pi^2 n^2}; \quad b_n = -\frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n}.$$

2. Ряды Фурье (непериодическая функция)

2.1. Построить график непериодической функции, заданной на указанном отрезке, и разложить функцию в ряд Фурье по синусам:

$$f(x) = x^3, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Ответ:

$$b_n = -\frac{2(-1)^n (\pi^2 n^2 - 6)}{\pi^3 n^3}.$$

2.2. Построить график непериодической функции, заданной на указанном отрезке, и разложить функцию в ряд Фурье по косинусам:

$$f(x) = (x - 2)x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Ответ:

$$a_0 = -\frac{2}{3}; \quad a_n = \frac{8((-1)^n + 1)}{\pi^2 n^2}.$$

2.3. Построить график непериодической функции, заданной на указанном отрезке, и разложить функцию в ряд Фурье по синусам:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \leq 2 \\ -4(x - 3), & 2 < x < 3 \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Ответ:

$$b_n = \frac{36 \sin \left(\frac{2\pi n}{3} \right)}{\pi^2 n^2}.$$

2.4. Построить график непериодической функции, заданной на указанном отрезке, и разложить функцию в ряд Фурье по косинусам:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Ответ:

$$a_0 = \frac{2}{3}; \quad a_n = \frac{8 \left(\pi n \cos \left(\frac{\pi n}{2} \right) - 2 \sin \left(\frac{\pi n}{2} \right) \right)}{\pi^3 n^3}.$$

3. Ряды Фурье (функция задана графически)

3.1. Разложить заданную графически (рисунок 3.1.1) непериодическую функцию в ряд Фурье по косинусам.

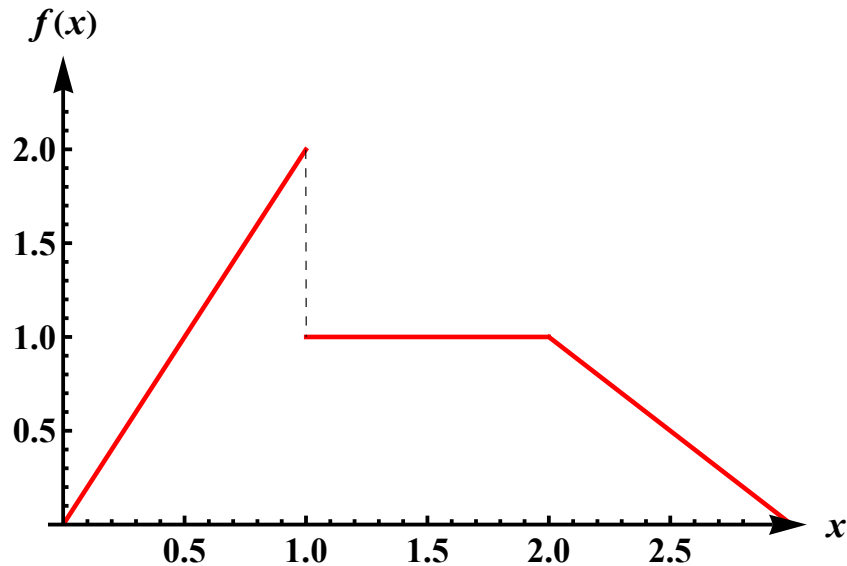


Рис. 3.1.1. К задаче 3.1

Ответ:

$$a_0 = \frac{5}{3}; \quad a_m = \frac{1}{\pi^2 m^2} \left[4 \sin \frac{\pi m}{6} \left(-6 \sin \frac{\pi m}{6} + 3 \sin \frac{5\pi m}{6} + \pi m \cos \frac{\pi m}{6} \right) \right].$$

3.2. Разложить заданную графически (рисунок 3.1.2) непериодическую функцию в ряд Фурье по синусам.

Ответ:

$$b_m = \frac{2}{\pi m} \left[-2(-1)^m - 2 \cos \frac{\pi m}{2} + \cos \frac{3\pi m}{4} + 3 \right].$$

4. Интеграл Фурье

4.1. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } 0 < x < 2, \\ 1 & \text{при } x = 0, x = 2, \\ 0 & \text{при } x < 0, x > 2. \end{cases}$$

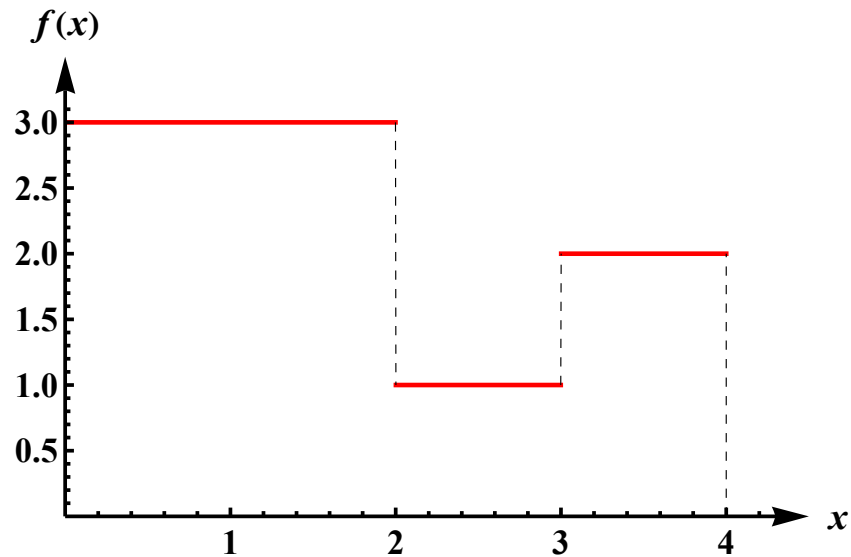


Рис. 3.1.2. К задаче 3.2

Ответ:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(2-x)z + \sin xz}{z} dz = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin z \cos z(1-x)}{z} dz.$$

4.2. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{на промежутке } [0, \pi], \\ 0 & \text{вне промежутка } [0, \pi]. \end{cases}$$

Ответ:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\pi-x)z + \cos xz}{1-z^2} dz = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi z}{2} \cos \left(\frac{\pi z}{2} - xz \right)}{1-z^2} dz.$$

5. Цилиндрические функции

5.1. Доказать, что цилиндрические функции $H_{\nu}^{(1)}(z)$ и $N_{\nu}(z)$ линейно независимы.

5.2. Доказать, что сферические функции $h_{\nu}^{(1)}(z)$ и $y_{\nu}(z)$ линейно независимы.

