

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ  
БЕЛАРУСЬ**

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ**

**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

Кафедра интеллектуальных методов моделирования

**ГОРЕЛЬЧИК**

Диана Руслановна

Аннотация к дипломной работе:

**ОПЕРАТОРЫ СВЕРТОЧНОГО ТИПА  
НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ И  
ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук,

профессор В. Г. Кротов

Минск, 2025

# АННОТАЦИЯ

Дипломная работа содержит 27 страниц, 6 литературных источников, 1 приложение.

Ключевые слова: ОПЕРАТОРЫ СВЕРТОЧНОГО ТИПА,  $\tau$ -АДДИТИВНАЯ МЕРА, СЕМЕЙСТВО БЕЗИКОВИЧА, ОПЕРАТОРЫ УСРЕДНЕНИЯ, СТРОГОЕ ЧИСЛО ХАДВИГЕРА, УДВАИВАЮЩИЕСЯ ПРОСТРАНСТВА.

Объект исследования — операторы сверточного типа.

В дипломной работе рассматриваются операторы сверточного типа

$$g * \mathbf{1}_{B(x,r)} := \int_{B(x,r)} g(y) d\mu(y)$$

и операторы сверточного типа с фильтром

$$g * \mu_{x,r} := \int_{B(x,r)} g(y) d\mu_{x,r}(y),$$

заданные на метрических пространствах с мерой.

Доказано, что если метрическое пространство  $(X, d)$  обладает свойством пересечения по Безиковичу с равным радиусом с постоянной  $E$ , то оператор сверточного типа ограничен в пространствах  $L^p(\mu)$  при  $1 \leq p < \infty$  и в  $L^\infty(\mu)$ . При этом получены оценки:

$$\|g * \mathbf{1}_{B(\cdot, R)}\|_{L^p(\mu)} \leq \sup_{x \in X} \mu(B(x, R)) \cdot E^{1/p} \|g\|_{L^p(\mu)},$$

$$\|g * \mathbf{1}_{B(\cdot, R)}\|_{L^\infty(\mu)} \leq \sup_{x \in X} \mu(B(x, R)) \cdot \|g\|_{L^\infty(\mu)}.$$

Доказано также, что если метрическое пространство  $(X, d)$  обладает свойством пересечения по Безиковичу с равным радиусом с постоянной  $E$  и фильтр  $\{\mu_{x,r}\}_{x \in X}$  адаптирован к мере  $\mu$ , то оператор сверточного типа с фильтром ограничен в пространствах  $L^p(\mu)$  при  $1 \leq p < \infty$  и в  $L^\infty(\mu)$ . При этом получены оценки:

$$\|g * \mu_{\cdot, r}\|_{L^p(\mu)} \leq M \cdot \sup_{x \in X} \mu(B(x, r)) \cdot E^{1/p} \|g\|_{L^p(\mu)},$$

$$\|g * \mu_{\cdot, r}\|_{L^\infty(\mu)} \leq M \cdot \sup_{x \in X} \mu(B(x, r)) \cdot \|g\|_{L^\infty(\mu)}.$$

# АНАТАЦЫЯ

Дыпломная праца змяшчае 27 старонак, 6 літаратурных крыніц, 1 дадатак.

Ключавыя словы: АПЕРАТАРЫ ЗВАРОТНАГА ТЫПУ,  $\tau$ -АДДЫТЫЎНАЯ МЕРА, СЯМ'Я БЯЗІКОВІЧА, АПЕРАТАРЫ СЯ-РЭДНЯВАННЯ, СТРОГІ ЛІК ХАДВІГЕРА, ПАДВАЕНЫЯ ПРАСТОРЫ.

Аб'ект даследавання — аператары зваротнага тыпу.

У дыпломнай працы разглядаюцца аператары зваротнага тыпу

$$g * \mathbf{1}_{B(x,r)} := \int_{B(x,r)} g(y) d\mu(y)$$

і аператары зваротнага тыпу з фільтрам

$$g * \mu_{x,r} := \int_{B(x,r)} g(y) d\mu_{x,r}(y),$$

заданыя на метрычных прасторах з мерай.

