

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
Кафедра интеллектуальных методов моделирования

ЛЕВЧУК Дарья Петровна

Аннотация к дипломной работе:

**ПАРАДОКС БАНАХА–ТАРСКОГО  
(УДВОЕНИЕ ШАРА ПОСРЕДСТВОМ ПЯТИ ЧАСТЕЙ)**

Научный руководитель:  
профессор, доктор физ.-мат. наук  
В. И. Бахтин

Минск, 2025

## АННОТАЦИЯ

Дипломная работа содержит 26 страниц, 7 использованных источников, 3 иллюстрации.

*Ключевые слова:* парадоксальное разбиение, свободная группа, парадокс Банаха–Тарского, конгруэнтность, равноразложимость, кусочная изометрия.

*Объект исследования:* свободная группа  $F_2$ , кусочные изометрии подмножеств евклидовых пространств.

*Предмет исследования:* существование парадоксальных разбиений подмножеств евклидовых пространств, в частности единичного шара.

*Цель исследования:* изучить парадокс Банаха–Тарского и его доказательства в сильной и слабой форме.

*Методы исследования:* общая теория множеств, представление группы  $F_2$ , действие групп на множествах.

*Полученные результаты и их новизна:* изучен парадокс Банаха–Тарского, вычислена мощность разбиения горошины, реализующего кусочную изометрию горошины и Солнца.

*Достоверность материалов и результатов дипломной работы:* все результаты обоснованы строгими математическими доказательствами.

*Область возможного практического применения:* работа носит теоретический характер.

## АНАТАЦЫЯ

Дыпломная работа змяшчае 26 старонак, 7 выкарыстаных крыніц, 3 ілюстрацыі.

*Ключавыя словы:* парадаксальнае разбіццё, свабодная група, парадокс Банаха–Тарскага, кангруэнтнасць, роўнараскладальнасць, кавалкавая ізаметрыя.

*Аб'ект даследавання:* свабодная група  $F_2$ , кавалкавыя ізаметрыі падмностваў эўклідавых прастор.

*Прадмет даследавання:* існаванне парадаксальных разбіццяў падмностваў эўклідавых прастор, у прыватнасці адзінкавага шара.

*Мэта даследавання:* вывучыць парадокс Банаха–Тарскага і яго доказы ў моцнай і слабой форме.

*Метады даследавання:* агульная тэорыя мностваў, прадстаўленне групы  $F_2$ , дзеянне груп на мноствах.

*Атрыманыя вынікі і іх навізна:* вывучаны парадокс Банаха–Тарскага, вылічана магутнасць разбіцця гарошыны, якое рэалізуе кавалкавую ізаметрыю гарошыны і Сонца.

*Дакладнасць матэрыялаў і вынікаў дыпломнай работы:* усе вынікі абгрунтаваныя строгімі матэматычнымі доказамі.

*Вобласць магчымага практычнага прымянення:* работа носіць тэарэтычны характар.

## ANNOTATION

The diploma thesis contains 26 pages, 7 reference sources, 3 illustrations.

*Keywords:* paradoxical decomposition, free group, Banach–Tarski paradox, congruence, equidecomposability, piecewise isometry.

*The object of the research:* free group  $F_2$ , piecewise isometries of subsets of Euclidean spaces.

*The subject of the research:* the existence of paradoxical decompositions of subsets of Euclidean spaces, in particular the unit ball.

*The purpose of the research:* to study the Banach–Tarski paradox and its proofs in the weak and strong forms.

*Methods of research:* general set theory, representation of the group  $F_2$ , group actions on sets.

*The results of the work and their novelty:* the Banach–Tarski paradox has been studied; the cardinality of a decomposition of a pea realizing a piecewise isometry between the pea and the Sun has been computed.

*Authenticity of the materials and results of the diploma work:* all results are supported by rigorous mathematical proofs.

*Recommendations on the usage:* the work is theoretical in nature.