6. Ортогональные полиномы

6.1. Используя соотношение ортогональности для полиномов Лежандра, вычислить интеграл

$$\int_{-1}^1 (x^4 - 3x^3 + 2x - 1) P_3(x) dx.$$

Ответ: $-\frac{12}{35}$

6.2. Используя соотношение ортогональности для полиномов Эрмита, вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^4 - 3x^3 + 2x - 1) H_3(x) e^{-x^2} dx.$$

Ответ: $-18\sqrt{\pi}$

6.3. Используя соотношение ортогональности для полиномов Лагерра $L_n^{(0)}(x)$, вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} (x^4 - 3x^3 + 2x - 1) L_3^{(0)}(x) e^{-x} dx.$$

Ответ: -78

3.1.2. Пробная контрольная работа № 2

1. Найти оригинал по заданному изображению с использованием вычетов:

$$F(p) = \frac{4p}{(p^2 + 4)^3}.$$

Ответ: $x(t) = \frac{1}{16}t(\sin 2t - 2t \cos 2t)$

2. Найти оригинал по заданному изображению с использованием теоремы о свертке:

$$F(p) = \frac{1}{p^4 + 9p^2}.$$

Ответ: $f(t) = \frac{1}{27}(3t - \sin 3t)$

3. Решить уравнение методом операционного исчисления:

$$x'' - x' = \sin 2t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$$

Ответ: $x(t) = \frac{7}{5}e^t - \frac{1}{5}\sin 2t + \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{2}$

4. Решить уравнение $x'' + x = f(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, если функция $f(t)$ задана графически:

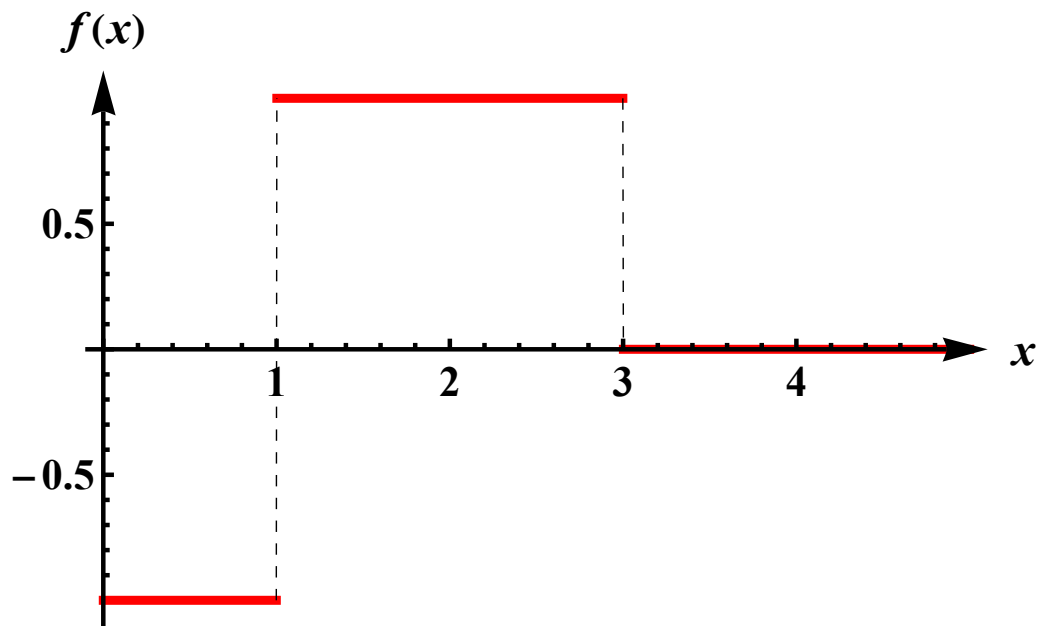


Рис. 3.1.3. К задаче 4

Ответ:

$$x(t) = -\theta(t-3) + 2\theta(t-1) + \theta(t-3) \cos(3-t) - \\ - 2\theta(t-1) \cos(1-t) + \cos(t) - 1.$$

5. Решить систему уравнений методом операционного исчисления:

$$\begin{cases} x' = 3x + y + \sin 2t; & x(0) = 0; \\ y' = -x + y; & y(0) = 1. \end{cases}$$

Ответ:

$$x(t) = \frac{1}{8} [e^{2t}(10t + 1) - 2 \sin 2t - \cos 2t], \\ y(t) = \frac{1}{8} [e^{2t}(9 - 10t) - \cos 2t]$$

6. Решить интегральное уравнение методом операционного исчисления:

$$\varphi(t) = \cos 2t - 2 \int_0^t e^{t-\tau} \varphi(\tau) d\tau.$$

Ответ: $\varphi(t) = \frac{2}{5}e^{-t} - \frac{4}{5}\sin 2t + \frac{3}{5}\cos 2t$

3.1.3. Теоретическая контрольная работа «Применение преобразования Лапласа к расчету электрических цепей»

Общие положения

Рассмотрим контур, содержащий активное сопротивление R , катушку индуктивности L и емкость C . Напряжение и сила тока на этих элементах цепи связаны соотношениями

$$u(t) = Ri(t); \quad u(t) = L \frac{di(t)}{dt}; \quad u(t) = \frac{1}{C} \left[\int_0^t i(\tau) d\tau + q_0 \right], \quad (3.1.1)$$

где q_0 — начальный заряд на обкладках конденсатора.

Применим к каждому из выражений (3.1.1) преобразование Лапласа, введя *операторный ток* $i(t) \doteq I(p)$ и *операторное напряжение* $u(t) \doteq U(p)$:

$$U = RI; \quad U = L(pI - i_0); \quad U = \frac{1}{Cp}(I + q_0), \quad (3.1.2)$$

где $i_0 = i(0)$.

Будем рассматривать задачу включения, тогда $i_0 = 0$ и $q_0 = 0$, тогда

$$U = RI; \quad U = LpI; \quad U = \frac{1}{Cp}I.$$

Отсюда следует *операторный закон Ома*

$$U = ZI, \quad (3.1.3)$$

где Z — *операторное сопротивление* или *импеданс*.

$$Z_R = R; \quad Z_L = Lp; \quad Z_C = \frac{1}{Cp}. \quad (3.1.4)$$

Легко показать, что при последовательном соединении двух элементов с импедансами Z_1 и Z_2

$$I = I_1 = I_2, \quad U = U_1 + U_2 = (Z_1 + Z_2)I = ZI,$$

откуда

$$Z = Z_1 + Z_2, \quad (3.1.5)$$

а при параллельном

$$I_1 + I_2 = I, \quad U = ZI_1 = ZI_2 = UZ$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}. \quad (3.1.6)$$

Таким образом, операторные сопротивления цепей в случае задач включения можно подсчитывать по обычным правилам соединения элементов.

Применение метода продемонстрируем на примере. Рассмотрим контур, состоящий из последовательно соединенных катушки и конденсатора, шунтированного сопротивлением, и источника (рисунок 3.1.4):

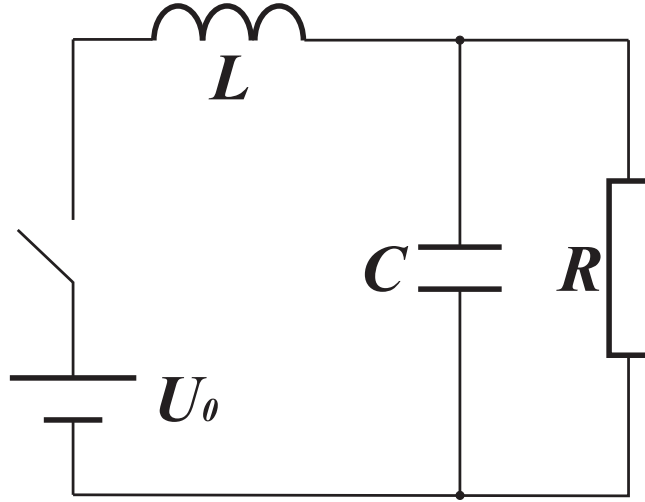


Рис. 3.1.4. Электрическая цепь

Очевидно, что

$$Z = Z_L + \frac{1}{\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_R}} = Lp + \frac{1}{Cp + \frac{1}{R}} = \frac{LCRp^2 + Lp + R}{RCp + 1}.$$