Дакладзена, што калі метрычная прастора  $(X, d)$  валодае ўласцівасцю перасячэння па Бязіковічу з роўным радыусам з канстантай  $E$ , то аператар зваротнага тыпу абмежаваны ў прасторах  $L^p(\mu)$  пры  $1 \leq p < \infty$  і ў  $L^\infty(\mu)$ . Пры гэтым атрыманыя ацэнкі:

$$\|g * \mathbf{1}_{B(\cdot, R)}\|_{L^p(\mu)} \leq \sup_{x \in X} \mu(B(x, R)) \cdot E^{1/p} \|g\|_{L^p(\mu)},$$

$$\|g * \mathbf{1}_{B(\cdot, R)}\|_{L^\infty(\mu)} \leq \sup_{x \in X} \mu(B(x, R)) \cdot \|g\|_{L^\infty(\mu)}.$$

Дакладзена таксама, што калі метрычная прастора  $(X, d)$  валодае ўласцівасцю перасячэння па Бязіковічу з роўным радыусам з канстантай  $E$ , і фільтр  $\{\mu_{x,r}\}_{x \in X}$  адаптаваны да меры  $\mu$ , то аператар зваротнага тыпу з фільтрам абмежаваны ў прасторах  $L^p(\mu)$  пры  $1 \leq p < \infty$  і ў  $L^\infty(\mu)$ . Пры гэтым атрыманыя ацэнкі:

$$\|g * \mu_{\cdot, r}\|_{L^p(\mu)} \leq M \cdot \sup_{x \in X} \mu(B(x, r)) \cdot E^{1/p} \|g\|_{L^p(\mu)},$$

$$\|g * \mu_{\cdot, r}\|_{L^\infty(\mu)} \leq M \cdot \sup_{x \in X} \mu(B(x, r)) \cdot \|g\|_{L^\infty(\mu)}.$$

# ANNOTATION

The thesis contains 27 pages, 6 bibliographic references, and 1 appendix.

Keywords: CONVOLUTION-TYPE OPERATORS,  $\tau$ -ADDITIVE MEASURE, BESICOVITCH FAMILY, AVERAGING OPERATORS, STRICT HADWIGER NUMBER, DOUBLING SPACES.

The object of study is convolution-type operators.

The thesis considers convolution-type operators

$$g * \mathbf{1}_{B(x,r)} := \int_{B(x,r)} g(y) d\mu(y)$$

and convolution-type operators with a filter

$$g * \mu_{x,r} := \int_{B(x,r)} g(y) d\mu_{x,r}(y),$$

defined on metric measure spaces.

It is shown that if a metric space  $(X, d)$  has the equal radius Besicovitch intersection property with constant  $E$ , then the convolution-type operator is bounded in  $L^p(\mu)$  for  $1 \leq p < \infty$  and in  $L^\infty(\mu)$ . The following estimates are obtained:

$$\|g * \mathbf{1}_{B(\cdot, R)}\|_{L^p(\mu)} \leq \sup_{x \in X} \mu(B(x, R)) \cdot E^{1/p} \|g\|_{L^p(\mu)},$$

$$\|g * \mathbf{1}_{B(\cdot, R)}\|_{L^\infty(\mu)} \leq \sup_{x \in X} \mu(B(x, R)) \cdot \|g\|_{L^\infty(\mu)}.$$

It is also shown that if a metric space  $(X, d)$  has the equal radius Besicovitch intersection property with constant  $E$  and the filter  $\{\mu_{x,r}\}_{x \in X}$  is adapted to the measure  $\mu$ , then the convolution-type operator with a filter is bounded in  $L^p(\mu)$  for  $1 \leq p < \infty$  and in  $L^\infty(\mu)$ . The following estimates are obtained:

$$\|g * \mu_{\cdot, r}\|_{L^p(\mu)} \leq M \cdot \sup_{x \in X} \mu(B(x, r)) \cdot E^{1/p} \|g\|_{L^p(\mu)},$$

$$\|g * \mu_{\cdot, r}\|_{L^\infty(\mu)} \leq M \cdot \sup_{x \in X} \mu(B(x, r)) \cdot \|g\|_{L^\infty(\mu)}.$$