Операторная ЭДС $U(p) = \frac{U_0}{p}$, тогда операторный ток по формуле (3.1.3)

$$I(p) = \frac{U_0(RCp + 1)}{p(LCRp^2 + Lp + R)}. \quad (3.1.7)$$

Для нахождения временного, т. е. обычного, тока воспользуемся второй теоремой разложения. Функция (3.1.7) имеет три полюса первого порядка: в точках $p = 0$ и

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2CR} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Если $L < 4R^2C$, то корни комплексно сопряжены: $p_{1,2} = -\sigma \pm i\omega$, где

$$\sigma = \frac{1}{2CR}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}.$$

Таким образом, процесс имеет характер затухающих колебаний. Обратное преобразование Лапласа, проведенное по формуле

$$f(t) = \sum_{(p_k)} \operatorname{res} [F(p)e^{pt}, p_k] \theta(t),$$

дает

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left\{ 1 - e^{-\sigma t} \left[\cos \omega t + \left(\frac{\sigma}{\omega} - \frac{R}{\omega L} \right) \sin \omega t \right] \right\} \quad (3.1.8)$$

(рисунок 3.1.5).

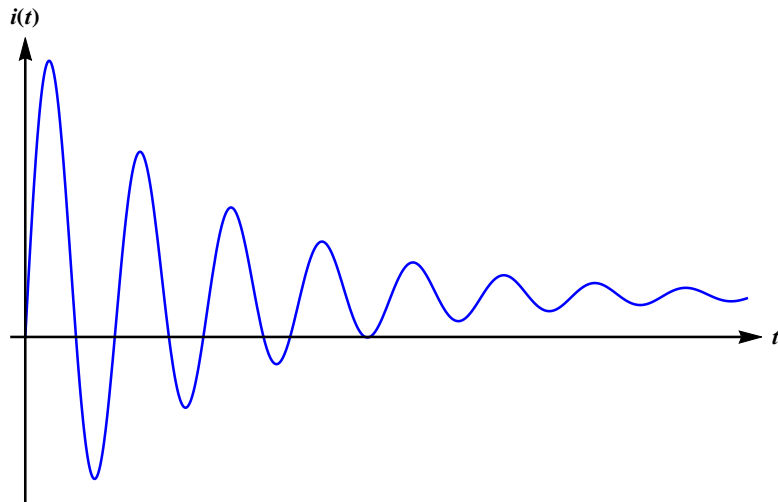


Рис. 3.1.5. Затухающие колебания

В противном случае, т. е. если $L > 4R^2C$, подкоренное выражение отрицательно, «частота» ω становится чисто мнимой. Положим $\omega = i\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$, тогда имеем аperiodический процесс:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left\{ 1 - e^{-\sigma t} \left[\operatorname{ch} \mu t + \left(\frac{\sigma}{\omega} - \frac{R}{\mu L} \right) \operatorname{sh} \mu t \right] \right\} \quad (3.1.9)$$

(рисунок 3.1.6)

Задание к работе

Правила оформления

Сохраните ваш файл формата Wolfram Mathematica и картинку со схемой вашего варианта в одной папке. *Имя файла должно содержать номер группы, номер варианта и вашу фамилию, например: 3-1-Фамилия.nb*

Ту же информацию поместите в первую ячейку своего файла, пометив ее стилем **text**.

Во второй ячейке разместите следующие строки:

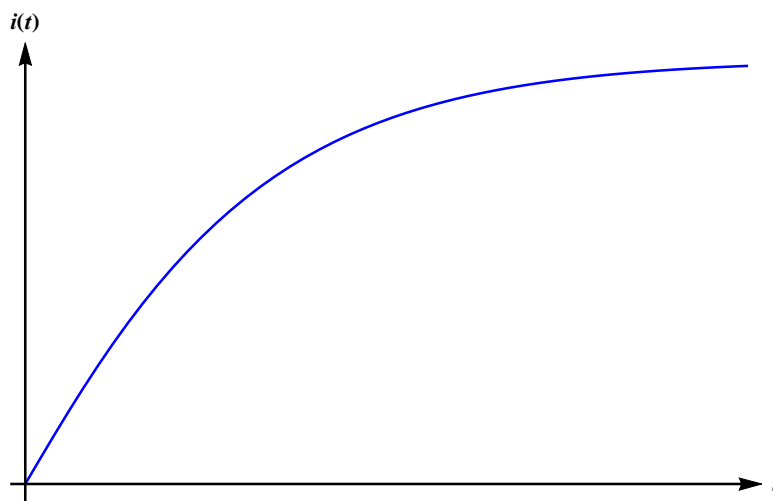


Рис. 3.1.6. Аперiodический процесс

```
ClearAll["Global`*"] (* Очистка памяти *)
SetDirectory[NotebookDirectory[]]; (* Файлы сохраняются в ту
папку, где находится файл с работой *)
Import["name.jpg"]
```

Вместо `name` укажите имя файла со схемой цепи, например, `var3`. Запустите ячейку на исполнение (и, желательно, сделайте ее инициализационной, чтобы при каждом следующем запуске картинка загружалась автоматически: выделите правой клавишей и отметьте **Initialization Cell**).

Сперва пишите пояснительный текст, формулы. Вспомнив правила (законы) Кирхгофа и сославшись на них, запишите выражение для операторных токов. Затем приступайте к вычислениям и построению графиков.

Не забывайте выбирать для строк, содержащих только текст и формулы, стиль `text`. Для набора формул используйте палитру **Basic Math Assistant** из меню **Palettes**.

Пояснительный текст желательно набирать в формате $\text{\LaTeX}$.

Программа–минимум

Рассчитайте общую силу тока в предложенной вам цепи, следуя приведенному выше примеру и примеру из книги [27, глава III]. Сперва выберите величины U_0 , R , L и C произвольно (внутренним сопротивлением источника можно пренебречь), затем примените для задания активного сопротивления индуктивности и емкости функцию **Manipulate**. Исследуйте зависимость тока от параметров цепи, получите аперiodический процесс, затухающие колебания и, если возможно, незатухающие колебания.

Если ток в индуктивном сопротивлении уходит на бесконечность (почему?!), добавьте для катушки небольшое внутреннее сопротивление.

Программа–медиум

Рассчитайте также силу тока в отдельных участках цепи (например, для приведенной выше схемы это будут токи через конденсатор и резистор), постройте графики.

Программа–максимум

Выполнив основное задание, попробуйте исследовать цепь с переменной ЭДС, которая может задаваться по-разному, например, так, как на рис 3.1.7.

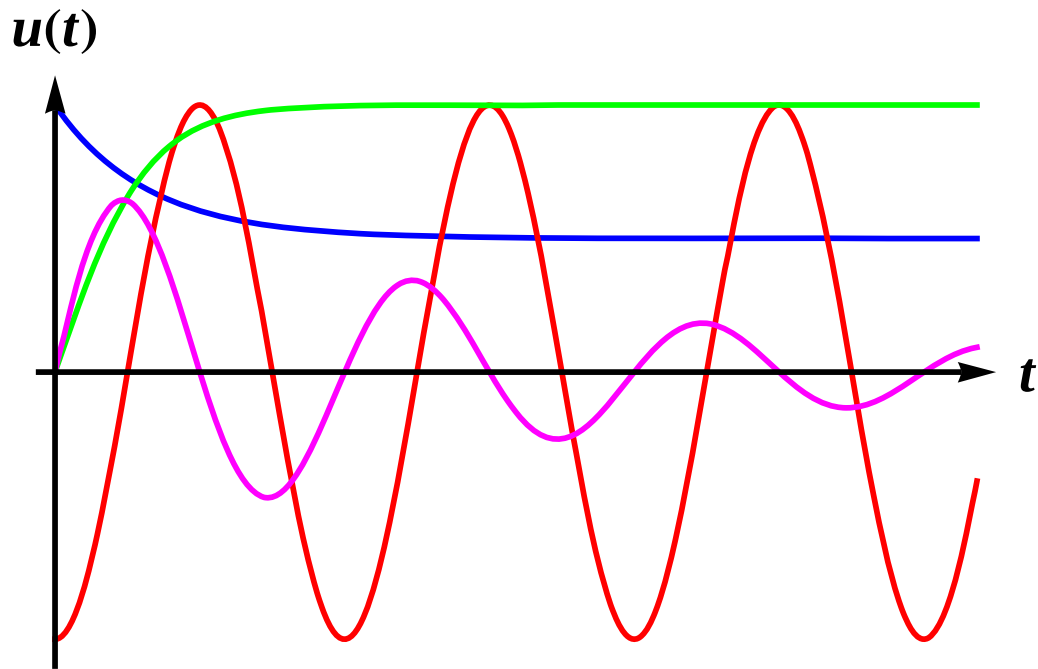


Рис. 3.1.7. Цепь с переменной ЭДС

Можете предложить и свой вариант (смотрите примеры в [27, раздел 6.2]). Добавьте один-два элемента в вашу цепь и/или учтите внутреннее сопротивление источника. Подумайте о том, можно ли добиться резонанса.

3.1.4. Пробная контрольная работа № 3

1. Пусть на прямой $\mathbb{R}$ расстояние определяется формулой

$$\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|.$$

Показать, что $\rho(x, y)$ является метрикой.

2. Докажите, что данную систему можно решить методом последовательных приближений. Сколько итераций потребуется для достижения решения с погрешностью, не превышающей 0,01?

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3; \\ x_1 - 6x_2 + x_3 = -1; \\ -2x_1 + x_2 + 7x_3 = 5. \end{cases}$$

ИЛИ

Определить, для каких значений λ интегральное уравнение можно решать методом последовательных приближений. Решить уравнение.

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^2 (x+t) \varphi(t) dt =$$

3. Доказать, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, и найти его меру Лебега.

$$A = \left\{ x \left| \cos \frac{1}{x} > 0, \ 0 < x < 1 \right. \right\}, \quad n = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Ответ:} \quad \mu(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k} \right) + \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k - 1/2} - \frac{1}{2k + 1/2} \right) + \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) = \\ &= \frac{4 - \pi}{2\pi} + \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Если ряд трудно просуммировать, достаточно доказать его сходимость.

4. Вычислите интеграл Лебега или покажите, что он не существует:

$$\int_{[0;1]} \left[\frac{1}{x^3} \right]^{-1} d\mu.$$

Если ряд трудно просуммировать, достаточно доказать его сходимость.

$$\text{Ответ:} \quad J = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \right).$$

5. Для заданной в области $D \subset \mathbb{R}^2$ функции $f(x, y)$ найдите интеграл Лебега:

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}; \quad f(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq 1; \\ [x^2 + y^2], & 1 < x^2 + y^2 \leq 4, x \in \mathbb{I}; \\ x^2 + y^2, & 1 < x^2 + y^2 \leq 4, x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ответ: 7π .

6. Найдите интеграл Лебега для функции $f(x)$, заданной на $[1, 4]$, построив эквивалентную функцию; сделайте необходимые пояснения:

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2}x, & x \in \mathbb{Q} \cap [1; 2], \\ x, & x \in \mathbb{Q} \cap (2, 4], \\ 2x, & x \in \mathbb{I} \cap [1, 2], \\ \sin \frac{\pi}{2}x, & x \in \mathbb{I} \cap (2, 4]. \end{cases}$$

Ответ: $3 - \frac{4}{\pi}$.

3.2. Порядок проведения экзамена

Экзамен проводится в устно-письменной форме. Билет содержит два вопроса и задачу, решение задачи — необходимое условие сдачи экзамена.

Экзаменационные вопросы

1. Ряды и интегралы Фурье

1. Тригонометрическая ортогональная система, коэффициенты Фурье. Точечная и равномерная сходимость рядов Фурье.
2. Ряды Фурье по общим ортогональным системам, замкнутость и полнота ортогональных систем. Замкнутость тригонометрической ортогональной системы.
3. Интеграл Фурье.
4. Преобразование Фурье.

2. Специальные функции

5. Уравнение Бесселя и его решение.
6. Различные типы цилиндрических функций.
7. Основные свойства бесселевых цилиндрических функций (линейная зависимость и независимость, рекуррентные соотношения, производящая функция).
8. Нули цилиндрических функций и ортогональная система на их основе. Ряд Фурье-Бесселя.
9. Цилиндрические функции полуцелого порядка.
10. Уравнение гипергеометрического типа и ортогональные полиномы.
11. Основные свойства ортогональных полиномов (соотношение ортогональности, рекуррентное соотношение). Представление любого полинома через линейную комбинацию ортогональных полиномов.
12. Классические ортогональные полиномы. Ортогональные полиномы Лежандра, их представления и свойства.
13. Присоединенные функции Лежандра.

3. Операционное исчисление

14. Преобразование Лапласа. Свойства оригиналов и изображений.
15. Свойства преобразования Лапласа (теоремы об оригиналах и изображениях).
16. Нахождение оригиналов с помощью вычетов.
17. Изображение периодических и импульсных функций.
18. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных и интегральных уравнений.

4. Метрические пространства

19. Метрическое пространство. Определение, основные примеры.
20. Непрерывные отображения. Предельная точка. Замыкание.
21. Сходимость и полнота метрических пространств.
22. Принцип сжимающих отображений. Теорема Банаха о неподвижной точке.
23. Приложения принципа сжимающих отображений (решение уравнения $f(x)=x$, решение интегральных уравнений).

5. Мера и интеграл Лебега

24. Счетные и континуальные множества. Мощность множества.
25. Открытые и замкнутые множества.
26. Мера. Измеримые множества и измеримые функции. Мера Лебега.
27. Интеграл Лебега и его свойства.
28. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана.

6. Линейные нормированные полные пространства

29. Линейные пространства. Основные определения и примеры.
30. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Теорема Хана-Банаха.
31. Нормированные пространства. Банаховы пространства.
32. Евклидовы пространства.
33. Гильбертовы пространства.
34. Операторы в банаховых пространствах, их свойства. Понятие нормы оператора и функционала.

7. Интегральные уравнения с симметричными ядрами

35. Собственные значения и собственные функции однородных интегральных уравнений с симметричными ядрами.

36. Теоремы об ортогональности собственных функций и расположении собственных значений интегральных уравнений с симметричными ядрами.
37. Интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром.
38. Повторные (итерированные) ядра, их разложение в ряды по собственным функциям.
39. Решение неоднородного уравнения с симметричным ядром. Альтернатива Фредгольма.
40. Резольвента для уравнения Фредгольма второго рода.

Типовые задачи

1. Найти оригинал по заданному изображению с использованием вычетов:

$$F(p) = \frac{-2p^2 - 2}{p^3 - p}$$

Ответ: $f(t) = 2 - 4 \operatorname{ch} t$.

2. Решить уравнение методом операционного исчисления:

$$x'' + 9x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2..$$

Ответ: $x(t) = \frac{e^{-t}}{10} + \frac{7}{10} \sin 3t - \frac{1}{10} \cos 3t$.

3. Решить систему уравнений методом операционного исчисления:

$$\begin{cases} x' = x + 2y + e^{2t}; & x(0) = 0; \\ y' = -2x + 5y; & y(0) = -1. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} x(t) &= -e^{3t}(4t - 3) - 3e^{2t} \\ y(t) &= -e^{3t}(4t - 1) - 2e^{2t}. \end{aligned}$$

4. Решить интегральное уравнение методом операционного исчисления:

$$\varphi(x) = \cos(x) + \int_0^x \sin 2(x-t) \varphi(t) dt.$$

Ответ: $\varphi(x) = 3 \cos x - 2 \cos \sqrt{2}x$

5. Пусть $\rho(x, y)$ – метрика на множестве X . Проверить, является ли метрикой функция

$$\rho_1(x, y) = \ln [1 + \rho(x, y)].$$

6. Найти расстояние в пространстве $C[0, 1]$ между функциями $\cos t$ и $\sin^2 t$.

Ответ: 1

7. Проверить, сходится ли последовательность x_n в метрическом пространстве $C[0, 8]$ к точке a :

$$x_n = \left(\frac{t}{8}\right)^n - \left(\frac{t}{8}\right)^{2n} + t; \quad a = t.$$

8. Найти предел последовательности x_n в метрическом пространстве $C[-1, 0]$, если он существует: $x_n = \frac{\sqrt[3]{n^3 t + 1}}{n}$.

9. Является ли сжимающим отображение $Ax = x^2$, действующее на множестве: а) $[0, \frac{1}{4}]$, б) $[\frac{1}{2}, \infty]$? Если является, то найти его неподвижную точку.

10. При каких λ в пространстве $C[0, 1]$ применим принцип сжимающих отображений для решения уравнения Фредгольма

$$\varphi(t) = 1 + \lambda \int_0^1 \cos [\pi(t - s)] \varphi(s) ds.$$

Ответ: По формуле: $|\lambda| < 1$, реально: $|\lambda| < 2$

11. Докажите, что данную систему можно решить методом последовательных приближений. Сколько итераций потребуется для достижения решения с погрешностью, не превышающей 0,01?

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 - 10x_2 + 2x_3 = -5; \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = -1. \end{cases}.$$

Ответ: $\alpha = \frac{3}{8}$, $n = 5$

12. Вычислите интеграл Лебега или покажите, что он не существует:

$$\int_{[0;1]} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right] d\mu.$$

Если ряд трудно просуммировать, достаточно доказать его сходимость.

Ответ: $\frac{\pi^4}{90}$.

13. Вычислите интеграл Лебега или покажите, что он не существует:

$$\int_{(0;2]} \operatorname{sign} \cos \frac{2\pi}{x} d\mu.$$

Если ряд трудно просуммировать, достаточно доказать его сходимость.

Ответ: Интеграл задается рядом

$$\begin{aligned} & (-1) \times \left(2 - \frac{4}{3}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(+1) \times \left(\frac{4}{4k-1} - \frac{4}{4k+1}\right) + \right. \\ & \left. + (-1) \times \left(\frac{4}{4k+1} - \frac{4}{4k+3}\right) \right] = 6 - 2\pi. \end{aligned}$$

14. Для заданной в области $D \subset \mathbb{R}^2$ функции $f(x, y)$ найдите интеграл Лебега:

$$D = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\};$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 4, & |x+y| < 1, \\ 3, & 1 \leq |x+y| < 2, \\ 2, & 2 \leq |x+y|, y \in \mathbb{I}, \\ 1, & 2 \leq |x+y|, y \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ответ: 51.

15. Решить интегральное уравнение с вырожденным ядром, определить спектр ядра и выяснить, для каких собственных чисел уравнение не имеет решений:

$$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x-2s)y(s) ds + 2 \sin(x).$$

$$\text{Ответ: } y(x) = \frac{18 \sin(x) - 12\lambda \cos(x)}{8\lambda^2 + 9}, \quad \lambda_{1,2} = \pm \frac{3}{2\sqrt{2}}i$$

4.. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

Основная литература

[1] Демидович, Б. П. Математические основы квантовой механики : учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. – 3-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2024. – 200 с.

[2] Иванов, В. К. Физика. Введение в квантовую физику: учеб. пособие / В. К. Иванов. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. – 256 с.

[3] Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа : учебное пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2024. – 271 с.

[4] Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной : учебник [для вузов] / И. П. Натансон. – Изд. 6-е, стер. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар : Лань, 2022. – 560 с.

[5] Филимоненкова, Н. В. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие для студ. технических направлений бакалавриата и направлений «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика» технических вузов / Н. В. Филимоненкова. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар : Лань, 2024. – 229 с.

[6] Филимоненкова, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу : учебное пособие для студ. технических направлений бакалавриата и направлений «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика» технических вузов / Н. В. Филимоненкова. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар : Лань, 2024. – 168 с.

Дополнительная литература

[7] Антоневи́ч, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения : учеб. пособие / А. Б. Антоневи́ч, М. Х. Мазель, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2011. 319 с.

[8] Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – 13-е изд., испр. – СПб. : Издательство «Лань», 2015. – 448 с.

[9] Бельхеева, Р. К. Ряды Фурье в примерах и задачах : Учебное пособие / Р. К. Бельхеева. – Новоси́б. гос. ун-т. Новоси́бирск, 2011. 76 с.

[10] Бицадзе, А. В. Уравнения математической физики / А. В. Бицадзе – 2-е изд., перераб. и дополненное. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 336 с.

[11] Борн, М. / Основы оптики М. Борн, Э. Вольф. Москва : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973. 720 с.

[12] Ван дер По́ль Б. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа / Б. Ван дер По́ль, Х. Бреммер. – Москва, Издательство иностранной литературы, 1952. – 506 с.

[13] Васильева, А. Б. Интегральные уравнения / А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов. – 2-е изд. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 160 с.

[14] Ватсон, Г. Н. Теория бесселевых функций. Часть первая / Г. Н. Ватсон. – Москва : Издательство иностранной литературы, 1949. – 800 с.

[15] Волков, И. К. Интегральные преобразования и операционное исчисление : Учеб. для вузов, 2-е изд. / И. К. Волков, А. Н. Канатников. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. –228 с.

[16] Волков В. А. (ред.). Задачник-практикум по высшей математике. Ч. III : Ряды. Теория функций комплексного переменного. Ряды и интеграл Фурье : Учеб. пособие / Андрианова Т. Н., Волков В. А., Ефимова Т. А. и др.; Под ред. В. А. Волкова. – СПб. : Издательство С.-Петербургского университета, 1997. – 268 с.

[17] Высшая математика. Сборник задач : учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 3. Дифференциальные уравнения. Аналитические функции. Элементы функционального анализа / М. А. Глецевич [и др.]; под ред. Н. Г. Абрашиной-Жадаевой, В. Н. Русака. – Минск : БГУ, 2015. – 392 с.

- [18] Глазырина, П. Ю. Нормированные пространства. Типовые задачи : учеб. пособие / П. Ю. Глазырина, М. В. Дейкалова, Л. Ф. Коркина. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2012. – 108 с.
- [19] Городецкий, В. В. Методы решения задач по функциональному анализу : Учеб. пособие / В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев. – Киев : Выща шк., 1990. – 479 с.
- [20] Грей, Э. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике / Э. Грей, Г. Б. Мэтьюз. – Москва : Издательство иностранной литературы, 1953. – 372 с.
- [21] Дерр, В. Я. Функциональный анализ : лекции и упражнения : учебное пособие / В. Я. Дерр. Москва : Кнорус, 2013. – 464 с.
- [22] Дубков, А. А. Преобразование Лапласа : Учебно-методическое пособие / А. А. Дубков, Н. В. Агудов. – Нижний Новгород : Нижегородский госуниверситет, 2016. – 36 с.
- [23] Ильин, В. А. Основы математического анализа : В 2 ч. Часть II : Учеб. : Для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 4-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 464 с.
- [24] Кандидов, В. П. Дискретное преобразование Фурье. Учебное пособие / В. П. Кандидов, С. С. Чесноков, С. А. Шленов – Москва : физический факультет МГУ, 2019. – 88 с.
- [25] Кожевников, Н. И. Ряды и интеграл Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа / Н. И. Кожевников, Т. И. Краснощекова, Н. Е. Шишкин. Москва, Наука, 1964. 184 с.
- [26] Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 570 с.
- [27] Конторович, М. И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. / М. И. Конторович. – Москва : Гостехиздат, 1955. – 228 с.
- [28] Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – Москва : «Высшая школа», 1970. – 712 с.
- [29] Краснов М. Л. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Задачи и примеры с подробными решениями / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. Н. Макаренко. – Москва, Editorial URSS, 2003. – 176 с.
- [30] Кузнецов, Д. С. Специальные функции / Д. С. Кузнецов. Москва : Высшая школа, 1962. – 248 с.
- [31] Кутузов, А. С. Гильбертовы пространства. Учебное пособие / А. С. Кутузов. Троицк : Троицкий филиал Челябинского государственного университета, 2012. – 86 с.

[32] Кутузов, А. С. Метрические пространства. Учебное пособие / А. С. Кутузов. Троицк : Троицкий филиал Челябинского государственного университета, 2012. – 104 с.

[33] Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973. – 736 с.

[34] Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их приложения / Н. Н. Лебедев. – Москва, Ленинград : Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 360 с.

[35] Лунц, Г. Л. Функции комплексного переменного (с элементами операционного исчисления) / Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. – Москва : Лань, 2002. – 292 с.

[36] Никифоров, А. Ф. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной / А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров. – Москва : Наука, 1985. – 216 с.

[37] Никифоров, А. Ф. Специальные функции математической физики / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. Москва : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 344 с.

[38] Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 336 с.

[39] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.). – Москва : «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 830 с.

[40] Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения : Учеб. : Для вузов / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – 4-е изд. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 256 с.

[41] Треногин, В. А. Задачи и упражнения по функциональному анализу : Учебное пособие / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 240 с.

[42] Фарлоу, С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С. Фарлоу. Москва : Мир, 1985. – 384 с.

[43] Чигирёва, О. Ю. Ряды Фурье. Преобразование Фурье : метод, указания / О. Ю. Чигирёва; под ред. А. Н. Канатникова. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 51 с.

[44] Хелемский, А. Я. Лекции по функциональному анализу / А. Я. Хелемский. – Москва : МЦНМО, 2004. – 552 с.

Электронные ресурсы

1. Электронная библиотека БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://elib.bsu.by>. – Дата доступа: 20.05.2025.
2. Зеленков, В. И. Функциональный анализ и теория функций: учебная программа учреждения высшего образования... № УД-1361/н / В. И. Зеленков, О. С. Кабанова. – Минск, БГУ, 2024. – 24 с [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/318152>. – Дата доступа: 20.05.2025.
3. Страница дисциплины «Функциональный анализ и теория функций» на образовательном портале физического факультета БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://eduphys.bsu.by/course/view.php?id=6>. – Дата доступа: 20.05.2025.

Именной указатель

- Ба́нах Стéфан (Stefan Banach, 1892–1945) — польский математик, [209](#), [243](#)
- Бернулли Даниил (Daniel Bernoulli, 1700–1782) — швейцарский физик, механик и математик, [100](#)
- Бессель Фридрих Вильгельм (Friedrich Wilhelm Bessel, 1784–1846) — немецкий математик и астроном, [34](#), [65](#)
- Буняковский Виктор Яковлевич (1804–1889) — российский математик, [15](#), [204](#)
- Вебер Генрих Мартин (Heinrich Martin Weber, 1842–1913) — немецкий математик, [347](#)
- Венн Джон (John Venn, 1834–1923) — английский логик и философ, [198](#)
- Вольтерра Вито (Vito Volterra, 1860–1940) — итальянский математик и физик, [191](#), [213](#), [266](#)
- Гегенбауэр Леопольд Бернхард (Leopold Bernhard Gegenbauer, 1849–1903) — австрийский математик, [157](#)
- Гильберт Давид (David Hilbert, 1862–1943) — немецкий математик, [249](#), [282](#)
- Грам Йёрген Педерсен (Jorgen Pedersen Gram, 1850–1916) — датский математик, [264](#)
- Даламбер Жан Лерон (д’Аламбер, Jean Le Rond d’Alembert, 1717–1783) — французский математик, механик и философ, [331](#)
- Дини Улисс (Ulisse Dini, 1845–1918) — итальянский математик, [286](#)
- Дирихле Петер Густав Лежён (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859) — немецкий математик, [26](#), [269](#), [434](#)
- Дюамель Жан-Мари (Jean-Marie Duhamel, 1797–1872) — французский математик, [178](#), [189](#)

- Жордан Мари Энмон Камиль (Marie Ennemond Camille Jordan, 1838–1922) — французский математик, [193](#)
- Кантор Георг (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845–1918) — немецкий математик, создатель теории множеств, [438](#)
- Котельников Владимир Александрович (1908–2005) — советский и российский учёный в области радиофизики, радиотехники,
- Коши Огюстен Луи (Augustin Louis Cauchy, 1789–1857) — французский математик и механик, [15](#), [185](#), 187, 204, 208, 367
- Лагерр Эдмон Никола (Edmond Nicolas Laguerre, 1834–1886) — французский математик, [152](#), [162](#), 376
- Лагранж Жозеф Луи (Joseph Louis Lagrange, 1736–1813) — французский математик, астроном и механик, [43](#)
- Лаплас Пьер-Симон (Pierre-Simon de Laplace, 1749–1827) — французский математик, физик и астроном, [147](#), [166](#)
- Лебег Анри Леон (Henri Leon Lebesgue, 1875–1941) — французский математик, [228](#)
- Лежандр Адриен Мари (Adrien-Marie Legendre, 1752–1833) — французский математик, [132](#)
- Липшиц Рудольф (Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, 1832–1903) — немецкий математик, [210](#)
- Макдональд Гектор Манро (Hector Munro Macdonald, 1865–1935) — шотландский математик, [78](#)
- Меллин Ялмар (Robert Hjalmar Mellin, 1854–1933) — финский математик, [169](#)
- Минковский Герман (Hermann Minkowski, 1864–1909) — немецкий математик, [205](#)
- Муавр Абрахам де (Abraham de Moivre, 1667–1754) — английский математик французского происхождения, ученик и помощник Исаака Ньютона, [374](#)
- Найквист Гарри (Harry Nyquist, 1889–1976) — шведский и американский физик и инженер, [58](#)

- Нейман Карл Готфрид (Carl Gottfried Neumann, 1832–1925) — немецкий математик, [70](#)
- Парсеваль Марк-Антуан (Marc-Antoine Parseval des Chênes, 1755–1836) — французский математик, [35](#)
- Пикар Эмиль (Picard Émile, 1856–1941) — французский математик, [216](#)
- Пуазейль Жан-Леонар-Мари (Jean-Leonard-Marie Poiseuille, 1797–1869) — французский врач и физик, [110](#)
- Пуассон Симеон Дени (Siméon Denis Poisson, 1781–1840) — французский математик, механик и физик, [348](#)
- Риман Бернхард (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866) — немецкий математик, механик и физик, [26](#), [169](#), [435](#)
- Родриг Олинд (Benjamin Olinde Rodrigues, 1795–1851) — французский математик, механик и экономист, [123](#)
- Стирлинг Джеймс (James Stirling, 1692–1770) — шотландский математик, [98](#), [113](#)
- Таубер Альфред (Alfred Tauber, 1866–1942) — австрийский математик, [176](#)
- Фраунгофер Йозеф (Joseph Fraunhofer, 1787–1826) — немецкий физик, оптик, изобретатель, [104](#)
- Фредгольм Эрик Ивар (Erik Ivar Fredholm, 1866–1927) — шведский математик, [212](#), [266](#)
- Фурье Жан-Батист Жозеф (Jean-Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830) — французский математик и физик, [18](#)
- Хан Ханс (Hans Hahn, 1879–1934) — австрийский математик, [243](#)
- Ханкель (Ганкель) Герман (Hermann Hankel, 1839–1873) — немецкий математик, [75](#)
- Хевисайд Оливер (Oliver Heaviside, 1850–1925) — английский математик, физик и инженер, [166](#)
- Чебышёв Пафнутий Львович (1821–1894) — российский математик и механик, [151](#)
- Шеннон Клод (Claude Elwood Shannon, 1916–2001) — американский инженер, криптоаналитик и математик, [57](#)

Шмидт Эрхард (Erhard Schmidt, 1876–1959) — немецкий математик, [264](#), [282](#)

Шрёдингер Эрвин (Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887–1961) — австрийский физик-теоретик, [152](#), [154](#)

Эйлер Леонард (Leonhard Euler, 1707–1783) — швейцарский и российский математик и механик, [18](#), [100](#), 112

Эрмит Шарль (Charles Hermite, 1822–1901) — французский математик, [143](#), [154](#), 262

Якоби Карл Густав Якоб (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851) — немецкий математик и механик, [156](#)

4.4. Предметный указатель

Указатель содержит ссылки на все основные формулировки и определения, в том числе и не отраженные в оглавлении. Если термин встречается в нескольких местах пособия, то *курсивом* выделяется номер страницы, где дается основное определение.

- Аддитивность счетная
 - (σ -аддитивность), 226
- Альтернатива Фредгольма
 - для симметричного ядра, 290
 - общий случай, 293
- Базис, 238
 - ортogonalный, 248
- Диаграммы Эйлера, 224
- Зависимость и независимость
 - линейная, 238, 449
- Задача
 - Дирихле для ОДУ, 269
 - Коши для ОДУ, 188, 267
 - краевая для ОДУ, 269
- Замкнутость
 - ортонормированной системы, 35
 - системы ортogonalных
 - полиномов, 129
 - тригонометрической системы, 37
- Замыкание, 206
- Интеграл
 - Бесселя, 90
 - Дирихле, 26
 - Дюамеля, 178, 189, 397
 - Фурье, 41, 62
 - Лапласа, 159, 361
 - Лебега
 - на множестве бесконечной меры, 233
 - от простых функций, 229
 - сравнение с интегралом Римана, 234
 - свойства, 231
 - Неймана, 90, 344
 - Вебера, 90, 347
- Интеграл Лебега
 - на множестве конечной меры, 230
- Кольцо, 224
- Критерий
 - Коши, 208, 286
 - Лебега, 235, 435
- Лемма
 - Римана, 26
 - Жордана, 171, 187, 193
- Мера, 224
 - σ -конечная, 234
 - Лебегова, 227
 - внешняя, 227
- Метод
 - Фурье, 149
 - Грама – Шмидта, 264, 275, 459
- Метрика, 202
- Множество, 197
 - эквивалентное, 221
 - элементарное, 225
 - измеримое, 227
 - канторово, 438
 - несчетное, 220
 - ограниченное, 206
 - операции над множествами, 198

- открытое, 222, 246
- счетное, 219
- выпуклое, 241, 449
- замкнутое, 222
- Мощность множества, 223
 - алеф, 223
 - алеф нуль, 223
 - мощность континуума, 223
- Неравенство
 - Бесселя, 34
 - Коши, 185
 - Коши – Буняковского, 15, 204, 247
 - Минковского, 204
- Норма, 243, 450
 - функционала, 253
 - оператора, 257
- Оператор
 - Фредгольма, 271
 - Фурье, 46
 - Лапласа, 168, 263
 - дифференцирования, 256
 - единичный, 255
 - эрмитов (самосопряженный), 262
 - линейный, 254
 - непрерывный, 255
 - нулевой, 255
 - обратный, 260
 - ограниченный, 257
 - перестановочный
 - (коммутативный), 259
 - сопряженный, 262
- Ортогональность, 16
- Осциллятор гармонический, 154
- Отображение, 199
 - гомеоморфное, 205
 - непрерывное, 205
 - свойства, 200
 - сжимающее, 209
- Отрезок, 240
- Подпространство, 239, 448
 - собственное, 239
- Показатель роста, 167
- Полиномы
 - гипергеометрического типа, 122
 - тригонометрические, 29
- Полиномы ортогональные
 - Чебышёва 1-го рода, 151, 160, 374
 - Чебышёва 2-го рода, 161, 372
 - Эрмита, 143, 154, 163, 190, 363
 - Гегенбауэра
 - (ультрасферические), 157
 - Лагерра, 152, 162, 191, 373, 388
 - Лежандра, 132, 147, 148, 158, 357
 - Якоби, 156
 - дискретной переменной, 146
 - классические, 125
 - нули, 128
 - ортонормированные, 127
 - семейства, 130
- Полнота
 - ортонормированной системы, 36
 - тригонометрической системы, 40
- Последовательность
 - фундаментальная, 208
 - исчерпывающая, 233
 - сходящаяся, 207, 454
- Постоянная
 - Эйлера–Маскерони, 116, 196
- Преобразование
 - Фурье
 - дискретное, 55
 - обратное, 46
 - по косинусам и по синусам, 46
 - прямое, 46
 - свойства, 48, 63
 - Лапласа, 166, 168
 - обратное, 169

- свойства, 172
- Принцип
 - локализации, 27
 - сжимающих отображений, 209
- Проекция
 - элемента на подпространство, 251, 461
 - стереографическая, 221
- Произведение
 - операторов, 258
 - скалярное, 14, 246
- Пространство
 - $C[a, b]$, 203, 237, 245
 - $C_2[a, b]$, 203, 249
 - $L_p[a, b]$, 245
 - $\mathbb{R}^1$, 202, 237, 244
 - $\mathbb{R}^\infty$, 238
 - $\mathbb{R}^n$, 202, 237, 244, 248
 - $\mathbb{R}_1^n$, 202
 - $\mathbb{R}_\infty^n$, 202
 - $\mathbb{R}_p^n$, 203
 - ℓ_2 , 203, 238, 248
 - ℓ_n , 204
 - c , 238
 - c_0 , 238
 - m , 203, 238, 245
 - банахово, 244
 - евклидово, 14, 247
 - гильбертово, 249
 - изолированных точек, 202
 - линейное (векторное), 237
 - метрическое, 201
 - нормированное, 15, 244
 - полное, 208
 - размерность, 238
 - топологическое, 246
- Равенство
 - Парсеваля, 35, 62, 312
 - параллелограмма, 250
- Ранг собственного значения, 275
- Резольвента
 - непрерывного ядра, 292
 - симметричного ядра, 290
- Ряд
 - Фурье – Бесселя, 88, 102, 104
 - Фурье – Лежандра, 137
 - по собственным функциям, 282
- Ряд Фурье, 18
 - для непериодической функции, 20
 - комплексная форма, 31
 - по косинусам или по синусам, 22
 - по собственным функциям, 282
 - сходимость, 28
- Свертка
 - для преобразования Фурье, 52
 - для преобразования Лапласа, 177
- Сетка, 55
- Символ
 - Похгаммера, 115
- Система
 - ортогональная, 16, 247
 - тригонометрическая, 17
 - замкнутость и полнота, 34
- Соотношение
 - ортогональности
 - для цилиндрических функций, 83
 - для ортогональных полиномов, 125
 - рекуррентное
 - для цилиндрических функций, 81
 - для ортогональных полиномов, 126
- Сумма
 - операторов, 258
- Тело выпуклое, 241
- Теорема
 - Банаха, 209
 - Дини, 286

- Гильберта – Шмидта, 282
- Хана – Банаха, 243
- Коши интегральная, 367
- Коши о вычетах, 187
- Лагранжа, 43
- Пифагора, 250
- Пикара, 216
- Вейерштрасса, 29
 - о субаддитивности меры, 226
 - о вложенных шарах, 209
 - разложения первая, 185
 - разложения вторая, 186
- Тождество
 - Бесселя, 34, 62
- Топология, 246
- Точка
 - граничная, 197
 - изолированная, 197, 207
 - неподвижная, 209
 - окрестность точки, 197
 - предельная, 207
 - прикосновения, 206
 - внутренняя, 197
- Уравнение
 - Бесселя, 65, 100, 111
 - модифицированное, 76
 - Гельмгольца, 101, 103, 111
 - Лапласа, 147, 149, 150
 - Шрёдингера, 152, 154
 - гипергеометрического типа, 121
- Уравнение интегральное, 266
 - Фредгольма, 266
 - второго рода, 212, 269
 - Вольтерра, 213, 266
 - типа свертки, 191
 - второго рода, 267
 - собственные функции, 271
 - собственные значения, 271
 - союзное, 293
 - спектр, 272
 - ядро, 266
- Условие Липшица, 210, 448
- Формула
 - Даламбера, 331
 - Дюамеля, 178, 189
 - Эйлера – Фурье, 18
 - Коши интегральная, 185
 - Котельникова – Шеннона, 57
 - Муавра, 374
 - Пуассона, 90, 348
 - Рэля, 95
 - Римана – Меллина, 169
 - Родрига, 123, 156
 - Стирлинга, 98, 113
- Функционал, 239
 - аддитивный, 239
 - линейный, 239
 - непрерывный, 252
 - однородный, 239
 - однородно-выпуклый, 242
 - продолжение, 243
- Функция
 - Бесселя
 - дифференцирование по порядку, 95
 - модифицированная 1-го рода (Инфельда), 76, 108
 - модифицированная 2-го рода (Макдональда), 78
 - нули, 85
 - преобразование Лапласа, 398
 - при больших значениях аргумента, 97
 - при больших значениях порядка, 98
 - сферическая, 91, 104
 - 1-го рода, 68
 - 2-го рода (Неймана), 70, 103
 - 3-го рода (Ханкеля), 75, 111
 - Дирака
 - дельта-функция, 180
 - гребневая, 56

Дирихле, [235](#), [434](#)
 Грина, [269](#)
 Хевисайда, [166](#)
 Лежандра присоединенная, [138](#),
 [150](#), [164](#)
 Римана, [435](#)
 бета-функция, [116](#)
 дигамма-функция, [116](#)
 гамма-функция Эйлера, [112](#)
 гипергеометрического типа, [121](#)
 интегрируемая (суммируемая),
 [229](#)
 измеримая, [228](#)
 изображение, [168](#)
 кардинальный синус, [57](#), [322](#)
 кусочно-непрерывная, [14](#)
 ограниченного роста, [166](#)
 оригинал, [166](#)
 представимая через ядро, [282](#)
 производящая
 для функции Бесселя, [82](#), [118](#)
 для полиномов Эрмита, [143](#),
 [363](#)
 для полиномов Лагерра, [373](#)
 для полиномов Лежандра, [132](#)
 простая, [228](#)
 с ограниченным изменением, [89](#)
 сферическая, [150](#)
 весовая, [122](#), [130](#)
 rect, [321](#)
 triang, [322](#)
 Частота Найквиста, [58](#)
 Число
 алгебраическое, [427](#)
 трансцендентное, [427](#)
 Шар
 открытый, [206](#)
 замкнутый, [206](#)
 Ядро
 интегрального уравнения, [266](#),
 [271](#)

множества, [241](#)
 повторное (итерированное), [282](#)
 симметричное, [271](#)
 вырожденное, [277](#)